

3.2. Základní vlastnosti derivace

Výklad

Věta 3.2.1. V bodech x_0 , v nichž existují derivace $u'(x)$, $v'(x)$ platí

1. $(u(x) + v(x))'_{x=x_0} = u'(x_0) + v'(x_0)$,
2. $(u(x) \cdot v(x))'_{x=x_0} = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$,
3. $(c \cdot u(x))'_{x=x_0} = c \cdot u'(x_0)$, kde $c \in \mathbf{R}$,
4. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'_{x=x_0} = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$ pro $v(x) \neq 0$.

Důkaz: 1. $(u(x) + v(x))'_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) + v(x) - u(x_0) - v(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} +$

$$+ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) + v'(x_0).$$

$$\begin{aligned} 2. (u(x) \cdot v(x))'_{x=x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x) + u(x_0)v(x) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \cdot v(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} u(x_0) \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0).$$

$$3. (c \cdot u(x))'_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c \cdot u(x) - c \cdot u(x_0)}{x - x_0} = c \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = c \cdot u'(x_0).$$

$$4. \left(\frac{1}{v(x)}\right)'_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{v(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x_0) - v(x)}{v(x)v(x_0)(x - x_0)} = -\frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)},$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'_{x=x_0} = \left(u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}\right)'_{x=x_0} = u'(x_0) \frac{1}{v(x_0)} + u(x_0) \cdot \left(-\frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)}\right) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$



Řešené úlohy



Příklady

$$1. (x^4 + 3x^2 - x + 3)' = (x^4)' + 3(x^2)' - (x)' + (3)' = 4x^3 + 6x - 1.$$

$$2. \left(\frac{2x+3}{x^2-2x+1} \right)' = \frac{(2x+3)'(x^2-2x+1) - (2x+3)(x^2-2x+1)'}{(x^2-2x+1)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2-2x+1) - (2x+3)(2x-2)}{(x^2-2x+1)^2} = -2 \frac{x^2+3x-4}{(x^2-2x+1)} = -2 \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)^2} = -2 \frac{x+4}{x-1}, x \neq 1.$$



Výklad



Věta 3.2.2. Necht' existují derivace $\varphi'(x_0)$ a $f'(\varphi(x_0))$. Pak existuje derivace složené funkce $g(x) = f(\varphi(x))$ v bodě x_0 a platí



$$g'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$

Důkaz: Označíme $h_{x_0}(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(\varphi(x_0))}{y - \varphi(x_0)} & \text{pro } y \neq \varphi(x_0), \\ f'(\varphi(x_0)) & \text{pro } y = \varphi(x_0). \end{cases}$

Funkce $h_{x_0}(y)$ je spojitá v bodě $\varphi(x_0)$ a platí

$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))) \cdot (\varphi(x) - \varphi(x_0))}{(\varphi(x) - \varphi(x_0))(x - x_0)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(h_{x_0}(\varphi(x)) \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \right) = h_{x_0}(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$



Řešené úlohy



Příklad $((x^2 - 3x + 1)^{10})' = 10(x^2 - 3x + 1)^9 \cdot (2x - 3).$



Výklad



Věta 3.2.3. Necht' je $y = f(x)$ spojitá a ryze monotónní funkce v intervalu I a necht' k ní existuje $f'(x_0) \neq 0$ pro $x_0 \in I$. Pak existuje derivace inverzní funkce $f^{-1}(y)$ v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí

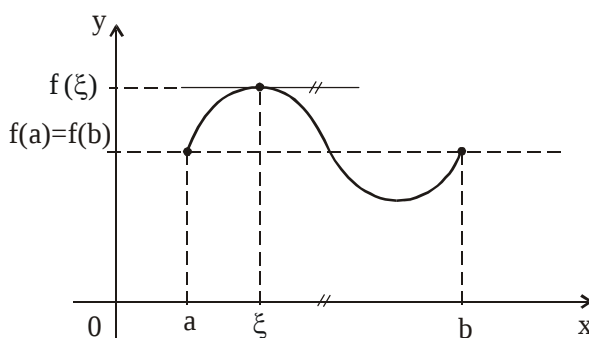
$$\left(f^{-1}(y) \right)'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Důkaz nebudeme uvádět. Za předpokladu existence derivace inverzní funkce ale můžeme derivovat rovnici $x = f^{-1}(f(x))$, tj. $1 = (f^{-1}(f(x)))' \cdot f'(x)$, z čehož plyne

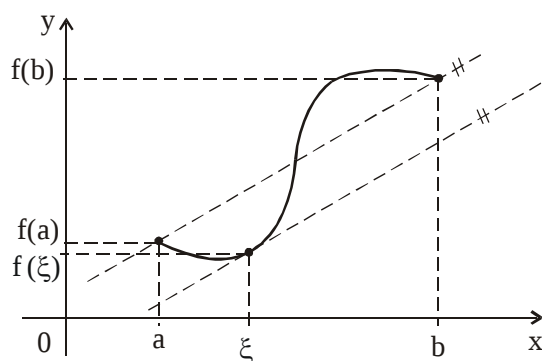
$$\left(f^{-1}(y) \right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Nyní uvedeme dvě důležité věty diferenciálního počtu, které nebudeme dokazovat.

Věta (Rolleova) 3.2.4. Necht' je funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $<a, b>$, necht' existuje její derivace $f'(x)$ pro $x \in (a, b)$ a $f(a) = f(b)$. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f'(\xi) = 0$, obr. 41.

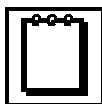


Obr. 41

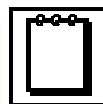


Obr. 42

Věta (Lagrangeova) 3.2.5. Necht' je funkce $f(x)$ spojitá v intervalu (a, b) a necht' její derivace $f'(x)$ existuje pro $x \in (a, b)$. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že

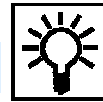
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \text{ obr. 42.}$$
**Poznámka**

Předchozí věty říkají, že za daných předpokladů existuje alespoň jedna tečna ke grafu funkce $f(x)$, která je rovnoběžná s přímkou spojující body $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.



Věta 3.2.6. Necht' $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. Pak je funkce $f(x)$ v (a, b) rostoucí, resp. klesající.

Důkaz (sporem): Důkaz provedeme pro $f'(x) > 0$. Předpokládejme, že existují $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ a platí $f(x_1) \geq f(x_2)$. Podle věty 3.2.5. existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Levá strana této rovnice je menší nebo rovna nule a pravá strana je větší než nula. To je spor s předpokladem.

**Řešené úlohy**

Příklad: Funkce $y = x^3 + 4x$ je rostoucí v $\mathbf{R}$, protože $y' = 3x^2 + 4 > 0$ pro všechna $x \in \mathbf{R}$.