7. DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH

7.1. Definiční oblasti

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete definiční obor funkce:

a) $z = \sqrt{x-y} - \sqrt[3]{x-y}$,

b) $z = \arcsin\left(x^2 + y^2 - 4\right)$,

c) $z = \ln(2-x) + \arccos 2y$,

d) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$,

e) $z = \sqrt{\dfrac{x+2y}{4}} - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+4}{y-1}\right)$,

f) $z = \sqrt{\dfrac{4-x^2-y^2}{1-x^2-y^2}}$,

g) $z = \sqrt{9-x^2} - \sqrt{y^2-9}$,

h) $z = \arcsin\dfrac{xy}{2}$,

i) $z = \ln(2+x+y) - \ln(2-x+y)$,

j) $z = e^{\sqrt{1+x^2-y}}$,

k) $z = \sqrt{x^2-y^2}$,

l) $z = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{y^2-1}}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

7.2. Parciální derivace

Úlohy k samostatnému řešení

2. Vypočítejte první parciální derivace:

a) $z = 4x + 5y - 3$,

b) $z = \dfrac{1}{x} + \sqrt{y}$,

c) $z = x^2y^3 + 4xy^2 - 4x$,

d) $z = 3x^2 - 2xy + y^2\sqrt{xy}$,

e) $z = \dfrac{x+y}{y-x}$,

f) $z = \sqrt{x^3 + 3y^2 + xy - 7}$,

g) $z = \dfrac{x-1}{1-y}$,

h) $z = \left(xy + \sqrt{x+y}\right)^2$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. Vypočítejte první parciální derivace:

a) $z = y\sin x$,

b) $z = \sin x \cos y$,

c) $z = \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$,

d) $z = 3\sin xy + y^2 \operatorname{cotg}(y-x)$,

e) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$,

f) $z = \arccos\sqrt{x^2+y^2}$,

g) $z = \dfrac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{y}} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}$,

h) $z = \sin\left(x^2 + \sqrt{1+y}\right)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

4. Vypočítejte první parciální derivace:

a) $z = e^{\sqrt{x^2-y^2}}$,
b) $z = \ln\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)$,

c) $z = 2^{\frac{y}{x}}$,
d) $z = \ln\dfrac{4-\sqrt{xy}}{4+\sqrt{xy}}$,

e) $z = \dfrac{x}{y}e^{xy}$,
f) $z = \sqrt{x^2+y^2}\ln(x+y)$,

g) $z = \ln\dfrac{x+\sqrt{y^2-1}}{y+\sqrt{x^2-1}}$,
h) $z = 3^{\frac{x+y}{x-y}}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5. Vypočítejte první parciální derivace:

a) $z = \sqrt{y}\sin\left(x+\sqrt{y}\right)$,
b) $z = \sin\left(x^2-2y\right)\cos y$,

c) $z = y\,\mathrm{tg}\left(x+\dfrac{x}{y}\right)$,
d) $z = 3\sin x\,\mathrm{cotg}(y+3x)$,

e) $z = x\arcsin\left(y-\dfrac{x}{y}\right)$,
f) $z = \left(y+\sqrt{1-x^2}\right)\arccos x$,

g) $z = \dfrac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\mathrm{arctg}\sqrt{y}}$,
h) $z = \sqrt{2x+y}\sin x^2$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

6. Vypočítejte druhé parciální derivace:

a) $z = 4x^2y+5y^2x-3$,
b) $z = \dfrac{y+1}{x^2}+\sqrt{y^2+x^2}$,

c) $z = \sin(xy)$,
d) $z = 3x^3-2x^2y+y^4$,

e) $z = \dfrac{y+x}{y-x}$,
f) $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$,

g) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$,
h) $z = xy+\sqrt{x+y}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

