7. ANALYTICKÁ GEOMETRIE V ROVINĚ 197

7. ANALYTICKÁ GEOMETRIE V ROVINĚ

Průvodce studiem

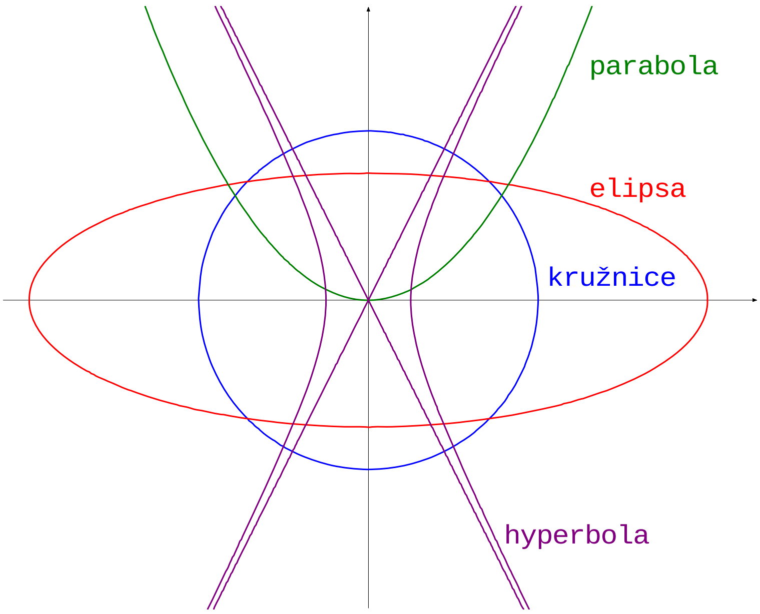
Kapitola *Analytická geometrie v rovině* je rozdělena do šesti menších celků a ty jsou ještě dále rozděleny na menší oddíly. V každém oddíle je nejdříve vysvětlena teorie, jsou zavedeny nové pojmy a vzorce. Pak následují *Řešené úlohy* a po nich *Úlohy k samostatnému řešení*. K těmto úlohám jsou na konci kapitoly uvedeny výsledky a pro ty, kteří by si s úlohami nevěděli rady, také nápověda. Na samý závěr si otestujete, jak jste zvládli tuto kapitolu.

Ve výkladu soustava souřadnic znamená kartézskou soustavu souřadnic, tzn. pravoúhlou soustavu souřadnic se stejně velkými jednotkami na osách *x, y*.

Obrázky v textu byly vytvořeny pomocí programu Matematika. Hodně zdaru při studiu.

Cíle

Seznámíte se s pojmy orientovaná úsečka, vektor, přímka, kružnice, elipsa, hyperbola a parabola (viz obrázek). Poznáte jejich zápisy a rovnice. Naučíte se řešit některé planimetrické úlohy početně.



Předpokládané znalosti

Předpokládá se, že chápete pojmy bod, přímka a rovina. Měli byste umět řešit jednoduché planimetrické úlohy, lineární a kvadratické rovnice a soustavy rovnic dosazovací nebo sčítací metodou.

7.1. Vektory

Výklad

Orientovanou úsečkou rozumíme úsečku **AB**, kde A je její **počáteční bod** a B je **koncový bod**. Krajní body orientované úsečky tvoří uspořádanou dvojici $[A,B]$.

Volným vektorem $\vec{v}$ nazveme množinu všech rovnoběžných souhlasně orientovaných úseček téže velikosti.

Každou orientovanou úsečku, která znázorňuje vektor $\vec{v}$, budeme nazývat **umístěním vektoru** $\vec{v}$.

Jsou-li body určeny svými souřadnicemi $A=[a_1,a_2]$, $B=[b_1,b_2]$, pak souřadnice vektoru $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=B-A$ jsou $\vec{v}=(v_1,v_2)$, kde $v_1=b_1-a_1$, $v_2=b_2-a_2$. Pro $A=B$ se vektor $\vec{v}=\vec{o}$ nazývá **nulový**.

Souřadnice bodů zapisujeme pro rozlišení do hranatých závorek, souřadnice vektorů do okrouhlých.

7.1.1. Operace s vektory

Pro vektory $\vec{u}=(u_1,u_2)$, $\vec{v}=(v_1,v_2)$ platí:

Vzdálenost dvou bodů:	$\lvert AB\rvert=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$
Velikost vektoru:	$\lvert\vec{u}\rvert=\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}}$
Součet vektorů:	$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2)$
Rozdíl vektorů:	$\vec{u}-\vec{v}=(u_1-v_1,u_2-v_2)$
***k*-násobek vektoru:**	$k\vec{u}=(ku_1,ku_2)$
Opačný vektor k $\vec{u}$:	$-\vec{u}=(-u_1,-u_2)$
Skalární součin dvou vektorů :	$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2$
Odchylka dvou vektorů:	$\cos\varphi=\dfrac{\vec{u}\vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert}$, vektory jsou nenulové $\vec{u}\neq\vec{o}$, $\vec{v}\neq\vec{o}$.

Nenulové vektory $\vec{u},\vec{v}$ jsou k sobě **kolmé**, právě když $\vec{u}\vec{v}=0$.

Vektor $\vec{u}$, pro který platí $\lvert\vec{u}\rvert=1$, se nazývá **jednotkový**.

Nenulové vektory $\vec{u},\vec{v}$ nazveme **kolineární**, právě když $\vec{v} = k\vec{u}, k \in \mathrm{R} - \{0\}$, tj. libovolná jejich umístění jsou navzájem rovnoběžná.

Řešené úlohy

Příklad 7.1.1. Jsou dány body $A[2, 5], B[-3, 7], C[3,-1]$. Určete souřadnice vektorů $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{CB}, \vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Vypočítejte obvod trojúhelníku ABC.

Řešení:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-3-2, 7-5) = (-5, 2),$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = B - C = (-3-3, 7-(-1)) = (-6, 8),$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{AC} = C - A = (3-2, -1-5) = (1, -6).$$

Obvod trojúhelníku je roven součtu délek jednotlivých stran: $o = |AB| + |AC| + |BC|$.

$$|AB| = \sqrt{(-3-2)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29},$$
$$|AC| = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37},$$
$$|BC| = \sqrt{(3-(-3))^2 + (-1-7)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10,$$

$$o = \sqrt{29} + \sqrt{37} + 10 \doteq 21{,}5.$$

Příklad 7.1.2. Vypočítejte skalární součin vektorů $\vec{u},\vec{v}$, jestliže $|\vec{u}| = 5, |\vec{v}| = 2, \varphi = 30°$.

Řešení: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \Rightarrow \vec{u}\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi \Rightarrow \vec{u}\vec{v} = 5\cdot 2\cdot \cos 30° = 5\sqrt{3}$.

Příklad 7.1.3. Určete odchylku vektorů $\vec{u},\vec{v}$, je-li $\vec{u} = (-2,-1)$, $\vec{v} = (1,3)$.

Řešení: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$,

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2}} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$\vec{u}\vec{v} = -2\cdot 1 + (-1)\cdot 3 = -5,$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 135°.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočítejte skalární součin vektorů, znáte-li:
a) $|\vec{u}| = 2\sqrt{2}, |\vec{v}| = 6, \varphi = 45°$, b) $\vec{a} = (4,-2), \vec{b} = (0,-4)$.

2. Vypočítejte velikost úsečky AB: $A[3,1], B[-4,5]$.

3. Vypočítejte velikost vektorů a jejich odchylku: $\vec{a} = (4,-2), \vec{b} = (0,-4)$.

7.2. Přímka v rovině

Výklad

Přímka *p* je zadaná dvěma různými body *A, B*.

Směrovým vektorem přímky p rozumíme takový nenulový vektor $\vec{u}$, který lze umístit na přímku p.

Normálovým vektorem přímky p rozumíme nenulový vektor $\vec{n}$, který je kolmý ke každému směrovému vektoru přímky p.

Všechny vektory kolineární s vektorem $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ jsou směrovými vektory přímky *p*. Podobně všechny vektory kolineární s vektorem $\vec{n}$ $(\vec{n} \perp \vec{u})$ jsou normálovými vektory přímky *p*.

7.2.1. Obecná rovnice přímky v rovině

Uvažujme nyní přímku p, nechť $\vec{n} = (a,b)$ je její normálový vektor a nechť $A = [a_1, a_2]$ je libovolný pevný bod přímky p, potom libovolný bod $X = [x, y]$ leží na přímce p právě tehdy, když vektor $X - A = (x - a_1, y - a_2)$ je kolmý k vektoru $\vec{n} = (a,b)$, což je splněno právě tehdy, když platí:

$$\vec{n}(X - A) = 0 \Leftrightarrow a(x - a_1) + b(y - a_2) = 0 \Leftrightarrow ax + by + (-aa_1 - ba_2) = 0.$$

Dvojčlen $(-aa_1 - ba_2)$ je konstanta, označíme ji $(-aa_1 - ba_2) = c$, dostaneme rovnici

$$ax + by + c = 0.$$

Každá přímka v rovině se dá analyticky vyjádřit lineární rovnicí ve tvaru

$$ax + by + c = 0,$$

kde a, b, c jsou konstanty, přičemž alespoň jedno z čísel a, b je nenulové. Rovnice se nazývá **obecná rovnice přímky**, a, b, c jsou **koeficienty** této rovnice.

Jestliže má přímka p rovnici $ax + by + c = 0$, kde $(a,b) \neq \vec{o}$, je $\vec{n} = (a,b)$ jejím normálovým vektorem, pak vektor $\vec{u} = (-b,a)$ je jejím směrovým vektorem, protože musí platit $\vec{u} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (a,b)\,(-b,a) = 0$

Poznámka

*S rovnicí přímky jste se již setkali u lineárních funkcí (kapitola 2.), ale tam se používal tvar $y = kx + q$, kterému se říká **směrnicový tvar rovnice přímky.***

Řešené úlohy

Příklad 7.2.1. Určete obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $A[4,-2]$ a má normálový vektor $\vec{n} = (5,8)$

Řešení:

V rovnici $ax + by + c = 0$ je $a = 5, b = 8$, tedy $5x + 8y + c = 0$.

Přímka prochází bodem $A[4,-2]$, proto jeho souřadnice musí splňovat tuto rovnici a po dosazení platí:

$5 \cdot 4 + 8(-2) + c = 0 \quad \Rightarrow c = -4$.

Obecná rovnice je tedy $5x + 8y - 4 = 0$.

Příklad 7.2.2. Určete r, s tak, aby rovnice $(r-1)x+12y+s-3=0$ byla rovnicí přímky $3x+4y+7=0$.

Řešení:

Jsou-li $ax+by+c=0$ a $a'x+b'y+c'=0$ rovnice téže přímky, pak platí:

$a'=ka$, $b'=kb$, $c'=kc$, kde $k \in \mathbf{R}-\{0\}$.

Odtud je $r-1=3k;\quad 12=4k;\quad s-3=7k \qquad \Rightarrow \qquad k=3;\quad r=10;\quad s=24$.

Rovnice přímky je $9x+12y+21=0$.

Příklad 7.2.3. Určete obecnou rovnici přímky p, která prochází body $A[-4, 2]$ a $B[3, 5]$.

Řešení:

Body A, B leží na přímce p, proto jejich souřadnice musí splňovat rovnici $ax+by+c=0$.

$$\begin{aligned} -4a+2b+c&=0 \\ 3a+5b+c&=0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad a=\frac{3}{26}c,\ b=-\frac{7}{26}c,$$

vhodně zvolíme c, např. $c=26$, pak $a=3$, $b=-7$.

Tedy $p: 3x-7y+26=0$ je hledaná obecná rovnice.

Příklad 7.2.4. Napište obecnou rovnici přímky p procházející bodem $M[1,-3]$, která je rovnoběžná s přímkou $q: 2x-3y+7=0$.

Řešení:

Normálový vektor přímky q je zároveň normálovým vektorem přímky p. Obecná rovnice přímky p je tedy $2x-3y+c=0$. Konstantu c určíme dosazením souřadnic bodu M.

$2\cdot 1-3(-3)+c=0 \Rightarrow c=-11$

Obecná rovnice přímky je $p: 2x-3y-11=0$.

Příklad 7.2.5. Napište obecnou rovnici přímky p procházející bodem $M[4,-3]$, která je kolmá k přímce $q: 2x-3y+5=0$.

Řešení:

Normálovým vektorem přímky q je vektor $\vec{n}_q=(2,-3)$. Aby přímka p byla kolmá k přímce q, musí být její normálový vektor $\vec{n}_p$ kolmý k normálovému vektoru přímky q. Normálovým vektorem přímky p je např. $\vec{n}_p=(3,2)$, platí $\vec{n}_q\cdot\vec{n}_p=0$. Dále můžeme pokračovat třeba takto: $\vec{n}_p(X-M)=0$, po dosazení souřadnic získáme obecnou rovnici přímky p:

$$3(x-4)+2(y+3)=0 \quad \Rightarrow \quad 3x+2y-6=0.$$

Úlohy k samostatnému řešení

4. Napište obecnou rovnici přímky AB, $A[0,2], B[3,0]$.

5. Napište obecné rovnice těžnic trojúhelníku ABC, je-li $A[0,5], B[6,7], C[1,4]$.

(Souřadnice středu S úsečky AB jsou $s_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$, $s_2=\dfrac{a_2+b_2}{2}$).

6. Zjistěte, zda bod $C[-1,8]$ leží na přímce $x-y+2=0$.

7. Určete obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $A[1,-3]$ a má normálový vektor $\vec{n}=(-2,3)$.

8. Napište obecnou rovnici přímky p procházející bodem $K[6,-7]$, která je rovnoběžná s přímkou $q: 3x+5y-3=0$.

9. Napište obecnou rovnici přímky p procházející bodem $R[1,0]$, která je kolmá k přímce $q: x-4y+9=0$.

7.2.2. Parametrické vyjádření přímky v rovině

Výklad

Symbolem $p(A,\vec{u})$ budeme označovat přímku p, která je dána bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$. Libovolný bod X roviny leží na přímce p právě tehdy, když vektor $\overrightarrow{AX}$ je násobkem vektoru $\vec{u}$. Pro $X = A$ je $\overrightarrow{AX} = \vec{o} = 0 \cdot \vec{u}$ a pro $X \neq A$ je $X \in p$ právě když vektor $\overrightarrow{AX}$ je směrovým vektorem přímky p, a jako takový násobkem jejího směrového vektoru $\vec{u}$.

Platí tedy: $\overrightarrow{AX} = t\vec{u} \Rightarrow X - A = t\vec{u} \quad \Rightarrow X = A + t\vec{u}$, kde $t \in \mathbf{R}$. Rovnice se nazývá **vektorová (parametrická)** rovnice přímky $p(A,\vec{u})$, kde $t \in \mathbf{R}$ je **parametr**.

Bod $X[x,y]$ leží na přímce $p(A,\vec{u})$ dané bodem $A[a_1,a_2]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (u_1,u_2)$ právě tehdy, když platí

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2 \end{aligned}, \text{ kde } t \in \mathbf{R}.$$

Tyto rovnice se nazývají **parametrické vyjádření** přímky $p(A,\vec{u})$ v souřadnicích.

Je-li přímka p určena dvěma body A, B, její směrový vektor je $\vec{u} = B - A$.

Řešené úlohy

Příklad 7.2.6. Napište vektorovou rovnici a parametrické vyjádření přímky, která prochází body $A[-5,7], B[6,-1]$.

Řešení:

Platí $\vec{u} = B - A = (11,-8)$.

Vektorová rovnice je $X = [-5,7] + t(11,-8), \quad t \in \mathrm{R}$.

Parametrické vyjádření přímky:
$$\begin{aligned} x &= -5 + 11t \\ y &= \ \ 7 - \ 8t, \quad t \in \mathrm{R}. \end{aligned}$$

Příklad 7.2.7. Zjistěte, zda body $K[0,-4]$, $L[1,2]$ leží na přímce $p: X=[1,-2]+t(1,2)$.

