3.6. Diferenciál funkce a Taylorův polynom

Výklad

Definice 3.6.1.

Nechť je x_0 vnitřním bodem definičního oboru D_f funkce $f(x)$. Funkce proměnné $dx = x - x_0$ definovaná vztahem $df(x_0) = f'(x_0)dx$ se nazývá **diferenciál funkce** $f(x)$ v bodě x_0, jestliže platí

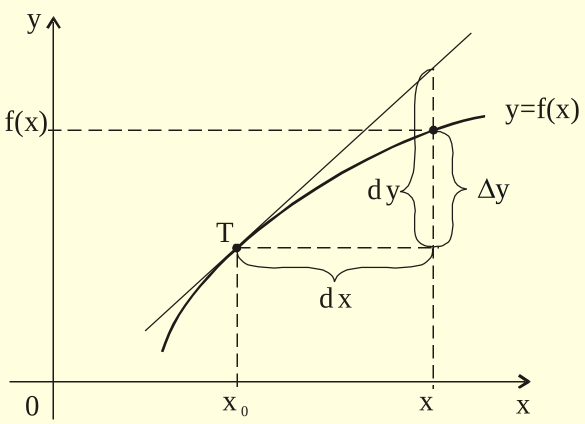
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

Věta 3.6.1. Nechť x_0 je vnitřním bodem D_f funkce $f(x)$ a nechť existuje $f'(x_0) \in \boldsymbol{R}$, pak existuje diferenciál funkce $f(x)$ v bodě x_0.

Důkaz viz [3] str. 103.

Poznámky

1. Označme $dx = x - x_0, dy = y - f(x_0)$. *Po dosazení do rovnice diferenciálu dostaneme* $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, *což je rovnice tečny v bodě* x_0 *k funkci* $f(x)$. *Je zřejmé, že pro dostatečně malá* dx *můžeme přírůstek funkce* $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ *nahradit diferenciálem, tj.* $\Delta y \doteq dy$, *viz obr. 45.*



Obr. 45

2. Jestliže rovnici diferenciálu zapíšeme ve tvaru $df(x) = f'(x)dx = dy$ pro $x \in D_f$, v nichž $f'(x)$ existuje, pak můžeme derivaci $f'(x)$ vyjádřit ve tvaru $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

3. Diferenciál $df(x)$ můžeme nazvat diferenciálem 1. řádu. Diferenciál k-tého řádu pak budeme definovat vztahem $d^k f(x) = d(d^{k-1} f(x)), k \in \mathbf{N}$. Dostaneme $d^2 y = f''(x)dx^2$, $d^3 y = f'''(x)dx^3$, obecně $d^k y = f^{(k)}(x)dx^k$.

4. Můžeme psát $f^{(k)}(x) = \dfrac{d^k y}{dx^k}$, pro $k \in \mathbf{N}$.

Výklad

Definice 3.6.2.

Nechť má funkce $f(x)$ v bodě $x_0 \in D_f$ derivaci n-tého řádu $f^{(n)}(x_0)$. Polynom stupně nejvýše n, pro který platí $t_n(x_0) = f(x_0)$, $t_n'(x_0) = f'(x_0), \ldots, t_n^{(n)}(x_0) = f_{(x_0)}^{(n)}$ se nazývá **Taylorův polynom** stupně n funkce $f(x)$ v bodě x_0.

Poznámka

Funkční hodnoty polynomu $t_n(x)$ se v okolí bodu x_0 přibližují k funkčním hodnotám funkce $f(x)$.

