4. KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Průvodce studiem

Kapitola Komplexní čísla navazuje na kapitolu 1.Číselné obory, kde byl obor přirozených čísel postupně rozšiřován až na obor reálných čísel.

Kapitola je rozdělena do pěti podkapitol, z nichž některé jsou ještě dále rozčleněny na menší oddíly. V každém oddíle jsou nejprve zavedeny nové pojmy a vzorce. Pak většinou následují *Řešené úlohy*, sloužící jako ukázka praktického použití právě zvládnuté látky a napomáhající jejímu osvojení. Mezi nimi je zařazeno i několik zajímavých úloh k ověření platných vztahů, které jsou přínosem k výkladu. Na závěr je umístěno přehledné *Shrnutí kapitoly* a *Kontrolní otázky.* Dále jsou zadány *Úlohy k samostatnému řešení*, k nimž jsou dodány *Výsledky úloh k samostatnému řešení* a pro ty, kteří by si s některou úlohou neuměli poradit, je úplně na konci dodáno i *Kompletní řešení úloh k samostatnému řešení*. *Kontrolní test* vám poslouží k tomu, abyste si ověřili, jak jste tuto kapitolu zvládli.

Cíle

Cílem této kapitoly je vysvětlit pojem komplexní číslo, seznámit s možnými způsoby zápisu komplexních čísel a prováděním operací s nimi. Po zvládnutí této kapitoly byste měli být schopni bez problému pracovat s komplexními čísly, tj provádět s nimi běžné početní operace, stejně zběhle jako dosud s reálnými čísly.

Předpokládané znalosti

Předpokládá se, že ovládáte úpravu algebraických výrazů, početní operace s dvojčleny, binomickou větu, goniometrické funkce, základní trigonometrické vzorce, že umíte řešit lineární a kvadratické rovnice, soustavy dvou lineárních rovnic dosazovací nebo sčítací metodou.

Výklad

Zavedení komplexních čísel v matematice nám umožňuje řešit problémy, které jsou v oboru reálných čísel neřešitelné. Např. odmocnina ze záporného čísla v oboru reálných čísel není definována. V důsledku toho např. v oboru reálných čísel nelze určit kořeny kvadratické rovnice se záporným diskriminantem, ani kořeny některých algebraických rovnic vyšších stupňů.

Obor komplexních čísel $\mathbf{C}$ je rozšíření oboru reálných čísel $\mathbf{R}$ – to znamená, že obor reálných čísel je součástí oboru komplexních čísel $\mathbf{C}$ ($\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$).

V oboru komplexních čísel je definována odmocnina každého komplexního čísla (jak uvidíme dále), tedy i odmocnina reálného záporného čísla.

Komplexní čísla mají své praktické uplatnění i v jiných vědních oborech opírajících se o matematiku, hlavně ve fyzice a elektrotechnice.

4.1. Definice komplexních čísel

Komplexními čísly (prvky oboru $\mathbf{C}$) nazýváme uspořádané dvojice reálných čísel, pro něž je definována rovnost, operace sčítání a násobení.

Značíme $z = [x, y]$, $x, y \in \mathrm{R}$.

Číslu $x \in \mathbf{R}$ se říká reálná část (reálná složka) komplexního čísla z,

číslu $y \in \mathbf{R}$ se říká imaginární část (imaginární složka) komplexního čísla z.

Symbolicky se píše:

$\operatorname{Re} z = x,$
$\operatorname{Im} z = y.$

Pro dvě komplexní čísla $z_1 = [x_1, y_1]$, $z_2 = [x_2, y_2]$ definujeme:

Rovnost: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2)$.

Dvě komplexní čísla z_1, z_2 jsou si rovna právě tehdy, když jsou si rovny jejich reálné části ($x_1 = x_2$) a jejich imaginární části ($y_1 = y_2$).

Součet: $z_1 + z_2 = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$.

Součet dvou komplexních čísel je komplexní číslo, jehož reálná část je rovna součtu reálných složek těchto dvou komplexních čísel a imaginární část je rovna součtu imaginárních složek těchto dvou komplexních čísel.

Součin: $z_1 \cdot z_2 = [x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = [x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1]$.

Pozn.: Vhodnost této definice součinu dvou komplexních čísel poznáme po jeho vyjádření v algebraickém tvaru.

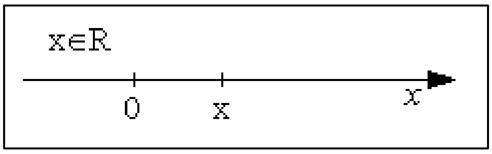
Poznámka

*Název **komplexní** je z latiny a znamená souborný, úplný, složený. Podle definice (viz výše) je komplexní číslo tvořeno dvěma složkami (reálnou a imaginární), je to tedy číslo složené.*

*Název **imaginární** (neskutečný, pomyslný) se užívá z důvodů tradičních. Původně se jako imaginární (neskutečná) čísla nazývaly číselné výrazy, k nimž se někdy při formálně správném počítání došlo a v nichž se vyskytovaly druhé odmocniny ze záporných čísel.*

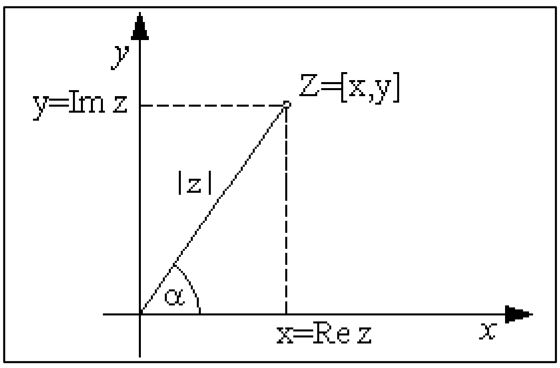
4.2. Geometrické znázornění komplexních čísel

Zopakujeme: každé reálné číslo x z oboru reálných čísel **R** lze zobrazit jako bod na přímce (reálné číselné ose). Zobrazení množiny reálných čísel na množinu bodů reálné číselné osy je vzájemně jednoznačné.



Každé komplexní číslo $z = [x, y]$ z oboru komplexních čísel **C** lze zobrazit jako bod Z roviny komplexních čísel, nazývané též **Gaussova rovina**. Je to bod, jehož x-ová souřadnice je rovna x, tj. reálné složce komplexního čísla z, a y-ová souřadnice je rovna y, tj. imaginární složce komplexního čísla z. Zobrazení množiny komplexních čísel na množinu bodů Gaussovy roviny je vzájemně jednoznačné.

Gaussova rovina je rovina, ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic (tj. souřadnicové osy na sebe kolmé, jejich průsečík je počátek $[0;0]$, přičemž jednotky na obou osách jsou shodné). Vodorovná osa x se nazývá reálná osa, svislá osa y se nazývá imaginární osa.



Na obrázku názorně vidíme, že obor komplexních čísel **C** je rozšířením oboru reálných čísel **R** (reálná osa x je součástí roviny komplexních čísel).

Pro $z = [x, y]$ je:

α **- argument** nebo také **amplituda komplexního čísla** z. Píšeme $\arg z = \alpha$ (α je orientovaný úhel, který svírá spojnice obrazu komplexního čísla z a počátku s kladným směrem osy x).

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - **absolutní hodnota** nebo také **velikost** či **modul komplexního čísla** z (vzdálenost obrazu komplexního čísla z v Gaussově rovině od počátku).

Poznámka

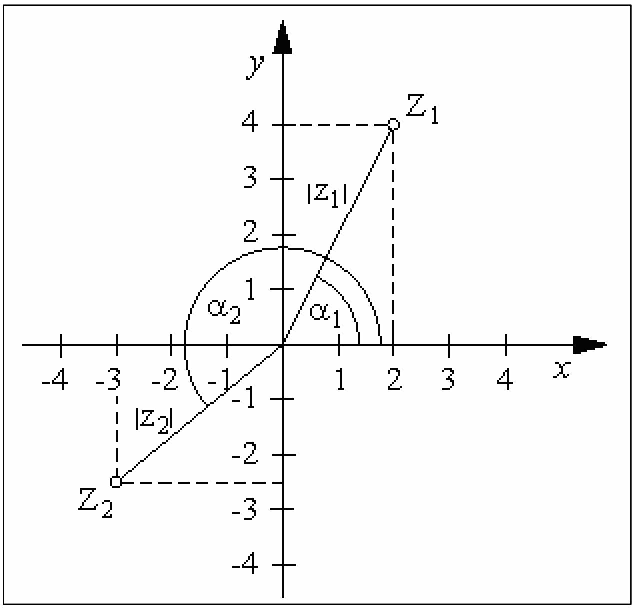
Tyto dva pojmy (argument a absolutní hodnota komplexního čísla) najdou své uplatnění při vyjádření komplexního čísla v goniometrickém tvaru. S tím se seznámíte v podkapitole 4.5.

Řešená úloha

Příklad 4.2.1. Zobrazte komplexní čísla $z_1 = [2; 4]$, $z_2 = [-3; -2,5]$ jako body Gaussovy roviny, vypočtěte jejich absolutní hodnoty, označte jejich absolutní hodnoty a argumenty.

Řešení:

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \doteq 4,47; \quad |z_2| = \sqrt{(-3)^2 + (-2,5)^2} = \sqrt{9 + 6,25} = \sqrt{15,25} \doteq 3,90.$$



4.3. Klasifikace komplexních čísel

Výklad

Rozlišujeme tyto dva druhy komplexních čísel $z = [x, y]$:

Je-li $y = 0$, pak $z = [x,0] = x$ je **reálné číslo** - uspořádaná dvojice $[x,0]$ je tedy jen formou vyjádření reálného čísla x v oboru komplexních čísel $\mathbf{C}$. V Gaussově rovině leží obrazy reálných čísel na reálné ose. Např. $[3;0] = 3$, $[0;0] = 0$, $[-5{,}3;0] = -5{,}3$.