Řešení: Vektorovou rovnici rozepíšeme pro jednotlivé souřadnice: $\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= -2+2t \end{aligned}$.

Za x, y dosadíme souřadnice bodu K.

Bod $K[0,-4]$ leží na přímce p právě tehdy, když existuje takové číslo $t \in \mathbf{R}$, že platí: $\begin{aligned} 0 &= 1+t \Rightarrow t=-1 \\ -4 &= -2+2t \Rightarrow t=-1 \end{aligned}$, to znamená, že $K \in p$.

Bod $L[1,2]$ musí splňovat stejnou podmínku: $\begin{aligned} 1 &= 1+t \Rightarrow t=0 \\ 2 &= -2+2t \Rightarrow t=2 \end{aligned}$, takže $L \notin p$.

Příklad 7.2.8. Určete obecnou rovnici přímky $p: \begin{cases} x = 2-3t \\ y = -1+2t \end{cases}$.

Řešení: Jsou dvě možnosti řešení.

Vyloučením parametru (první rovnici vynásobíme dvěma, druhou vynásobíme třemi a pak je sečteme) dostaneme obecnou rovnici $2x+3y-1=0$.

Nebo použijeme bod $A[2,-1]$ a směrový vektor $\vec{u}=(-3,2)$ přímky p. Normálový vektor přímky p je ke směrovému vektoru kolmý a má tedy souřadnice $\vec{n}=(2,3)$, platí $\vec{n}(X-A)=0$.

Po dosazení souřadnic dostaneme rovnici $2(x-2)+3(y+1)=0$, upravíme ji na obecnou rovnici přímky $p: 2x+3y-1=0$.

Příklad 7.2.9. Napište parametrické vyjádření přímky $a: 5x+y-4=0$.

Řešení: K parametrickému vyjádření je třeba mít libovolný bod A a směrový vektor $\vec{u}$.

Normálový a směrový vektor přímky jsou k sobě kolmé: $\vec{n}=(5,1) \Rightarrow \vec{u}=(1,-5)$.

Souřadnice bodu A vypočítáme z obecné rovnice tak, že jednu zvolíme, např. $x_A=0$, a druhou vypočítáme; vyjde $y=4$, $A[0,4]$. Zvolíme-li za x_A jiné číslo, dostaneme jiný bod přímky. Zvolit samozřejmě můžeme i y_A a vypočítat x_A.

Pro bod $A[0,4]$ je parametrické vyjádření přímky $a: \begin{cases} x = t \\ y = 4-5t \end{cases}$.

Příklad 7.2.10. Napište obecnou rovnici přímky p, která je kolmá k přímce $q:\begin{cases} x = \ \ 3-t \\ y = -2+2t \end{cases}$ a prochází bodem $M[-1, 1]$.✖

Řešení: Normálový vektor přímky p je kolineární se směrovým vektorem přímky q.

Může tedy být $\vec{n}_p = \vec{u}_q = (-1, 2)$.

Obecná rovnice bude mít tvar: $-x+2y+c=0$.

Dosadíme bod $M[-1, 1]$ a vypočítáme c: $1+2+c=0 \quad \Rightarrow \quad c=-3$.

Hledaná obecná rovnice přímky je $p: -x+2y-3=0$.

Úlohy k samostatnému řešení

10. Napište vektorovou rovnici a parametrické vyjádření přímky, která prochází body $A[5,1], B[3,4]$.

11. Rozhodněte, zda bod $U[-4,2]$ leží na přímce $p: X = [1,-13] + t(-1,3)$.

12. Určete obecnou rovnici přímky $p:\begin{cases} x = 3+4t \\ y = 2-5t \end{cases}$.

13. Napište parametrické vyjádření přímky p: $-2x+7y-14=0$.

14. Napište parametrické vyjádření přímky p, která je kolmá k přímce $q: 2x-y-7=0$ a prochází bodem $Q[-4,2]$.✖

7.2.3. Vzájemná poloha dvou přímek

Výklad

Dvě přímky v rovině se nazývají:

rovnoběžné, nemají-li společný bod,

různoběžné, mají-li právě jeden společný bod (průsečík),

totožné, mají-li všechny body společné.

Úlohy typu – rozhodněte o vzájemné poloze přímek – řešíme pomocí soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a podle počtu řešení rozhodneme o výsledku.

Jedná se o **polohové úlohy**, kde nic neměříme. (Vzdálenosti, odchylky ani kolmost nás přitom nezajímají.)

Řešené úlohy

Příklad 7.2.11. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) $p: 2x - y - 1 = 0,\quad q: 5x - 4y + 2 = 0$,

b) $p: x - y + 5 = 0,\quad q: 2x - 2y + 10 = 0$,

c) $p: 2x - 5y + 2 = 0,\quad q: 4x - 10y + 2 = 0$.

Řešení: Ve všech případech řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

a) $\begin{matrix} 2x - y - 1 = 0 \\ 5x - 4y + 2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow x = 2,\ y = 3$ soustava má jediné řešení,

přímky jsou různoběžné a protínají se v bodě $R[2, 3]$.

b) $\begin{matrix} x - y + 5 = 0 \\ 2x - 2y + 10 = 0 \end{matrix} \Rightarrow 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení,

přímky jsou tedy totožné. Zadané rovnice jsou ekvivalentní.

c) $\begin{matrix} 2x - 5y + 2 = 0 \\ 4x - 10y + 2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow 0x + 0y - 2 = 0 \Rightarrow$ soustava nemá řešení,

přímky jsou rovnoběžné. Normálové vektory daných přímek jsou kolineární.

Příklad 7.2.12. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) $p: 5x - 2y + 4 = 0; q: x = 4 - 3t, y = -3 - \frac{15}{14}t$,

b) $p: 6x - 3y + 5 = 0; q: x = 5 + t, y = -3 + 2t$,

c) $p: x + 2y - 7 = 0; q: x = 1 - 4t, y = 3 + 2t$.

Řešení: Dosadíme parametrické vyjádření přímky q do obecné rovnice přímky p:

a) $5(4 - 3t) - 2\left(-3 - \frac{15}{14}t\right) + 4 = 0$, z rovnice vypočítáme, že $t = \frac{7}{3}$.

Úloha má jediné řešení, jedná se o různoběžky. Dosazením $t = \frac{7}{3}$ do parametrického vyjádření přímky q dostaneme souřadnice průsečíku $A\left[-3, -\frac{11}{2}\right]$.

b) $6(5 + t) - 3(-3 + 2t) + 5 = 0 \Rightarrow 30 + 6t + 9 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow 0 \cdot t = 44$,

což nenastane pro žádné $t \in R$, proto úloha nemá řešení a jedná se o rovnoběžky.

c) $(1 - 4t) + 2(3 + 2t) - 7 = 0 \Rightarrow 1 - 4t + 6 + 4t - 7 = 0 \Rightarrow 0 \cdot t = 0 \Rightarrow \forall t \in R$,

proto má úloha nekonečně mnoho řešení a jedná se o totožné přímky.

Příklad 7.2.13. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) $p: x = 5 + 4t, y = -2 - 2t;\quad q: x = 1 - 2s, y = 7 + s$,

b) $p: x = 3 + t, y = 2 - t;\quad q: x = 3s, y = -2s$,

c) $p: x = 6 + 5t, y = 3 - 9t;\quad q: x = 11 - 10s, y = -6 + 18s$.

Řešení: Z výrazů, kterými je vyjádřena stejná souřadnice, utvoříme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

a) $\begin{array}{l} 5 + 4t = 1 - 2s \\ -2 - 2t = 7 + s \;\big|\cdot 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 5 + 4t = 1 - 2s \\ -4 - 4t = 14 + 2s \end{array} \Rightarrow 1 + 0 \cdot t = 15 + 0 \cdot s \Rightarrow$ soustava nemá řešení, jedná se tedy o rovnoběžky.

Jiná možnost řešení je porovnat směrové vektory a ověřit existenci společného bodu.

b) $\begin{array}{l} 3 + t = 3s \\ 2 - t = -2s \end{array} \Rightarrow 5 = s$ a $t = 12$, což je jediné řešení.

Přímky jsou různoběžné a protínají se v bodě $A[15, -10]$.

c) $\begin{array}{l} 6 + 5t = 11 - 10s \;\big|\cdot 9 \\ 3 - 9t = -6 + 18s \;\big|\cdot 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 54 + 45t = 99 - 90s \\ 15 - 45t = -30 + 90s \end{array} \Rightarrow 69 = 69 \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení, přímky jsou totožné.

Úlohy k samostatnému řešení

15. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) $p: 2x - 3y + 5 = 0,\quad q: 4x - 6y + 10 = 0$,

b) $p: 3x - y + 4 = 0,\quad q: 6x - 2y + 13 = 0$,

c) $p: 6x + y - 7 = 0,\quad q: 4x - 5y + 1 = 0$.

16. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) $a: x - y - 4 = 0,\quad b: x = 2 + t, y = -2 + t$,

b) $a: 4x - 3y + 7 = 0,\quad b: x = 3 + 3t, y = 3 + 4t$,

c) $a: 3x + 2y - 5 = 0,\quad b: x = 5 + 2t, y = -1 + t$.

17. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) $k: x = 4 - t, y = 3 + 2t;\quad l: x = 1 - 2s, y = 9 + 4s$,

b) $k: x = 6 - 7t, y = 8 + 3t;\quad l: x = 2 + 7s, y = 6 - 3s$,

c) $k: x = 2 + t, y = 3 + 3t;\quad l: x = 5 - 4s, y = 7 - 7s$.

7.2.4. Odchylka dvou přímek

Výklad

Pokud se v zadání příkladu objeví výpočet velikosti úhlu, odchylka, kolmost nebo měření vzdálenosti, jedná se o **metrickou** úlohu.

Odchylkou dvou přímek p, q v rovině rozumíme velikost ostrého nebo pravého úhlu, který svírají.

Máme dvě přímky p, q v rovině, $\vec{u}, \vec{v}$ resp. $\vec{n}_p, \vec{n}_q$ jsou po řadě jejich směrové resp. normálové vektory. Pro odchylku přímek p, q platí:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} \quad \text{resp.} \quad \cos\alpha = \frac{|\vec{n}_p\vec{n}_q|}{|\vec{n}_p||\vec{n}_q|}.$$

Řešené úlohy

Příklad 7.2.14. Přímka p prochází body $A[3, 1]$, $B[4, 0]$, přímka q prochází body $K[2, 5], L[2, 7]$. Vypočítejte odchylku těchto přímek.

Řešení:

Pro přímku p je směrový vektor $\vec{u} = B - A = (1, -1)$ a normálový vektor $\vec{n}_p = (1, 1)$.

Pro přímku q je její směrový vektor $\vec{v} = L - K = (0, 2)$ a její normálový vektor $\vec{n}_q = (2, 0)$. Odchylku lze vypočítat dvěma způsoby

a) jako odchylku směrových vektorů:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} \qquad \cos\alpha = \frac{|1\cdot 0 + (-1)\cdot 2|}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^0,$$

b) jako odchylku normálových vektorů:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_p\vec{n}_q|}{|\vec{n}_p||\vec{n}_q|} \qquad \cos\alpha = \frac{|1\cdot 2 + 1\cdot 0|}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^0.$$

Úlohy k samostatnému řešení

18. Určete odchylku přímek $p: 3x - 4y + 7 = 0$ a $q: x + 2y - 1 = 0$.

19. Přímka p prochází body $A[-2, 4], B[0, 1]$, přímka q prochází body $K[-2, 3], L[2, 2]$. Vypočítejte odchylku těchto přímek.

20. Určete odchylku přímek $m: x = 2 + t, y = 3 + 3t; n: x = 5 - 4s, y = 7 - 7s$.

7.2.5. Kolmost dvou přímek

Výklad

Přímky, jejichž odchylka je $90°$, jsou **kolmé**.

Máme dvě přímky p, q v rovině, $\vec{u}, \vec{v}$ jsou jejich směrové a $\vec{n}_p, \vec{n}_q$ jejich normálové vektory.

Potom následující výroky jsou ekvivalentní:

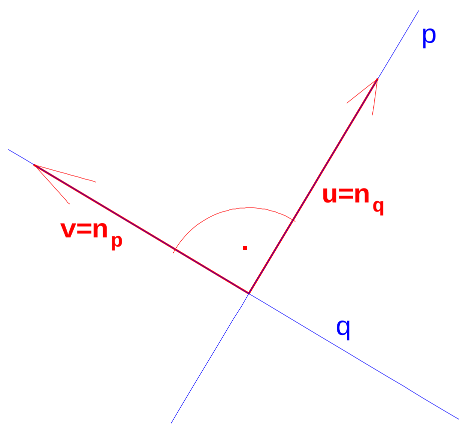
Přímky p, q jsou kolmé.

Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou kolmé, což platí právě, když $\vec{u}\vec{v} = 0$.

Vektory $\vec{n}_p, \vec{n}_q$ jsou kolmé, což platí právě, když $\vec{n}_p\vec{n}_q = 0$.

Vektory $\vec{u}, \vec{n}_q$ jsou kolineární (vektor $\vec{n}_q$ je směrovým vektorem přímky p a vektor $\vec{u}$ je normálovým vektorem přímky q).

Vektory $\vec{v}, \vec{n}_p$ jsou kolineární (vektor $\vec{n}_p$ je směrovým vektorem přímky q a vektor $\vec{v}$ je normálovým vektorem přímky p).



Řešené úlohy

Příklad 7.2.15. Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $A[1, 1]$ a je kolmá k přímce $q: 5x + 4y - 7 = 0$.

Řešení:

Normálový vektor přímky q, $\vec{n}_q = (5, 4)$, je směrovým vektorem přímky p.

Její normálový vektor je pak $\vec{n}_p = (4, -5)$ a obecná rovnice přímky má tvar

$$p: 4x - 5y + c = 0.$$

Konstantu c vypočítáme dosazením souřadnic bodu $A[1, 1]$ do rovnice přímky:

$$4\cdot 1-5\cdot 1+c=0 \Rightarrow c=1.$$

Obecná rovnice přímky p je $p: 4x-5y+1=0$.

Příklad 7.2.16. Určete souřadnice bodu M, který je patou kolmice k sestrojené v bodě $P[5, -5]$ k přímce $p: 2x-5y-6=0$.

Řešení:

Hledaný bod M je průsečík přímky p a kolmice k.

Normálový vektor přímky p je směrovým vektorem přímky k: $\vec{n}_p=\vec{s}_k=(2, -5)$.

Normálový vektor přímky k je $\vec{n}_k=(5, 2)$.

Přímka k má obecnou rovnici $5x+2y+c=0$, c vypočítáme dosazením souřadnic bodu $P[5, -5]$ do rovnice: $5\cdot 5+2(-5)+c=0 \Rightarrow c=-15$.

Vyřešíme soustavu $\begin{matrix} 5x+2y-15=0 \\ 2x-5y-6=0 \end{matrix}$, dostaneme $x=3$, $y=0$, $M[3, 0]$ je hledaný bod.

Úlohy k samostatnému řešení

21. Bodem $A[1, 1]$ veďte kolmici k přímce $p: 2x-5y+1=0$.

22. Určete m tak, aby přímky a, b byly kolmé. $a: 3x+y-5=0, b: mx+6y-7=0$.

23. Určete souřadnice bodu M', který je patou kolmice k sestrojené v bodě $M[1, -2]$ k přímce $p: 3x-2y+19=0$.

7.2.6. Vzdálenost bodu od přímky

Výklad

Pro vzdálenost $d(A, p)$ bodu $A[a_1, a_2]$ od přímky $p: ax+by+c=0$ platí vzorec:

$$d(A, p)=\frac{|aa_1+ba_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Poznámka

Jmenovatel zlomku $\sqrt{a^2+b^2}$ je velikost normálového vektoru přímky p.