7.3. Tečná rovina a normála

Úlohy k samostatnému řešení

7. Napište rovnici tečné roviny a normály funkce v bodě:

a) $z = x^2y^3+4xy^2-4x,\ T=[1,-1,?]$,

b) $z = 2x+\sqrt{y^2-x^2},\ T=[3,5,?]$,

c) $z = \ln\dfrac{1-x+y}{1+x+y},\ T=[-1,1,?]$,

d) $z = x\sin(x+y), T = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, ?\right]$,

e) $z = \operatorname{arctg}(1-xy), T = [2,1,?]$,

f) $z = \sqrt{x^2+3y^2+2y-8}, T = [2,1,?]$,

g) $z = \sqrt{25-x^2} - \sqrt{y^2-9}, T = [-4,5,?]$,

h) $z = \sin(2x+3y), T\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, ?\right]$,

i) $z = x^2 - 2x\sqrt{y} + 3y - 4, T[1,4,?]$,

j) $z = \ln(x^2+y^2), T[1,0,?]$,

k) $z = \operatorname{arccotg}\frac{x}{y}, T[1,1,?]$,

l) $z = \frac{\sin x - \sin y}{\cos y - \cos x}, T = \left[0, \frac{\pi}{3}, ?\right]$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

8. Napište rovnici tečné roviny plochy, která rovnoběžná s danou rovinou, určete bod dotyku:

a) $z = 6x^3y - 2xy^2 + 7x - 8y - 2, \alpha: 23x - 6y - z + 8 = 0$,

b) $z = xe^y - \cos y + 3, \alpha: x + 2y - z + 6 = 0$,

c) $z = x\sqrt{y^2+x} - 6y + 3, \alpha: 23x - 16y - 6z + 7 = 0$,

d) $z = 3x^2y - 2y^3 + 7xy - 5y - 4, \alpha: 12x - 2y - z + 8 = 0$,

e) $z = \ln(x - 2y + 6), \alpha: x - 2y - z = 0$,

f) $z = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}, \alpha: 4x - 5y + 3z - 2 = 0$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

7.4. Lokální extrémy, vázané extrémy

Úlohy k samostatnému řešení

9. Určete lokální extrémy funkce:

a) $z = 4x^2 + 5y^2 - 12x + 15y + 6$,

b) $z = 3x^2 - 4xy + 6x + 4y^2 - 4y + 9$,

c) $z = e^{x+y}(x^2+y^2)$,

d) $z = 3y^3 - 6xy + y^2 + 3$,

e) $z = 4 - x^3 + x^2y - 3y^2 + 20y$,

f) $z = 4x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$,

g) $z = x^3 - 4xy + y^2 + 4x + 1$,

h) $z = \ln(xy) - 4x - 9y$,

i) $z = (x^2-1)(y^2-4)$,

j) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 5$,

k) $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14)$,

l) $z = e^{y-x}(x^2+y^2)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

10. Nalezněte vázané extrémy funkce při daných podmínkách:

a) $z = x^2 + 3xy - y^2$, podm. $x + y = 3$,

b) $z = x + y$, podm. $xy = 1$,

c) $z = 4\ln y - x$, podm. $y = x^2$,

d) $z = \sin(y+1) + \cos x$, podm. $y - x = -1$,

e) $z = 4x + xy - 5y$, podm. $x - y = 4$,

f) $z = 4x(y^2 - 2y + 4)$, podm. $xy = \dfrac{1}{4}$,

g) $z = 2x^2 + x - y^4 - 3y^2 + 1$, podm. $y = \sqrt{x}$,

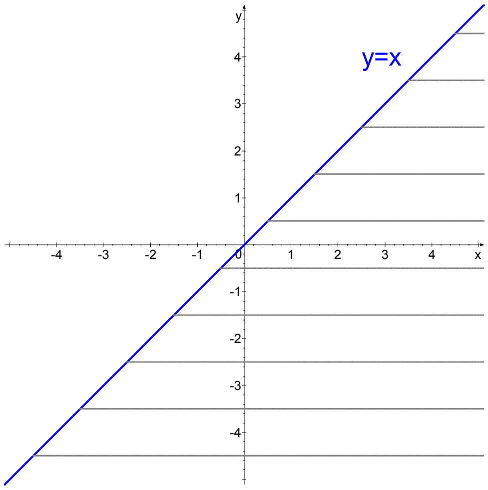
h) $z = \ln(x + y)$, podm. $xy = 1$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

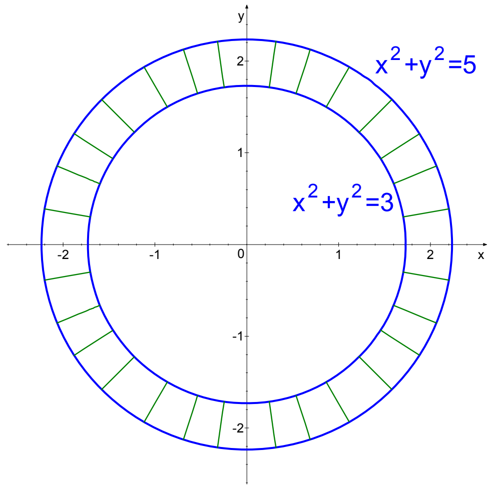
Výsledky úloh k samostatnému řešení

1.