Je-li $y \neq 0$, pak $z = [x, y]$ se nazývá **imaginární číslo**, jeho obraz v Gaussově rovině leží mimo reálnou osu. Např. $[3;4]$, $[2{,}5;-3{,}2]$. Je-li speciálně $x = 0$, pak $z = [0, y]$ se nazývá **ryze imaginární číslo**, jeho obraz v Gaussově rovině leží na imaginární ose. Obecně má tvar $[0;c]$, kde $c \in \boldsymbol{R}$. Např. $[0;3]$, $[0;-5{,}27]$.

Další pojmy

Komplexní číslo $i = [0;1]$ se nazývá **imaginární jednotka**. Pro imaginární jednotku i platí důležitý vztah: $i^2 = -1$ (lze odvodit z definice násobení komplexních čísel: $i^2 = i \cdot i = [0;1] \cdot [0;1] = [0-1;0+0] = [-1;0] = -1$).

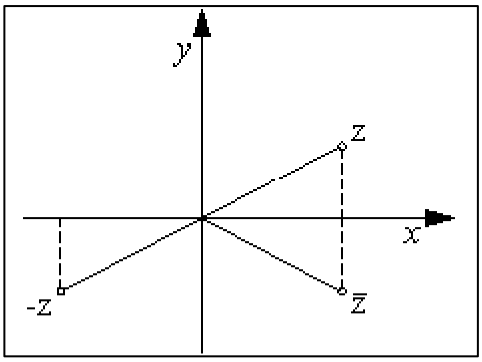
Poznámka

Někdy, zejména v elektrotechnice, se imaginární jednotka označuje písmenem j.

Komplexní číslo $-z = [-x,-y]$ se nazývá **opačné** k číslu $z = [x, y]$, jeho obraz v Gaussově rovině je středově souměrný s obrazem čísla z podle počátku soustavy souřadnic.

Komplexní číslo $\overline{z} = [x,-y]$ se nazývá **komplexně sdružené** k číslu $z = [x, y]$, jeho obraz v Gaussově rovině je osově souměrný s obrazem čísla z podle osy x.

(Pro jednoduchost se obraz komplexního čísla v Gaussově rovině označuje stejně jako dané komplexní číslo.)



Poznámka

Je zjevné, že platí: $|z| = |\overline{z}| = |-z|$.

Komplexní čísla z, pro která platí $|z| = 1$, se nazývají **komplexní jednotky**. Komplexní jednotky jsou všechna komplexní čísla, jejichž obrazy v Gaussově rovině leží na kružnici se středem v počátku a poloměrem jedna. Patří k nim např. čísla

$\left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}i\right], \left[\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right], \left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}i\right]$, čísla $[1;0]$, $[-1;0]$ - tj. reálná čísla 1, -1 a čísla $[0;1]$, $[0;-1]$ - tj. imaginární jednotka i a $-i$.

Komplexní číslo $\frac{1}{z}$ se nazývá **převrácené (reciproké)** k číslu z ($z \neq 0$).

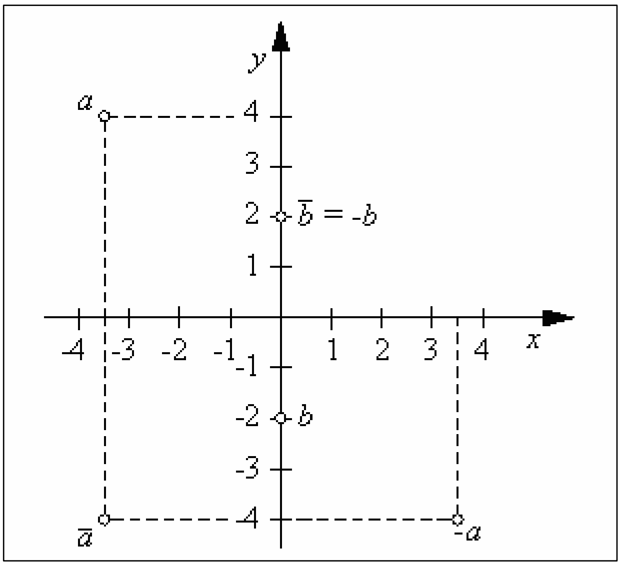
Řešené úlohy

Příklad 4.3.1. Určete, je-li dané komplexní číslo imaginární, ryze imaginární nebo reálné:
$a = [0;-2]$, $b = [-3,25;0]$, $c = [-3,72;-11,23]$, $d = 5$.

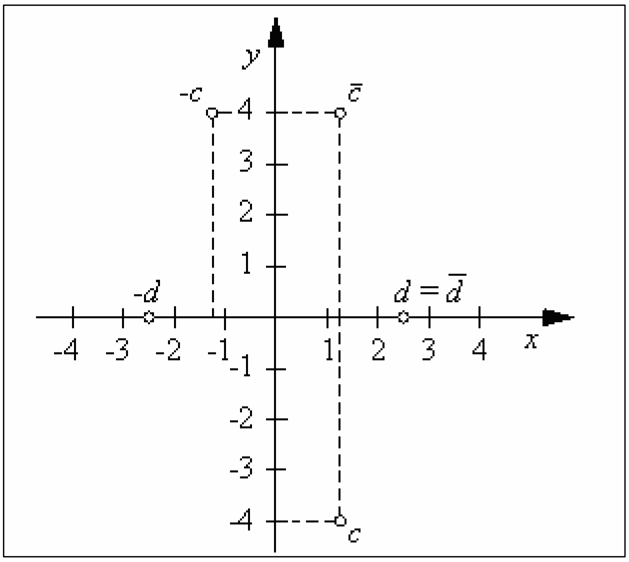
Řešení: a – ryze imaginární číslo, b – reálné číslo, c – imaginární číslo, d – reálné číslo.

Příklad 4.3.2. Jsou dána komplexní čísla $a = [-3,5;4]$, $b = [0;-2i]$, $c = [1,25;-4]$, $d = [2,5;0]$. Ke každému z nich určete číslo komplexně sdružené a číslo opačné a znázorněte je geometricky v Gaussově rovině.

Řešení: pro $a = [-3,5;4]$ je $\overline{a} = [-3,5;-4]$, $-a = [3,5;-4]$,
pro $b = [0;-2i]$ je $\overline{b} = [0;2i]$, $-b = [0;2i]$.



Pro $c=[1,25;-4]$ je $\bar{c}=[1,25;4]$, $-c=[-1,25;4]$,
pro $d=[2,5;0]$ je $\bar{d}=[2,5;0]$, $-d=[-2,5;0]$.



Příklad 4.3.3. Určete absolutní hodnoty komplexních čísel $a=[0,9;-0,25]$, $b=[-0,6;0,8]$, $c=[0,3;0,7]$, $d=[0;-1]$, $e=[-5,2;0]$. Je-li některé z nich komplexní jednotka, uveďte to.

Řešení: $|a|=\sqrt{0,9^2+(-0,25)^2}=\sqrt{0,81+0,0625}=\sqrt{0,8725}\doteq 0,934$,

$|b|=\sqrt{(-0,6)^2+0,8^2}=\sqrt{0,36+0,64}=\sqrt{1}=1$ (b je komplexní jednotka),

$|c|=\sqrt{0,3^2+0,7^2}=\sqrt{0,09+0,49}=\sqrt{0,58}\doteq 0,76$,

$|d|=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$ (d je komplexní jednotka; $d=-i$),

$|e|=\sqrt{(-5,2)^2+0^2}=5,2$.

4.4. Algebraický tvar komplexního čísla

Výklad

Algebraickým tvarem komplexního čísla $z=[x,y]$ nazýváme zápis $z=x+yi$, kde číslo $i=[0;1]$ je imaginární jednotka.

Obdržíme ho postupnou úpravou zápisu komplexního čísla z:

$$z=[x,y]=[x,0]+[0,y]=[x,0]+y\cdot[0;1]=x+yi.$$

Algebraický tvar čísla **opačného** k číslu z: $-z=-x-yi$.

Algebraický tvar čísla **komplexně sdruženého** k číslu z: $\overline{z}=x-yi$.

Algebraický tvar čísla **převráceného** k číslu z dostaneme rozšířením zlomku $\frac{1}{z}$ číslem $\overline{z}=x-yi$:

$$\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}=\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i.$$

Řešená úloha

Příklad 4.4.1. Převeďte na algebraický tvar a určete číslo opačné, komplexně sdružené a převrácené ke komplexnímu číslu $z=[-1;4]$.

Řešení:

$z=-1+4i$,

$-z=1-4i$,

$\overline{z}=-1-4i$,

$$\frac{1}{z}=\frac{(-1-4i)}{(-1+4i)(-1-4i)}=\frac{-1-4i}{1-16i^2}=\frac{-1-4i}{17}=-\frac{1}{17}-\frac{4}{17}i.$$

4.4.1. Sčítání a násobení komplexních čísel v algebraickém tvaru

Výklad

Dána dvě komplexní čísla $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$:

$$z_1+z_2=(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=\left(x_1x_2+x_1y_2i+y_1x_2i+y_1y_2i^2\right)==(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i$$

Komplexní čísla v algebraickém tvaru sčítáme a násobíme podobně jako reálné dvojčleny, sloučíme členy bez „i“ a s „i“, využijeme vztahu $i^2=-1$.

4.4.2 Odčítání a dělení komplexních čísel v algebraickém tvaru

Stejně jako v oboru reálných čísel $\mathbf{R}$, i v oboru komplexních čísel $\mathbf{C}$ jsou operace odčítání a dělení inverzní operace k operacím sčítání a násobení, tedy:

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ pro každé $z_1,\ z_2 \in \mathbf{C}$,

$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$ pro každé $z_1,\ z_2 \in \mathbf{C},\ z_2 \neq 0$.

