

3.5. Výpočet limit užitím derivace (L'Hospitalovo pravidlo)



Výklad

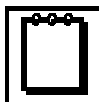


Věta 3.5.1. Necht' $x_0 \in \mathbf{R}^*$ a necht'

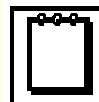
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, \text{ resp. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty. \text{ Necht' existuje}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a, a \in \mathbf{R}^*, \text{ pak existuje } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ a platí } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

Bez důkazu.



Poznámka



1. Rovnost $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a, a \in \mathbf{R}^*$ platí i pro jednostranné limity.

2. Z věty 3.5.1 vyplývá, že postup lze opakovat. Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = a, a \in \mathbf{R}^*.$$

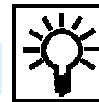
3. Limity z věty 3.5.1 budeme symbolicky označovat

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \text{ resp. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

4. Věta 3.5.1 se nazývá L'Hospitalovo pravidlo.



Řešené úlohy



Příklad: Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - \sin x}{e^x - x - 1}$.

$$\text{Řešení: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - \sin x}{e^x - x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1 - \cos x}{e^x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sin x}{e^x} = 2.$$

Příklad: Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$.

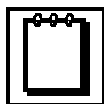
Řešení: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Příklad: Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$.

Řešení: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$.

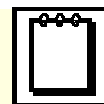
Tato limita vůbec neexistuje a nelze tedy L'Hospitalovo pravidlo použít. Platí však

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1 + 0 = 1.$$

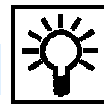


Poznámka

Neurčitě výrazy $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 0^∞ , 0^∞ a 1^∞ musíme upravit na tvar $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.



Řešené úlohy



Příklad: Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$.

Řešení: $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = 1$.

Příklad: Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$.

Řešení: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} =$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1-1-x}{1+x}}{(1+x)\ln(1+x)+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{(1+x)\ln(1+x)+x} = \frac{0}{0} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x) + \frac{1+x}{1+x} + 1} = \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x) + 2} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Příklad: Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

Řešení: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 0^0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^a$,

$$a = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1.$$



Kontrolní otázky



1. Při splnění předpokladů L'Hospitalova pravidla platí rovnost:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = a, \quad a \in \mathbf{R}^*$,

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a, \quad a \in \mathbf{R}^*$,

c) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = a, \quad a \in \mathbf{R}^*$.

2. Pokud při použití L'Hospitalova pravidla limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

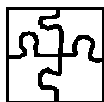
a) neexistuje,

b) nelze tímto výpočtem rozhodnout,

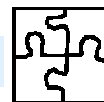
c) existuje.

3. L'Hospitalovo pravidlo nemůžeme použít na výpočet limit vedoucích k výrazům

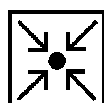
- a) $\frac{1}{\infty}, 0 \cdot 0,$
 b) $1^\infty, \infty - \infty,$
 c) $0 \cdot \infty, \infty^0.$



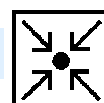
Odpovědi na kontrolní otázky



1. b); 2. b); 3. a).



Úlohy k samostatnému řešení



1. Vypočtěte:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1},$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3},$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1},$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)},$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\operatorname{tg}^2 x},$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x2^x}{2^x - 1}.$

2. Pomocí L'Hospitalova pravidla vypočtěte cvičení 2.4.1 a 2.4.2.

3. Vypočtěte:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x^n - 1},$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + x^2 - 2}{x^2 \sin^2 x},$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x},$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)},$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3},$ f) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}.$

4. Vypočtěte:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n},$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x},$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x},$
 d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x},$ e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x},$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}.$

5. Vypočtěte:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x},$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x,$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \operatorname{cotg}(\pi x),$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2}{x},$ e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x^2}},$ f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x) \operatorname{cotg} x.$

6. Vypočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cotg x - \frac{1}{x} \right), & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2 \ln x} - \frac{1}{x^2 - 1} \right), & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right), \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right), & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right), & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - e^{2x}) \cotg x. \end{array}$$

7. Vypočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}, \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\text{tg } x}, & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}, & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} x^{1-x}, \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + mx)^{\frac{1}{x}}, & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}, & \text{i) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} (\text{tg } x)^{\cotg x}. \end{array}$$



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) 1; b) $\frac{1}{6}$; c) 2; d) 2; e) 2; f) $\frac{1}{\ln 2}$. 3. a) $\frac{n-1}{n}$; b) $\frac{1}{12}$; c) $\ln \frac{a}{b}$; d) $\frac{a^2}{b^2}$; e) $\frac{1}{3}$;
f) $\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$. 4. a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) 3; e) 0; f) ∞ . 5. a) 0; b) 0; c) $\frac{1}{\pi}$; d) 2; e) ∞ ; f) 0.
6. a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 1; f) -2. 7. a) 1; b) 0; c) 1; d) 1; e) e^2 ; f) e^{-1} ; g) e^m ;
h) e^{-2} ; i) 1.

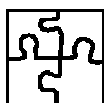


Kontrolní test



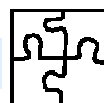
1. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\text{tg } x - 1}{\sin 4x}$.
a) $-\frac{1}{8}$, b) $-\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{2}$.
2. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{\cos \frac{\pi}{2} x}$.
a) -2, b) 2, c) $\frac{4}{\pi}$.

3. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$.
a) 2, b) 0, c) 1.
4. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2\sin x}{\cos 3x}$.
a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, b) $\frac{3}{\sqrt{3}}$, c) 3.
5. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$.
a) 1, b) 0, c) $\frac{1}{2}$.
6. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$.
a) 0, b) $\frac{1}{3}$, c) 2.
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$.
a) 1, b) 0, c) -1.
8. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \cotg x$.
a) 0, b) ∞ , c) 1.
9. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$.
a) ∞ , b) $-\infty$, c) $-\frac{1}{2}$.
10. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.
a) e , b) 1, c) 0.



Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. a); 4. a); 5. b); 6. b); 7. a); 8. c); 9. c); 10. b).



Průvodce studiem



Pokud jste správně odpověděli nejméně v 7 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.5. znovu.