Pro vzdálenost rovnoběžek $a(A, \vec{u})$ a $b(B, \vec{v})$ platí: $d(a,b)=d(A,b)=d(B,a)$.

Řešené úlohy

Příklad 7.2.17. Určete vzdálenost bodu $M[1,-3]$ od přímky $p: 3x-4y+5=0$.

Řešení: Dosadíme do vzorce

$$d(M,p)=\frac{|aa_1+ba_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow d(M,p)=\frac{|3\cdot 1-4(-3)+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4.$$

Příklad 7.2.18. Napište rovnici přímky, která má od přímky $m: 3x-y+7=0$ vzdálenost $d=\sqrt{10}$.

Řešení: Bude se jednat o dvě rovnoběžky a, a', stačí nám najít jeden bod na každé z nich, normálové vektory jsou stejné jako normálový vektor přímky m.

Hledaný bod bude $A[a_1, a_2]$.

$$d(A,m)=\frac{|3a_1-a_2+7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10} \Rightarrow \frac{|3a_1-a_2+7|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10} \Rightarrow |3a_1-a_2+7|=10.$$

Z vlastnosti absolutní hodnoty dostaneme dvě rovnice, z každé vypočítáme jeden bod, bude to hledaný bod rovnoběžky:

1. $3a_1-a_2+7=10 \Rightarrow a_2=3a_1-3$, zvolíme si $a_1=1$, vypočítáme $a_2=0 \Rightarrow A[1,0]$,

2. $-(3a_1-a_2+7)=10 \Rightarrow a_2=3a_1+17$, zvolíme si $a_1=1$,vypočítáme $a_2=20$, $A'[1,20]$.

Bod $A[1,0]$ leží na přímce $a: 3x-y+c=0$,vypočítáme c dosazením jeho souřadnic, $c=-3$. Obecná rovnice přímky $a: 3x-y-3=0$.

Bod $A'[1,20]$ leží na přímce $a': 3x-y+c'=0$, vypočítáme c' dosazením souřadnic bodu A', $c'=17$. Obecná rovnice přímky $a': 3x-y+17=0$.

Úlohy k samostatnému řešení

24. Vypočítejte vzdálenost bodu $H[2,6]$ od přímky $b: x=2+4t, y=-3+3t$.

25. Napište rovnici přímky, která je rovnoběžná s přímkou $x-y+1=0$ a má od ní vzdálenost $d=2\sqrt{2}$.

26. Určete vzdálenost rovnoběžných přímek $p: x-2y+4=0, q: x-2y+9=0$.

7.3. Kružnice

7.3.1. Definice kružnice

Výklad

Množina všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu konstantní vzdálenost, se nazývá **kružnice**.

Je-li $S[m,n]$ střed kružnice, $X[x,y]$ libovolný bod kružnice a číslo r poloměr kružnice, pak vzdálenost bodů S,X je dle definice kružnice rovna poloměru

$$\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2}=r\,.$$

Po umocnění dostaneme středový tvar rovnice kružnice:

$$k:\ (x-m)^2+(y-n)^2=r^2\,.$$

Je-li $S[0,0]$, pak rovnice kružnice je $\quad k:\ x^2+y^2=r^2\,.$

Řešené úlohy

Příklad7.3.1. Upravte na středový tvar obecnou rovnici kružnice $x^2+y^2-6x-4y-3=0$.

Řešení:

Rovnici přepíšeme $(x^2-6x)+(y^2-4y)-3=0$ a výrazy v závorkách upravíme na druhé mocniny dvojčlenu.

$$(x^2-6x+9)+(y^2-4y+4)-3=9+4\,,$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=16\,.$$

Střed kružnice je $S[3,2]$, poloměr $r=4$.

Úlohy k samostatnému řešení

27. Upravte na středový tvar obecnou rovnici kružnice:

a) $x^2+y^2-6x+8y-119=0$,

b) $x^2+y^2+14x-2y-31=0$,

c) $2x^2+2y^2-16x-12y=0$.

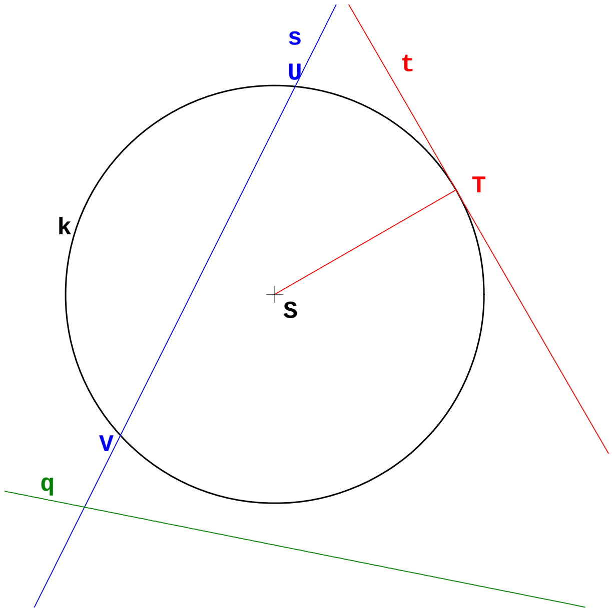
7.3.2. Vzájemná poloha kružnice a přímky

Výklad

Přímka, která má s kružnicí společný právě jeden bod, se nazývá **tečna** kružnice.

Přímka, která má s kružnicí společné právě dva body, se nazývá **sečna** kružnice.

Přímka, která nemá s kružnicí společný žádný bod, se nazývá **vnější přímka** kružnice.



t tečna kružnice, T bod dotyku, $ST \perp t$, $|ST| = r$,

s sečna, U, V průsečíky sečny s kružnicí, úsečka $|UV|$ je tětiva,

q vnější přímka

Je-li $k:(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$ středová rovnice kružnice a bod $T[t_1,t_2]$ její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar:

$$t:(x-m)(t_1-m)+(y-n)(t_2-n)=r^2.$$

Řešené úlohy

Příklad 7.3.2. Určete rovnici tečny t kružnice $k:(x-3)^2+(y+12)^2=100$ v bodě $L[9,-4]$.

Řešení: Musíme ověřit , jestli bod $L[9,-4]$ leží na kružnici $k:(x-3)^2+(y+12)^2=100$:

$$(9-3)^2+(-4+12)^2=100 \Rightarrow 6^2+8^2=100 \Rightarrow 36+64=100 \Rightarrow 100=100 \Rightarrow L \in k.$$

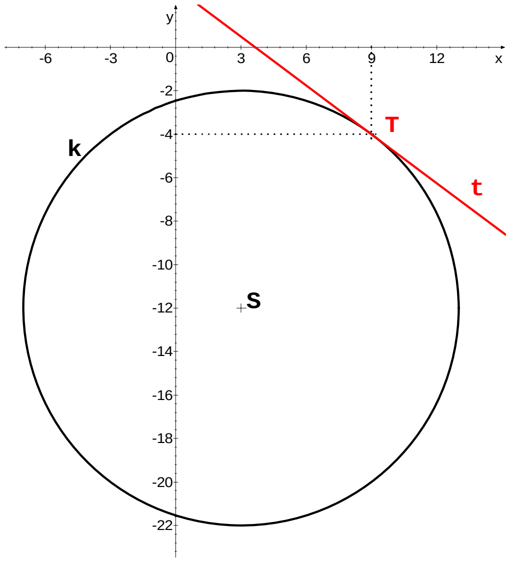
Nyní dosadíme do vzorce pro rovnici tečny $t:(x-m)(t_1-m)+(y-n)(t_2-n)=r^2$ a upravíme:

$$t:(x-3)(9-3)+(y+12)(-4+12)=100,$$

$$t:6(x-3)+8(y+12)-100=0,$$

$$t:6x+8y-22=0,$$

$$t:3x+4y-11=0.$$



Příklad 7.3.3. Rozhodněte o vzájemné poloze (zda jde o tečnu, sečnu či vnější přímku) přímky $m:-3x+4y+7=0$ a kružnice $k:(x-3)^2+(y+12)^2=100$, určete společné body, pokud existují.

Řešení:

Máme vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jedna z rovnic je kvadratická, řešíme dosazovací metodou.

$$-3x+4y+7=0$$

$$(x-3)^2+(y+12)^2=100$$

Řešíme dosazovací metodou. Z první rovnice vyjádříme jednu proměnnou, např. $x=\frac{4y+7}{3}$, a dosadíme do druhé rovnice: $\left(\frac{4y+7}{3}-3\right)^2+(y+12)^2=100,$

upravíme ji $\left(\frac{4y-2}{3}\right)^2+(y+12)^2=100,$

$$\left(\frac{16y^2-16y+4}{9}\right)+\left(y^2+24y+144\right)=100$$

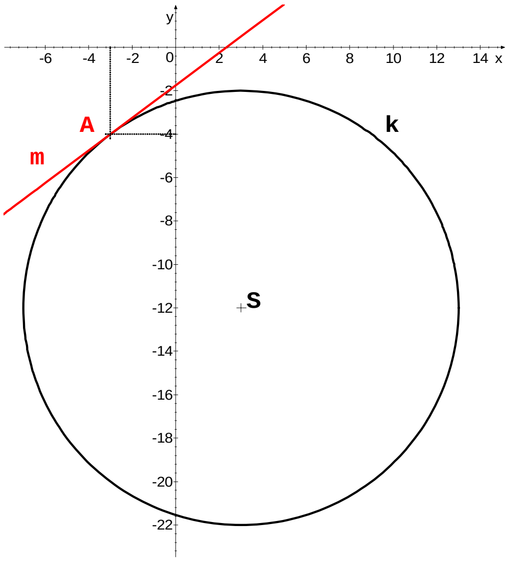
$$16y^2-16y+4+9y^2+216y+1296-900=0 \quad ,$$

$$25y^2+200y+400=0$$

$$y^2+8y+16=0$$

$$(y+4)^2=0 \Rightarrow y_{1,2}=-4, \text{ (diskriminant } D=0 \text{)}.$$

Dosadíme do $x=\frac{4y+7}{3}$ a dostaneme $x=-3$. Je to jediné řešení, jedná se tedy o tečnu, bod $A[-3,-4]$ je bodem dotyku.



Příklad 7.3.4. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky $p: x-2y+5=0$ a kružnice $k: x^2+y^2=10$, určete společné body, pokud existují.

Řešení: Opět máme vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jedna rovnice je kvadratická, druhá lineární.

$$x^2+y^2=10$$

$$x-2y+5=0$$

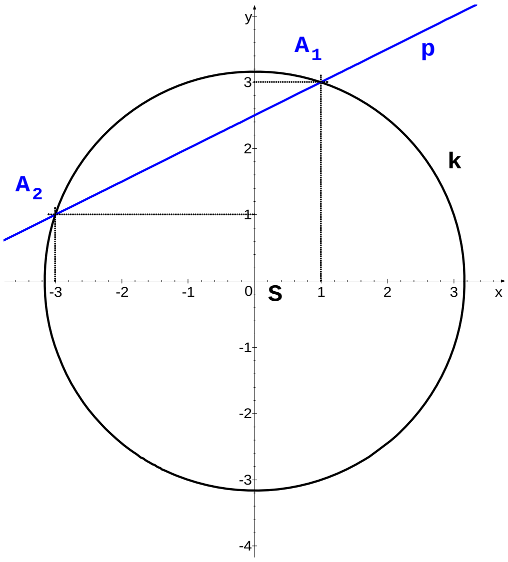
Z lineární rovnice vyjádříme $x=2y-5$, dosadíme do rovnice kvadratické

$(2y-5)^2+y^2=10$ a po úpravě získáme rovnici $y^2-4y+3=0$, její diskriminant

$D=4$, její kořeny jsou $y_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow y_1=3, y_2=1$.

Dosadíme postupně do rovnice $x=2y-5$ a vypočítáme $x_1=1, x_2=-3$.

Soustava má dvě řešení, jedná se tedy o sečnu s průsečíky $A_1[1, 3], A_2[-3, 1]$.



Poznámka

Z uvedených příkladů 7.3.3. a 7.3.4. můžeme shrnout poznatky o klasifikaci vzájemné polohy přímky a kružnice do několika bodů.

Při řešení soustavy 2 rovnic, lineární a kvadratické,volíme tento postup:

a) z lineární rovnice vyjádříme jednu neznámou a dosadíme do rovnice kvadratické,

b) kvadratickou rovnici upravíme a podle diskriminantu D rozhodneme takto:

je-li $D < 0$, *přímka je vnější přímkou kružnice,*

je-li $D = 0$, *přímka je tečnou kružnice,*

je-li $D > 0$, *přímka je sečnou kružnice.*

Příklad 7.3.5. Určete, pro které hodnoty parametru $c \in R$ má přímka $p:\ y = x + c$ s kružnicí $x^2 + y^2 - 2 = 0$ právě jeden společný bod, dva společné body, žádný společný bod.

Řešení: Do rovnice kružnice dosadíme rovnici přímky a umocníme:

$$x^2 + x^2 + 2xc + c^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2xc + c^2 - 2 = 0.$$

$$D = 4c^2 - 4 \cdot 2(c^2 - 2) = -4c^2 + 16$$

$$-4c^2 + 16 = 0 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow |c| = 2$$

Závěr: $|c| < 2 : p$ je sečna, $|c| = 2 : p$ je tečna, $|c| > 2 : p$ je vnější přímka.

Příklad 7.3.6. Z bodu $M[5, 2]$ veďte tečny ke kružnici $k: (x-3)^2 + (y+12)^2 = 100$.

Řešení:

Bod $M[5, 2]$ je bodem tečny, ale ne bodem dotyku.

Ověříme, že bod M je vnějším bodem kružnice dosazením jeho souřadnic do rovnice kružnice: $(5-3)^2 + (2+12)^2 = 4 + 14^2 = 200 > 100.$

Nyní jeho souřadnice dosadíme do rovnice tečny

$$t: (x-3)(t_1-3) + (y+12)(t_2+12) = 100$$

a tedy $$(5-3)(t_1-3) + (2+12)(t_2+12) = 100.$$

Upravíme a dostaneme lineární rovnici $2t_1 + 14t_2 + 62 = 0 \Rightarrow t_1 + 7t_2 + 31 = 0$.
Souřadnice $[t_1, t_2]$ jsou souřadnicemi bodu dotyku, musí vyhovovat rovnici kružnice

$$k: \; (t_1-3)^2 + (t_2+12)^2 = 100.$$

Z lineární rovnice vyjádříme jednu souřadnici, např. $t_1 = -7t_2 - 31$ a dosadíme do kvadratické rovnice $(-7t_2 - 31 - 3)^2 + (t_2 + 12)^2 = 100$,

tu upravíme na tvar $$t_2^2 + 10t_2 + 24 = 0,$$

$$t_2 = -4, \; t_2' = -6,$$

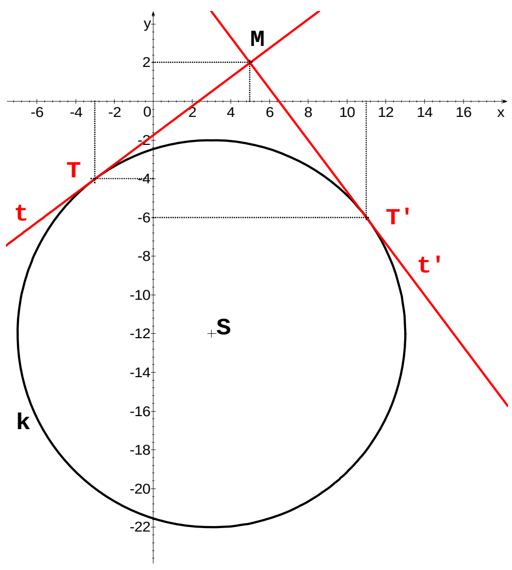
$$t_1 = -3, \; t_1' = 11.$$

Body dotyku hledaných tečen jsou $T[-3, -4]$ a $T'[11, -6]$.