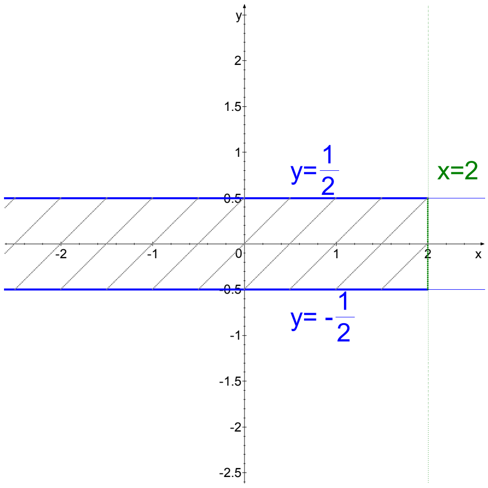
a)



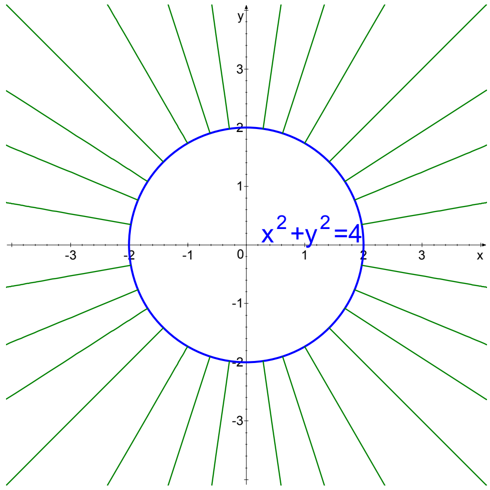
b)



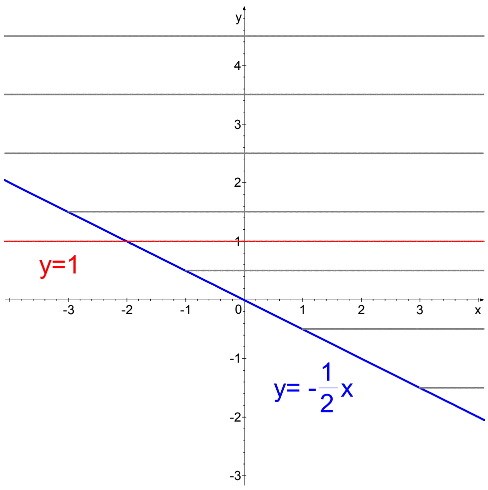
c)



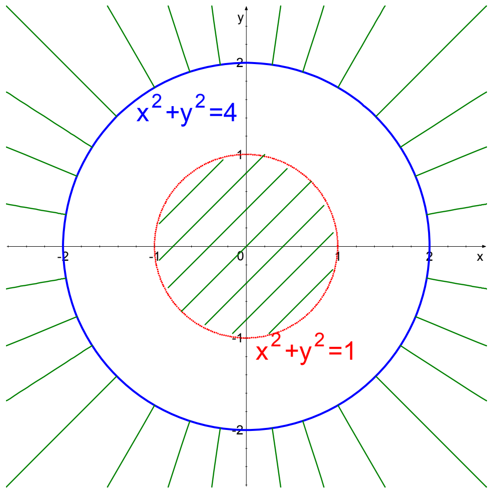
d)



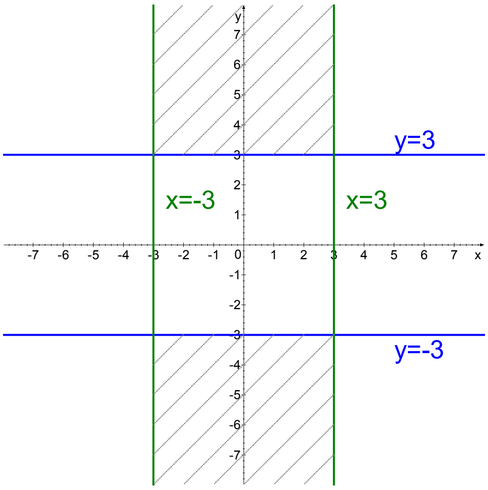
e)



