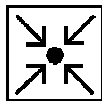


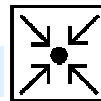
9. DVOJROZMĚRNÝ INTEGRÁL	104
9.1. Dvojměrný integrál v obdélníku.....	104
Úlohy k samostatnému řešení.....	104
9.2. Dvojměrný integrál v oblasti	104
Úlohy k samostatnému řešení.....	104
9.3. Transformace dvojměrných integrálů do polárních souřadnic	105
Úlohy k samostatnému řešení.....	105
9.4. Geometrické aplikace.....	106
Úlohy k samostatnému řešení.....	106
Výsledky úloh k samostatnému řešení	108

9. DVOJROZMĚRNÝ INTEGRÁL

9.1. Dvojměrný integrál v obdélníku



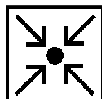
Úlohy k samostatnému řešení



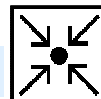
1. Vypočítejte dvojměrný integrál v obdélníku D :
 - a) $\iint_D x^2 y^3 dx dy$, $D = \{(x, y) : x \in \langle 1, 4 \rangle, y \in \langle 2, 4 \rangle\}$,
 - b) $\iint_D x e^{x+2y} dx dy$, $D = \{(x, y) : x \in \langle 1, 2 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle\}$,
 - c) $\iint_D \ln(1+2y)^{3x^2} dx dy$, D je čtyřúhelník $KLMN$, $K[0,0]$, $L[3,0]$, $M[3,2]$, $N[0,2]$,
 - d) $\iint_D xy \sin x^2 \cos y dx dy$, $D = \left\{ (x, y) : x \in \left\langle 0, \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right\rangle, y \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \right\}$,
 - e) $\iint_D \frac{y+1}{x+2} dx dy$, $D = \{(x, y) : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 1, 3 \rangle\}$,
 - f) $\iint_D (2x^2 - 3xy + 4y^3) dx dy$, $D = \{(x, y) : x \in \langle 0, 3 \rangle, y \in \langle 2, 6 \rangle\}$,
 - g) $\iint_D (x \sin y - \cos x \cos y) dx dy$, $D = \left\{ (x, y) : x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle, y \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle \right\}$,
 - h) $\iint_D \frac{1}{(x+y)^2} dx dy$, $D = \{(x, y) : x \in \langle 1, 2 \rangle, y \in \langle 1, 2 \rangle\}$,
 - i) $\iint_D \left(\frac{y}{1+x^2} - \frac{x}{1+y^2} \right) dx dy$, $D = \{(x, y) : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle\}$,
 - j) $\iint_D \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 y} \right) dx dy$, $D = \left\{ (x, y) : x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle, y \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \right\}$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

9.2. Dvojměrný integrál v oblasti



Úlohy k samostatnému řešení



2. Určete integrační meze pro $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ jednodušším způsobem, jestliže Ω je:
 - a) čtyřúhelník $K[0,0]$, $L[3,3]$, $M[3,7]$, $N[0,4]$,
 - b) čtyřúhelník $K[1,2]$, $L[6,2]$, $M[6,6]$, $N[2,6]$,
 - c) ohraničena křivkami $y = \frac{4}{x}$, $x + y = 5$,
 - d) ohraničena křivkami $y = 0$, $y = x^2 - 3x + 2$,
 - e) ohraničena křivkami $y = 0$, $y = -x^2 + x + 6$,

- f) ohraničena křivkami $y = 0$, $y = \ln x$, $x = e^2$,
- g) ohraničena křivkami $y = x + 2$, $y = -\frac{x}{2} + 2$, $y = 0$,
- h) ohraničena křivkami $y = x + 6$, $y = x^2 + 4x + 6$,
- i) ohraničena křivkami $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x \geq 0$,
- j) ohraničena křivkami $x = 1$, $y = e^x$, $y = e^{2x}$.

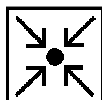
Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. Vypočítejte dvozměrný integrál v oblasti Ω :

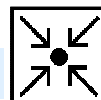
- a) $\iint_{\Omega} (x-y)^2 dx dy$, $\Omega: y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$,
- b) $\iint_{\Omega} x dx dy$, $\Omega: x = 0$, $y = x$, $x + y = 6$,
- c) $\iint_{\Omega} x dx dy$, $\Omega: y = 0$, $y = x$, $x + y = 6$,
- d) $\iint_{\Omega} (x-1) dx dy$, $\Omega: y = 4x^2$, $y = 2 - 4x^2$,
- e) $\iint_{\Omega} \frac{1}{(2-x-y)^2} dx dy$, $\Omega: y = 0$, $x = 0$, $x + y = 1$,
- f) $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$, Ω je čtyřúhelník $KLMN$, $K[0,0]$, $L[3,1]$, $M[3,3]$, $N[1,3]$,
- g) $\iint_{\Omega} x dx dy$, $\Omega: y = x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \sin x$,
- h) $\iint_{\Omega} 2y dx dy$, $\Omega: y \geq 0$, $y = \sin x$,
- i) $\iint_{\Omega} (2xy - x) dx dy$, $\Omega: y = x^3$, $y = \sqrt{x}$,
- j) $\iint_{\Omega} (x+6) dx dy$, $\Omega: y = x+6$, $y = x^2 + 4x + 6$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

