1.5. Elementární funkce

Cíle

Uvedeme nyní několik funkcí, z nichž většinu studenti znají již ze střední školy. Nazveme je ***základní elementární funkce.*** Konečným počtem sčítání, odčítání, násobení, dělení, skládání a případně invertování těchto funkcí lze vytvořit tzv. ***elementární funkce,*** jejichž studiem se budeme zabývat ve velké části předmětu matematika.

Předpokládané znalosti

Je třeba zopakovat středoškolské znalosti o funkcích a jejich grafech. Zejména se jedná o funkce lineární, kvadratické, exponenciální, logaritmické a goniometrické.

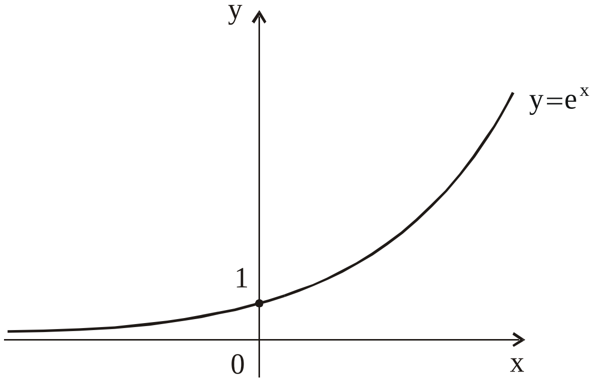
Výklad

1.5.1. Exponenciální funkce $f(x) = e^x,\ x \in \mathbf{R}$

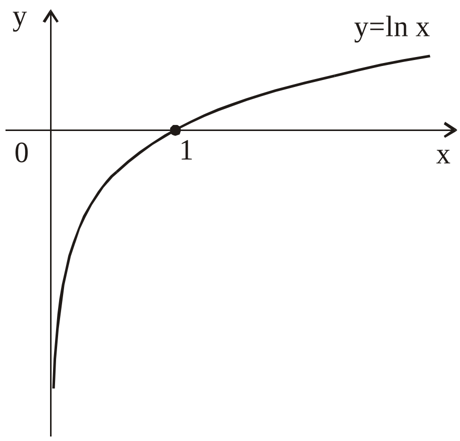
V této chvíli je obtížné exponenciální funkci přesně definovat. Můžeme však říci, že základem mocniny je iracionální číslo $e \doteq 2,718281828459045\ldots$, které se nazývá Eulerovo číslo. Poznamenejme, že tuto funkci lze vyjádřit ve tvaru nekonečné funkční řady:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ .$$

Graf exponenciální funkce je na obr. 12.



Obr.12



Obr. 13

Výklad

1.5.2. Logaritmickou funkcí $f(x) = \ln x,\ x \in (0, \infty),$

nazýváme funkci inverzní k funkci exponenciální e^x (obr. 13).

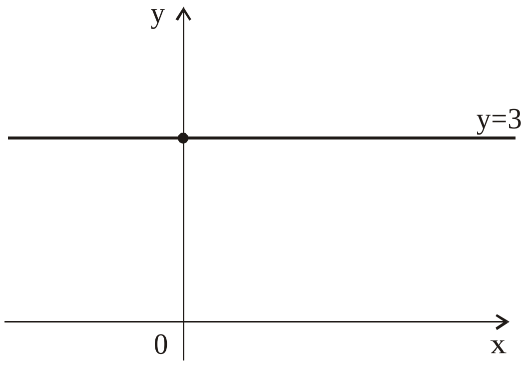
Poznámka

Lze definovat funkci $f(x) = a^x = e^{x \ln a},\ D_f = \boldsymbol{R},\ a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, *kterou nazveme* ***exponenciální funkcí o základu a****. Inverzní funkci k funkci* a^x *značíme* $\log_a x,\ D_f = (0, \infty)$ *a nazýváme ji* ***logaritmická funkce o základu a****.*

