1.4. Základní vlastnosti funkcí a operace s funkcemi

Cíle

V této kapitole jsou definovány nejdůležitější pojmy týkající se vlastností funkcí. Při dalším studiu budou tyto vlastnosti často používány. Je proto nutné si jejich definice dobře zapamatovat.

Výklad

Definice 1.4.1.

Funkce *f* je **ohraničená shora**, jestliže $\forall x \in D_f \ \exists h \in \boldsymbol{R}: \ f(x) \leq h.$

Funkce *f* je **ohraničená zdola,** jestliže $\forall x \in D_f \ \exists d \in \boldsymbol{R}: \ f(x) \leq d.$

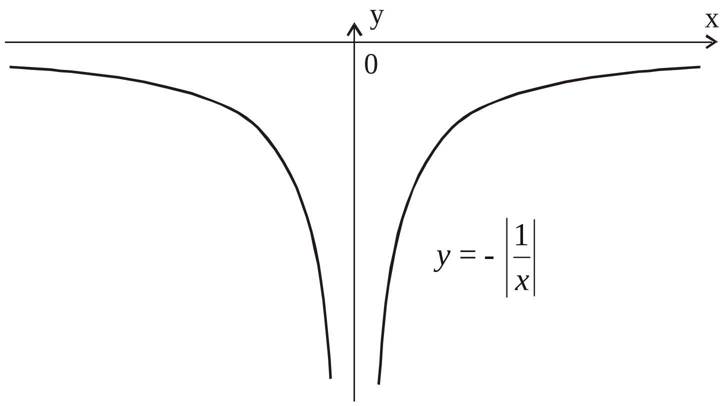
Funkce *f* je **ohraničená**, jestliže je ohraničena shora i zdola, tj. $\forall x \in D_f \ \exists k \in \boldsymbol{R}: \ \left| f(x) \right| \leq k.$

Řešené úlohy

Příklad 1. Funkce $y = -\left|\frac{1}{x}\right|, \ x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ je ohraničená shora, definici vyhovuje např. $h = 0,$ obr. 7.

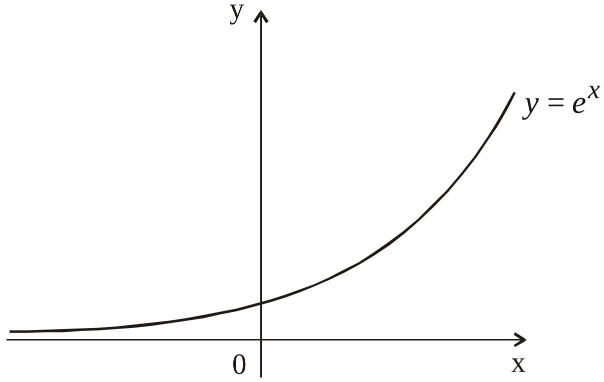
Řešené úlohy

Příklad 1. Funkce $y = -\left|\frac{1}{x}\right|. \ x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ je ohraničená shora, definice vyhovuje např. $h = 0,$ obr. 7.



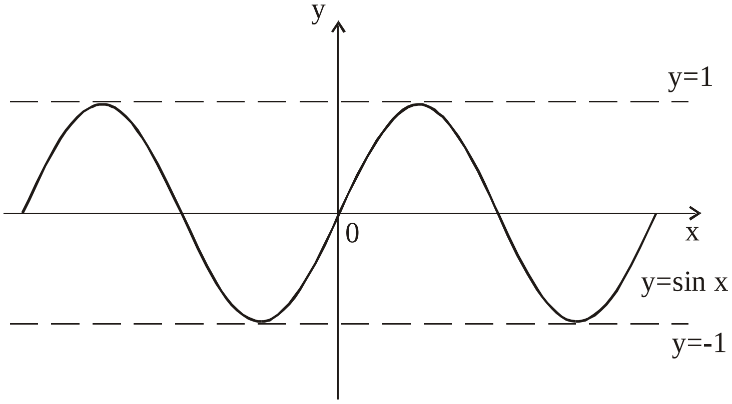
Obr. 7

2. Funkce $y = e^x,\ x \in \boldsymbol{R},$ je ohraničená zdola, definici vyhovuje např. $d = 0,$ obr. 8.



Obr. 8

3. Funkce $y = \sin x,\ x \in (-\infty, \infty)$ je ohraničená, definici vyhovuje např. $k = 1,$ obr. 9.



Obr. 9

Výklad

Definice 1.4.2.

Funkce *f* se na intervalu $I \subset D_f$ nazývá **rostoucí (klesající, neklesající, nerostoucí)**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \left(f(x_1) > f(x_2),\ f(x_1) \leq f(x_2),\ f(x_1) \geq f(x_2) \right).$$

Funkce splňující na *I* některou z výše uvedených vlastností se nazývají **monotónní** na intervalu *I*. **Funkce** rostoucí a klesající na *I* se nazývají **ryze monotónní** na *I*.