9.3. Transformace dvozměrných integrálů do polárních souřadnic



Úlohy k samostatnému řešení



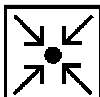
4. Transformací do polárních souřadnic vypočítejte dvozměrný integrál v oblasti Ω :

- a) $\iint_{\Omega} (x-2y) dx dy$, $\Omega: x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$,
- b) $\iint_{\Omega} \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} dx dy$, $\Omega: x^2 + y^2 \leq 2x$,
- c) $\iint_{\Omega} 3x dx dy$, $\Omega: x^2 + y^2 \leq 2y$, $x \geq 0$,

- d) $\iint_{\Omega} dx dy, \Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,$
- e) $\iint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \Omega: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,$
- f) $\iint_{\Omega} \sqrt{16 - x^2 - y^2} dx dy, \Omega: x^2 + y^2 \leq 4x,$
- g) $\iint_{\Omega} (x + y)^2 dx dy, \Omega: x^2 + y^2 \leq 2ry,$
- h) $\iint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy, \Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

9.4. Geometrické aplikace



Úlohy k samostatnému řešení



5. Vypočítejte objem tělesa, které je ohraničeno plochami:
- $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 2, x + y + 2z - 4 = 0,$
 - $x = 0, y = 0, z = 0, 6x + 4y + z - 24 = 0,$
 - $x = 2, x = -2, y = 2, y = -2, z = 0, z = 8 - x^2 - y^2,$
 - $z = 0, z = 36 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4},$
 - $x^2 + y^2 = r^2, z = 0, z = v,$
 - $y = x^2 - 1, z = y, y = 0, z = 0.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

6. Vypočítejte obsah elementární oblasti, která je ohraničena křivkami:

- $y = \sqrt{3}x, y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, x^2 + y^2 = 4,$ v I. kvadrantu ,
- $y = x^2 - 2x - 4, y = -x^2 + 4x + 4,$
- $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9,$
- $x = y^2, y = \frac{1}{x^2}, y = \frac{1}{2},$
- $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, y \leq x + 1,$
- $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq -x, y \leq x.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

7. Vypočítejte obsah části plochy:

- $z = 0, z = 4 - x^2 - y^2,$
- $z = 9, z = x^2 + y^2,$

c) $x = 0, y = 0, z = 0, 3x + 4y + 2z - 12 = 0,$

d) $z = 3, z^2 = x^2 + y^2,$

e) $z = 0, z = x^2 + y^2 - 1,$

f) $z = x + y, y = \frac{1}{2}x, y = 2x, y = 1 - x.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) 1260; b) $\frac{e^2}{2}(e^2 - 1)$; c) $27\left(\frac{5}{2}\ln 5 - 2\right)$; d) $\frac{\pi - 2}{4}$; e) $6\ln \frac{3}{2}$; f) 3696; g) $\frac{\pi^2}{8} + 1$;
 h) $\ln \frac{9}{8}$; i) 0; j) 0. 2. a) $x \in \langle 0, 3 \rangle, y \in \langle x, x + 4 \rangle$; b) $y \in \langle 2, 6 \rangle, x \in \left\langle \frac{y + 2}{4}, 6 \right\rangle$;
 c) $x \in \langle 1, 4 \rangle, y \in \left\langle \frac{4}{x}, 5 - x \right\rangle$; d) $x \in \langle 1, 2 \rangle, y \in \langle x^2 - 3x + 2, 0 \rangle$;
 e) $x \in \langle -2, 3 \rangle, y \in \langle 0, -x^2 + x + 6 \rangle$; f) $x \in \langle 1, e^2 \rangle, y \in \langle 0, \ln x \rangle$;
 g) $y \in \langle 0, 2 \rangle, x \in \langle y - 2, 4 - 2y \rangle$; h) $x \in \langle -3, 0 \rangle, y \in \langle x^2 + 4x + 6, x + 6 \rangle$;
 i) $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle, y \in \langle \sin x, \cos x \rangle$; j) $x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle e^x, e^{2x} \rangle$. 3. a) $\frac{245}{32} - \ln 4$; b) 9; c) 27;
 d) $-\frac{4}{3}$; e) $1 - \ln 2$; f) 40; g) $\frac{\pi^3}{24} + 1$; h) $\frac{\pi}{2}$; i) $\frac{1}{120}$; j) $\frac{81}{4}$. 4. a) $-\frac{32}{3}$; b) π ; c) 2;
 d) πab ; e) 2π ; f) $\frac{64}{3}\pi - \frac{256}{9}$; g) $\frac{3}{2}\pi r^4$; h) $\frac{\pi ab}{4}$. 5. a) 4; b) 96; c) $\frac{256}{3}$; d) 213π ;
 e) $\pi r^2 v$; f) $\frac{16}{15}$. 6. a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{125}{3}$; c) 8π ; d) $\frac{41}{24} - \sqrt{2}$; e) $\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}$; f) $1 + \frac{\pi}{2}$.
 7. a) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)$; b) $\frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1)$; c) $3\sqrt{29}j^3$; d) $9\sqrt{2}\pi$; e) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$; f) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.