Řešené úlohy

Příklad: Ukažte, že polynom $t_n(x) = x^2 - \dfrac{1}{6}x^4$ je Taylorův polynom stupně 4 funkce $f(x) = x \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení:

$f(x)=x\sin x,\ f(0)=0;$ $t_4(x)=x^2-\frac{1}{6}x^4,\ t_4(0)=0,$

$f'(x)=\sin x+x\cos x,\ f'(0)=0;$ $t_4'(x)=2x-\frac{2}{3}x^3,\ t_4'(0)=0,$

$f''(x)=2\cos x-x\sin x,\ f''(0)=2;$ $t_4''(x)=2-2x^2,\ t_4''(0)=2,$

$f'''(x)=-3\sin x-x\cos x,\ \ f'''(0)=0;$ $t_4'''(x)=-4x,\ t_4'''(0)=0,$

$f^{(4)}(x)=-4\cos x+x\sin x,\ f^{(4)}(0)=-4;$ $t_4^{(4)}(x)=-4,\ t_4^{(4)}(0)=-4.$

Výklad

Věta 3.6.2. Nechť existuje $f^{(n)}(x_0)$ pak Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ v bodě x_0 má tvar

$$t_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0)+$$

$$+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

(1)

Důkaz naznačíme. Dosadíme-li do vztahu (1) $x=x_0$, dostaneme $t_n(x_0)=f(x_0)$. Nyní budeme vztah (1) derivovat:

$$t_n'(x)=f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}.2.(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(x-x_0)^{n-1}=$$

$$=f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1},$$

$$t_n''(x)=f''(x_0)+\frac{f'''(x_0)}{3!}.3.2.(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(n-1)(x-x_0)^{n-2}=$$

$$=f''(x_0)+\frac{f'''(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}.$$

Zřejmě dostaneme

$$t^{(i)}(x) = f^{(i)}(x_0) + \frac{f^{(i+1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-i} \text{ pro } i = 1, \ldots, n.$$

Po dosazení $x = x_0$ do předchozího vztahu dostáváme $t^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Poznámky

1. *Taylorovým polynomem se budete zabývat v předmětu Numerické metody.*
2. *Taylorův polynom můžeme napsat pomocí diferenciálů ve tvaru*

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(x_0) = f(x_0) + \frac{1}{1!} df(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0).$$

Kontrolní otázky

1. Pro body x blízké bodu x_0 se diferenciál funkce $df(x)$ rovná přírůstku funkce $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.
   a) ano,
   b) ne,
   c) někdy.
2. Existuje-li $f'(x)$, pak ji můžeme vyjádřit ve tvaru:
   a) $f'(x) = \dfrac{dx}{dy}$,
   b) $f'(x) = dy \cdot dx$,
   c) $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.
3. Diferenciál 2. řádu funkce $y = f(x)$ má tvar:
   a) $d^2 y = f''(x) dx^2$,
   b) $d^2 y = f''(x) dx$,
   c) $d^2 y = [f'(x) dx]^2$.

4. Nechť v bodě x_0 má funkce $f(x)$ derivaci n-tého řádu $f^{(n)}(x_0)$. Pro funkci $f(x)$ Taylorův polynom stupně n $t_n(x)$ funkce $f(x)$ platí:

   a) $f(x) = t_n(x),\ \ f'(x) = t_n'(x), \ldots,\ f^{(n)}(x) = t_n^{(n)}(x),$

   b) $f(x_0) = t_n(x_0),\ \ f'(x_0) = t_n'(x_0), \ldots,\ f^{(n)}(x_0) = t_n^{(n)}(x_0),$

   c) $f(x_0) = t_n(x_0),\ \ f'(x_0) \neq t_n'(x_0), \ldots,\ f^{(n)}(x_0) \neq t_n^{(n)}(x_0).$

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. c); 3. a); 4. b).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte přírůstek funkce Δy a diferenciál dy v bodě x_0 pro přírůstek Δx, je-li

a) $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$, $\Delta x = 0,01$, b) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0,4$,

c) $y = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,2$, d) $y = 2^x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,4$.

2. Vypočtěte diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě x pro přírůstek dx:

a) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, b) $y = \dfrac{x^3+1}{x^3-1}$, c) $y = \operatorname{tg}^2 x$,

d) $y = \dfrac{1}{1-t^2}$, e) $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$, f) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

3. Vypočtěte diferenciály uvedených řádů funkce $y = f(x)$ v bodě x pro přírůstek dx:

a) $y = \sqrt[3]{x^2}$, $d^2y = ?$, b) $y = (x+1)^3(x-1)^2$, $d^2y = ?$,

c) $y = \sin^2 x$, $d^3y = ?$, d) $y = x^3 \ln\dfrac{x}{2}$, $d^4y = ?$,

e) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $d^2y = ?$, f) $y = x\cos(2x)$, $d^3y = ?$.