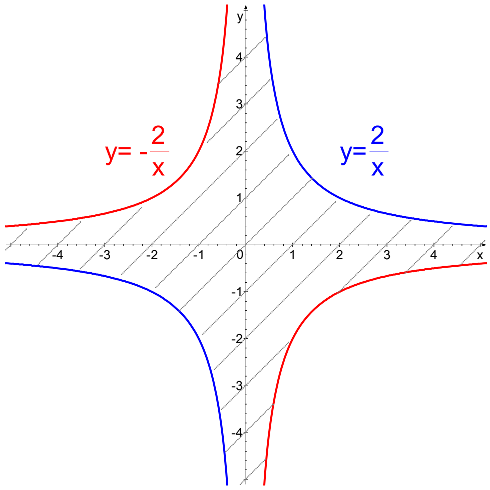
f)



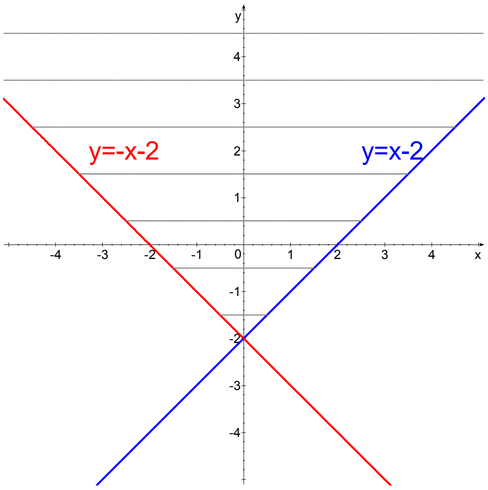
g)



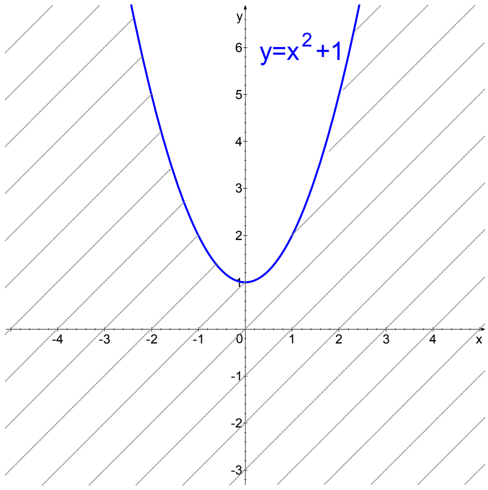
h)



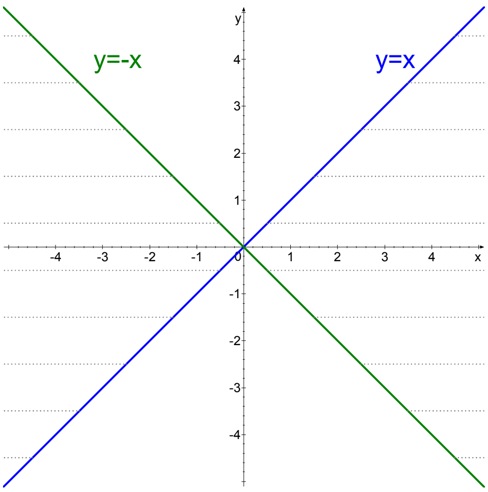
i)



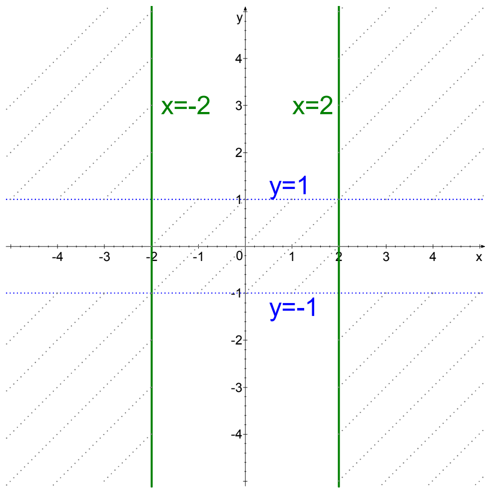
j)



k)



l)



