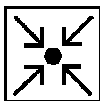


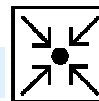
10. TROJROZMĚRNÝ INTEGRÁL	110
10.1. Trojrozměrný integrál v kvádru	110
Úlohy k samostatnému řešení.....	110
10.2. Trojrozměrný integrál v oblasti	110
Úlohy k samostatnému řešení.....	110
10.3. Transformace trojrozměrných integrálů.....	111
Úlohy k samostatnému řešení.....	111
10.4. Geometrické aplikace	112
Úlohy k samostatnému řešení.....	112
Výsledky úloh k samostatnému řešení	113

10. TROJROZMĚRNÝ INTEGRÁL

10.1. Trojrozměrný integrál v kvádru



Úlohy k samostatnému řešení



1. Vypočítejte trojrozměrný integrál v kvádru W :

a) $\iiint_W xy^2 z^3 dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, 2 \rangle, y \in \langle 0, 3 \rangle, z \in \langle 0, 4 \rangle\},$

b) $\iiint_W \cos x \sin y e^z dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, y \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle, z \in \langle 0, 1 \rangle\},$

c) $\iiint_W x \sin x \cos z dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, \pi \rangle, y \in \langle 0, 3 \rangle, z \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \rangle\},$

d) $\iiint_W \ln x^{\ln y} dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 1, e \rangle, y \in \langle 1, e \rangle, z \in \langle 2, 4 \rangle\},$

e) $\iiint_W \frac{x+6}{z(y-4)} dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, 6 \rangle, y \in \langle 5, 6 \rangle, z \in \langle 1, e \rangle\},$

f) $\iiint_W \frac{y+z}{\cos^2 x} dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle, y \in \langle 1, 3 \rangle, z \in \langle 3, 4 \rangle\},$

g) $\iiint_W \frac{1}{(x+y+z)^3} dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle, z \in \langle 1, 2 \rangle\},$

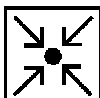
h) $\iiint_W (3x^2 + 4xyz - 6xy^2 - 4z^3 + 6) dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle, z \in \langle 0, 1 \rangle\},$

i) $\iiint_W \left(\frac{z}{1+x^2} + \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} \right) dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle, z \in \langle 0, 1 \rangle\},$

j) $\iiint_W \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \right) dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle, z \in \langle 0, 1 \rangle\}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

10.2. Trojrozměrný integrál v oblasti



Úlohy k samostatnému řešení



2. Určete integrační meze pro $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$, jestliže Ω je ohraničena danými

plochami:

a) $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0,$

b) $z = 4 - x^2 - y^2, z = 0, x + y = 2, x = 0, y = 0,$

c) $z = 4 - x^2, z = 0, y = 2, y = -2,$

d) $z = x^2 + y^2 - 4, z = 0,$

- e) $x = 0, y = 0, z = 0, x = 4, y = 2, 3x + 2y - 2z + 6 = 0,$
 f) $y = \frac{1}{x}, x = 2, z = 0, y + z = 2,$
 g) $z = x^2 + y^2, z = 16.$

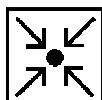
Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. Vypočítejte trojrozměrný integrál, je-li oblast Ω ohraničena danými plochami:

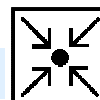
- a) $\iiint_{\Omega} \frac{1}{(2+x+y+z)^3} dx dy dz, \Omega: x+y+z=1, x=0, y=0, z=0,$
 b) $\iiint_{\Omega} (x+y) dx dy dz, \Omega: z=4-x^2-y^2, z=0, x+y=2, x=0, y=0,$
 c) $\iiint_{\Omega} xy^2 dx dy dz, \Omega: z=4-x^2, z=0, y=2, y=-2,$
 d) $\iiint_{\Omega} (1+x) dx dy dz, \Omega: y=\ln x, y=0, x=e, z=0, z=x,$
 e) $\iiint_{\Omega} \left(3 - \frac{3}{2}x - y\right) dx dy dz, \Omega: x=0, y=0, z=0, x=4, y=2, 3x+2y-2z+6=0,$
 f) $\iiint_{\Omega} 2z(x+y) dx dy dz, \Omega: y=\frac{1}{x}, x=2, z=0, y+z=2,$
 g) $\iiint_{\Omega} \cos x dx dy dz, \Omega: y=0, z=0, y=\sin x, x+z=\frac{\pi}{2}.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