4. Polynom $p(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ rozložte na mocniny dvojčlenu $(x+1)$.

5. Polynom $p(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ rozložte na mocniny dvojčlenu $(x-4)$.

6. Pro danou funkci sestavte Taylorův polynom *n*-tého stupně v okolí bodu x_0:

a) $y = \dfrac{x}{x-1}, \quad x_0 = 2, \quad n = 3$, b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 1, \quad n = 3$,

c) $y = \ln x, \quad x_0 = 4, \quad n = 4$, d) $y = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4, \quad n = 3$.

7. Pomocí Taylorova polynomu sestaveného ve cvičení 6d) vypočtěte přibližnou hodnotu

a) $\sqrt{5}$, b) $\sqrt{4,5}$, c) $\sqrt{3,9}$.

Srovnáním s přesnou hodnotou vypočtenou na kalkulátoru určete chybu aproximace ε.

8. Pro danou funkci sestavte Taylorův polynom *n*-tého stupně v okolí bodu $x_0 = 0$ (Maclaurinův polynom):

a) $y = \operatorname{tg} x, \quad n = 5$, b) $y = \arcsin x, \quad n = 3$, c) $y = \ln\cos x, \quad n = 6$.

9. Pomocí Taylorova polynomu sestaveného ve cvičení 8b) vypočtěte přibližnou hodnotu

a) $\arcsin 1$, b) $\arcsin 0,5$, c) $\arcsin 0,2$.

Srovnáním s přesnou hodnotou vypočtenou na kalkulátoru určete chybu aproximace ε.

10. Pro danou funkci sestavte Taylorův polynom *n*-tého stupně v okolí bodu $x_0 = 0$ (Maclaurinův polynom):

a) $y = e^x$, b) $y = \sin x$, c) $y = \cos x$,

d) $y = \ln(1+x)$, e) $y = (1+x)^k$, f) $y = \operatorname{arctg} x$.

11. Ukažte, že pro výpočet hodnoty funkce e^x pro $0 < x \le \dfrac{1}{2}$ lze použít přibližný vzorec

$e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$. Pomocí tohoto vzorce vypočtěte $\sqrt{e}$ a srovnáním s přesnou hodnotou vypočtenou na kalkulátoru určete chybu výpočtu.

12. Ukažte, že pro výpočet hodnoty funkce $\sin x$ pro úhly menší než 28° lze použít přibližný vzorec

$\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$. Pomocí tohoto vzorce vypočtěte $\sin 28^\circ$ a srovnáním s přesnou hodnotou vypočtenou na kalkulátoru určete chybu výpočtu. (Pozor - hodnotu x je nutno dosadit v obloukové míře!)

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\Delta y = 0,0401, \quad dy = 0,04$; b) $\Delta y = 0,0976, \quad dy = 0,1$; c) $\Delta y = 0,0907, \quad dy = 0,1$;

d) $\Delta y = 1,28, \quad dy = 1,11$. **2.** a) $-\dfrac{dx}{4x\sqrt{x}}$ b) $-\dfrac{6x^2 dx}{(x^3-1)^2}$; c) $\dfrac{2\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x}$; d) $\dfrac{2t dt}{(1-t^2)^2}$;

e) $\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$; f) $\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. **3.** a) $-\dfrac{2dx^2}{9x\sqrt[3]{x}}$; b) $4(x+1)(5x^2-2x-1)dx^2$; c) $-4\sin 2x dx^3$;

d) $\dfrac{6}{x}dx^4$; e) $-\dfrac{xdx}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$; f) $(8x\sin 2x - 12\cos 2x)dx^3$.