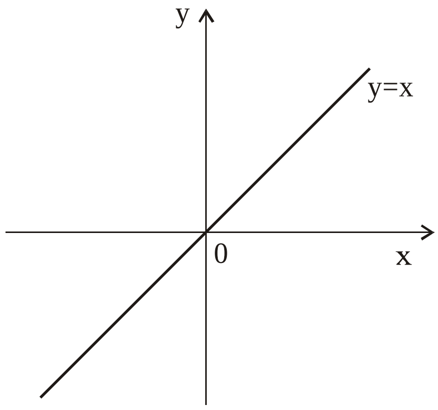
Výklad

1.5.3. Konstantní funkce je definována předpisem $f(x) = C,\ c \in \boldsymbol{R}.$

V případě, že $C = 0,$ hovoříme o nulové funkci. Na obr. 14 je graf funkce $f(x) = 3.$



Obr. 14



Obr. 15

Výklad

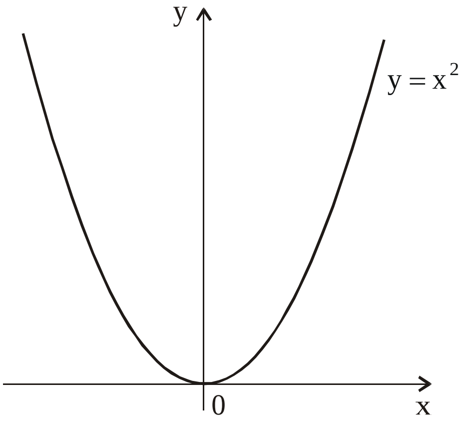
1.5.4. Mocninná funkce je funkce definovaná předpisem

$$f(x) = x^r = e^{r \ln x},\ x \in (0,\infty),\ r \in \boldsymbol{R}.$$

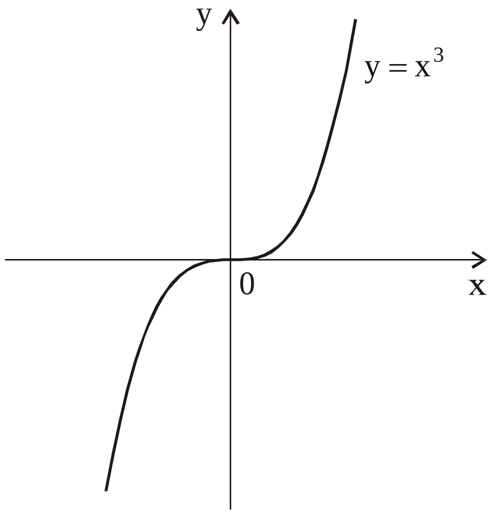
Bude-li $r \in \boldsymbol{N}$, resp. $-r \in \boldsymbol{N}$, resp. $r = \frac{1}{n}$, kde $n \in \boldsymbol{N}$, pak můžeme mocninnou funkci definovat předpisy $f(x) = x^r = \underbrace{x.x.\dots.x}_{r-krát}$, resp. $f(x) = x^{-r} = \frac{1}{x^r}$, resp. $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Definiční obor těchto funkcí pak můžeme rozšířit na $D_f = \boldsymbol{R}$, resp. $D_f = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, resp. pro n liché $D_f = \boldsymbol{R}$, pro n sudé $D_f = <0,\infty)$. Uvedeme příklady pro některá $r \in \boldsymbol{R}$:

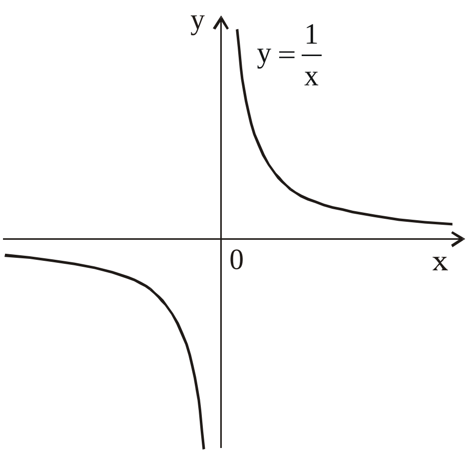
1. $r = 1,\ f(x) = x,\ D_f = \boldsymbol{R}$, grafem je přímka, obr. 15,
2. $r = 2,\ f(x) = x^2,\ D_f = \boldsymbol{R}$, grafem je parabola, obr. 16,
3. $r = 3,\ f(x) = x^3,\ D_f = \boldsymbol{R}$, grafem je kubická křivka, obr. 17,
4. $r = -1,\ f(x) = \frac{1}{x},\ D_f = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, grafem je rovnoosá hyperbola, obr. 18,
5. $r = -2,\ f(x) = \frac{1}{x^2},\ D_f = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, obr. 19,
6. $r = \frac{1}{2},\ f(x) = \sqrt{x},\ D_f = <0,\infty)$, grafem je část paraboly, obr. 20,
7. $r = \frac{1}{3},\ f(x) = \sqrt[3]{x},\ D_f = \boldsymbol{R}$, grafem je funkce inverzní k funkci x^3, obr. 21,