Postupně dosadíme souřadnice bodů T, T' do rovnice tečny

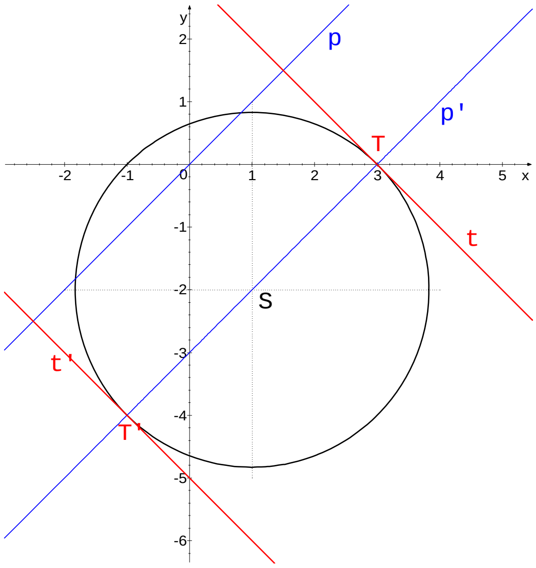
$$t: (x-3)(t_1-3) + (y+12)(t_2+12) = 100,$$

$$t: 3x - 4y - 7 = 0, \quad t': 4x + 3y - 26 = 0.$$



Příklad 7.3.7. Veďte tečny ke kružnici $k:(x-1)^2+(y+2)^2=8$ kolmo k přímce $p: x=t, y=t$.

Řešení:



Řešení se pokusíme vyčíst z obrázku. Hledané tečny jsou dvě, spojnice bodů dotyku TT' těchto tečen je rovnoběžná s danou přímkou p a prochází středem kružnice S. Povedeme tedy nejprve přímku p' rovnoběžně s p středem kružnice.

$$p:\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases} \Rightarrow p':\begin{cases} x=\ \ 1+t \\ y=-2+t \end{cases}$$

Najdeme průsečíky přímky p' s danou kružnicí $k:(x-1)^2+(y+2)^2=8$. Do rovnice kružnice dosadíme parametrické vyjádření přímky $p':\begin{cases} x=\ \ 1+t \\ y=-2+t \end{cases}$.

$(1+t-1)^2+(-2+t+2)^2=8$, závorky upravíme a mocniny sečteme:

$t^2+t^2=8 \Rightarrow 2t^2=8 \Rightarrow t^2=4 \Rightarrow t=\pm 2$.

Parametr t dosadíme do parametrického vyjádření přímky $p':\begin{cases} x=\ \ 1+t \\ y=-2+t \end{cases}$ a získáme dva body dotyku hledaných tečen.

$T=\begin{Bmatrix} x=\ \ 1+2 \\ y=-2+2 \end{Bmatrix}=[3,0]$, $\qquad T'=\begin{Bmatrix} x=\ \ 1-2 \\ y=-2-2 \end{Bmatrix}=[-1,-4]$.

Body T, T' dosadíme do rovnice tečny kružnice

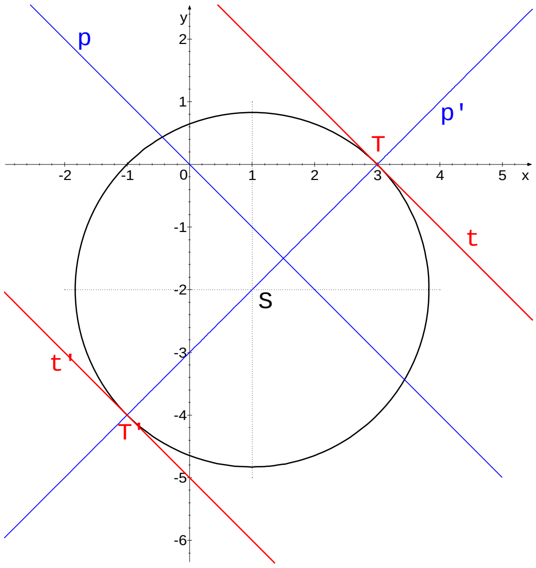
$$t:(x-m)(t_1-m)+(y-n)(t_2-n)=r^2$$

$t:(x-1)(3-1)+(y+2)(0+2)=8,\qquad t':(x-1)(-1-1)+(y+2)(-4+2)=8,$

$t: x+y-3=0.\qquad t': x+y+5=0.$

Poznámka

Podobně bychom řešili úlohu, ve které by tečny ke kružnici byly rovnoběžné s danou přímkou p, středem kružnice bychom vedli kolmici k dané přímce p, (viz následující obrázek). Následoval by stejný postup jako v příkladě 7.3.7.



Úlohy k samostatnému řešení

28. Napište rovnici tečny kružnice $(x-2)^2+(y-4)^2=25$ v bodě $A[6,1]$.

29. Napište rovnice tečen kružnice $(x+1)^2+(y-3)^2=125$, které jsou kolmé k přímce $p: x=2t, y=t$.

30. Napište rovnice tečen kružnice $(x-2)^2+(y+2)^2=52$, které jsou rovnoběžné s přímkou $p: x=2t, y=-3t$.

31. Je dána kružnice k se středem $S[1, 2]$ a poloměrem $r=5$. Dále jsou dány body $A[2, 0]$, $B[5, 9]$. Vyšetřete vzájemnou polohu kružnice k a přímky AB.

32. Určete, pro které hodnoty parametru $k \in R$ má daná přímka $p:\ y=k(x-1)$ s kružnicí $x^2+y^2+2x=0$ právě jeden společný bod, dva společné body, žádný společný bod.

7.3.3. Kružnice z daných prvků

Výklad

V této kapitole se podíváme na analytické vyjádření kružnice z daných prvků. V planimetrii jsem použili pravítko, tužku a kružítko, zde bude tužka stačit.

Řešené úlohy

Příklad 7.3.8. Určete středovou rovnici kružnice, která prochází body $A[4,3]$, $B[-2,3]$ a dotýká se souřadnicové osy x.

Řešení:

Abychom mohli zapsat rovnici kružnice, potřebujeme znát souřadnice středu $S[m,n]$ a poloměr kružnice r.

Nejdříve se zamyslíme nad poslední podmínkou. Jestliže se kružnice dotýká osy x, pak je poloměr kružnice roven druhé souřadnici středu kružnice, $r = n$.

Body $A[4,3]$, $B[-2,3]$ leží na kružnici, musí tedy jejich souřadnice splňovat rovnici kružnice $k:(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$. Protože je $r=n$, rovnice kružnice bude ve tvaru $k:(x-m)^2+(y-n)^2=n^2$. Dosadíme tedy souřadnice bodů A,B do této rovnice.

$$A \in k:\ (4-m)^2+(3-n)^2=n^2,$$

$$B \in k:\ (-2-m)^2+(3-n)^2=n^2.$$

Dostali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Tu nyní vyřešíme.

$$16-8m+m^2+9-6n+n^2=n^2$$
$$4+4m+m^2+9-6n+n^2=n^2$$

Rovnice od sebe odečteme a dostaneme jednu rovnici o jedné neznámé:

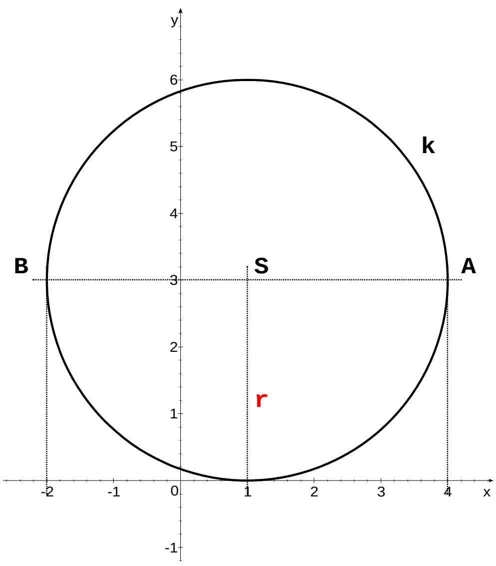
$$12-12m=0 \Rightarrow m=1.$$

Dosadíme do jedné z rovnic a vypočítáme n:

$$16-8+1+9-6n+n^2=n^2,$$
$$18-6n=0,$$
$$n=3.$$

Kružnice má rovnici

$$k:(x-1)^2+(y-3)^2=9.$$

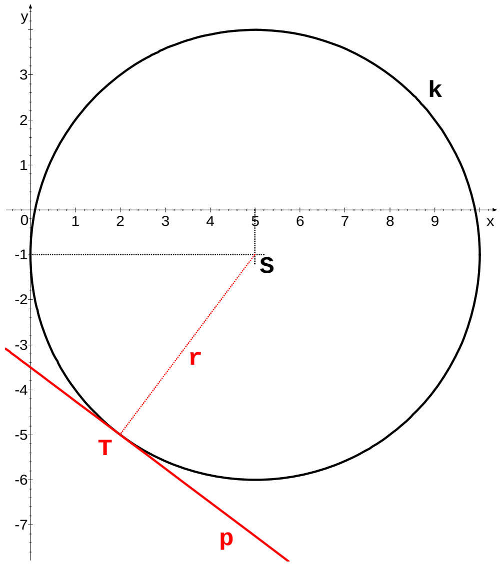


Příklad 7.3.9. Napište rovnici kružnice, která má střed $S[5,-1]$ a dotýká se přímky $p: 3x+4y+14=0$.

Řešení: Vzdálenost bodu S od přímky p je rovna poloměru kružnice.

$$r = d(S,p) = \frac{|3\cdot 5 + 4(-1) + 14|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5$$

Kružnice má rovnici $k: (x-5)^2 + (y+1)^2 = 25$.



Úlohy k samostatnému řešení

33. Napište rovnici kružnice, která prochází bodem $A[4, 4]$ a průsečíky kružnice $x^2+y^2+4x-4y=0$ s přímkou $p: x+y=0$.

34. Napište rovnici kružnice, která prochází body $A[12, 10]$, $B[6, 2]$ a střed leží na přímce $p: 3x-4y-3=0$. ✖

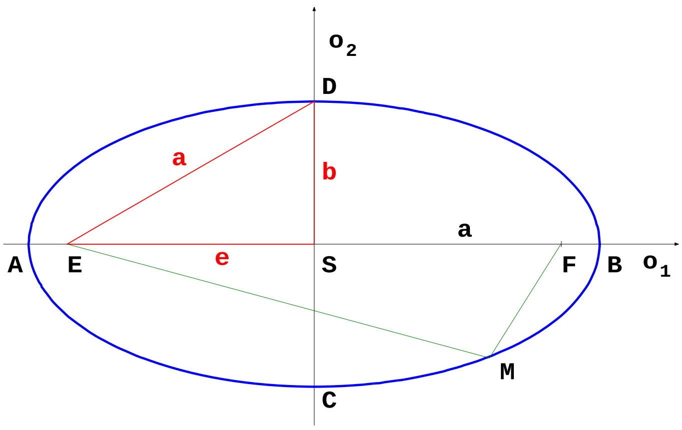
35. Napište rovnici kružnice, která má střed na ose prvního kvadrantu a dotýká se přímek $p: 3x+4y+6=0$ a $q: -5x+12y+38=0$. ✖

7.4. Elipsa

7.4.1. Definice elipsy

Výklad

Elipsa je množina všech bodů M v rovině, které mají od dvou různých pevně zvolených bodů (ohnisek E, F) konstantní součet vzdáleností ($2a$), který je větší než vzdálenost ohnisek. $|EM| + |FM| = 2a$



A, B	hlavní vrcholy elipsy	o_1	hlavní osa elipsy
E, F	ohniska	o_2	vedlejší osa elipsy
C, D	vedlejší vrcholy elipsy	S	střed elipsy

$a = |AS| = |BS| = |EC| = |FC| = |ED| = |FD|$ hlavní poloosa elipsy

$b = |CS| = |DS|$ vedlejší poloosa elipsy, $e = |FS| = |ES|$ excentricita elipsy

Pro a, b, e platí Pythagorova věta: $a^2 = e^2 + b^2$.

V soustavě souřadnic mějme dánu elipsu o středu $S[m, n]$, a je hlavní poloosa, b vedlejší poloosa, $EF \| x$, pak středová rovnice elipsy má tvar:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Je-li střed elipsy v počátku soustavy souřadnic, $S[0,0]$, pak má její rovnice tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Otočíme-li v soustavě souřadnic o pravý úhel danou elipsu o středu $S[m, n]$, hlavní poloose a, vedlejší poloose b, pak $EF \| y$ a středový tvar rovnice elipsy bude

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1 .$$

Je-li střed elipsy v počátku Oxy, $S[0, 0]$, ohniska E, F leží na ose y, pak její středová rovnice je

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Řešené úlohy

Příklad 7.4.1. Obecnou rovnici elipsy převeďte na středový tvar a určete její charakteristické prvky: $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$.

Řešení:

Rovnici si přepíšeme $\left(4x^2 - 8x\right) + \left(9y^2 - 36y\right) + 4 = 0$,

ze závorek vytkneme $4\left(x^2 - 2x\right) + 9\left(y^2 - 4y\right) + 4 = 0$,

výraz v závorce doplníme na druhou mocninu dvojčlenu

$$4\left(x^2 - 2x + 1\right) + 9\left(y^2 - 4y + 4\right) + 4 = 4 + 36 ,$$

přepíšeme na tvar $4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36$,

vydělíme 36 $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

a máme středový tvar rovnice elipsy, $S[1, 2]$, $a = 3$, $b = 2$, $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$, $E[1-\sqrt{5}, 2]$, $F[1+\sqrt{5}, 2]$

Příklad 7.4.2. Napište rovnici elipsy, která má ohniska $E[-2, -2]$, $F[-2, 6]$ a jeden hlavní vrchol je $A[-2, 7]$.

Řešení:

Hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou y, střed $S = \dfrac{E+F}{2} = [-2, 2]$, $a = AS = 5$,

$e = ES = FS = 4$, $b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

Rovnice elipsy ve středovém tvaru je $\dfrac{(x+2)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$.

Příklad 7.4.3. Napište rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami souřadnic, dotýká se osy x i y a její střed je v bodě $S[4,-2]$.

Řešení:

Elipsa se dotýká osy y, to znamená, že její hlavní vrchol je bodem dotyku a hlavní poloosa $a = 4$, zároveň se dotýká osy x, takže její vedlejší vrchol je na ose x a $b = 2$.

Rovnice elipsy ve středovém tvaru je $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+2)}{4} = 1$

Příklad 7.4.4. Jakou rovnici má přímka, která prochází středem kuželosečky $4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 1 = 0$ a je kolmá k přímce $2x + 3y - 5 = 0$?

Řešení:

Musíme nejdříve upravit rovnici na středový tvar, použijeme stejný postup jako v předchozím příkladě.

$$\left(4x^2 - 16x\right) + \left(y^2 + 2y\right) + 1 = 0,$$

$$4\left(x^2 - 4x + 4\right) + \left(y^2 + 2y + 1\right) = 16,$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$$

Střed elipsy má souřadnice $S[2, -1]$. Hledaná přímka má být kolmá k $2x + 3y - 5 = 0$, proto její normálový vektor je $\vec{n} = (3,-2)$ a obecná rovnice je $3x - 2y + c = 0$.

Dosadíme souřadnice středu a dostaneme $3 \cdot 2 - 2(-1) + c = 0 \Rightarrow c = -8$.

Obecná rovnice hledané přímky je $3x - 2y - 8 = 0$.

Úlohy k samostatnému řešení

36. Obecnou rovnici převeďte na středový tvar a určete její charakteristické prvky:

a) $2x^2 + 3y^2 - 12x + 3y + 6{,}75 = 0$,

b) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 18y - 23 = 0$,

c) $x^2 + 16y^2 - 8x = 0$.