2. a) $z'_x = 4,\ z'_y = 5$; **b)** $z'_x = -\dfrac{1}{x^2},\ z'_y = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$; **c)** $z'_x = 2xy^3 + 4y^2 - 4,\ z'_y = 3x^2y^2 + 8xy$;

d) $z'_x = 6x - 2y + \dfrac{y^2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}},\ z'_y = -2x + \dfrac{5}{2}y\sqrt{xy}$; **e)** $z'_x = \dfrac{2y}{(y-x)^2},\ z'_y = \dfrac{-2x}{(y-x)^2}$;

f) $z'_x = \dfrac{3x^2 + y}{2\sqrt{x^3 + 3y^2 + xy - 7}},\ z'_y = \dfrac{6y + x}{2\sqrt{x^3 + 3y^2 + xy - 7}}$; **g)** $z'_x = \dfrac{1}{1-y},\ z'_y = \dfrac{x-1}{(1-y)^2}$;

h) $z'_x = 2\left(xy + \sqrt{x+y}\right)\left(y + \dfrac{1}{2\sqrt{x+y}}\right),\ z'_y = 2\left(xy + \sqrt{x+y}\right)\left(x + \dfrac{1}{2\sqrt{x+y}}\right)$.

3. a) $z'_x = y\cos x,\ z'_y = \sin x$; **b)** $z'_x = \cos x \cos y,\ z'_y = -\sin x \sin y$;

c) $z'_x = \dfrac{-y}{x^2\cos^2\dfrac{y}{x}},\ z'_y = \dfrac{1}{x\cos^2\dfrac{y}{x}}$;

d) $z'_x = 3y\cos xy + \dfrac{y^2}{\sin^2(y-x)},\ z'_y = 3x\cos xy + 2y\operatorname{cotg}(y-x) - \dfrac{y^2}{\sin^2(y-x)}$;

e) $z'_x = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}},\ z'_y = \dfrac{-x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$; **f)** $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1-x^2-y^2}},\ z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

g) $z'_x = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)},\ z'_y = -\dfrac{1}{2\sqrt{y}(1+y)\operatorname{arctg}^2\sqrt{y}}$;

h) $z'_x = 2x\cos\left(x^2 + \sqrt{1+y}\right),\ z'_y = \cos\left(x^2 + \sqrt{1+y}\right)\dfrac{1}{2\sqrt{1+y}}$.

4. a) $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}e^{\sqrt{x^2-y^2}},\ z'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}e^{\sqrt{x^2-y^2}}$;

b) $z'_x = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right),\ z'_y = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\left(1 - \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)$;

c) $z'_x = \dfrac{-y}{x^2}2^{\frac{y}{x}}\ln 2,\ z'_y = \dfrac{1}{x}2^{\frac{y}{x}}\ln 2$; **d)** $z'_x = \dfrac{-4}{\sqrt{x}(16-xy)},\ z'_y = \dfrac{-4}{\sqrt{y}(16-xy)}$;

e) $z'_x = \dfrac{1}{y}e^{xy} + xe^{xy},\ z'_y = -\dfrac{x}{y^2}e^{xy} + \dfrac{x^2}{y}e^{xy}$;

f) $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln(x+y) + \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y},\ z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln(x+y) + \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}$;

g) $z'_x = \dfrac{y\sqrt{x^2-1} - x\sqrt{y^2-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{y^2-1}\right)\left(y+\sqrt{x^2-1}\right)}$, $z'_y = \dfrac{y\sqrt{x^2-1} - x\sqrt{y^2-1} + 1}{\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{y^2-1}\right)\left(y+\sqrt{x^2-1}\right)}$;

h) $z'_x = \dfrac{-2y}{(x-y)^2} 3^{\frac{x+y}{x-y}} \ln 3$, $z'_y = \dfrac{2x}{(x-y)^2} 3^{\frac{x+y}{x-y}} \ln 3$.

$z'_x = \dfrac{\sin x^2}{\sqrt{2x+y}} + 2x\sqrt{2x+y}\cos x^2$, $z'_y = \dfrac{\sin x^2}{2\sqrt{2x+y}}$.