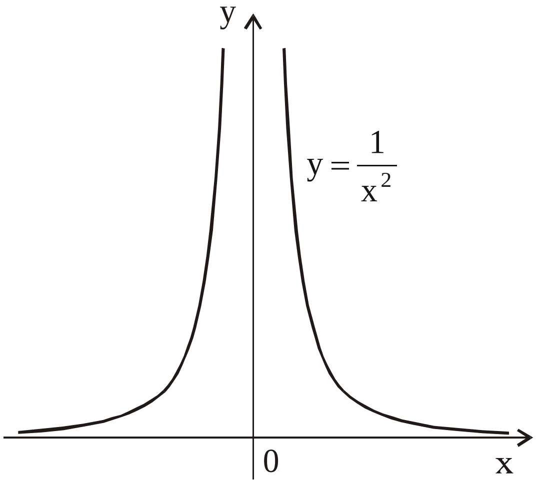
Obr. 16



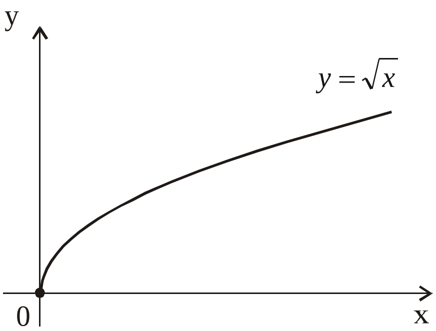
Obr. 17



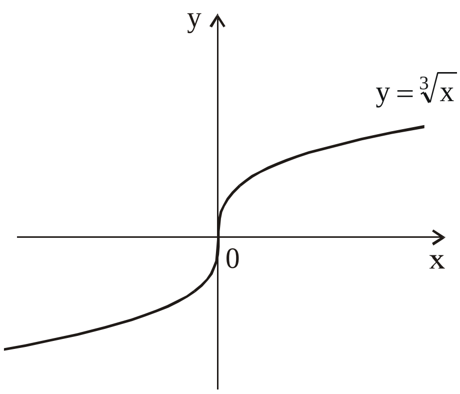
Obr. 18



Obr. 19



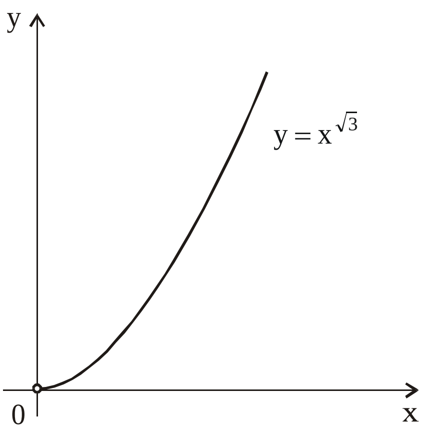
Obr. 20



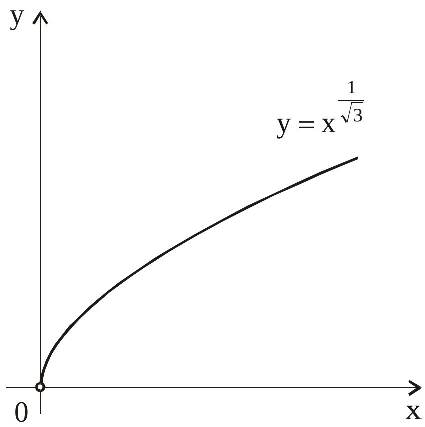
Obr. 21

8. $r=\sqrt{3},\ f(x)=x^{\sqrt{3}},\ D_f=(0,\infty),$ obr. 22,

9. $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f(x) = x^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$, $D_f = (0, \infty)$, obr. 23.