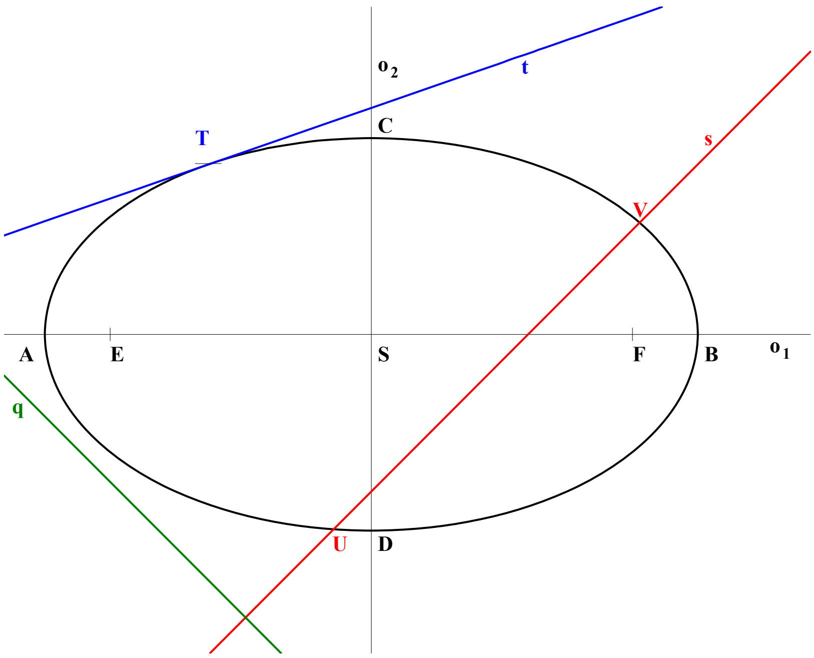
7.4.2. Vzájemná poloha elipsy a přímky

Výklad

Přímka, která má s elipsou společný právě jeden bod, se nazývá **tečna** elipsy.

Přímka, která má s elipsou společné právě dva body, se nazývá **sečna** elipsy.

Přímka, která nemá s elipsou společný žádný bod, se nazývá **vnější přímka** elipsy.



t tečna elipsy,

T bod dotyku,

s sečna,

U, V průsečíky sečny s elipsou,

q vnější přímka.

Je-li $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ středová rovnice elipsy a bod $T[t_1,t_2]$ její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar:

$$t: \frac{(x-m)(t_1-m)}{a^2}+\frac{(y-n)(t_2-n)}{b^2}=1.$$

Je-li $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ rovnice elipsy a bod $T[t_1,t_2]$ její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar:

$$t: \frac{x\,t_1}{a^2}+\frac{y\,t_2}{b^2}=1.$$

Poznámka

Pro klasifikaci vzájemné polohy přímky a elipsy platí stejné postupy jako u kružnice a přímky, popsané v poznámce.

Řešené úlohy

Příklad 7.4.5. Napište rovnice tečen elipsy $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ v průsečících s přímkou $p: 7x-2y-50=0$.

Řešení: Nejdříve najdeme průsečíky přímky a elipsy.

Máme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, z druhé rovnice si vyjádříme jednu proměnnou a dosadíme do první rovnice:

$7x-2y-50=0 \Rightarrow y=\frac{7x-50}{2}$ dosadíme do rovnice elipsy $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$,

$\frac{x^2}{100}+\frac{\left(\frac{7x-50}{2}\right)^2}{25}=1$, umocníme: $\frac{x^2}{100}+\frac{49x^2-700x+2500}{100}=1$,

po úpravě:

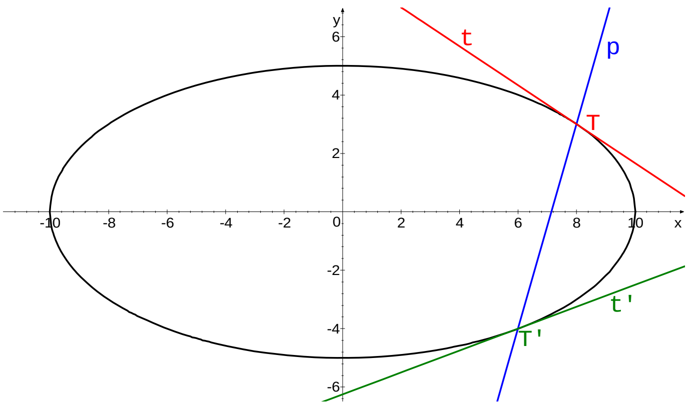
$$x^2+49x^2-700x+2500=100,$$
$$x^2-14x+48=0.$$

Kořeny rovnice jsou $x=8, x'=6$ a po dosazení do $y=\frac{7x-50}{2}$ dostaneme $y=3, y'=-4$.

Průsečíky jsou $T[8,3], T'[6,-4]$.

Tečna v bodě $T[8,3]$: $t: \frac{8x}{100}+\frac{3y}{25}=1 \Rightarrow t: 2x+3y-25=0$.

Tečna v bodě $T'[6,-4]$: $t': \frac{6x}{100}-\frac{4y}{25}=1 \Rightarrow t': 3x-8y-50=0$.



Příklad 7.4.6. Napište rovnici tečny k elipse $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$ v jejím bodě $T[6,?]$.

Řešení:

Nejdříve vypočítáme druhou souřadnici bodu dotyku.

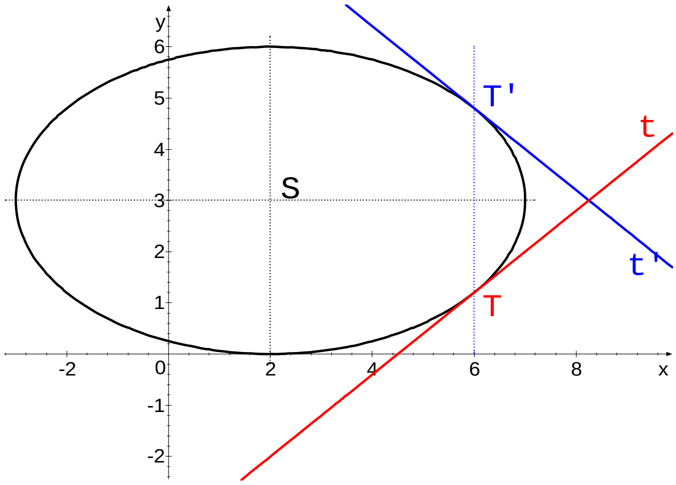
$$\frac{(6-2)^2}{25}+\frac{(t_2-3)^2}{9}=1 \Rightarrow 25t_2^2-150t_2+144=0 \Rightarrow t_2=\frac{24}{5}, t_2'=\frac{6}{5}.$$

Budeme mít tedy dva body dotyku

$T\left[6, \frac{24}{5}\right]$ $T'\left[6, \frac{6}{5}\right]$ a dvě tečny

$$t: \frac{(x-2)(6-2)}{25}+\frac{(y-3)\left(\frac{24}{5}-3\right)}{9}=1, \qquad t': \frac{(x-2)(6-2)}{25}+\frac{(y-3)\left(\frac{6}{5}-3\right)}{9}=1,$$

$$t: 4x+5y-48=0. \qquad t': 4x-5y-18=0.$$



Úlohy k samostatnému řešení

37. Napište rovnici tečny elipsy $5(x+2)^2+25(y-1)^2=100$ v bodě $A[-2, 3]$.

38. Napište rovnici tečen elipsy $4x^2+9y^2=36$ z bodu $M[15, 10]$.✖

39. Napište rovnice tečen k elipse $\frac{(x+1)^2}{4}+y^2=1$ v průsečících s přímkou $m: x=1+2t, y=2+t$.

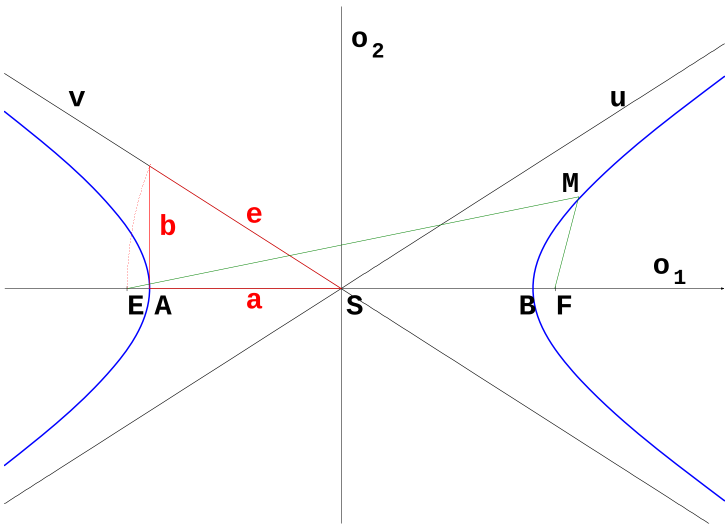
40. Určete pro které hodnoty parametru $c \in R$ má přímka $p:\ y=c$ s elipsou $x^2+4y^2=36$ právě jeden společný bod, dva společné body, žádný společný bod.

7.5. Hyperbola

7.5.1. Definice hyperboly

Výklad

Hyperbola je množina všech bodů M v rovině, které mají od dvou různých pevně zvolených bodů (ohnisek E,F) konstantní rozdíl vzdáleností ($2a$), který je menší než vzdálenost ohnisek. $$\left||EM|-|FM|\right|=2a$$



o_1	hlavní osa hyperboly,
A,B	hlavní vrcholy hyperboly,
E,F	ohniska,
S	střed hyperboly,
u,v	asymptoty,
$a=\|AS\|=\|BS\|$	hlavní poloosa hyperboly,
o_2	vedlejší osa hyperboly,
b	vedlejší poloosa hyperboly,

$e=|FS|=|ES|$ excentricita (výstřednost) hyperboly

Pro a,b,e platí Pythagorova věta: $a^2+b^2=e^2$.

V soustavě souřadnic mějme dánu hyperbolu o středu $S[m,n]$, a je hlavní poloosa, b vedlejší poloosa, $EF \| x$, pak středový tvar rovnice hyperboly je:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1.$$

Obecné rovnice asymptot jsou $u: bx-ay+c=0, v: bx+ay+d=0$, konstanty c,d se vypočítají dosazením souřadnic středu hyperboly do rovnic asymptot.

Ve směrnicovém tvaru mají asymptoty rovnici: $y-n=\pm\frac{b}{a}(x-m)$.

Je-li střed hyperboly v počátku soustavy souřadnic $S[0,0]$ a ohniska E,F leží na ose x, pak má její středová rovnice tvar

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Obecné rovnice asymptot jsou $u: bx-ay=0, v: bx+ay=0$.

Ve směrnicovém tvaru mají asymptoty rovnici $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Otočíme-li v soustavě souřadnic o pravý úhel danou hyperbolu o středu $S[m,n]$, hlavní poloose a, vedlejší poloose b, pak $EF \| y$ a středový tvar rovnice hyperboly bude:

$$\frac{(y-n)^2}{a^2}-\frac{(x-m)^2}{b^2}=1.$$

Obecné rovnice asymptot pak jsou $u: ax-by+c=0, v: ax+by+d=0$, konstanty c,d se vypočítají dosazením souřadnic středu hyperboly do rovnic asymptot.

Ve směrnicovém tvaru mají asymptoty rovnici $y-n=\pm\frac{a}{b}(x-m)$

Je-li střed hyperboly v počátku soustavy souřadnic, $S[0,0]$, a ohniska E,F leží na ose y, pak má její středová rovnice tvar

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

Obecné rovnice asymptot jsou $u: ax-by=0,\ v: ax+by=0$.

Ve směrnicovém tvaru mají asymptoty rovnici $y=\pm\frac{a}{b}x$

Řešené úlohy

Příklad 7.5.1. Obecnou rovnici hyperboly převeďte na středový tvar a určete její charakteristické prvky: $9x^2 - 4y^2 - 8y - 40 = 0$.

Řešení: Rovnici si přepíšeme $9x^2 - (4y^2 + 8y) - 40 = 0$,

ze závorky vytkneme $9x^2 - 4(y^2 + 2y) - 40 = 0$,

výraz v závorce doplníme na druhou mocninu dvojčlenu

$$9x^2 - 4(y^2 + 2y + 1) - 40 = -4,$$

přepíšeme na tvar $9x^2 - 4(y+1)^2 = 36$,

vydělíme 36 a máme středový tvar rovnice hyperboly $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$.

Charakteristické prvky hyperboly: $S[0,-1]$, $a = 2$, $b = 3$, $e = \sqrt{13}$, $o_1 \parallel x$.

Rovnice asymptot: $u: 3x - 2y - 2 = 0$, $v: 3x + 2y + 2 = 0$.

Příklad 7.5.2. Jakou rovnici má přímka, která prochází středy kuželoseček $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ a $x^2 - y^2 + 2x + 4y - 12 = 0$.

Řešení: Musíme nejdříve upravit rovnice na středový tvar, použijeme stejný postup jako v předchozím příkladě: $(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) + 1 = 0$,

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) = 9 \Rightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$ - jedná se o kružnici.

$(x^2 + 2x) - (y^2 - 4y) - 12 = 0$,

$(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) = 9$, $\dfrac{(x+1)^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$ - jedná se o hyperbolu.

Středy kuželoseček mají souřadnice $S[3,-1]$, $S'[-1, 2]$.

Hledaná přímka má směrový vektor $\vec{s} = S' - S = (-4, 3)$, její normálový vektor je $\vec{n}(3, 4)$ a obecná rovnice přímky p: $3x + 4y + c = 0$.

Dosadíme souřadnice středu S a dostaneme $3 \cdot 3 + 4(-1) + c = 0 \Rightarrow c = -5$.

Obecná rovnice hledané přímky je $3x + 4y - 5 = 0$.

Úlohy k samostatnému řešení

41. Obecnou rovnici hyperboly převeďte na středový tvar a určete její charakteristické prvky:

a) $9x^2 - 5y^2 + 54x - 10y + 121 = 0$,

b) $2x^2 - y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$,

c) $3x^2 - 2y^2 - 8y - 26 = 0$.

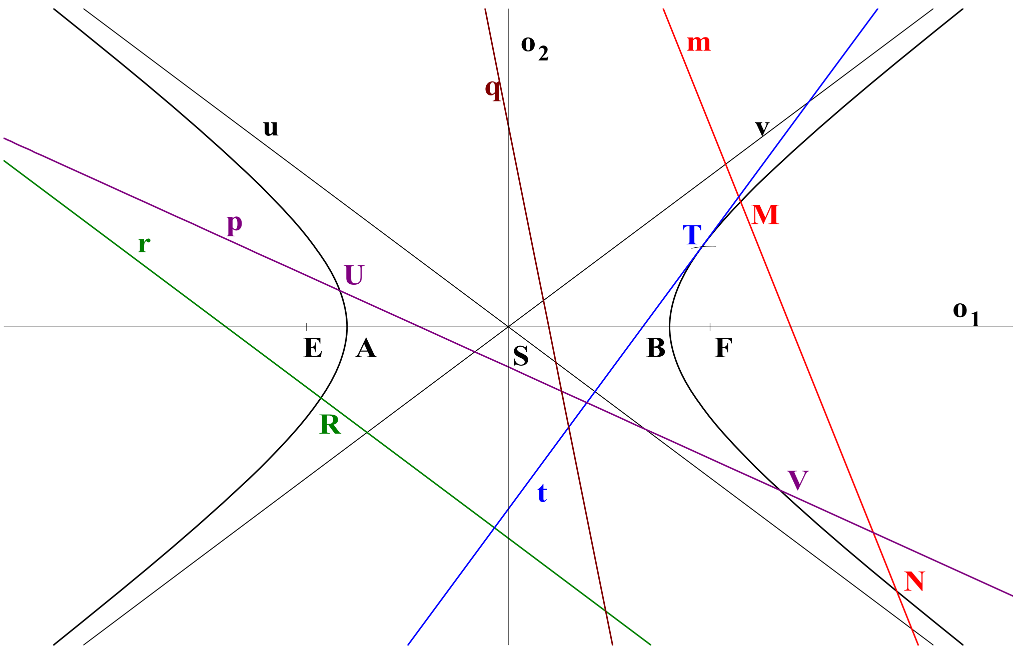
7.5.2. Vzájemná poloha hyperboly a přímky

Výklad

Přímku, která má s hyperbolou společný právě jeden bod a není rovnoběžná s asymptotou, nazveme **tečnou** hyperboly.