> Pro dvě komplexní čísla $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ platí:
>
> $$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$
>
> $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} i$$

Při dělení komplexního čísla z_1 komplexním číslem $z_2 \neq 0$ v algebraickém tvaru rozšiřujeme zlomek $\frac{z_1}{z_2}$ číslem $\overline{z}_2$ komplexně sdruženým ke jmenovateli z_2 (tím zajistíme, že jmenovatel je reálné číslo).

Řešené úlohy

Příklad 4.4.2. Převeďte na algebraický tvar a určete součet, rozdíl, součin a podíl komplexních čísel $[1;-2]$, $[2;3]$.

Řešení:

$[1;-2] = 1 - 2i$, $[2;3] = 2 + 3i$,

$(1 - 2i) + (2 + 3i) = 3 + i$,

$(1 - 2i) - (2 + 3i) = -1 - 5i$,

$(1 - 2i)(2 + 3i) = 2 + 3i - 4i - 6i^2 = 8 - i$,

$$\frac{1 - 2i}{2 + 3i} = \frac{1 - 2i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} = \frac{2 - 3i - 4i + 6i^2}{4 + 9} = \frac{-4 - 7i}{13} = -\frac{4}{13} - \frac{7}{13} i.$$

Příklad 4.4.3. Převeďte komplexní číslo $a = [a_1, a_2]$ na algebraický tvar a vypočítejte

a) $a + \overline{a}$, b) $a - \overline{a}$.

Řešení:

$a = a_1 + a_2 i$

a) $a + \overline{a} = (a_1 + a_2 i) + (a_1 - a_2 i) = 2a_1$ (tj. součet dvou komplexně sdružených čísel je reálné číslo, rovné dvojnásobku jejich shodné reálné složky).

b) $a - \overline{a} = (a_1 + a_2 i) - (a_1 - a_2 i) = 2a_2 i$ (tj. rozdíl dvou komplexně sdružených čísel je ryze imaginární číslo, rovné dvojnásobku imaginární složky prvního z nich).

Příklad 4.4.4. Dokažte, že pro komplexní číslo $z = [x, y]$ platí: $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbf{R}$, tedy absolutní hodnotu komplexního čísla z je možno vyjádřit rovněž jako $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

Řešení:

$(x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2 = x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2$.

Příklad 4.4.5. Najděte reálná čísla x, y, která jsou řešením rovnice $\dfrac{3-2i}{1+i} = 2x + yi$.

Řešení:

$$\frac{3-2i}{1+i} = \frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-2i-3i-2}{2} = \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i,$$

$$2x + yi = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i;$$

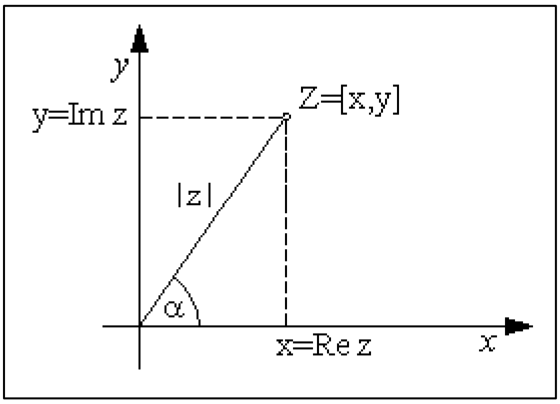
komplexní čísla jsou si rovna, rovnají-li se jejich reálné a imaginární složky, proto

$2x = \dfrac{1}{2}$, odtud $x = \dfrac{1}{4}$ a $y = -\dfrac{5}{2}$.

4.5. Goniometrický tvar komplexního čísla

Výklad

Je dáno komplexní číslo $z = [x, y]$, $z \neq 0$, jehož obraz v Gaussově rovině je bod Z o souřadnicích $[x, y]$.



Z obrázku plyne: $\cos\alpha = \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|} = \frac{x}{|z|}$, $\sin\alpha = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|} = \frac{y}{|z|}$, kde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - odtud jednoznačně určíme úhel $\alpha \in < 0, 2\pi >$.

Reálnou složku komplexního čísla z, $x = \mathrm{Re}\, z$ můžeme tedy vyjádřit jako $x = |z|\cos\alpha$, analogicky jeho imaginární složku $y = \mathrm{Im}\, z$ možno vyjádřit jako $y = |z|\sin\alpha$.

Dosazením do algebraického tvaru komplexního čísla z za složky x, y a po vytknutí $|z|$ dostaneme: $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ - tzv. **goniometrický tvar komplexního čísla** $z = [x, y]$.

Připomeňme si:

α je **argument** nebo také amplituda komplexního čísla z, ($\alpha \in < 0; 2\pi)$), píšeme $\arg z = \alpha$, je možno uvádět v radiánech nebo ve stupních;

$|z|$ je **absolutní hodnota** nebo také velikost či modul komplexního čísla z.

Každé komplexní číslo je těmito dvěma údaji jednoznačně určeno.

Protože funkce sinus a kosinus jsou periodické s periodou 2π, lze vzít za argument komplexního čísla $z \neq 0$ také každé reálné číslo tvaru $\alpha' = \alpha + 2k\pi$, kde k je libovolné celé číslo. Číslu $\alpha \in < 0; 2\pi)$ se říká **hlavní** (základní) **hodnota argumentu** komplexního čísla z.

Řešené úlohy

Příklad 4.5.1. Převeďte na goniometrický tvar komplexní čísla $a=\sqrt{3}+i$, $b=-8$.

Řešení: $\operatorname{Re} a=\sqrt{3}$, $\operatorname{Im} a=1$, $|a|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$,

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$, odtud $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, resp. $\alpha=30°$,

$a=2(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})$, resp. $a=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$.

$\operatorname{Re} b=-8$, $\operatorname{Im} b=0$, $|b|=8$,

$\cos\beta=-1$, $\sin\beta=0$, odtud $\beta=\pi$, resp. $\beta=180^\circ$,

$b=8(\cos\pi+i\sin\pi)$, resp. $b=8(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)$.

Příklad 4.5.2. Převeďte na algebraický tvar komplexní čísla $c=2(\cos 135°+i\sin 135°)$,

$d=6(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi)$.

Řešení: $c=2(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $\quad d=6(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2})=-3-3\sqrt{3}i$.

4.5.1. Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru

Výklad

Nechť jsou dána dvě libovolná nenulová komplexní čísla v goniometrickém tvaru:

$$z_1=|z_1|(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1),\ z_2=|z_2|(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2),$$

pak jejich součin

$$z_1\cdot z_2=|z_1||z_2|(\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2))$$

a jejich podíl

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\alpha_1-\alpha_2)+i\sin(\alpha_1-\alpha_2)).$$

Při násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru se jejich absolutní hodnoty násobí a argumenty sčítají.

Při dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru se jejich absolutní hodnoty dělí a argumenty odčítají.

Tyto vzorce lze snadno odvodit užitím součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus.

Odvození:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) =$$
$$|z_1||z_2|(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + i\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + i\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2) =$$
$$|z_1||z_2|(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 + i(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2) =$$
$$|z_1||z_2|(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\cdot\overline{z}_2}{z_2\cdot\overline{z}_2} = \frac{|z_1|(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)|z_2|(\cos\alpha_2 - i\sin\alpha_2)}{|z_2|(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)|z_2|(\cos\alpha_2 - i\sin\alpha_2)} =$$
$$\frac{|z_1|(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - i\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + i\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2)}{|z_2|(\cos^2\alpha \ + \sin^2\alpha)} =$$
$$\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2 + i(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\sin\alpha_2)) =$$
$$\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2)).$$

Řešené úlohy

Příklad 4.5.3. Určete součin a podíl komplexních čísel $c = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$,

$d = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

Řešení:

$$c\cdot d = 3\cdot 2(\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})) = 3\cdot 2(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}) =$$

$$= 6(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}),$$

$$\frac{c}{d} = \frac{3}{2}(\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})) = \frac{3}{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}).$$

Výklad

Výpočet součinu a podílu dvou komplexních čísel tedy zvládneme jak v algebraickém tvaru, tak i v goniometrickém tvaru.

Goniometrický tvar komplexního čísla se uplatní hlavně při výpočtu n-té mocniny a n-té odmocniny komplexního čísla.

4.5.2 Definice a výpočet n-té mocniny komplexního čísla

***n*-tá mocnina** komplexního čísla z pro $n \in \mathbf{N}$ se definuje stejně jako n-tá mocnina reálného čísla v oboru $\mathbf{R}$:

$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n-krát}$, pro každé komplexní číslo z a $n \in \mathbf{N}$

$z^0 = 1$, pro každé komplexní číslo $z \neq 0$

$z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, pro každé komplexní číslo $z \neq 0$ a $n \in \mathbf{N}$

V oboru $\mathbf{C}$ tudíž platí pro výpočet mocnin s celočíselnými mocniteli stejná pravidla jako v oboru $\mathbf{R}$.

Výpočet mocniny komplexního čísla je možný i v algebraickém tvaru:

$(a+bi)^n$ počítáme jako mocninu dvojčlenu pomocí binomické věty, výsledkem je komplexní číslo, jehož reálná část je tvořena součtem členů bez „i“, imaginární část je tvořena součtem členů s „i“.

Např.: $(2+3i)^3 = 8 + 36i + 54i^2 + 27i^3 = 8 - 54 + 36i - 27i = -46 + 9i$.

Pro výpočet vyšších mocnin už se nám vyplatí převést komplexní číslo z tvaru algebraického na goniometrický a vypočítat mocninu komplexního čísla v goniometrickém tvaru, což je jednodušší.

Výpočet mocniny komplexního čísla z v goniometrickém tvaru odvodíme ze vzorce pro součin komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$.