Obr. 22

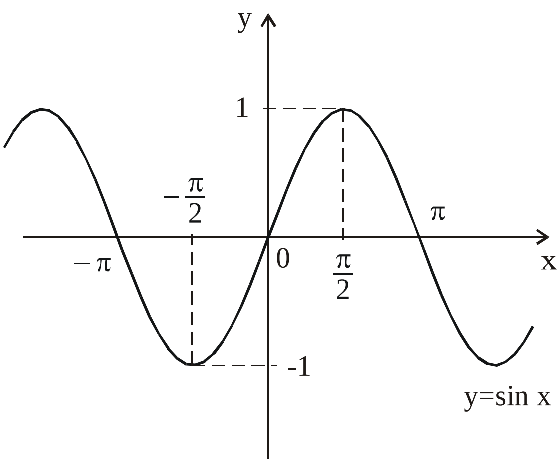


Obr. 23

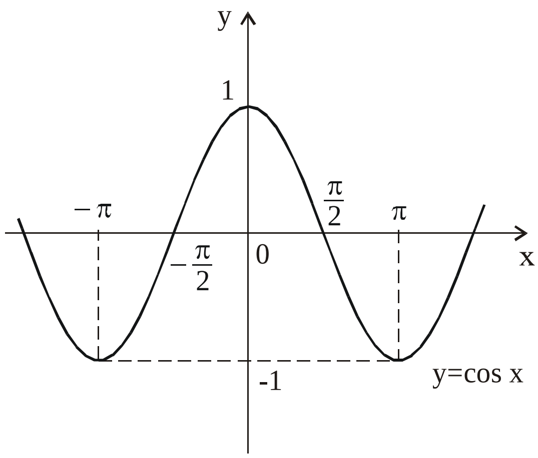
Výklad

1.5.5. Goniometrické funkce:

1. $f(x) = \sin x$, $D_f = \boldsymbol{R}$, funkce se nazývá **sinus**, obr. 24,
2. $f(x) = \cos x$, $D_f = \boldsymbol{R}$, funkce se nazývá **kosinus**, obr. 25,



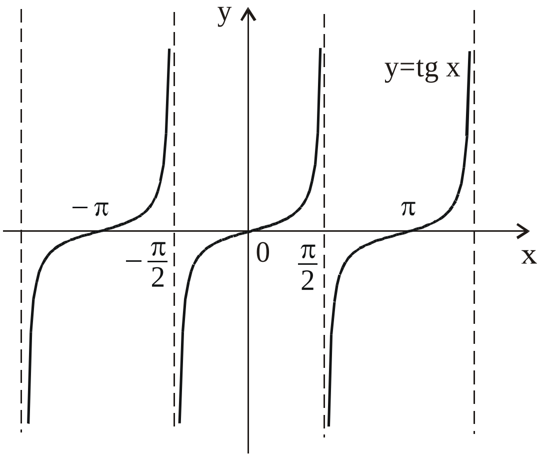
Obr. 24



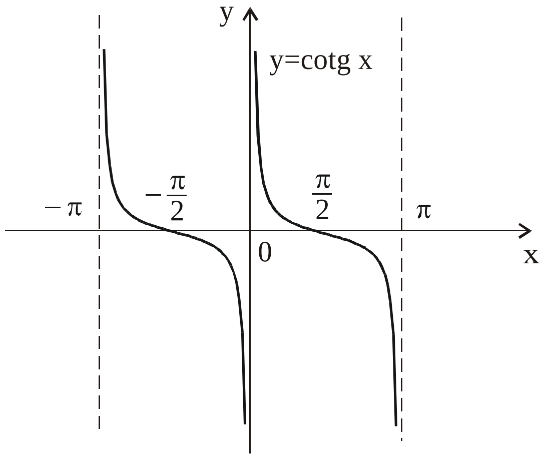
Obr. 25

3. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $D_f = \boldsymbol{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \boldsymbol{Z}\right\}$, funkce se nazývá **tangens**, obr. 26,

4. $f(x) = \cot g\, x,\ D_f = \boldsymbol{R} \setminus \{k\pi : k \in \boldsymbol{Z}\}$, funkce se nazývá **kotangens**, obr. 27.