5. a) $z'_x = \sqrt{y}\cos\left(x+\sqrt{y}\right)$, $z'_y = \dfrac{\sin\left(x+\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}} + \dfrac{\cos\left(x+\sqrt{y}\right)}{2}$;

b) $z'_x = 2x\cos\left(x^2-2y\right)\cos y$, $z'_y = -2\cos\left(x^2-2y\right)\cos y - \sin\left(x^2-2y\right)\sin y$;

c) $z'_x = \dfrac{y}{\cos^2\left(x+\dfrac{x}{y}\right)}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$, $z'_y = \operatorname{tg}\left(x+\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{1}{\cos^2\left(x+\dfrac{x}{y}\right)}\left(-\dfrac{x}{y}\right)$;

d) $z'_x = 3\cos x \operatorname{cotg}(y+3x) - \dfrac{9\sin x}{\sin^2(y+3x)}$, $z'_y = -\dfrac{3\sin x}{\sin^2(y+3x)}$;

e) $z'_x = \arcsin\left(y-\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x}{\sqrt{y^2-\left(y^2-x\right)^2}}$, $z'_y = \dfrac{x\left(y^2+x\right)}{y\sqrt{y^2-\left(y^2-x\right)^2}}$;

f) $z'_x = \dfrac{y - x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + 1$, $z'_y = \arccos x$;

g) $z'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{y}}$, $z'_y = -\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{2\sqrt{y}(1+y)\operatorname{arctg}^2\sqrt{y}}$;

h) $z'_x = \dfrac{\sin x^2}{\sqrt{2x+y}} + 2x\sqrt{2x+y}\cos x^2$, $z'_y = \dfrac{\sin x^2}{2\sqrt{2x+y}}$.

$z'_x = \dfrac{\sin x^2}{\sqrt{2x+y}} + 2x\sqrt{2x+y}\cos x^2$, $z'_y = \dfrac{\sin x^2}{2\sqrt{2x+y}}$.

6. a) $z''_{xx} = 8y$, $z''_{xy} = 8x + 10y$, $z''_{yy} = 10x$;

b) $z''_{xx} = \dfrac{6(y+1)}{x^4} + \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)}$, $z''_{xy} = \dfrac{-2}{x^3} - \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)}$,

$z''_{yy} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)}$; **c)** $z''_{xx} = -y^2\sin xy$, $z''_{xy} = \cos xy - xy\sin xy$, $z''_{yy} = -x^2\sin xy$;

d) $z''_{xx} = 12x - 4y$, $z''_{xy} = -4x$, $z''_{yy} = 12y^2$; **e)** $z''_{xx} = \dfrac{4y}{(y-x)^3}$, $z''_{xy} = \dfrac{-2y-2x}{(y-x)^3}$, $z''_{yy} = \dfrac{4x}{(y-x)^3}$;

f) $z''_{xx}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $z''_{xy}=\dfrac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $z''_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; **g)** $z''_{xx}=\dfrac{x}{\sqrt{y^2-x^2}\left(y^2-x^2\right)}$,

$z''_{xy}=\dfrac{-y}{\sqrt{y^2-x^2}\left(y^2-x^2\right)}$, $z''_{yy}=\dfrac{x}{y^2\sqrt{y^2-x^2}}+\dfrac{x}{\left(y^2-x^2\right)\sqrt{y^2-x^2}}$; **h)** $z''_{xx}=-\dfrac{1}{4(y+x)\sqrt{y+x}}$,

$z''_{xy}=1-\dfrac{1}{4(y+x)\sqrt{y+x}}$, $z''_{yy}=-\dfrac{1}{4(y+x)\sqrt{y+x}}$.