Pro $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ je

$$z^2 = z \cdot z = |z| \cdot |z|(\cos(\alpha+\alpha) + i\sin(\alpha+\alpha)) = |z|^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha).$$

Výsledek lze zobecnit:

$$z^n = (|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = |z|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

nebo $z^n = |z|^n(\cos n(\alpha + 2k\pi) + i\sin n(\alpha + 2k\pi))$, $k \in \mathbf{Z}$.

$\boldsymbol{n}$**-tá mocnina komplexního čísla** z je komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna n-té mocnině absolutní hodnoty čísla z a argument je roven (popřípadě až na celý násobek čísla 2π) n-násobku argumentu čísla z.

Poznámka

Je-li z *komplexní jednotka, dostaneme ze vzorce:* $z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$ *důležitý vztah, tzv.* ***Moivreovu větu****:* $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$.

Moivreovu větu můžeme použít, chceme-li vyjádřit $\cos n\alpha$, $\sin n\alpha$, *kde* $n \in N$, *pomocí* $\cos\alpha$ *a* $\sin\alpha$.

Řešené úlohy

Příklad 4.5.4. Určete $(1+i)^3$ a) v algebraickém tvaru,

b) v goniometrickém tvaru.

Řešení:

a) $(1+i)^3 = 1 + 3\cdot 1\cdot i + 3\cdot 1\cdot i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 + i^3 = -2 + 3i - i = -2 + 2i$,

b) číslo $(1+i)$ nejprve převedeme na goniometrický tvar:

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

pak určíme jeho třetí mocninu (v goniometrickém tvaru, tu pak převedeme na algebraický tvar):

$$(1+i)^3 = (\sqrt{2})^3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i.$$

Výsledky řešení a), b) jsou shodné.

Příklad 4.5.5. Odvoďte pravidlo pro výpočet mocniny i^n, kde i je imaginární jednotka, $n \in \mathbf{N}$.

Řešení: $i^2 = -1$, odtud plyne:

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$,

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i$, $i^8 = i^{4 \cdot 2} = 1^2 = 1$, $i^9 = i^{4 \cdot 2+1} = i$, atd.

Obecně: n-tou mocninu čísla i vypočítáme, když mocnitele n dělíme čtyřmi a číslo i umocníme na zbytek. Např. $i^{18} = i^{4 \cdot 4+2} = i^2 = -1$.

Příklad 4.5.6. Vyjádřete $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$ pomocí $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$.

Řešení: Podle Moivreovy věty: $\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)^4 = \cos 4\alpha + i\sin 4\alpha$.

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^4 = \cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha \cdot i\sin\alpha + 6\cos^2\alpha \cdot i^2 \cdot \sin^2\alpha + 4\cos\alpha \cdot i^3 \cdot \sin^3\alpha + \sin^4\alpha =$$
$$= \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha + i(4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha)\text{, odtud}$$

$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha,$$

$$\sin 4\alpha = 4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha.$$

4.5.3 Definice a výpočet n-té odmocniny komplexního čísla

Výklad

***n*-tá odmocnina komplexního čísla** z ($z \neq 0$, $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $n \in \mathbf{N}$) je každé komplexní číslo s, pro které platí: $s^n = z$.

Ze vzorce $z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$ plyne, že číslo $z_0 = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n})$ je n-tou odmocninou čísla z, neboť umocníme-li ho na n-tou, dostaneme právě číslo z.

Avšak také číslo $z_1 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi}{n}\right)$ resp. (uvádíme-li velikost úhlu ve stupních) $z_1 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha + 360°}{n} + i\sin\frac{\alpha + 360°}{n}\right)$ je n-tou odmocninou čísla z, neboť

$$z_1^n = |z|\left(\cos(\alpha + 2\pi) + i\sin(\alpha + 2\pi)\right) = |z|\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) = z.$$

Zřejmě tedy každé číslo

$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$, kde k je celé číslo, je n-tou odmocninou čísla z.

Zvolíme-li ve vzorci $z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ postupně $k = 0,1,\ldots,n-1$,

dostaneme n odmocnin $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, které jsou navzájem různé, neboť úhly

$\frac{\alpha}{n},\ \frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n},\ \frac{\alpha}{n}+\frac{4\pi}{n},\ldots,\ \frac{\alpha}{n}+\frac{(n-1)2\pi}{n}$ jsou navzájem různé a žádné dva z nich se neliší o celý násobek čísla 2π.

Ze vzorce $z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ snadno vidíme, že zvolíme-li za k jiné celé číslo, než některé z čísel $k = 0,1,\ldots,n-1$, nedostaneme (až na celé násobky čísla 2π) již žádné jiné úhly.

Pro $k = n+1$:

$$\frac{\alpha}{n}+\frac{2(n+1)\pi}{n} = \frac{\alpha}{n}+\frac{(2n+2)\pi}{n} = \frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}+2\pi = \frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n} \quad \text{(stejný úhel jako pro } k=1\text{)},$$

pro $k = -1$:

$$\frac{\alpha}{n}+\frac{2(-1)\pi}{n} = \frac{\alpha}{n}+\frac{-2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n}-\frac{2\pi}{n}+2\pi = \frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n} \quad \text{(stejný úhel jako pro } k=n-1\text{)}.$$

Každé komplexní číslo $z \in \mathbf{C}$ má v $\mathbf{C}$ právě n různých n-tých odmocnin $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, jejichž výpočet je dán vzorcem $z_k = \sqrt[n]{|z|}\,(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n})$, $k = 0,1,\ldots,n-1$.

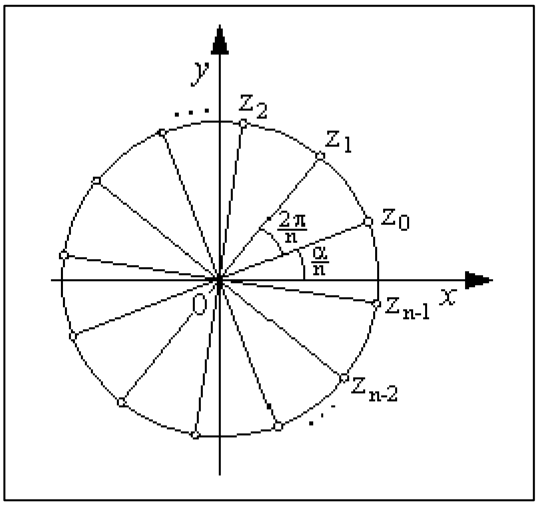
Tedy všechny n-té odmocniny komplexního čísla z mají tutéž absolutní hodnotu rovnou $\sqrt[n]{|z|}$ a jejich argumenty jsou rovny $\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}$, kde $k = 0,1,\ldots,n-1$, tj. liší se o celočíselné násobky čísla $\frac{2\pi}{n}$.

Pro obrazy $\sqrt[n]{z}$ v Gaussově rovině platí:

Je-li $n = 2$, pak odmocninami komplexního čísla z jsou dvě opačná komplexní čísla, jejichž obrazy v Gaussově rovině jsou body souměrně sdružené podle počátku, ležící na kružnici se středem v počátku a poloměrem rovným číslu $\sqrt{|z|}$.

Je-li $n > 2$, pak obrazy n-tých odmocnin komplexního čísla z, tj. čísel $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ v Gaussově rovině tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka vepsaného kružnici se středem v počátku a poloměrem rovným číslu $\sqrt[n]{|z|}$.

Graficky sestrojíme v Gaussově rovině obrazy všech n n-tých odmocnin čísla z tak, že na kružnici se středem v počátku a poloměrem $r = \sqrt[n]{|z|}$ sestrojíme nejprve vrchol, odpovídající odmocnině z_0 (jeho spojnice se středem svírá s kladným směrem osy x úhel $\frac{\alpha}{n}$), další vrcholy dostaneme tak, že k úhlu $\frac{\alpha}{n}$ postupně přičítáme (přidáváme) úhel $\frac{2\pi}{n}$ (resp. $\frac{360°}{n}$).



Poznámka

Tedy i každé reálné číslo r (jako speciální případ komplexního čísla $r = [r;0]$) má v $\mathbf{C}$ n n*-tých odmocnin, zatímco v* $\mathbf{R}$ *je jen pro* $r \geq 0$ *definováno jediné číslo* $s = \sqrt[n]{r}$, $s \geq 0$.

Řešená úloha

Příklad 4.5.7. Řešte rovnici $z^4 + 1 = 0$.

Řešení: Máme najít všechna komplexní čísla z, jejichž čtvrtá mocnina je rovna -1, což znamená najít všechny čtvrté odmocniny čísla -1.

Víme, že budou čtyři: z_0, z_1, z_2, z_3.

Číslo -1 má absolutní hodnotu 1 a argument π (resp. $180°$).

Podle vzorce $z_k = \sqrt[n]{|z|}\,(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n})$ dostaneme:

$$z_0 = \sqrt[4]{1}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

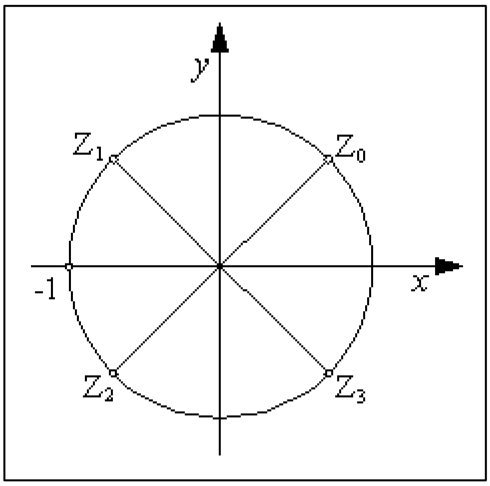
z_1 dostaneme tak, že k argumentu čísla z_0 přičteme $\dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ (resp. $90°$):

$$z_1 = 1(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

obdobně

$$z_2 = 1(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_3 = 1(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Obrazy čtvrtých odmocnin čísla -1 tvoří vrcholy pravidelného čtyřúhelníka (čtverce).