10.3. Transformace trojrozměrných integrálů



Úlohy k samostatnému řešení



4. Vypočítejte trojrozměrný integrál transformací do válcových souřadnic:

- a) $\iiint_{\Omega} x^2 z dx dy dz, \Omega: -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq 3,$
 b) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 = 2y, z=0, z=1,$
 c) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz, \Omega: z=4-x^2-y^2, z=0,$
 d) $\iiint_{\Omega} z dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 8, z \geq 0,$
 e) $\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \Omega: z = x^2 + y^2, z = 1,$
 f) $\iiint_{\Omega} x dx dy dz, \Omega: 4 = x^2 + y^2, z=0, z=4, x \geq 0, y \geq 0,$
 g) $\iiint_{\Omega} y dx dy dz, \Omega: 4 = x^2 + (y-2)^2, z=0, z=1,$

- h) $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 4,$
 i) $\iiint_{\Omega} z dx dy dz, \Omega: (x-1)^2 + y^2 = 1, z = -1, z = 3.$

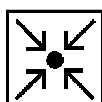
[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

5. Vypočítejte trojrozměrný integrál transformací do sférických souřadnic:

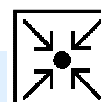
- a) $\iiint_{\Omega} z dx dy dz, \Omega: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,$
 b) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \Omega: z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,$
 c) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \Omega: z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,$
 d) $\iiint_{\Omega} z dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 8, z \geq 0,$
 e) $\iiint_{\Omega} x dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 1,$
 f) $\iiint_{\Omega} y dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0,$
 g) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0,$
 h) $\iiint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0,$
 i) $\iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 4.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

10.4. Geometrické aplikace



Úlohy k samostatnému řešení



6. Vypočítejte objem tělesa ohraničeného plochami:

- a) $x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 2, z = 0,$
 b) $x^2 + y^2 = z, z = 16,$
 c) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$
 d) $x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 + z^2 = 1,$
 e) $y = \sin x, y = 0, z = y, z = 0,$
 f) $y = e^x, z = xy, z = 0, y = e,$
 g) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1, z = 0, z = x,$
 h) $y = x, z = y \sin x, z = 0, x = \pi.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) 1152; b) $e-1$; c) $3\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; d) 2; e) $54\ln 2$; f) 11; g) $\frac{1}{2}\ln\frac{32}{27}$; h) $\frac{11}{2}$;
 i) $\frac{3}{8}\pi$; j) $\frac{3}{2}\ln 2$.
2. a) $x \in \langle 0,1 \rangle, y \in \langle 0,1-x \rangle, z \in \langle 0,1-x-y \rangle$; b) $x \in \langle 0,2 \rangle, y \in \langle 0,2-x \rangle, z \in \langle 0,4-x^2-y^2 \rangle$;
 c) $x \in \langle -2,2 \rangle, y \in \langle -2,2 \rangle, z \in \langle 0,4-x^2 \rangle$;
 d) $x \in \langle -2,2 \rangle, y \in \langle -\sqrt{4-x^2}, \sqrt{4-x^2} \rangle, z \in \langle x^2+y^2-4,0 \rangle$;
 e) $x \in \langle 0,4 \rangle, y \in \langle 0,2 \rangle, z \in \langle 0, \frac{3}{2}x+y+3 \rangle$; f) $x \in \langle \frac{1}{2}, 2 \rangle, y \in \langle \frac{1}{x}, 2 \rangle, z \in \langle 0, 2-y \rangle$;
 g) $x \in \langle -4,4 \rangle, y \in \langle -\sqrt{16-x^2}, \sqrt{16-x^2} \rangle, z \in \langle x^2+y^2, 16 \rangle$. 3. a) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}-\frac{7}{36}$; b) $-\frac{8}{5}$; c) 0;
 d) $\frac{1}{4}e^2 + \frac{2}{9}e^3 + \frac{13}{36}$; e) $\frac{652}{9}$; f) $4\ln 2 - \frac{61}{32}$; g) $\frac{\pi}{4}$. 4. a) $\frac{9}{8}\pi$; b) $\frac{32}{9}$; c) $\frac{32}{3}\pi$; d) 16π ;
 e) $\frac{4}{21}\pi$; f) $\frac{32}{3}$; g) 8π ; h) 0; i) 4π . 5. a) $\frac{\pi}{16}$; b) $\frac{\pi r^4}{2}$; c) $\frac{\pi^2 r^4}{8}$; d) 16π ; e) 0;
 f) $\frac{\pi r^4}{16}$; g) $\frac{\pi}{15}$; h) 4π ; i) 8π . 6. a) 2π ; b) 128π ; c) $\frac{4}{3}\pi r^3$; d) $\frac{4}{3}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; e) $\frac{\pi}{4}$;
 f) $\frac{e^2-1}{8}$; g) $\frac{2}{e}$; h) $\frac{\pi^2}{2}-2$.