Přímku, která má s hyperbolou společné dva body, nebo je rovnoběžná s asymptotou hyperboly, nazveme **sečnou** hyperboly. Sečna rovnoběžná s asymptotou má s hyperbolou společný jeden bod.

Přímku, která nemá s hyperbolou společný žádný bod, nazveme **vnější přímkou** hyperboly.



u, v asymptoty hyperboly,

t	tečna hyperboly,	T	bod dotyku,
p	sečna,	U, V	průsečíky sečny p s hyperbolou,
m	sečna,	M, N	průsečíky sečny m s hyperbolou,
r	sečna rovnoběžná s asymptotou,	R	průsečík sečny r s hyperbolou,
q	vnější přímka.		

Je-li $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ rovnice hyperboly a bod $T[t_1,t_2]$ její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar:

$$t:\frac{(x-m)(t_1-m)}{a^2}-\frac{(y-n)(t_2-n)}{b^2}=1.$$

Je-li $\frac{(y-n)^2}{a^2}-\frac{(x-m)^2}{b^2}=1$ rovnice hyperboly a bod $T[t_1,t_2]$ její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar:

$$t:\frac{(y-n)(t_2-n)}{a^2}-\frac{(x-m)(t_1-m)}{b^2}=1.$$

Řešené úlohy

Příklad 7.5.3. Určete vzájemnou polohu přímky $p: x=5+4t, y=4+5t$ a hyperboly $x^2-y^2=9$.

Řešení:

Dosadíme do rovnice hyperboly parametrické vyjádření přímky, vyřešíme kvadratickou rovnici a podle počtu řešení rozhodneme o vzájemné poloze přímky a hyperboly.

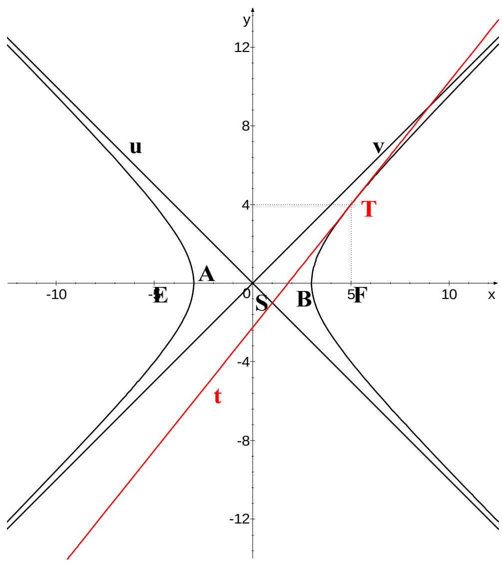
$(5+4t)^2-(4+5t)^2=9$,

$25+40t+16t^2-(16+40t+25t^2)=9$,

$9-9t^2=9$,

$t=0$.

Úloha má jediné řešení, jde tedy o tečnu, bod dotyku má souřadnice $T[5,4]$, nebo o sečnu, která je rovnoběžná s jednou asymptotou. Tuto možnost nyní ověříme. Rovnice asymptot jsou $x+y=0$ a $x-y=0$, v parametrickém vyjádření $x=t, y=-t$ a $x=t, y=t$, přímka p je s asymptotami různoběžná a jedná se opravdu o tečnu.



Příklad 7.5.4. Napište rovnici tečny hyperboly $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{12}=1$ v jejím bodě $T[2,?]$.

Řešení:

Dosadíme danou souřadnici bodu dotyku do rovnice hyperboly a najdeme jeho druhousouřadnici:

$$\frac{(2+2)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{12}=1 \Rightarrow 4-\frac{(y-3)^2}{12}=1 \Rightarrow y^2-6y-27=0 \Rightarrow y=-3, \quad y=9.$$

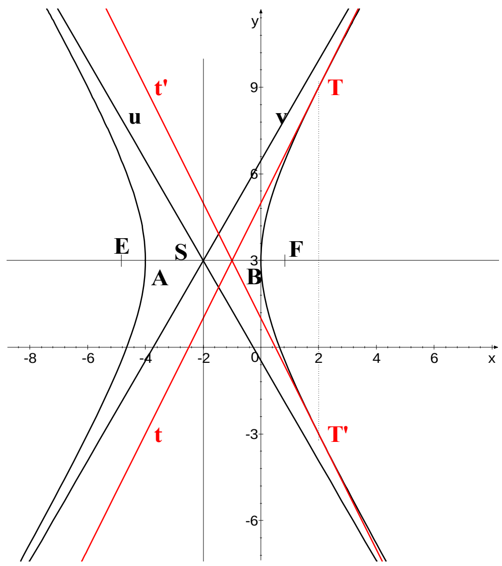
Body dotyku mají souřadnice: $T_1[2,-3]$, $T_2[2,9]$.

Dosadíme $T_1[2,-3]$ do rovnice tečny $t:\frac{(x+2)(2+2)}{4}-\frac{(y-3)(-3-3)}{12}=1$.

Po úpravě má tečna rovnici $t_1: 2x+y-1=0$.

Dosadíme $T_2[2,9]$ do rovnice tečny $t:\frac{(x+2)(2+2)}{4}-\frac{(y-3)(9-3)}{12}=1$.

Po úpravě má tečna rovnici $t_2: 2x-y+5=0$.

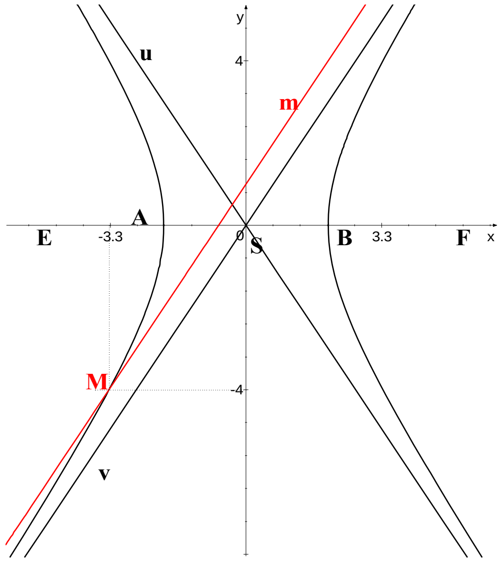


Příklad 7.5.5. Určete vzájemnou polohu přímky $3x-2y+2=0$ a hyperboly $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

Řešení: Z rovnice přímky $3x-2y+2=0$ si vyjádříme $x=\frac{2y-2}{3}$,

dosadíme do rovnice hyperboly a dostaneme $\frac{\left(\frac{2y-2}{3}\right)^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, upravíme na tvar $y^2 - 2y + 1 - y^2 = 9 \Rightarrow 2y = -8 \Rightarrow y = -4$.

Dosadíme do $x = \dfrac{2y-2}{3}$ a vypočítáme $x = -\dfrac{10}{3}$. Přímka a hyperbola mají společný právě jeden bod. Mohlo by se jednat o tečnu, ale protože rovnice asymptoty naší hyperboly je $3x - 2y = 0$, pak přímka o rovnici $3x - 2y + 2 = 0$ je s asymptotou rovnoběžná, takže se jedná o sečnu.



Poznámka

V případě tečny vychází po úpravě kvadratická rovnice, která má jeden dvojnásobný kořen a ten je souřadnicí bodu dotyku. Pokud se jedná o sečnu rovnoběžnou s asymptotou, pak dostaneme lineární rovnici a jediné řešení, což je náš případ.

Úlohy k samostatnému řešení

42. Napište rovnici tečny hyperboly $(x+1)^2 - (y-3)^2 = 9$, která prochází bodem $A[-6, -1]$.

43. Určete vzdálenost průsečíků přímky $p: 4x - 3y - 12 = 0$ s hyperbolou $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

44. V průsečících přímky $p: x - y + 1 = 0$ s hyperbolou $(x-3)^2 - y^2 = 16$ sestrojte tečny hyperboly.

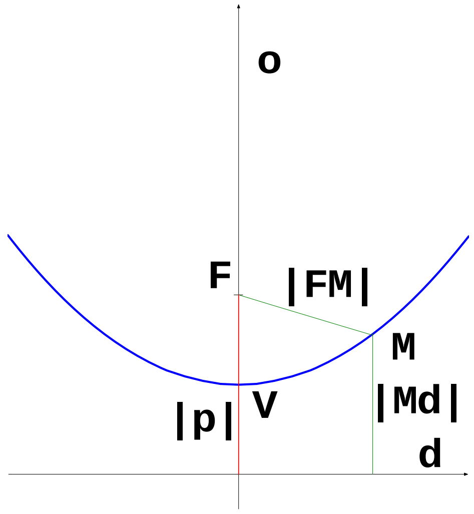
7.6. Parabola

7.6.1. Definice paraboly

Výklad

Parabola je množina všech bodů M v rovině, které mají od daného pevného bodu (ohniska F) a od dané přímky (řídící přímky d) stejnou vzdálenost.

$$|MF| = d(M,d)$$



F	ohnisko paraboly
V	vrchol paraboly
d	řídící přímka paraboly
p	parametr, $\lvert p\rvert = \lvert Fd\rvert = 2\lvert FV\rvert$

V soustavě souřadnic mějme dánu parabolu s vrcholem $V[m,n]$ a parametrem p, $o \| y$, pak vrcholový tvar rovnice paraboly je:

$$(x-m)^2 = 2p(y-n).$$

Osa paraboly má rovnici $x - m = 0$. Řídicí přímka má rovnici $y - n + \frac{p}{2} = 0$.

Je-li vrchol paraboly v počátku soustavy souřadnic, $V[0,0]$, pak její vrcholová rovnice má tvar $$x^2 = 2py.$$

Osa paraboly je totožná s osou y a řídicí přímka má rovnici $y = -\frac{p}{2}$.

V soustavě souřadnic mějme dánu parabolu s vrcholem $V[m,n]$ a parametrem p, $o \| x$, pak vrcholový tvar rovnice paraboly je:

$$(y-n)^2 = 2p(x-m).$$

Osa paraboly má rovnici $y - n = 0$. Řídicí přímka má rovnici $x - m + \frac{p}{2} = 0$.

Je-li vrchol paraboly v počátku soustavy Oxy, $V[0,0]$, pak její rovnice má tvar $y^2 = 2px$.

Osa paraboly je totožná s osou x a řídicí přímka má rovnici $x = -\frac{p}{2}$.

Řešené úlohy

Příklad 7.6.1. Určete vrchol, parametr a ohnisko paraboly $y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$.

Řešení:

Obecnou rovnici paraboly upravíme na tvar $y^2 + 6y = 8x + 7$,

výraz na levé straně rovnice upravíme doplněním 9 na druhou mocninu dvojčlenu

$$y^2 + 6y + 9 = 8x + 7 + 9,$$

přepíšeme na mocninu a z pravé strany vytkneme $(y+3)^2 = 8(x+2)$.

Vrchol paraboly je $V[-2,-3]$, parametr $p = 4$, osa $o//x$, ohnisko $F[0,-3]$, řídící přímka má rovnici $x = -4$.

Příklad 7.6.2. Určete vrchol, parametr a ohnisko paraboly $2x^2 - 8x + 12y - 16 = 0$.

Řešení:

Zápis rovnice si upravíme na tvar $2x^2 - 8x = -12y + 16$,

z levé strany vytkneme 2 a doplníme výraz v závorce na druhou mocninu dvojčlenu

$$2(x^2 - 4x + 4) = -12y + 16 + 8,$$

přepíšeme na mocninu a z pravé strany vytkneme $2(x-2)^2 = -12(y-2)$,

rovnici vydělíme 2 a máme vrcholovou rovnici $(x-2)^2 = -6(y-2)$.

Vrchol paraboly je $V[2,2]$, $p = 3$, osa $o//y$, $F[2, \frac{7}{2}]$, rovnice řídící přímky $y = \frac{1}{2}$.

Poznámka

Parametr p určuje, jak moc je parabola „otevřená“ či „uzavřená“. Znaménko u parametru označí směr „ otevření“ paraboly (vpravo, vlevo, nahoru, dolů).

Úlohy k samostatnému řešení

45. Obecnou rovnici paraboly převeďte na vrcholový tvar a určete její charakteristické prvky:

a) $3x^2 + 36x - y + 108 = 0$,

b) $x^2 + 10x - 4y + 37 = 0$,

c) $3y^2 - x - 12y + 18 = 0$.

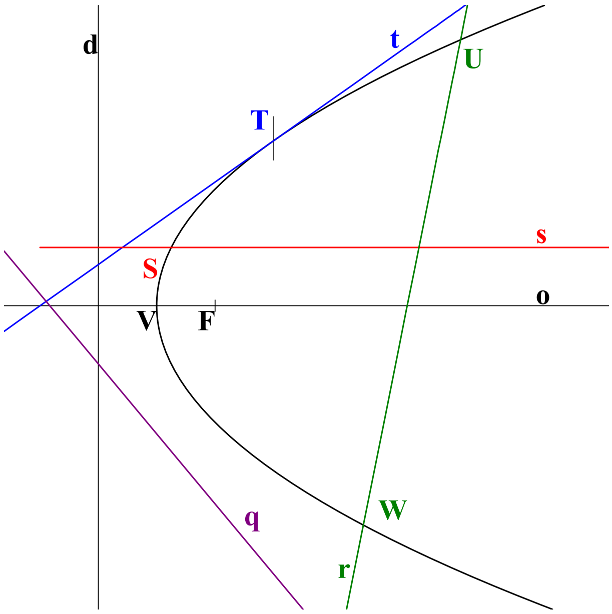
7.6.2. Vzájemná poloha paraboly a přímky

Výklad

Přímka, která má s parabolou společný právě jeden bod a není rovnoběžná s osou paraboly, se nazývá **tečna** paraboly.

Přímka, která má s parabolou společné právě dva body, nebo je rovnoběžná s osou paraboly, se nazývá **sečna** paraboly. Sečna rovnoběžná s osou paraboly má s parabolou společný jeden bod.

Přímka, která nemá s parabolou společný žádný bod, se nazývá **vnější přímka** paraboly.



t	tečna paraboly
T	bod dotyku
r	sečna
U, W	průsečíky sečny r s parabolou
s	sečna rovnoběžná s osou paraboly
S	průsečík sečny s s parabolou
q	vnější přímka paraboly

Je-li $(x-m)^2 = 2p(y-n)$ vrcholový tvar rovnice paraboly, $o // y$, bod $T[t_1, t_2]$ je její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar

$$t: \ (x-m)(t_1-m) = p(y+t_2-2n).$$

Je-li vrcholová rovnice paraboly ve tvaru $x^2 = 2py$ a bod $T[t_1, t_2]$ její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar $t: \ xt_1 = p(y+t_2)$.

Je-li $(y-n)^2 = 2p(x-m)$ vrcholový tvar rovnice paraboly, $o // x$, bod $T[t_1, t_2]$ je její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar

$$t: \ (y-n)(t_2-n) = p(x+t_1-2m).$$

Je-li vrcholová rovnice paraboly ve tvaru $y^2 = 2px$ a bod $T[t_1, t_2]$ její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar $t: \ yt_2 = p(x+t_1)$.

Řešené úlohy

Příklad 7.6.3. Napište rovnici tečny paraboly $(x+1)^2 = 3(y-2)$ v bodě $T[2, 5]$.