4.5.4. Řešení kvadratických rovnic v oboru komplexních čísel

Výklad

V podkapitole 3.2. Kvadratické rovnice bylo konstatováno, že je-li diskriminant $D < 0$, pak kvadratická rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení. Ukážeme, že v oboru komplexních čísel má kvadratická rovnice vždy řešení.

V oboru $\mathbf{C}$ si můžeme záporné číslo, např. -25 vyjádřit jako $25i^2$, tedy

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25i^2} = i\sqrt{25} = 5i\,.$$

Vzorec pro určení kořenů kvadratické rovnice

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ tedy pro $D<0$ vypadá následovně:

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{|D|}}{2a}$ (dostaneme dva imaginární komplexně sdružené kořeny).

Řešené úlohy

Příklad 4.5.8. Řešte v oboru $\mathbf{C}$ kvadratickou rovnici $9x^2-6x+10=0$.

Řešení: $D=b^2-4ac=36-4\cdot 9\cdot 10=36-360=-324$,

$D<0$, $\sqrt{D}=i\sqrt{|D|}=i\sqrt{324}=18i$,

$x_{1,2}=\dfrac{6\pm 18i}{18}=\dfrac{1\pm 3i}{3}$.

Kvadratická rovnice má dva imaginární komplexně sdružené kořeny:

$x_1=\dfrac{1}{3}+i$, $x_2=\dfrac{1}{3}-i$.

Příklad 4.5.9. Určete, pro které hodnoty reálného parametru m bude mít kvadratická rovnice $(m+5)x^2-2mx+(m-1)=0$ imaginární kořeny.

Řešení: $D=4m^2-4(m+5)(m-1)=4\left(m^2-m^2+m-5m+5\right)=4(5-4m)$.

Kvadratická rovnice má imaginární (komplexně sdružené) kořeny, právě když $D<0$, tedy $4(5-4m)<0$. Odtud $5-4m<0 \Rightarrow m>\dfrac{5}{4}$.

Pro $m\in\left(\dfrac{5}{4};+\infty\right)$ má daná kvadratická rovnice imaginární kořeny.

Poznámka

Podobně lze zobecnit rozklad kvadratického trojčlenu v $\mathbf{R}$ *na rozklad kvadratického trojčlenu v* $\mathbf{C}$.

Příklad 4.5.10. Rozložte v $\mathbf{C}$ kvadratický trojčlen $V=x^2-10x+26$.

Řešení: Vyřešíme nejdříve kvadratickou rovnici

$x^2-10x+26=0$; $x_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{10\pm 2i}{2}=5\pm i \quad\Rightarrow\quad V=(x-5-i)(x-5+i)$.

Příklad 4.5.11. Rozložte v $\mathbf{C}$ kvadratický dvojčlen $V = x^2 + 1$.

Řešení: $x^2 + 1 = x^2 - (-1) = x^2 - i^2$, $V = (x+i)(x-i)$.

Poznámka

Exponenciální tvar komplexního čísla

V aplikacích se zpravidla pracuje s tzv. exponenciálním tvarem komplexního čísla: $z = re^{i\varphi}$*, který dostaneme z goniometrického tvaru* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$*, položíme-li* $r = |z|$*, a* $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$*, kde* e *je Eulerovo číslo. Výhoda exponenciálního tvaru komplexních čísel spočívá v tom, že jejich násobení, dělení a umocnění přirozeným číslem se provádí podle analogických pravidel jako pro mocniny v oboru* $\mathbf{R}$*:*

pro komplexní čísla $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ *je*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

pro komplexní číslo $z = re^{i\varphi}$ *je* $z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$.

Shrnutí kapitoly

Obor komplexních čísel $\mathbf{C}$ je rozšířením oboru reálných čísel $\mathbf{R}$ ($\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$).

Komplexní číslo z je definované jako uspořádaná dvojice reálných čísel ($z = [x, y]$, x je reálná složka, y je imaginární složka komplexního čísla z) a lze ho zobrazit jako bod Gaussovy roviny.

Nejčastěji je používán algebraický tvar komplexního čísla ($z = x + yi$), který umožňuje počítat s komplexními čísly jako s reálnými dvojčleny, přičemž je využíván vztah $i^2 = -1$.

Komplexní čísla v algebraickém tvaru lze sčítat, odčítat, násobit, dělit i umocnit.

Goniometrický tvar komplexního čísla $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ umožňuje jeho vyjádření pomocí absolutní hodnoty $|z|$ a argumentu α. V tomto tvaru lze komplexní čísla pohodlně násobit, dělit, umocnit.

Výpočet n n-tých odmocnin komplexního čísla z je možný jen v goniometrickém tvaru.

Podle potřeby lze komplexní číslo $z = [x, y]$ zapsat v algebraickém nebo goniometrickém tvaru, či převést ho z jednoho tvaru do druhého.

Pozn.: V aplikacích se zpravidla pracuje s tzv. exponenciálním tvarem komplexního čísla: $z = re^{i\varphi}$, který dostaneme z goniometrického tvaru $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, položíme-li $r = |z|$, $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, kde e je Eulerovo číslo.

Kontrolní otázky

1. Je-li $\boldsymbol{R}$ obor reálných čísel, $\boldsymbol{C}$ obor komplexních čísel, který z následujících vztahů je správný: $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{R}$ nebo $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$?
2. Jak můžeme geometricky znázornit každé komplexní číslo?
3. Jaké druhy komplexních čísel rozlišujeme?
4. Co je imaginární jednotka, co je komplexní jednotka?
5. Které tvary zápisu komplexního čísla používáme?
6. Kterou operaci nelze provést s komplexními čísly zapsanými v algebraickém tvaru?
7. Které dvě operace nelze provést s komplexními čísly zapsanými v goniometrickém tvaru?
8. K čemu lze použít Moivreovu větu?
9. Kolik *n*-tých odmocnin má každé komplexní číslo z v oboru komplexních čísel $\boldsymbol{C}$?
10. Kolik je druhých odmocnin ze záporného reálného čísla v oboru komplexních čísel $\boldsymbol{C}$?

Odpovědi najdete v textu.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Převeďte komplexní čísla $c = [2;4]$, $d = [3;-2,5]$, $e = [0,5;0]$, $f = [0;-3,5]$, $g = [-1,5;3]$ do algebraického tvaru a znázorněte je v Gaussově rovině.

2. Určete, je-li dané komplexní číslo imaginární, ryze imaginární nebo reálné: $a = 3 - 4,5i$, $b = -3i$, $c = -1,5 + 2i$, $d = 5$.

3. Ke komplexnímu číslu $a = 2 + 1{,}5i$, $b = 3i$, $c = -2{,}5 - 3i$, $d = 4{,}2$ určete číslo komplexně sdružené a číslo opačné a znázorněte je v Gaussově rovině.

4. Pro která komplexní čísla platí vztah $\overline{a} = ia$, jsou-li čísla a, $\overline{a}$ komplexně sdružená?

5. Určete absolutní hodnoty (velikosti) komplexních čísel $a = 3 + 4i$, $b = -2 + i$, $c = -4i$, $d = -5$, $e = 0{,}6 - 0{,}8i$. Je-li některé z nich komplexní jednotka, uveďte to.

6. Pro která reálná čísla x jsou čísla a) $\frac{3}{4} - xi$, b) $3x + 4xi$ komplexními jednotkami?

7. Určete a) součet, b) rozdíl, c) součin, d) podíl komplexních čísel $x = 1 + 2i$ a $y = 3 - 5i$.

8. Vypočtěte $\frac{i}{3 - i}$.

9. Určete absolutní hodnotu čísla $\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$.

10. Určete kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejíž jeden kořen je $2 + 3i$.

11. Pro která reálná čísla x, y platí: $(2 + 3i)x + (4 - 3i)y = 33i - 8$?

12. V oboru komplexních čísel $\mathbf{C}$ řešte rovnici $(5 - \frac{1}{i})\overline{z} = z(1 - i) + 12$.

13. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla $a = \frac{1 - ix}{1 + ix}$ a stanovte, pro které hodnoty čísla x by komplexní číslo a bylo reálné a pro které ryze imaginární.

14. Určete goniometrický tvar komplexních čísel $a = 1 + i$, $b = -1 + \sqrt{3}i$, $c = -3$, $d = 5i$.

15. Určete algebraický tvar těchto komplexních čísel:

$a = 5(\cos 315° + i \sin 315°)$, $b = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$,

$c = 7(\cos 180° + i \sin 180°)$, $d = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

16. Určete součin a podíl komplexních čísel $c = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$, $d = 8(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi)$.

17. Vyjádřete $\cos 3\alpha$ a $\sin 3\alpha$ pomocí $\cos\alpha$ a $\sin\alpha$.

18. Vypočtěte $(1 - i)^8$ a) jako mocninu komplexního čísla v algebraickém tvaru,
b) jako mocninu komplexního čísla v goniometrickém tvaru.

19. Určete $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^{12}$.

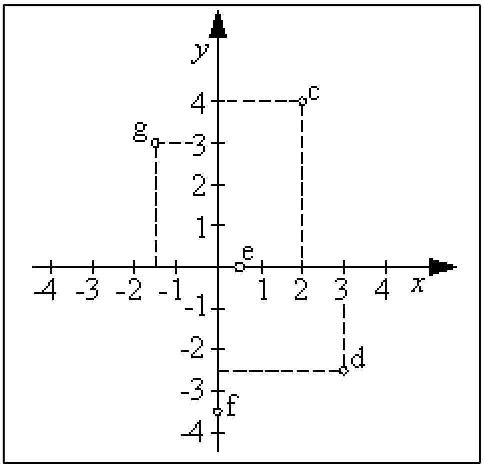
20. Určete a) $\sqrt{i}$, b) $\sqrt[3]{-1}$ a výsledky znázorněte graficky.