Obr. 26

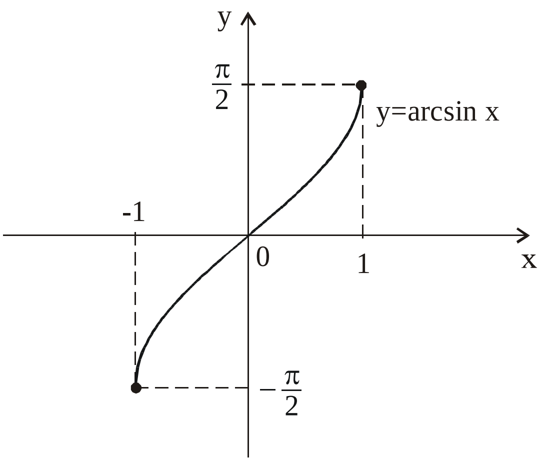


Obr. 27

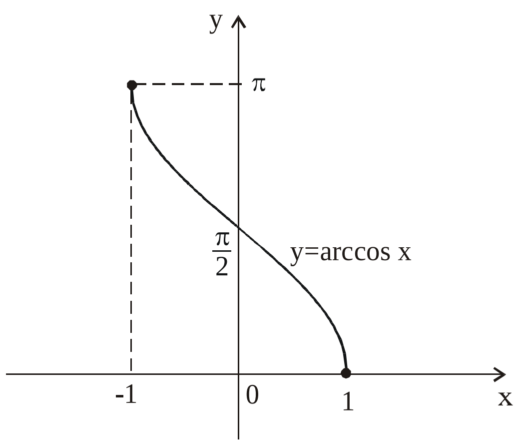
Výklad

1.5.6. Cyklometrické funkce:

1. $f(x) = \arcsin x,\ D_f = <-1,1>$, je inverzní funkcí k funkci $\sin x,\ x \in <-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}>$, nazývá se **arkussinus**, obr. 28,
2. $f(x) = \arccos x,\ D_f = <-1,1>$, je inverzní k funkci $\cos x,\ x \in <0, \pi>$, nazývá se **arkuskosinus**, obr. 29,

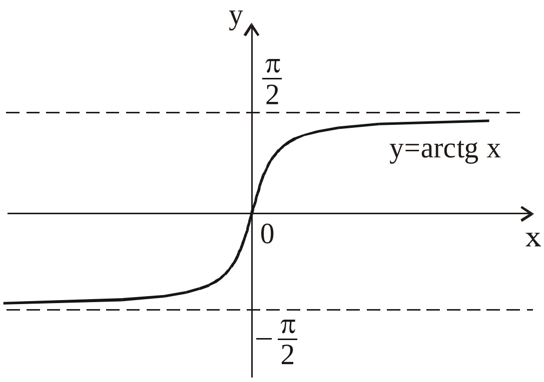


Obr. 28

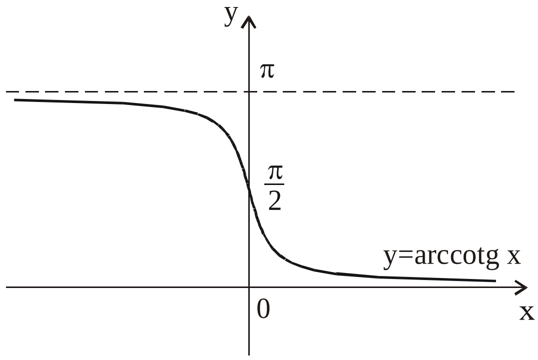


Obr. 29

3. $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ D_f = \boldsymbol{R},$ je inverzní funkcí k funkci $\operatorname{tg} x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$ nazývá se **arkustangens**, obr. 30,
4. $f(x) = \operatorname{arccotg} x,\ D_f = \boldsymbol{R},$ je inverzní funkcí k funkci $\operatorname{cotg} x,\ x \in (0, \pi),$ nazývá se **arkuskotangens**, obr. 31.