7. a) $\tau: 2x+5y+z+4=0$, $n: x=1-2t,\ y=-1-5t,\ z=-1-t,\ t\in\mathbf{R}$;

b) $\tau: 5x+5y-4z=0$, $n: x=3+5t,\ y=5+5t,\ z=10-4t,\ t\in\mathbf{R}$;

c) $\tau: 4x+2y+3z+2-3\ln 3=0$, $n: x=-1+4t,\ y=1+2t,\ z=\ln 3+3t,\ t\in\mathbf{R}$;

d) $\tau: x-z=0$, $n: x=\dfrac{\pi}{4}+t,\ y=\dfrac{\pi}{4},\ z=\dfrac{\pi}{4}-t,\ t\in\mathbf{R}$;

e) $\tau: x+2y+2z-4+\dfrac{\pi}{2}=0$, $n: x=2+t,\ y=1+2t,\ z=-\dfrac{\pi}{4}+2t,\ t\in\mathbf{R}$;

f) $\tau: 2x+4y-z-7=0$, $n: x=2+2t,\ y=1+4t,\ z=1-t,\ t\in\mathbf{R}$;

g) $\tau: 16x-15y-12z+127=0$, $n: x=-4+16t,\ y=5-15t,\ z=-1-12t,\ t\in\mathbf{R}$;

h) $\tau: 2x+3y-z-2\pi=0$, $n: x=\dfrac{\pi}{2}+2t,\ y=\dfrac{\pi}{3}+3t,\ z=-t,\ t\in\mathbf{R}$,

i) $\tau: -4x+5y-2z-6=0$, $n: x=1-4t,\ y=4+5t,\ z=5-2t,\ t\in\mathbf{R}$;

j) $\tau: 2x-z-2=0$, $n: x=1+2t,\ y=0,\ z=-t,\ t\in\mathbf{R}$;

k) $\tau: -x+y-2z+\dfrac{\pi}{2}=0$, $n: x=1-t,\ y=1+t,\ z=\dfrac{\pi}{4}-2t,\ t\in\mathbf{R}$;

l) $\tau: 2x+2y+z-\dfrac{2\pi}{3}-\sqrt{3}=0$, $n: x=2t,\ y=\dfrac{\pi}{3}+2t,\ z=\sqrt{3}+t,\ t\in\mathbf{R}$.

8. a) $\tau: 23x-6y-z-16=0, T=[1,1,1]$; **b)** $\tau: x+2y-z+6=0, T=[2,0,4]$;

c) $\tau: 23x-16y-6z-47=0, T=[5,2,6]$; **d)** $\tau: 12x-2y-z-12=0, T=[1,1,-2]$;

e) $\tau: x-2y-z+5=0, T=[3,4,0]$; **f)** $\tau: 4x-5y+3z-2=0, T=[5,4,3]$.

9. a) $\left[\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2},-\dfrac{57}{4}\right]$ lokální minimum; **b)** $[-1,0,6]$ lokální minimum; **c)** $[0,0,0]$ lokální minimum, $\left[-1,-1,2e^{-2}\right]$ není extrém; ; **d)** $[0,0,3]$ není extrém; **e)** $[4,6,48]$ lokální maximum, $\left[0,\dfrac{10}{3}\right]$ není extrém, $\left[5,\dfrac{15}{2}\right]$ není extrém; **f)** $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ není extrém, $\left[-\dfrac{1}{2},-1\right]$ není extrém, $\left[\frac{1}{2},-1,6\right]$ lokální minimum, $\left[-\frac{1}{2},1,-6\right]$ lokální maximum; **g)** $\left[2,4,1\right]$ lokální minimum, $\left[-\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right]$ není extrém; **h)** $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{9},-2-\ln 36\right]$ lokální maximum; **i)** $\left[0,0,4\right]$ lokální maximum, $\left[1,2\right]$ není extrém, $\left[-1,2\right]$ není extrém, $\left[-1,-2\right]$ není extrém, $\left[-1,-2\right]$ není extrém; **j)** $\left[4,4,17\right]$ lokální maximum; **k)** $\left[-1,2,0\right]$ lokální minimum; **l)** $\left[0,0,0\right]$ lokální minimum, $\left[1,-1\right]$ není extrém.

10. **a)** $\left[\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right]$ lok. max.; **b)** $\left[2,\frac{1}{2}\right]$ lok. min., $\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$ lok. max.; **c)** $\left[8,64\right]$ lok. max.; **d)** $\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{4}-1\right]$ lok. max., $\left[\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi,\frac{\pi}{4}-1\right]$ lok. min.; **e)** $\left[\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right]$ lok. min.; **f)** $\left[\frac{1}{8},2\right]$ lok. min., $\left[-\frac{1}{8},-2\right]$ lok. max.; **g)** $\left[1,1\right]$ lok. min.; **h)** $\left[1,1\right]$ lok. min..