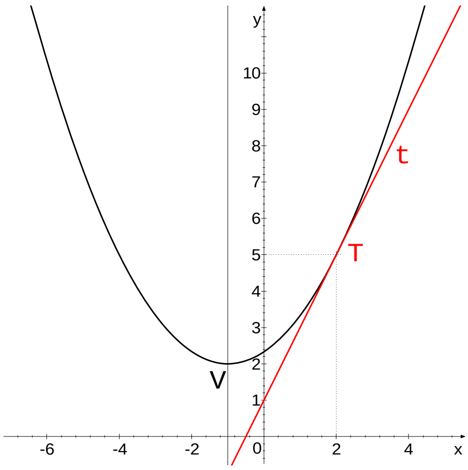
Řešení:

Nejprve si ověříme, že bod T je bodem paraboly: $(2+1)^2 = 3\cdot 3 \Rightarrow 9 = 9$,

bod T je bodem paraboly, jeho souřadnice vyhovují rovnici paraboly.

Dosadíme do rovnice tečny $(x+1)(2+1) = \frac{3}{2}(y+5-4)$

a upravíme na tvar $t: 2x - y + 1 = 0$.



Příklad 7.6.4. Určete vzájemnou polohu paraboly $x^2 = 4y$ a přímky $x - 2y + 4 = 0$.

Řešení:

Z rovnice přímky si vyjádříme $x = 2y - 4$ a dosadíme do rovnice paraboly $x^2 = 4y$.

$(2y-4)^2 = 4y \Rightarrow 4y^2 - 16y + 16 = 4y$,

$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow D > 0$.

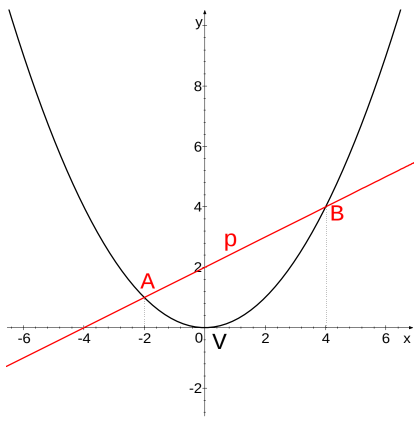
Kořeny jsou dva, $y = 1,\quad y' = 4$,

dopočítáme x, $x = -2,\ x' = 4$.

Přímka parabolu protíná v bodech

$A[-2, 1],\ B[4, 4]$.

Přímka je sečnou.



Úlohy k samostatnému řešení

46. Napište rovnici tečny paraboly $(x-2)^2 = y+25$ v bodě $A[5;-16]$.

47. Je dána parabola $y^2 = 4x$ a přímka $x-y-3=0$, určete délku tětivy, kterou přímka vytíná na parabole.

48. Napište rovnice tečen paraboly $(x+3)^2 = -2(y-4)$ v průsečících s přímkou $k: x-y+7=0$.

49. Určete hodnotu parametru $p \in R$ tak, aby přímka $x+2y-1=0$ byla tečnou paraboly $y^2 = 2px$.

50. Nejprve proveďte odhad, jakou kuželosečku může daná rovnice vyjadřovat. Potom úpravou na středový (vrcholový) tvar rozhodněte, zda odhad byl správný. Určete charakteristické prvky kuželosečky:

a) $2x^2 + 3y^2 + 12x - 6y + 9 = 0$,

b) $y^2 - 4x + 4 = 0$,

c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$,

d) $x^2 - 2y^2 + 4x + 12y - 23 = 0$,

e) $x^2 - 2x - 5y + 2 = 0$,

f) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$,

g) $7x^2 + 5y^2 - 14x - 10y + 18 = 0$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 12; b) 8. **2.** $\sqrt{65}$. **3.** $|\vec{a}| = \sqrt{20}, |\vec{b}| = 4, \varphi = 63°26'$.

4. $p: 2x+3y-6=0$. **5.** $t_a: x-7y+35=0$, $t_b: 5x-11y+47=0$, $t_c: x-y+3=0$.

6. neleží. **7.** $-2x+3y+11=0$. **8.** $3x+5y+17=0$. **9.** $4x+y-4=0$.

10. $X=[5,1]+t(-2,3)$; $x=5-2t, y=1+3t, t \in \mathrm{R}$. **11.** ano. **12.** $p: 5x+4y-23=0$.

13. $x=7t, y=2+2t, t \in \mathrm{R}$. **14.** $x=-4+2t, y=2-t, t \in \mathrm{R}$.

15. a) $p \equiv q$; b) $p \parallel q$; c) $p \times q, R[1,1]$. **16.** a) $a \equiv b$; b) $a \parallel b$;c) $a \times b, R[3,-2]$.

17. a) $k \equiv l$;b) $k \parallel l$;c) $k \times l, K[1,0]$. **18.** $63°26'$. **19.** $42°16'$. **20.** $11°19'$.

21. $k: 5x + 2y - 7 = 0$. **22.** $m = -2$. **23.** $M'[-5,2]$. **24.** $\frac{36}{5}$

25. $x - y - 3 = 0, x - y + 5 = 0$. **26.** $\sqrt{5}$.

27. a) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 144$, $S[3,-4], r = 12$.

b) $(x+7)^2 + (y-1)^2 = 81$, $S[-7,1], r = 9$.

c) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$, $S[4,3], r = 5$. **28.** $t: 4x - 3y - 21 = 0$.

29. $t: 2x + y - 26 = 0, t': 2x + y + 24 = 0$. **30.** $t: 3x + 2y - 28 = 0, t': 3x + 2y + 24 = 0$.

31. přímka je sečnou, průsečíky $P_1[4, 6], P_2[1, -3]$.

32. $|k| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ sečna, $|k| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ tečna, $|k| > \frac{\sqrt{3}}{3}$ vnější přímka.

33. $x^2 + (y-4)^2 = 16$. **34.** $(x-9)^2 + (y-6)^2 = 25$. **35.** $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$.

36. a) $\frac{(x-3)^2}{6} + \frac{(y+0,5)^2}{4} = 1$, $S[3;-0,5], a = \sqrt{6}, b = 2$, $e = \sqrt{2}$.

b) $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1, S[-1,1], a = 3, b = 2$, $e = \sqrt{5}$.

c) $\frac{(x-4)^2}{16} + y^2 = 1$, $S[4,0], a = 4, b = 1$, $e = \sqrt{15}$.

37. $y = 3$. **38.** $t_1: 8x - 9y - 30 = 0$, $t_2: x - 2y + 5 = 0$. **39.** $t_1: y = 1, t_2: x = -3$.

40. $|c| < 3$ sečna, $|c| = 3$ tečna, $|c| > 3$ vnější přímka elipsy.

41. a) $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{5} = 1$, $S[-3, -1], a = \sqrt{5}, b = 3, o_1 \parallel y$,

rovnice asymptot $u: 3x - \sqrt{5}y + 9 - \sqrt{5} = 0$, $v: 3x + \sqrt{5}y + 9 + \sqrt{5} = 0$.

b) $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{8} = 1$, $S[1,1], a = 2, b = 2\sqrt{2}$, $o_1 \parallel x, e = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{3}$,

$u: \sqrt{2}x - y - \sqrt{2} + 1 = 0$, $v: \sqrt{2}x + y - \sqrt{2} - 1 = 0$.

c) $\frac{x^2}{6} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$, $S[0,-2], a = \sqrt{6}, b = 3$, $o_1 \parallel x, e = \sqrt{15}$,

$u: 3x - \sqrt{6}y - 2\sqrt{6} = 0$, $v: 3x + \sqrt{6}y + 2\sqrt{6} = 0$.

42. $5x - 4y + 26 = 0$. **43.** $\frac{10}{3}$. **44.** $t: x = -1$.

45. a) $(x+6)^2 = \frac{1}{3}y$, $V[-6,0]$, $p = \frac{1}{6}$, $o \parallel y$. b) $(x+5)^2 = 4(y-3)$, $V[-5,3]$, $p = 2$,.

c) $(y-2)^2 = \frac{1}{3}(x-6)$, $V[6,2]$, $p = \frac{1}{6}$, $o \parallel x$.

46. $6x - y - 46 = 0$. **47.** $8\sqrt{2}$. **48.** $y = 4, 2x - y + 12 = 0$. **49.** $p = -\frac{1}{2}$.

50. a) elipsa, $S[-3, 1], a = \sqrt{6}, b = 2, e = \sqrt{2}$,

b) parabola, $V[1, 0], p = 2, F[2, 0], d: x = 0, o \parallel x$,

c) bod $[-2, 3]$,

d) hyperbola, $S[-2, 3], a = 3, b = \frac{3}{2}\sqrt{2}, e = \frac{3}{2}\sqrt{6}$,

e) parabola, $V[1, \frac{1}{5}], p = \frac{5}{2}, d: y = -\frac{21}{20}, o \parallel y$

f) kružnice, $S[0, 1], r = 2$

g) neexistuje bod, jehož souřadnice by splňovaly danou rovnici.

Klíč k řešení úloh

1. Dosadíme do vzorce pro skalární součin: a) $\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi$, b) $\vec{u}\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$,

2. Dosadíme do vzorce pro vzdálenost dvou bodů: a) $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$,

3. Dosadíme do vzorce pro velikost vektoru: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2}}$ a pro odchylku $\cos\varphi = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.

4. Souřadnice bodů dosadíme do obecné rovnice přímky, dostaneme soustavu dvou rovnic o třech neznámých a, b, c.

$$2b + c = 0$$
$$3a + c = 0$$

Za jednu z nich si dosadíme nenulovou konstantu, např. $a=2$, a zbylé dvě dopočítáme.

$$\begin{aligned} 2b+c=0 &\quad \Rightarrow \quad b=3 \\ 6+c=0 &\quad \Rightarrow \quad c=-6 \end{aligned}.$$

Nyní jen dosadíme do obecné rovnice přímky.

5. Nejdříve vypočítáme středy stran: $A'=\dfrac{B+C}{2}=\left[\dfrac{7}{2},\dfrac{11}{2}\right]$, $B'=\dfrac{A+C}{2}=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{2}\right]$, $C'=\dfrac{B+A}{2}=[3,6]$. Body A,A' určují těžnici t_a, B,B' určují t_b a C,C' určují t_c. Jejich rovnice určíme stejně jako obecnou rovnici přímky v úloze **4**.

6. Aby bod ležel na přímce, musí jeho souřadnice splňovat rovnici přímky, dosadíme tedy souřadnice bodu do rovnice přímky a vyjde-li $0=0$, je bod bodem přímky. V opačném případě na ní neleží.

7. Souřadnice normálového vektoru dosadíme do obecné rovnice přímky $ax+by+c=0$ tak, aby $a=-2, b=3$. Po té dosadíme do rovnice bod A a vypočítáme c.

8. Využijeme vlastnosti, že rovnoběžné přímky mají rovnoběžné (stejné) normálové vektory. $p: 3x+5y+c=0$, konstantu c vypočítáme dosazením bodu K do této rovnice.

9. Využijeme vlastnosti, že normálový vektor kolmice je zároveň směrovým vektorem přímky p. $p: 4x+y+c=0$, konstantu c vypočítáme dosazením bodu R do této rovnice.

10. Vypočítáme souřadnice směrového vektoru $\vec{u}=B-A=(u_1,u_2)$ a dosadíme do obou rovnic.

11. Leží-li bod na přímce, pak musí splňovat rovnici $[-4,2]=[1,-13]+t(-1,3)$. Tu rozepíšeme do soustavy a pokud vyjde jediné řešení, pak bod na přímce leží, v opačném případě na ní neleží.

12. Z parametrických rovnic získáme souřadnice bodu $[3,2]$ a směrového vektoru $(4,-5)$, z něj pak normálový vektor $(5,4)$ a dosadíme do obecné rovnice přímky. Nebo vyloučíme ze soustavy parametr t.

13. Normálový vektor má souřadnice $\vec{n} = (-2, 7)$, z něj budeme mít směrový vektor $(7, 2)$.

Bod si na přímce vybereme, jednu jeho souřadnici zvolíme, např. $x = 0$, dosadíme do rovnice a vypočítáme y.

14. Využijeme vlastnosti, že normálový vektor přímky q je směrovým vektorem přímky p, tzn. $\vec{n}_q = (2, -1) = \vec{u}_p$.

15. a) Porovnáme normálové vektory, jsou-li lineárně závislé, prověříme, zda není jedna rovnice násobkem druhé. Pokud je, jsou totožné.

b) Porovnáme normálové vektory, jsou-li lineárně závislé, prověříme, zda není jedna rovnice násobkem druhé. Pokud nejsou, jsou rovnoběžné.

c) Porovnáme normálové vektory, nejsou-li lineárně závislé, jsou přímky různoběžné a najdeme jejich průsečík vyřešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých.

16. a) Dosadíme za x a y přímky a rovnice přímky b. Budeme mít jednu rovnici o jedné neznámé, vyjde-li $0 = 0$, pak jsou přímky totožné.

b) Dosadíme za x a y přímky a rovnice přímky b. Budeme mít jednu rovnici o jedné neznámé, vyjde-li $10 = 0$ nebo jiný nesmysl, pak jsou přímky rovnoběžné.

c) Dosadíme za x a y přímky a rovnice přímky b. Budeme mít jednu rovnici o jedné neznámé, vyjde-li $t = k$ (k je nějaké reálné číslo), pak jsou přímky různoběžné a najdeme jejich průsečík.

17. a) Porovnáním proměnných x a y dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, má-li nekonečně mnoho řešení, jsou přímky totožné.

b) Porovnáním proměnných x a y dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, nemá-li žádné řešení, jsou přímky rovnoběžné.

c) Porovnáním proměnných x a y dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, má-li jediné řešení, jsou přímky různoběžné a najdeme jejich průsečík.

18. Z obecných rovnic získáme normálové vektory $\vec{n} = (3, -4), \vec{n}' = (1, 2)$ a dosadíme do vzorce: $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}\vec{n}'|}{|\vec{n}||\vec{n}'|}$.

19. Body nám určí směrové vektory $\vec{u} = B - A = (2,-3)$, $\vec{v} = L - K = (4,-1)$ obou přímek, dosadíme do vzorce: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u}\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.

20. Najdeme souřadnice směrových vektorů $\vec{s} = (1,3)$, $\vec{s}\,' = (-4,-7)$ a dosadíme do vzorce: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u}\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.

21. Využijeme vztahu: kolmé přímky mají kolmé normálové vektory nebo normálový vektor jedné přímky je směrovým vektorem kolmice. $k: 5x + 2y + c = 0$, konstantu c vypočítáme dosazením bodu A do této rovnice.

22. Kolmé přímky mají kolmé normálové vektory a proto platí: $\vec{n}\vec{n}' = 0$.

23. Bodem M vedeme přímku kolmou k přímce p, normálový vektor přímky p je směrovým vektorem kolmice, $k: x = 1 + 3t, y = -2 - 2t$. Pak jen dopočítáme průsečík přímek p a k.

24. Parametrické rovnice přímky převedeme na obecnou rovnici a pak dosazením do vzorce $d(H,b) = \dfrac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ získáme hledanou vzdálenost.

25. Nejlepším návodem bude dobře prostudovat **Příklad 7.2.18.**.

26. Na jedné přímce si zvolíme bod, např. $A[-9,0] \in q$ a vypočítáme jeho vzdálenost do druhé přímky pomocí vzorce: $d(A,p) = \dfrac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

27. a) Rovnici $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 119 = 0$ upravíme na středový tvar tak, že výrazy $x^2 - 6x$ a $y^2 + 8y$ doplníme na druhou mocninu dvojčlenu.

Dostaneme $(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) - 9 - 16 - 119 = 0$ a odtud středový tvar rovnice kružnice je $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 144$, $S[3,-4]$ a $r = 12$.

27. b) a c) budeme postupovat jako v úloze **27.**a).

28. Ověříme, zda je bod A bodem kružnice. Pak pouze dosadíme do rovnice tečny kružnice $t:(x-m)(t_1-m)+(y-n)(t_2-n)=r^2$ a upravíme ji.

$t:(x-2)(6-2)+(y-4)(1-4)=25 \Rightarrow t:4x-3y-21=0$.