Obr. 30



Obr. 31

Poznámky

*1. Mezi základní elementární funkce se řadí také **funkce hyperbolické***

(hyperbolický sinus, $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2},\ D_f = \boldsymbol{R},$ *hyperbolický kosinus,*

$f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2},\ D_f = \boldsymbol{R},$ *hyperbolický tangens,* $f(x) = \operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x},\ D_f = \boldsymbol{R},$

hyperbolický kotangens, $f(x) = \operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x},\ D_f = \boldsymbol{R} \setminus \{0\})$ *a **funkce***

***hyperbolometrické**, které jsou inverzní k funkcím hyperbolickým. V základních kurzech matematiky je však nebudeme užívat.*

*2. Definovali jsme základní elementární funkce. **Funkce**, které získáme sčítáním, odčítáním, násobením, dělením a skládáním základních elementárních funkcí se nazývají **elementární**. Součtem, rozdílem, násobením, dělením a skládáním dvou elementárních funkcí dostaneme opět funkci elementární.*

Kontrolní otázky

1. Existuje k funkci $y = x^2$ na celém definičním oboru funkce inverzní?

   a) ano, b) ne.

2. Je logaritmická funkce o základu $a > 1$ rostoucí na celém svém definičním oboru?

   a) ano, b) ne.

3. Která z exponenciálních funkcí o základu a je na celém svém definičním oboru klesající?

   a) $0 < a < 1$, b) $a > 1$.

4. Je-li funkce tangens periodická, jakou má její perioda hodnotu?

   a) π, b) 2π, c) není periodická.

5. Funkce sinus je periodická. Existuje k ní funkce inverzní? Jestliže ano, na kterém intervalu?

   a) ano, $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$, b) ano, $< -\pi, \pi >$, c) neexistuje.

6. Který z grafů funkcí je totožný s grafem funkce $y = \frac{\pi}{2} - \arccos x$?

   a) $y = \arcsin x$, b) $y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$, c) $y = \mathrm{arc\,tg} x$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. a); 4. a); 5. a); 6. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete definiční obor funkcí:

a) $y = 1 - \log(x+2)$, b) $y = \ln(x^2 - x - 6)$, c) $y = \ln\frac{x}{1-x}$,

d) $y = \frac{1}{\ln(x-3)}$, e) $y = \log(-5x^2 + 4x - 3)$, f) $y = \ln(1 - \ln x)$.

2. Nakreslete grafy funkcí:

a) $y = 2^x$, b) $y = 2^{-x}$, c) $y = 2^{2x}$,

d) $y = \log_2 x$, e) $y = \log_2(-x)$, f) $y = \log_2(2x)$.

3. Nalezněte periodu funkcí:

a) $y=\sin 3x,$ b) $y=2\sin\dfrac{x}{2},$ c) $y=2\sin(3x+5),$

d) $y=5\cos 2x,$ e) $y=4\cos(\pi x),$ f) $y=\cos\dfrac{2t+3}{6\pi}.$

4. Nakreslete grafy funkcí:

a) $y=-\sin x,$ b) $y=1-\sin x,$ c) $y=1-\cos x,$

d) $y=\sin 2x,$ e) $y=\sin\dfrac{x}{2},$ f) $y=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right),$

g) $y=\cos\dfrac{x-\pi}{2},$ h) $y=\operatorname{tg} 2x,$ i) $y=\left|\operatorname{cotg} x\right|.$

5. Určete definiční obor funkcí:

a) $y=\arcsin(x-2),$ b) $y=\arcsin 2^{x},$ c) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1},$

d) $y=\arcsin(2x-3),$ e) $y=\arccos\dfrac{2-x}{2},$ f) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x),$

g) $y=\arcsin(\cos x),$ h) $y=\arccos\dfrac{1}{x},$ i) $y=\operatorname{arccotg}\sqrt{1-x^2}.$

6. Určete hodnotu funkce:

a) $\arcsin(-1),$ b) $\arcsin(2),$ c) $\operatorname{arctg}(-1),$

d) $\arccos(1),$ e) $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}),$ f) $\operatorname{arctg}(\pi),$

g) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),$ h) $\arccos\left(\dfrac{\pi}{2}\right),$ i) $\operatorname{arccotg}(1).$

