

2.3. Limita posloupnosti



Cíle



Seznámíme se stručně s funkcí definovanou na množině přirozených čísel a budeme definovat její limitu.

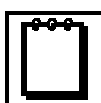


Výklad



Definice 2.3.1.

Funkce definovaná na množině přirozených čísel N se nazývá **posloupnost**.



Poznámky



1. Posloupnost je tedy zobrazení $N \rightarrow \mathbf{R}$.
2. Místo $f(n)$, $n \in N$ píšeme a_n , které nazýváme n -tým členem posloupnosti.
3. Jak jsme již uvedli $N' = \{\infty\}$ a tedy limita posloupnosti je definovaná pouze v bodě $x_0 = \infty$.

Definici limity posloupnosti můžeme zapsat podle poznámky za definicí 2.2.1.



Výklad



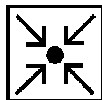
Definice 2.3.2.

Říkáme, že **posloupnost** $\{a_n\}$, $n \in N$, **má limitu** a jestliže

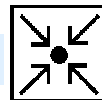
$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbf{R} \forall n \in N : n > k \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. Píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Věta 2.3.1. Předpokládejme, že existuje funkce $f(x)$, kde $D_f =]1, \infty)$ taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $f(n) = a_n$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, pak platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Důkaz: Je-li $|f(x) - a| < \varepsilon$ pro $x > k$, pak platí $|a_n - a| < \varepsilon$ pro $n > k$.



Úlohy k samostatnému řešení



1. Z definice limity posloupnosti ukažte, že daná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a . Pro dané ε nalezněte příslušné k

a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$; $a=1$; $\varepsilon=0,1$; $\varepsilon=0,001$; $\varepsilon=10^{-6}$,

b) $a_n = \frac{2^n + 1}{2^n}$; $a=1$; $\varepsilon=0,1$; $\varepsilon=0,001$; $\varepsilon=10^{-6}$.

2. Vypočtěte limitu posloupnosti:

a) $\left\{3 + \frac{4}{3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, b) $\left\{\sqrt[n]{5n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, c) $\left\{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4 + 1}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

d) $\left\{\left(2 + \frac{3}{n}\right)^3\right\}_{n=1}^{\infty}$, e) $\left\{\frac{6n+2}{4^{3n-4}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, f) $\left\{\frac{4n^2 + \sqrt{n^3 + 1}}{n^2 + n + 1}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

3. Vypočtěte:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 4n + 7}{17n^2 + n - 6}$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + \sqrt{n^3 + n}}{n^2 + 2n - 1}$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n + \sqrt{n^2 + 1}\right)^2}{2n\sqrt{n^2 + 1}}$,
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4 + n^2}$, e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[5]{n^4} + \sqrt{n^3}}$, f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^3(2n+1)}{(2n-1)^2(n+1)^2}$,
g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2}}{2n+1}$, h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^2 + n}}{n - \sqrt[3]{n}}$, i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n}}$.

4. Vypočtěte:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4n+5} - 2\sqrt{n}}$,
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 3n})$, e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n-3}}$, f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+2}}$.

5. Vypočtěte:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, & \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}, & \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n+3}, \\
 \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}, & \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n, & \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \\
 \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}, & \text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-2}{1+3n}\right)^{5n-3}, & \text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+3) - \ln n).
 \end{array}$$

6. Vypočtěte

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln n - \ln(n+2)), & \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}, \quad \text{c) } \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}, & \\
 \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n), & \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n - 1}}{\frac{1}{2^n + 1}}, \quad \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}.
 \end{array}$$

7. Vypočtěte:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, & \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 5n}{n^2 - 3n + 1}, & \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (-1)^n n), \\
 \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n, & \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(1 - \frac{6}{n} + \frac{4}{n^3}\right), & \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} - n}.
 \end{array}$$

8. Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka o délce odvěsny a je vepsán trojúhelník tak, že jeho vrcholy jsou středy stran daného trojúhelníka. Do takto vzniklého trojúhelníka je stejným způsobem vepsán další trojúhelník atd.

- Určete součet obvodů všech takto vzniklých trojúhelníků.
- Určete součet obsahů všech takto vzniklých trojúhelníků.

9. Do kruhu o poloměru r je vepsán čtverec. Do tohoto čtverce je vepsán kruh, do něj opět čtverec atd.

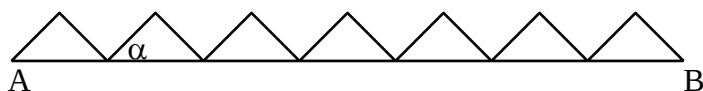
- Najděte limitu součtu obsahů všech kruhů.
- Najděte limitu součtu obsahů všech čtverců.

10. Najděte limitu pro $n \rightarrow \infty$ obvodů pravidelných n -úhelníků

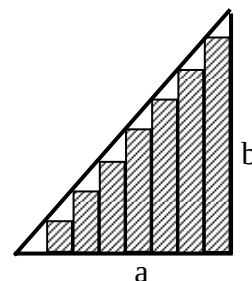
- vepsaných do kružnice o poloměru R ,
- opsaných kružnici o poloměru R .

11. Bod C_1 rozděluje úsečku $AB=l$ na dvě poloviny; bod C_2 půlí úsečku AC_1 ; bod C_3 půlí úsečku C_2C_1 ; bod C_4 půlí úsečku C_2C_3 ; atd. Určete limitní polohu bodu C_n pro $n \rightarrow \infty$.

12. Úsečka $AB=a$ je rozdělena na n stejných částí a na každé této části je sestrojen rovnoramenný trojúhelník s úhlem $\alpha = 45^\circ$ při základně. Ukažte, že limitní délka lomené čáry pro $n \rightarrow \infty$ je různá od délky úsečky s koncovými body A, B, přestože v limitě lomená čára „geometricky splyne“ s úsečkou s koncovými body A, B.



13. Odvěsna a pravoúhlého trojúhelníka je rozdělena na n stejných částí. Na každé části je sestrojen obdélník vepsaný do trojúhelníka. Vypočtěte limitu součtu obsahů takto vepsaných obdélníků pro $n \rightarrow \infty$.



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $k(\varepsilon) = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$, $k = 19; 1999; 1999\,999$; b) $k(\varepsilon) = \left\lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, $k = 3; 9; 19$.

2. a) 3; b) 1; c) 0; d) 8; e) 16; f) 4. **3.** a) $\frac{5}{17}$; b) 4; c) 2; d) 0; e) 0; f) $\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{2}$; h) 0;

i) 1. **4.** a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) ∞ ; d) $\frac{3}{2}$; e) 0; f) $\frac{1}{3}$. **5.** a) $\sqrt{e}$; b) e ; c) e^4 ; d) e ; e) e^{-5} ; f) e^{-1} ;

g) $\frac{1}{e}$; h) e^{-5} ; i) 3. **6.** a) -2; b) 1; c) 0; d) $\frac{1}{2}$; e) 0; f) 1. **7.** a) 1; b) ∞ ; c) nemá limitu;

d) ∞ ; e) ∞ ; f) ∞ . **8.** a) $2a(2 + \sqrt{2})$; b) $\frac{2}{3}a^2$. **9.** a) $2\pi r^2$; b) $4r^2$. **10.** a) $2\pi R$; b) $2\pi R$.

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} AC_n = \frac{l}{3}$. **12.** $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = a\sqrt{2}$. **13.** $\frac{ab}{2}$.