21. Vypočtěte $\sqrt[4]{-5 + 5\sqrt{3}i}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

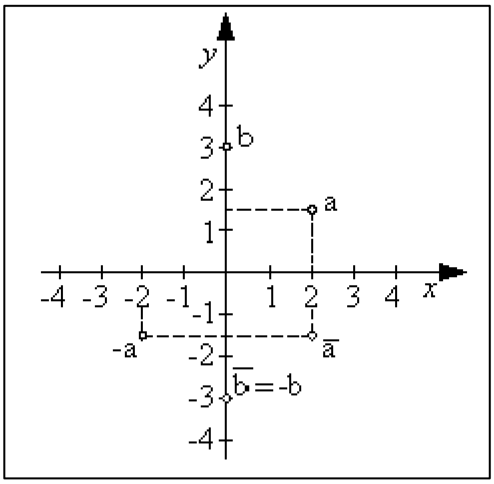
1. $c = 2 + 4i$, $d = 3 - 2{,}5i$, $e = 0{,}5 + 0i = 0{,}5$, $f = 0 - 3{,}5i = -3{,}5i$, $g = -1{,}5 + 3i$.

Jejich obrazy v Gaussově rovině:

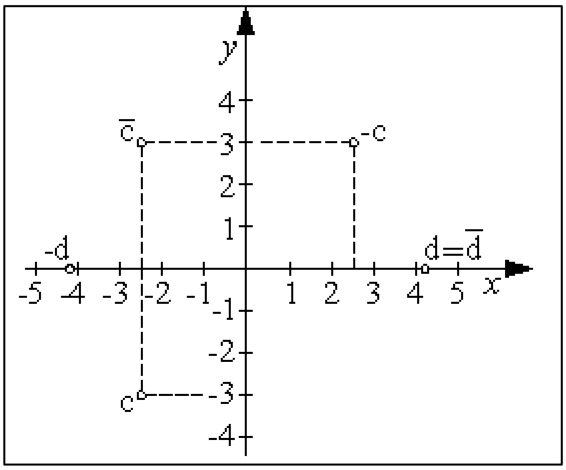


2. a je imaginární číslo, b je ryze imaginární číslo, c je imaginární číslo, d je reálné číslo.

3. $\overline{a} = 2 - 1{,}5i$, $-a = -2 - 1{,}5i$; $\overline{b} = -b = -3i$. Jejich obrazy v Gaussově rovině:



$\overline{c} = -2{,}5 + 3i$, $-c = 2{,}5 + 3i$; $\overline{d} = 4{,}2$, $-d = -4{,}2$. Jejich obrazy v Gaussově rovině:



4. Vztah platí pro všechna komplexní čísla a, jejichž reálná a imaginární složka jsou čísla opačná, tj. $a = a_1 - a_1 i$, kde a_1 je libovolné reálné číslo.

5. $|a| = 5$, $|b| = \sqrt{5}$, $|c| = 4$, $|d| = 5$, $|e| = 1$ (e je komplexní jednotka).

6. a) pro $x = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$; b) pro $x = \pm\dfrac{1}{5}$.

7. a) $4 - 3i$; b) $-2 + 7i$; c) $13 + i$; d) $-\dfrac{7}{34} + \dfrac{11}{34}i$.

8. $-\dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10}i$.

9. $|z| = 1$, jde o komplexní jednotku.

10. $x^2 - 4x + 13 = 0$. **11.** pro $x = 6$, $y = -5$. **12.** $z = 3 + i$.

13. $\operatorname{Re} a = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$, $\operatorname{Im} a = -\dfrac{2x}{1 + x^2}i$, a bude reálné pro $x = 0$, ryze imaginární pro $x = \pm 1$.

14. $a = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$, $b = 2(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3})$, $c = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$,

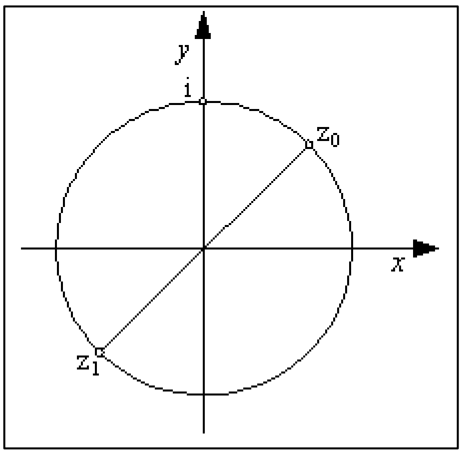
$d = 5(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2})$.

15. $a = 5\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 5\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $b = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $c = -7$ (reálné číslo), $d = 3i$ (ryze imaginární číslo)**.**

16. $cd = 24(\cos\dfrac{7}{4}\pi + i\sin\dfrac{7}{4}\pi)$, $\dfrac{c}{d} = \dfrac{3}{8}(\cos\dfrac{5}{4}\pi + i\sin\dfrac{5}{4}\pi)$.

17. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. **18.** 16. **19.** 2^{12}.

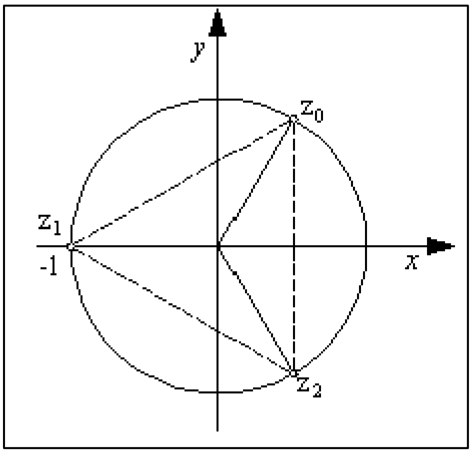
20. a) $\sqrt{i}$: $z_0 = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_1 = \cos\dfrac{5}{4}\pi + i\sin\dfrac{5}{4}\pi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.



b) $\sqrt[3]{-1}$: $z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$z_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$,

$z_2 = \cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.



21. $\sqrt[4]{-5+5\sqrt{3}i}$: $z_0 = \sqrt[4]{10}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt[4]{10}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}(\sqrt{3}+i)$,

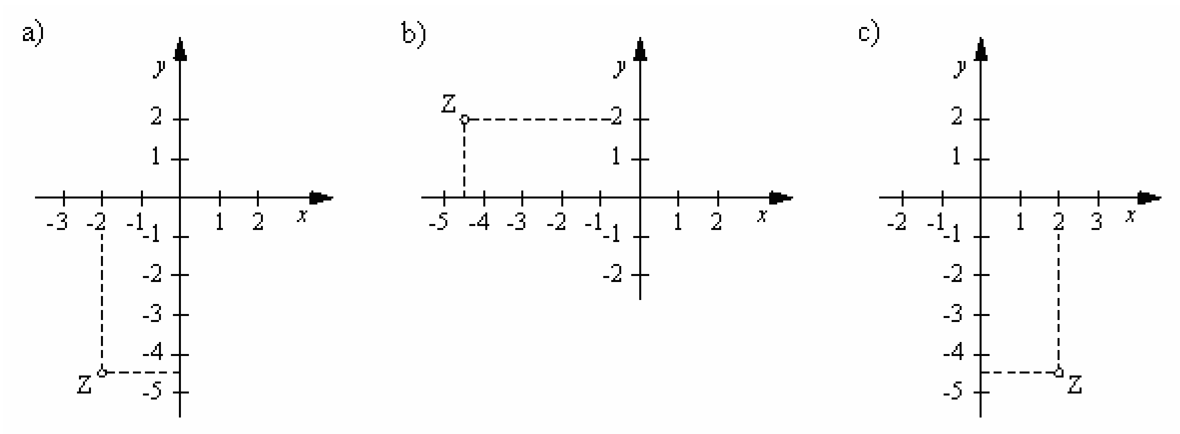
$z_1 = \sqrt[4]{10}(\cos\frac{4}{6}\pi + i\sin\frac{4}{6}\pi) = \sqrt[4]{10}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}(-1+\sqrt{3}i)$,

$z_2 = \sqrt[4]{10}(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi) = \sqrt[4]{10}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}(-\sqrt{3}-i)$,

$z_3 = \sqrt[4]{10}(\cos\frac{10}{6}\pi + i\sin\frac{10}{6}\pi) = \sqrt[4]{10}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}(1-\sqrt{3}i)$.

Kontrolní test

1. Zobrazte komplexní číslo $z = [2;-4,5]$ jako bod Gaussovy roviny.



2. Které z následujících komplexních čísel je ryze imaginární?

   a) [5,5;-2], b) [0;-1,5], c) [-3;0], d) [1;1].

3. Je-li komplexní číslo $z_1 = 3+4i$, pak $z_2 = 3-4i$ je k z_1

   a) opačné, b) převrácené, c) komplexně sdružené.

4. Absolutní hodnotu komplexního čísla $z = [x, y]$ je možno vyjádřit jako

   a) $\sqrt{z \cdot \bar{z}}$, b) $x^2 + y^2$, c) $\sqrt{x^2 + y^2}$, d) $(z - \bar{z})^2$.

5. Uveďte, které komplexní číslo je komplexní jednotkou:

   a) $\left[\frac{4}{5};-\frac{1}{4}\right]$, b) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right]$, c) $\left[\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right]$, d) $\left[\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right]$.

6. Vypočítejte součin komplexních čísel $u = 6(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$, $v = \frac{1}{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

   Výsledek vyjádřete v algebraickém tvaru.

   a) $-1+\sqrt{3}i$, b) $-\sqrt{3}+i$, c) $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.