4. $p(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$;

5. $p(x) = (x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$;

6. a) $t_3(x) = 2 - (x-2) - (x-2)^2 - (x-2)^3$; b) $t_3(x) = 1 - \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{3}{8}(x-1)^2 - \dfrac{15}{48}(x-1)^3$;

c) $t_4(x) = \ln 4 + \dfrac{1}{4}(x-4) - \dfrac{1}{32}(x-4)^2 + \dfrac{1}{192}(x-4)^3 - \dfrac{1}{1024}(x-4)^4$;

d) $t_3(x) = 2 + \dfrac{(x-4)}{4} - \dfrac{(x-4)^2}{64} + \dfrac{(x-4)^3}{512}$. **7.** a) $t_3(5) = 2,36; \quad \varepsilon = 0,12$;

b) $t_3(4,5) = 2,20; \quad \varepsilon = 0,08$; c) $t_3(3,9) = 2,02; \quad \varepsilon = 0,05$. **8.** a) $t_5(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5$;

b) $t_3(x) = x + \dfrac{1}{6}x^3$; c) $t_6(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{45}x^6$. **9.** a) $t_3(1) = 1,2; \quad \varepsilon = 0,4$;

b) $t_3(0,5) = 0,521; \quad \varepsilon = 0,003$; c) $t_3(0,2) = 0,20133; \quad \varepsilon = 0,00003$.

10. a) $t_n(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$; b) $t_n(x) = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

c) $t_n(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$; d) $t_n(x) = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$;

e) $t_n(x) = 1 + \binom{k}{1}x + \ldots + \binom{k}{n}x^n$; f) $t_n(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

11. $\sqrt{e} \approx 1,646;\quad \varepsilon = 0,003$. **12.** $\sin 28^\circ \approx 0,469472;\quad \varepsilon = 0,000001$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte přírůstek funkce Δy a diferenciál dy v bodě $x_0 = 2$ pro přírůstek $\Delta x = 0,1$ u funkce $y = x^3 + 2x$.

   a) $\Delta y = 1,4,\ dy = 1,461$, b) $\Delta y = 1,461,\ dy = 1,4$, c) $\Delta y = 1,21,\ dy = 1,2$.

2. Vypočtěte diferenciál funkce $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ v bodě x pro přírůstek dx.

   a) $\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$, b) $\frac{(1-x)dx}{2\sqrt{2}}$, c) $\frac{dx}{(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$.

3. Vypočtěte diferenciál 2. řádu funkce $y = \cos^2 2x$ v bodě x pro přírůstek dx.

   a) $-8\sin 2x dx^2$, b) $-4\cos 2x dx^2$, c) $-8\cos 4x dx^2$.

4. Pro funkci $f(x) = e^{2x-x^2}$ sestavte Taylorův polynom 2. stupně v okolí bodu $x_0 = 0$ (Maclaurinův polynom).

   a) $1 + x + x^2$, b) $1 + 2x + x^2$, c) $1 + 4x + x^2$.

5. Polynom $p(x) = x^4 - 3x^2 - 10x + 11$ rozložte na mocniny dvojčlenu $(x-2)$.

   a) $-5 + 10(x-2) + 21(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$,

   b) $-5 + 10(x-2) + 42(x-2)^2 + 48(x-2)^3 + 24(x-2)^4$,

   c) $-5 + 10(x-2) - 42(x-2)^2 - 8(x-2)^3 - (x-2)^4$.

6. Pro funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ sestavte Taylorův polynom 3. stupně v okolí bodu $x_0 = 2$.

   a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{4}(x-2)^2 + \frac{3}{8}(x-2)^3$,

   b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3$,

c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{4}(x-2)^2-\frac{3}{8}(x-2)^3.$

7. Pro funkci $f(x)=xe^{-x}$ sestavte Maclaurinův polynom (tj. $x_0=0$) 3. stupně.

a) $x-2x^2+3x^3,$ b) $x-x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^4,$ c) $x-x^2+\frac{1}{2}x^3.$

Výsledky testu

1.b); 2. a); 3. c); 4. b); 5. a); 6. b); 7. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 5 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.6. znovu.