29. Prostudujte si **Příklad 7.3.7.**. Body dotyku budou mít souřadnice $T_1[9,8], T_2[-11,-2]$.

30. Prostudujte si **Příklad 7.3.7.** a poznámku, která za ním následuje. Body dotyku budou mít souřadnice $T_1[8,2], T_2[-4,-6]$.

31. Rovnice kružnice $k:\ (x-1)^2+(y-2)^2=25$, $\overrightarrow{AB}=B-A=(3,9)$, přímku si vyjádříme v parametrickém tvaru $p:\ x=2+3t,\ y=9t$ a dosadíme do rovnice kružnice. Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $9t^2-3t-2=0$, která má dva reálné kořeny $t_1=\frac{2}{3}, t_2=-\frac{1}{3}$. Dosadíme je postupně do parametrického vyjádření přímky a získáme tak souřadnice průsečíků $P_1[4,\ 6],\ P_2[1,-3]$. Přímka je sečnou.

32. Rovnici přímky dosadíme do rovnice kružnice a po úpravě získáme rovnici $x^2(1+k^2)-2x(k^2-1)+k^2=0$, která má diskriminant $D=4(k^2-1)^2-4k^2(1+k^2)$.

Po úpravě položíme $D=0$, to znamená: $-3k^2+1=0 \Rightarrow 3k^2=1 \Rightarrow |k|=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$|k|<\frac{\sqrt{3}}{3}$ sečna, $|k|=\frac{\sqrt{3}}{3}$ tečna, $|k|>\frac{\sqrt{3}}{3}$ vnější přímka kružnice.

33. Nejdříve vypočítáme průsečíky přímky a zadané kružnice (budeme řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jedna rovnice je kvadratická). $B[0,0], C[-4,4]$

Nyní vezmeme všechny tři body, které máme a postupně je dosadíme do rovnice kružnice. Dostaneme soustavu tří kvadratických rovnic o třech neznámých m,n,r.

$m^2+n^2=r^2$,
$(-4-m)^2+(4-n)^2=r^2$,
$(4-m)^2+(4-n)^2=r^2$.

Malou nápovědu získáte v **Příkladu 7.3.8.**, tam byly dány dva body.

34. Leží-li dva body na kružnici, dosazením souřadnic bodů do rovnice kružnice získáme dvě rovnice o třech neznámých, použijeme opět **Příklad 7.3.8.** jako nápovědu**.**

Střed leží na přímce p, musí pro jeho souřadnice platit $3m-4n-3=0$. To je třetí rovnice. Soustavu vyřešíme.

$$(12-m)^2+(10-n)^2=r^2,$$
$$(6-m)^2+(2-n)^2=r^2,$$
$$3m-4n-3=0.$$

35. Pro bod na ose prvního kvadrantu platí, že $y=x\wedge x\geq 0$, protože se jedná o střed kružnice, jsou jeho souřadnice $S[m,m]$. Tento bod musí mít stejnou vzdálenost od obou přímek.

$\dfrac{|3m+4m+6|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|-5m+12m+38|}{\sqrt{25+144}}$, protože je $m\geq 0$, odstraníme absolutní hodnotu a rovnici vyřešíme, tzn. $\dfrac{7m+6}{5}=\dfrac{7m+38}{13}\Rightarrow 13(7m+6)=5(7m+38)\Rightarrow 56m=112\Rightarrow$ $m=2$, pak $r=4$.

36. a) Rovnici $2x^2+3y^2-12x+3y+6{,}75=0$ upravíme na středový tvar tak, že výrazy $2x^2-12x$ a $3y^2+3y$ doplníme na druhé mocniny dvojčlenů.

Dostaneme $2\left(x^2-6x+9\right)+3\left(y^2+y+\dfrac{1}{4}\right)-18-\dfrac{3}{4}+6,75=0$ a odtud

$2\left(x-3\right)^2+3\left(y+\dfrac{1}{4}\right)^2=12$. Rovnici vydělíme 12 a dostaneme středový tvar rovnice elipsy: $\dfrac{\left(x-3\right)^2}{6}+\dfrac{\left(y+0,5\right)^2}{4}=1$, střed $S\left[3;-0,5\right]$, hlavní poloosa $a=\sqrt{6}, b=2$, $e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$.

36. b) a c) budeme postupovat jako v úloze **36** a).

37. Ověříme, že bod A leží na elipse , její rovnici převedeme na středový tvar

$$\frac{(x+2)^2}{20}+\frac{(y-1)^2}{4}=1,$$

a pak dosadíme do rovnice tečny elipsy

$$t:\frac{\left(x-m\right)\left(t_1-m\right)}{a^2}+\frac{\left(y-n\right)\left(t_2-n\right)}{b^2}=1.$$

38. Hledaná tečna má rovnici: $t : \frac{xt_1}{9} + \frac{yt_2}{4} = 1$.

Bod $M[15, 10]$ je bodem tečny. Dosadíme ho tedy a dostaneme rovnici: $\frac{15t_1}{9} + \frac{10t_2}{4} = 1$.

Toto je rovnice tečny a ta má s elipsou společný právě jeden bod. Tento bod dotyku budeme nyní hledat.

Z rovnice vyjádříme jednu neznámou: $t_1 = \frac{6 - 15t_2}{10}$ a dosadíme do rovnice elipsy

$4x^2 + 9y^2 = 36$ za x, za y dosadíme t_2,

$$4\left(\frac{6-15t_2}{10}\right)^2 + 9t_2^2 = 36.$$

Rovnici upravíme a dostaneme: $25t_2^2 - 10t_2 - 48 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{8}{5}, \quad t_2' = -\frac{6}{5}$.

$$t_1 = \frac{6-15t_2}{10} = -\frac{9}{5} \quad \Rightarrow \quad T\left[-\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right],$$

$$t_1' = \frac{6-15t_2}{10} = \frac{12}{5} \quad \Rightarrow \quad T'\left[\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\right].$$ Získali jsme body dotyku tečen.

Nyní v těchto bodech zjistíme rovnice tečen a napíšeme jejich rovnice:

$t_1 : 8x - 9y - 30 = 0$, $t_2 : -x + 2y - 5 = 0$.

39. Najdeme průsečíky přímky s elipsou $T_1[-1,1], T_2[-3,0]$ a v nich hledané tečny.

40. Do rovnice elipsy dosadíme rovnici přímky a dostaneme $x^2 + 4c^2 - 36 = 0$.

Diskriminant $D = -4(4c^2 - 36)$, $D = 0 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow |c| = 3$

$|c| < 3$ sečna, $|c| = 3$ tečna, $|c| > 3$ vnější přímka elipsy.

41. a) Rovnici $9x^2 - 5y^2 + 54x - 10y + 121 = 0$ upravíme na středový tvar tak, že výrazy $9x^2 + 54x$ a $5y^2 + 10y$ doplníme na druhé mocniny dvojčlenů.

Dostaneme $9\left(x^2 + 6x + 9\right) - 5\left(y^2 + 2y + 1\right) - 81 + 5 + 121 = 0$ a odtud

$9\left(x+3\right)^2 - 5\left(y+1\right)^2 = -45$. Rovnici vydělíme -45 a dostaneme středový tvar rovnice hyperboly: $\frac{(y+1)^2}{9}-\frac{(x+3)^2}{5}=1$ se středem $S[-3,-1]$, hlavní osa je rovnoběžná s osou y a vedlejší osa je rovnoběžná s osou x. Její poloosy mají proto velikost $a=3, b=\sqrt{5}$.

Rovnice asymptot jsou $u: 3x-\sqrt{5}y+9-\sqrt{5}=0, v: 3x+\sqrt{5}y+9+\sqrt{5}=0$.

41. b) a c) stejný postup jako v úloze a).

42. Ověříme, že bod A patří hyperbole a najdeme v něm tečnu dosazením do rovnice:

$$t: \frac{(y-n)(t_2-n)}{a^2}-\frac{(x-m)(t_1-m)}{b^2}=1.$$

43. Najdeme průsečíky přímky s hyperbolou $A[3,0], B\left[5,\frac{8}{3}\right]$, jejich vzdálenost spočítáme podle vzorce: $|AB|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$.

44. Průsečík přímky $y=x+1$ s danou hyperbolou je jeden $R[-1, 0]$, ale to je zároveň hlavní vrchol hyperboly A, proto rovnice tečny je $x=-1$, je to vrcholová tečna.

45. a) Rovnici paraboly $3x^2+36x-y+108=0$ upravíme na vrcholový tvar: $(x+6)^2=\frac{1}{3}y$.

Vrchol má souřadnice $V[-6,0]$, parametr $p=\frac{1}{6}$.

b) a c) postup podobný jako a).

46. Ověříme, že bod A leží na parabole a pak jeho souřadnice dosadíme do rovnice tečny:

t: $(x-m)(t_1-m)=p(y+t_2-2n)$, tj. $(x-2)(5-2)=\frac{1}{2}(y-16+50)$.

47. Tětiva je část sečny, která leží uvnitř paraboly. Musíme najít průsečíky přímky s parabolou $A[1,-2], B[9,6]$ a pak spočítat jejich vzdálenost podle vzorce: $|AB|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$.

48. Najdeme průsečíky přímky s parabolou, $A[-3,4], B[-5,2]$, a dosadíme do rovnice tečny.

t_A: $y=4$, t_B: $2x-y+12=0$.

49. Obecnou rovnici přímky převedeme na směrnicový tvar $y = -\frac{1}{2}(x-1)$ a porovnáme se zápisem rovnice tečny paraboly $yt_2 = p(x+t_1)$, takže $t_2 = 1$, $p = -\frac{1}{2}$ a $t_1 = -1$.

Ověříme, že bod dotyku $T[-1, 1]$ je bodem tečny i paraboly.

50. a) Rovnici upravíme na středový tvar tak, že výrazy $2x^2 + 12x$ a $3y^2 - 6y$ doplníme na druhé mocniny dvojčlenů.

Dostaneme $2(x^2 + 6x + 9) - 18 + 3(y^2 - 2y + 1) - 3 + 9 = 0$ a odtud

$$2(x+3)^2 + 3(y-1)^2 = 12.$$

Rovnici vydělíme 12 a dostaneme středový tvar rovnice elipsy $\frac{(x+3)^2}{6} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

Z rovnice určíme charakteristické prvky elipsy uvedené ve výsledku.

b) Vrcholová rovnice paraboly $y^2 = 4(x-1)$.

c) Rovnici upravíme následovně: $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = -13 + 4 + 9 \Rightarrow$

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 0$, této rovnici vyhovují pouze souřadnice bodu $[-2, 3]$.

d) Jedná se o rovnici hyperboly, protože kvadratické členy mají opačná znaménka a upravíme její rovnici takto: $x^2 + 4x + 4 - 2(y^2 - 6y + 9) = 23 + 4 - 18$,

$(x+2)^2 - 2(y-3)^2 = 9 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{\frac{9}{2}} = 1$, střed $S[-2, 3]$, $a = 3$, $b = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

e) Rovnici si zapíšeme do tvaru $x^2 - 2x = 5y - 2$, výraz na levé straně doplníme na mocninu dvojčlenu $x^2 - 2x + 1 = 5y - 2 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 5y - 1$.

Jedná se o rovnici paraboly, její vrcholový tvar bude $(x-1)^2 = 5(y - \frac{1}{5})$.

Vrchol paraboly $V[1, \frac{1}{5}]$, $p = \frac{5}{2}$, $o \parallel y$, $d: y = n - \frac{p}{2} = \frac{1}{5} - \frac{5}{4} = -\frac{21}{20}$.

f) Po úpravě dostaneme středový tvar rovnice kružnice $x^2 + (y-1)^2 = 4$.

g) Po úpravě doplněním dvojčlenů na druhé mocniny dostaneme rovnici

$7(x-1)^2 + 5(y-1)^2 = -6$, součet druhých mocnin se nemůže rovnat zápornému číslu, proto neexistuje žádný bod, jehož souřadnice by splňovaly danou rovnici.

Kontrolní otázky

1. Co je orientovaná úsečka a volný vektor?
2. Jak vypočítáte velikost vektoru?
3. Jak vypočítáte skalární součin dvou vektorů?
4. Jak vypočítáte odchylku dvou vektorů?
5. Co platí pro skalární součin kolmých vektorů?
7. Jak poznáte kolineární vektory?
8. Jak zapíšete obecnou rovnici přímky?
9. Jak zapíšete parametrické rovnice přímky?
10. Co platí pro směrový a normálový vektor přímky?
11. Jaká je vzájemná poloha dvou přímek v rovině?
12. Jak vypočítáte odchylku dvou přímek?
13. Jak vypočítáte vzdálenost dvou bodů?
14. Jak vypočítáte vzdálenost bodu od přímky?
15. Jak vypočítáte vzdálenost dvou rovnoběžek?
16. Definujte kružnici, zapište středovou rovnici kružnice.
17. Co je to tečna kružnice? Zapište její rovnici.
18. Definujte elipsu, zapište středovou rovnici elipsy.
19. Co je to tečna elipsy? Zapište její rovnici.
20. Definujte hyperbolu, zapište středovou rovnici hyperboly.
21. Co je to tečna hyperboly? Zapište její rovnici.
22. Definujte parabolu, zapište vrcholovou rovnici paraboly.
23. Co je to tečna paraboly? Zapište její rovnici.

Odpovědi najdete v textu.

Kontrolní test

1. Velikost vektoru $\vec{a} = (3,-4)$ je rovna:

a) 13, b) 5, c) $5\sqrt{3}$, d) 3.

2. Skalární součin vektorů $\vec{a} = (1,2)$ a $\vec{b} = (-4,2)$ je roven:

a) 3, b) $5\sqrt{3}$, c) 0, d) -2.

3. Vektory $\vec{a} = (-1,1)$ a $\vec{b} = (-4,4)$ jsou:

a) kolmé, b) kolineární, c) jednotkové, d) opačné.

4. Která z uvedených rovnic je obecnou rovnicí přímky jdoucí body $K[1,2], L[2,1]$?

a) $x + y - 3 = 0$, b) $2x + y - 3 = 0$, c) $x - y - 3 = 0$, d) $y = x$.

5. Normálový vektor přímky $3x - 2y + 5 = 0$ má souřadnice:

a) $(2,3)$, b) $(3,2)$, c) $(3,-2)$, d) $(-2,5)$.

6. Směrový vektor přímky $2x - 3y + 6 = 0$ má souřadnice:

a) $(2,3)$, b) $(3,2)$, c) $(3,-2)$, d) $(-2,6)$.

7. Přímky $x + y - 7 = 0$ a $2x - 2y + 13 = 0$ jsou:

a) totožné, b) rovnoběžné, c) různoběžné, d) kolmé.

8. Odchylka přímek $4x - y + 3 = 0$ a $3x - 5y + 6 = 0$ je rovna:

a) $121°13'$, b) $45°$, c) $90°$, d) $30°$.

9. Vzdálenost bodů $K[1,2], L[2,1]$ je rovna:

a) $\sqrt{5}$, b) 2, c) $\sqrt{2}$, d) $\sqrt{10}$.

10. Střed kružnice $x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$ má souřadnice:

a) $S[-1,0]$, b) $S[0,-1]$, c) $S[-1,1]$, d) $S[1,0]$.

11. Je dána elipsa $25x^2 + 3y^2 = 300$. Přímka $5x + y - 20 = 0$ je její:

a) vnější přímka, b) sečna, c) tečna.

12. Je dána parabola $y^2 - 16x - 4y - 12 = 0$. Přímka $2x + 3y + 14 = 0$ je její:

a) vnější přímka, b) sečna, c) tečna.

13. Hyperbola $x^2 - y^2 + 8x + 2y - 10 = 0$ má střed o souřadnicích:

a) $S[-4,1]$, b) $S[4,-1]$, c) $S[-1,4]$, d) $S[1,4]$.

Výsledky testu

1. b), 2. c), 3. b), 4. a), 5. c), 6. b), 7. c) i d), 8. b), 9. c), 10. a), 11. c), 12. c), 13. a).