7. Vyjádřete v goniometrickém tvaru komplexní číslo $\frac{i-3}{2+i}$.

   a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$, b) $1{,}5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, c) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

8. Vypočtěte $(1-i)^6$.

   a) $8-8i$, b) $0+8i$, c) $3-4i$.

9. Vypočítejte $\sqrt[3]{-2+2i}$.

a) $z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi\right)$,

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$,

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right)$,

b) $z_0 = 2\left(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi\right)$,

$z_1 = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$,

$z_2 = 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$,

c) $\sqrt[3]{-2} + \sqrt[3]{2i}$.

10. Řešte v oboru $\boldsymbol{C}$ kvadratickou rovnici $x^2 - 6x + 25 = 0$.

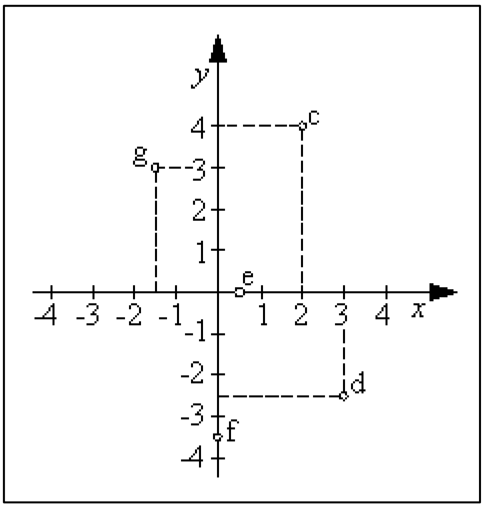
a) $x_1 = 7;\ x_2 = -1$, b) $x_1 = 2 + 1{,}5i;\ x_2 = 2 - 1{,}5i$, c) $x_1 = 3 + 4i;\ x_2 = 3 - 4i$.

Výsledky testu

1. c); 2. b); 3.c); 4. a), c); 5. b), d); 6. a); 7. a); 8. b); 9. a); 10. c).

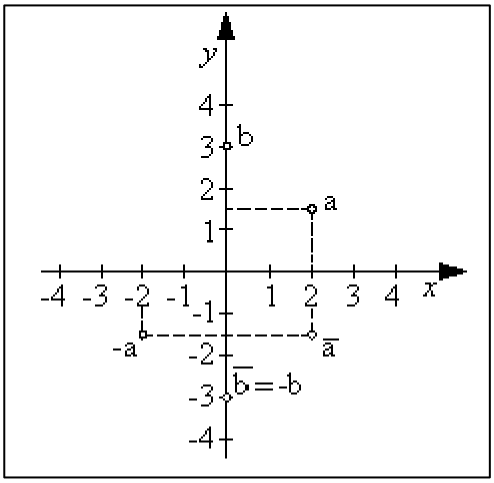
Kompletní řešení úloh k samostatnému řešení

1. Algebraický tvar komplexního čísla $z = [x, y]$ je $z = x + yi$. Komplexní číslo $z = [x, y]$ se zobrazí v Gaussově rovině jako bod o souřadnicích $[x, y]$. Tedy $c = 2 + 4i$, $d = 3 - 2{,}5i$, $e = 0{,}5 + 0i = 0{,}5$, $f = 0 - 3{,}5i = -3{,}5i$, $g = -1{,}5 + 3i$.

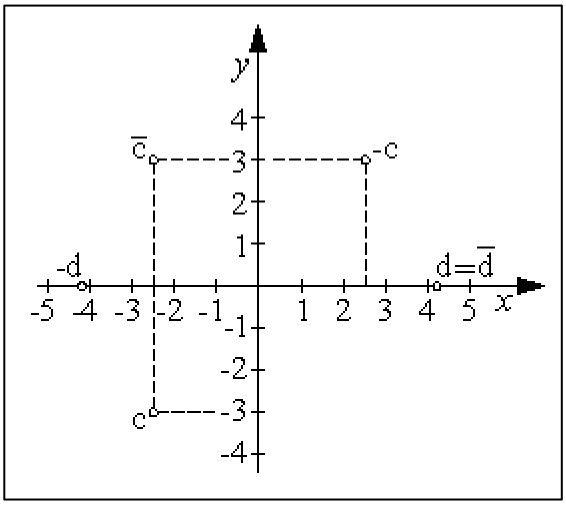


2. Komplexní číslo $z=[x,y]=x+yi$ je imaginární číslo, je-li $x\neq 0$ a $y\neq 0$, ryze imaginární číslo, je-li $x=0$ a $y\neq 0$, reálné číslo, je-li $y=0$. Takže: a je imaginární číslo, b ryze imaginární číslo, c imaginární číslo; d reálné číslo.

3. Ke komplexnímu číslu $z=[x,y]=x+yi$ je $\overline{z}=x-yi$ číslo komplexně sdružené, $-z=-x-yi$ číslo opačné; tedy pro $a=2+1{,}5i$ je $\overline{a}=2-1{,}5i$, $-a=-2-1{,}5i$; pro $b=3i$ je $\overline{b}=-3i$, $-b=-3i$. Jejich obrazy v Gaussově rovině:



pro $c=-2{,}5-3i$ je $\overline{c}=-2{,}5+3i$, $-c=2{,}5+3i$; pro $d=4{,}2$ je $\overline{d}=4{,}2$, $-d=-4{,}2$. Jejich obrazy v Gaussově rovině:



4. Nechť $a=a_1+a_2i$, $\overline{a}=a_1-a_2i$.

Položíme $\overline{a}=ia$, tj. $a_1-a_2i=i(a_1+a_2i)=-a_2+a_1i$.

Z rovnosti komplexních čísel plyne: $a_1=-a_2$. To znamená, že vztah platí pro všechna komplexní čísla a, jejichž reálná a imaginární složka jsou čísla opačná, tj. $a = a_1 - a_1 i$, kde a_1 je libovolné reálné číslo.

Ověření: např. pro $a = 3 - 3i$ je $ia = i(3-3i) = 3i - 3i^2 = 3 + 3i = \overline{a}$.

5. Absolutní hodnota (velikost) komplexního čísla $a = a_1 + a_2 i$ je $\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$, tedy:

$$|a| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \quad |b| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad |c| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4,$$
$$|d| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5, \quad |e| = \sqrt{0,6^2 + 0,8^2} = \sqrt{0,36 + 0,64} = \sqrt{1} = 1,$$

e je komplexní jednotka.

6. a) Nechť $a = \frac{3}{4} - xi$; $|a| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + x^2}$; má-li číslo a být komplexní jednotka, musí platit: $|a| = 1$. Dostaneme tedy rovnici:

$$\sqrt{\frac{9}{16} + x^2} = 1 \text{ , odtud}$$

$$9 + 16x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad 16x^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Pro $x = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ je číslo $a = \frac{3}{4} - xi$ komplexní jednotkou.

b) Nechť $b = 3x + 4xi$, $|b| = \sqrt{9x^2 + 16x^2}$; má-li číslo b být komplexní jednotka, musí platit: $|b| = 1$. Dostaneme tedy rovnici:

$$\sqrt{9x^2 + 16x^2} = 1, \text{ odtud}$$

$$25x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{25} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{5}.$$

Pro $x = \pm\frac{1}{5}$ je číslo $b = 3x + 4xi$ komplexní jednotkou.

7. $x + y = 1 + 2i + 3 - 5i = 4 - 3i$,

$x - y = 1 + 2i - (3 - 5i) = 1 + 2i - 3 + 5i = -2 + 7i$,

$x \cdot y = (1 + 2i)(3 - 5i) = 3 - 5i + 6i - 10i^2 = 13 + i$,

$$\frac{x}{y} = \frac{x\overline{y}}{y\overline{y}} = \frac{(1+2i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)} = \frac{3 + 5i + 6i + 10i^2}{9 + 25} = \frac{-7 + 11i}{34} = -\frac{7}{34} + \frac{11}{34}i.$$

8. $$\frac{i}{3-i} = \frac{i(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{-1+3i}{9+1} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i.$$

9. Nejprve určíme výsledek podílu:

$$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{(1+\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{1-3i^2}=\frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2},$$

$|z|=\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$, jde o komplexní jednotku.

10. Má-li kvadratická rovnice s reálnými koeficienty imaginární kořen, pak je i druhý kořen imaginární, komplexně sdružený. Naše rovnice má tedy kořeny 2+3i, 2-3i. Úpravou součinu kořenových činitelů obdržíme:

$(x-(2+3i))(x-(2-3i))=(x-2-3i)(x-2+3i)=(x-2)^2-(3i)^2=x^2-4x+4+9,$

hledaná kvadratická rovnice: $x^2-4x+13=0$.

11. Rovnici $(2+3i)x+(4-3i)y=33i-8$ upravíme:

$2x+3xi+4y-3yi=-8+33i$ - komplexní čísla vlevo a vpravo od rovnítka jsou si rovna, rovnají-li se jejich reálné i imaginární složky:

$$\begin{aligned}2x+4y&=-8\\3x-3y&=33\end{aligned}$$

první rovnici vydělíme dvěma, druhou rovnici vydělíme třemi, dostaneme:

$$\begin{aligned}x+2y&=-4\\x-y&=11\end{aligned}$$

z druhé rovnice vyjádříme x: $x=y+11$ a dosadíme do první rovnice:

$y+11+2y=-4$, odtud, $3y=-15 \quad\Rightarrow\quad y=-5$, $\quad x=y+11=6$.

Řešením rovnice je $x=6$, $y=-5$.