7. Nakreslete grafy funkcí $f(x),\ g(x)$ a porovnejte je:

a) $f(x)=\arcsin x,\quad g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arccos x,$

b) $f(x)=\operatorname{arccotg} x,\quad g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $x+2>0\Rightarrow D_f=(-2,\infty)$; b) $(x-3)(x+2)>0\Rightarrow D_f=(-\infty,-2)\cup(3,\infty)$; c) $(x>0\wedge 1-x>0)\vee(x<0\wedge 1-x<0)\Rightarrow D_f=(0,1)$; d) $x-3>0\wedge x-3\neq 1\Rightarrow D_f=(3,4)\cup(4,\infty)$; e) pro každé $x\in\mathbf{R}$ je $(-5)\left[\left(x-\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{11}{25}\right]<0\Rightarrow D_f=\emptyset$; f) $x>0\wedge 1-\ln x>0\Rightarrow D_f=(0,e)$. **2.** Grafy viz příklad 1.3.4; funkce $y=\log_2 x$ je inverzní k funkci $y=2^x$ (grafy jsou souměrné podle přímky $y=x$). **3.** a) $p=\dfrac{2}{3}\pi$;

b) $p = 4\pi$; c) $p = \frac{2}{3}\pi$; d) $p = \pi$; e) $p = 2$; f) $p = 6\pi^2$. **4.** Grafy viz příklad 1.3.4.

5. a) $-1 \le x - 2 \le 1 \Rightarrow D_f = <1,3>$; b) $-1 \le 2^x \le 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0>$; c) $x + 1 \ne 0 \Rightarrow D_f = \mathbf{R} - \{-1\}$; d) $-1 \le 2x - 3 \le 1 \Rightarrow D_f = <1,2>$; e) $-1 \le \frac{2-x}{2} \le 1 \Rightarrow D_f = <0,4>$; f) $D_f = \mathbf{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z\}$; g) $D_f = \mathbf{R}$; h) $-1 \le \frac{1}{x} \le 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1> \cup <1, \infty)$; i) $1 - x^2 \ge 0 \Rightarrow D_f = <-1,1>$. **6.** a) $-\frac{\pi}{2}$; b) Nedefinovaná; c) $-\frac{\pi}{4}$; d) 0; e) $\frac{\pi}{3}$; f) Přibližně 72°21’; g) $-\frac{\pi}{4}$; h) Nedefinovaná; i) $\frac{\pi}{4}$. **7.** a) Grafy jsou totožné; b) Grafy jsou totožné.

Kontrolní test

1. Určete definiční obor funkce $y = \ln(\ln x)$.

   a) $(0,1)$, b) $(1,\infty)$, c) $(0,\infty)$.

2. Určete definiční obor funkce $y = \dfrac{\arcsin x}{\log_5 x}$.

   a) $<-1,1>$, b) $(1,\infty)$, c) $(0,1)$.

3. Najděte všechna $x \in \mathbf{R}$, pro něž platí $\log_x 4 > \log_x 8$.

   a) $x \in (0,1)$, b) $x \in (1,\infty)$, c) $x \in (0,\infty)$.

4. Určete, zda je funkce $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ pro $x \in (-1,1)$ sudá nebo lichá.

   a) sudá, b) lichá.

5. Určete periodu funkce $y = \sqrt{2}\sin(3x - \frac{\pi}{4})$.

   a) $p = \frac{2}{3}\pi$, b) $p = \sqrt{2}$, c) $p = \frac{\pi}{4}$.

6. Určete hodnotu výrazu $V = \arcsin(-\frac{1}{2}) + \arccos(-\frac{1}{2})$.

a) $V = \dfrac{\pi}{2}$, b) $V = \dfrac{\pi}{3}$, c) $V = 1$.

7. Určete inverzní funkci k dané funkci a její definiční obor: $y = 2\arccos(1-x)$.

   a) $f^{-1}(x) = 1 - \dfrac{\cos x}{2}$; $D_{f^{-1}} = \mathbf{R}$,

   b) $f^{-1}(x) = \dfrac{\cos(1-x)}{2}$; $D_{f^{-1}} = \mathbf{R}$,

   c) neexistuje.

8. Určete inverzní funkci k dané funkci a její definiční obor: $y = \log_5 x$.

   a) $f^{-1}(x) = 5^x$, b) $f^{-1}(x) = x^5$, c) neexistuje.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. a); 4. b); 5. a); 6. a); 7. a); 8. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 5 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.5. znovu.