12. Neznámá $z=x+yi$, pak $\bar{z}=x-yi$; komplexní číslo $-\frac{1}{i}=-\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{-i}{(-1)}=i$,

řešíme tedy rovnici:

$(5+i)(x-yi)=(x+yi)(1-i)+12$

$5x-5yi+xi+y=x-xi+yi+y+12$

$5x+y+(x-5y)i=x+y+12+(y-x)i$

$4x-12+(x-5y)i=(y-x)i$

rovnost komplexních čísel na levé a pravé straně rovnice vyjádříme soustavou rovnic:

$$\begin{aligned}4x-12&=0\\x-5y&=y-x\end{aligned}\qquad\text{po úpravě obdržíme:}\qquad\begin{aligned}4x-12&=0\\2x-6y&=0\end{aligned}$$

z první rovnice vyjádříme x: $x=\frac{12}{4}=3$ a dosadíme do druhé rovnice: $2\cdot 3-6y=0$,

tedy $y=1$. Řešením dané rovnice je komplexní číslo $z=3+i$.

13. $a=\frac{1-ix}{1+ix}=\frac{(1-ix)^2}{(1+ix)\cdot(1-ix)}=\frac{1-2ix+i^2x^2}{1-i^2x^2}=\frac{1-x^2-2ix}{1+x^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}i$.

Číslo a bude reálné, pokud jeho imaginární složka $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad x=0$.

Číslo a bude ryze imaginární, pokud jeho reálná složka $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 1$.

14. $a=1+i$: $\operatorname{Re}a=a_1=1$, $\operatorname{Im}a=a_2=1$, tedy

$|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\ \cos\alpha=\frac{a_1}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha=\frac{a_2}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$

odtud $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Goniometrický tvar komplexního čísla $a=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

$b=-1+\sqrt{3}i$: $\operatorname{Re}b=b_1=-1$, $\operatorname{Im}b=b_2=\sqrt{3}$, tedy

$|b|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2,\ \cos\alpha=\frac{b_1}{|b|}=\frac{-1}{2},\ \sin\alpha=\frac{b_2}{|b|}=\frac{\sqrt{3}}{2},$

odtud $\alpha=\frac{2\pi}{3}$. Goniometrický tvar komplexního čísla $b=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$.

$c=-3$: $\operatorname{Re}c=c_1=-3$, $\operatorname{Im}c=c_2=0$, tedy $|c|=\sqrt{c_1^2+c_2^2}=\sqrt{(-3)^2+0^2}=3,$

jde o reálné číslo, jehož obraz v Gaussově rovině je bod na reálné ose x se souřadnicí -3,

odtud $\alpha=\pi$. (Potvrdilo by se i výpočtem: $\cos\alpha=\frac{-3}{3}=-1,\ \sin\alpha=\frac{0}{3}=0$).

Goniometrický tvar komplexního čísla $c=3(\cos\pi+i\sin\pi)$.

$d=5i$: $\operatorname{Re}d=d_1=0$, $\operatorname{Im}d=d_2=5$, tedy $|d|=\sqrt{d_1^2+d_2^2}=\sqrt{(0)^2+5^2}=5,$

jde o ryze imaginární číslo, jehož obraz v Gaussově rovině je bod na imaginární ose y se souřadnicí 5, tedy jeho argument $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Goniometrický tvar komplexního čísla $d = 5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

15. $a = 5(\cos 315° + i\sin 315°) = 5(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi) = 5(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 5\frac{\sqrt{2}}{2} - 5\frac{\sqrt{2}}{2}i$,

$b = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = 1(\cos 60° + i\sin 60°) = 1(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$c = 7(\cos 180° + i\sin 180°) = 7(\cos\pi + i\sin\pi) = 7(-1 + i\cdot 0) = -7$ (reálné číslo),

$d = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 3(\cos 90° + i\sin 90°) = 3(0 + i\cdot 1) = 3i$ (ryze imaginární číslo)

16. $c\cdot d = 3\cdot 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5}{4}\pi\right)\right) = 24\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$,

$$\frac{c}{d} = \frac{3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{8\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)} = \frac{3}{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi\right)\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\left(\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right) = \frac{3}{8}\left(\cos\left(-\frac{3}{4}\pi + 2\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi + 2\pi\right)\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right).$$

17. Podle Moivreovy věty:

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$,

rovněž platí (užitím binomické věty):

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha - i\sin^3\alpha$.

Z rovnosti pravých stran obou vztahů plyne:

$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$,

a dále (pro členy s „i“):

$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3(1 - \sin^2\alpha)\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

18. a) Užitím binomické věty:

$$(1-i)^8 = \binom{8}{0}1^8(-i)^0 + \binom{8}{1}1^7(-i)^1 + \binom{8}{2}1^6(-i)^2 + \binom{8}{3}1^5(-i)^3 + \binom{8}{4}1^4(-i)^4 +$$

$$+\binom{8}{5}1^3(-i)^5 + \binom{8}{6}1^2(-i)^6 + \binom{8}{7}1^1(-i)^7 + \binom{8}{8}1^0(-i)^8 =$$

$$=1+8(-i)+28(-i)^2+56(-i)^3+70(-i)^4+56(-i)^5+28(-i)^6+8(-i)^7+(-i)^8=$$
$$=1-8i-28+56i+70-56i-28+8i+1=16\,.$$

Úpravou výrazu lze výpočet zjednodušit:

$$(1-i)^8=((1-i)^2)^4=(1-2i+i^2)^4=(1-2i-1)^4=(-2i)^4=16i^4=16\cdot 1=16\,.$$

b) určíme goniometrický tvar komplexního čísla $z=(1-i)$:

$$\operatorname{Re} z=1, \operatorname{Im} z=-1,\ |z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2},\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\alpha=\frac{-1}{\sqrt{2}},\ \text{tedy}\ \ \alpha=\frac{7}{4}\pi\,,$$

$$(1-i)=\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi)\,,$$

$$(1-i)^8=\sqrt{2}^8(\cos(8\cdot\frac{7}{4}\pi)+i\sin(8\cdot\frac{7}{4}\pi))=2^4(\cos 14\pi+i\sin 14\pi)=16(\cos 0+i\sin 0)=16\,.$$

19. Komplexní číslo $z=1-\sqrt{3}i$ převedeme na goniometrický tvar: $|z|=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$,

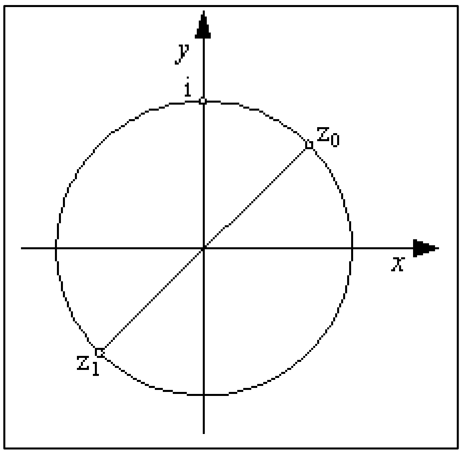
$$\cos\alpha=\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}=\frac{1}{2},\ \sin\alpha=\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow \alpha=\frac{5}{3}\pi,\ \text{tedy}\ z=2(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi)\,.$$

$$z^{12}=2^{12}\left(\cos\left(12\cdot\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(12\cdot\frac{5\pi}{3}\right)\right)=2^{12}\left(\cos\frac{60\pi}{3}+i\sin\frac{60\pi}{3}\right)=$$
$$=2^{12}\left(\cos 20\pi+i\sin 20\pi\right)=2^{12}\left(\cos 0+i\sin 0\right)=2^{12}.$$

20. Odmocňovaná komplexní čísla vyjádříme v goniometrickém tvaru a výpočet odmocnin provedeme podle vzorce $z_k=\sqrt[n]{|z|}\,(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}),\ k=0,\dots,n-1$:

a) $i=1(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}), \sqrt{i}=z_k=\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{2})$, kde $k=0,1$

neboli $z_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\quad z_1=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$:

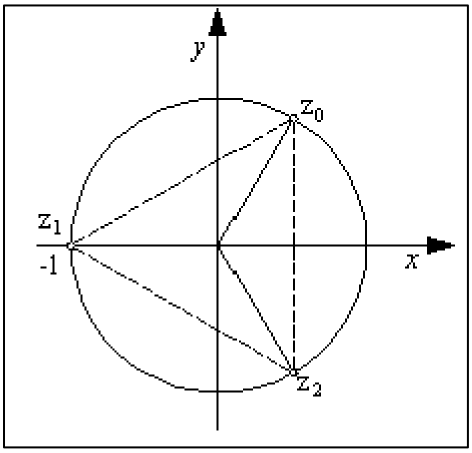


b) $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$,

$\sqrt[3]{-1} = z_k = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3})$, kde $k = 0,1,2,$

neboli $z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$z_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, $z_2 = \cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$:



21. Odmocňované komplexní číslo vyjádříme v goniometrickém tvaru a výpočet odmocnin provedeme podle vzorce $z_k = \sqrt[n]{|z|}\,(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n})$, $k = 0,1,\dots,n-1$:

Označíme $z = -5 + 5\sqrt{3}i$, $|z| = \sqrt{25 + 75} = 10$,

$\cos\alpha = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$; tedy $z = 10(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$.

$\sqrt[4]{z} = z_k = \sqrt[4]{10}(\cos(\frac{2\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{2\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4})) = \sqrt[4]{10}(\cos(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}))$,

kde $k = 0,1,2,3,$

neboli $z_0 = \sqrt[4]{10}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt[4]{10}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}(\sqrt{3} + i)$,

$z_1 = \sqrt[4]{10}(\cos\frac{4}{6}\pi + i\sin\frac{4}{6}\pi) = \sqrt[4]{10}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$,

$z_2 = \sqrt[4]{10}(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi) = \sqrt[4]{10}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}(-\sqrt{3} - i)$,

$z_3 = \sqrt[4]{10}(\cos\frac{10}{6}\pi + i\sin\frac{10}{6}\pi) = \sqrt[4]{10}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}(1 - \sqrt{3}i)$.