Řešené úlohy

Příklad Dokažte, že funkce $y = x^3$ je rostoucí na $\boldsymbol{R}$.

Řešení: Dokážeme, že za předpokladu $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in R$ je

$x_1^3 < x_2^3$, tj. $x_2^3 - x_1^3 > 0$. Platí:

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{4} - \frac{x_2^2}{4} + x_2^2) =$$

$$= (x_2 - x_1)\left((x_1 + \frac{x_2}{2})^2 + x_2^2 - \frac{x_2^2}{4} \right).$$

Podle předpokladu platí $x_2 - x_1 > 0,\ (x_1 + \frac{x_2}{2})^2 > 0$ a $x_2^2 - \frac{x_2^2}{4} > 0$.

Z toho vyplývá $x_2^3 - x_1^3 > 0$. Funkce $y = x^3$ je rostoucí na $\boldsymbol{R}$.

Výklad

Definice 1.4.3.

Funkce *f* se nazývá **sudá (lichá),** jestliže

$$\forall x \in D_f : -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x) \left(f(-x) = -f(x) \right).$$

Poznámka

Graf sudé (liché) funkce je souměrný podle osy y (podle počátku) soustavy souřadnic.

Výklad

Definice 1.4.4.

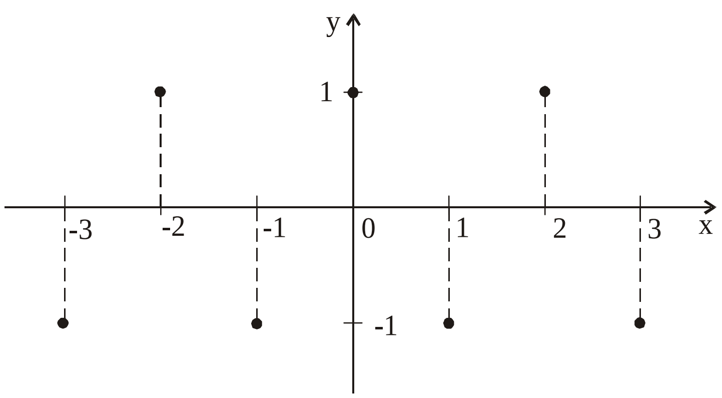
Funkce f se nazývá **periodická** s periodou $p \in (0, \infty)$, jestliže

$\forall x \in D_f : x \pm p \in D_f \wedge f(x \pm p) = f(x)$.

Řešené úlohy

Příklad 1. Periodické funkce jsou $y = \sin x$, $y = \cos x$ s periodou $p = 2\pi$ a funkce $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$ s periodou $p = \pi$.

2. Periodickou je také například funkce $y = (-1)^x$, $x \in \mathbf{Z}$, s periodou $p = 2$. Graf viz obr. 10.



Obr. 10

Výklad

Definice 1.4.5.

Funkce f se nazývá **prostá**, jestliže $\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Věta 1.4.1. Každá ryze monotónní funkce je prostá.

Důkaz (přímý):

Pro $\forall x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$ je $x_1 < x_2$ nebo $x_1 > x_2$. Z předpokladu věty vyplývá, že $f(x_1) < f(x_2)$ nebo $f(x_1) > f(x_2)$. V každém případě je $f(x_1) \neq f(x_2)$.

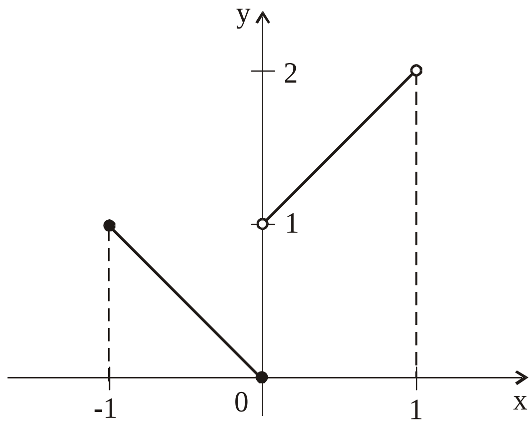
Poznámka

Pamatujte si, že funkce prostá nemusí být monotónní!

Řešené úlohy

Příklad Funkce $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ pro } x \in (0,1) \\ -x \text{ pro } x \in <-1, 0> \end{cases}$

je prostá, není však monotónní, viz obr. 11.



Obr. 11

Výklad

Úmluva: Význačné body grafu funkce, v nichž je funkce definovaná, budeme označovat plnými kroužky, body, v nichž není definovaná, pak kroužky prázdnými.

Definice 1.4.6.

Funkce $g_1(x) = f_1(x) + f_2(x)$, resp. $g_2(x) = f_1(x).f_2(x)$, $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2}$ se nazývá **součet**, resp. **součin funkcí** f_1, f_2. Funkce $g_3(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}, x \in D_{f_1} \cap (D_{f_2} \setminus \{x \in D_{f_2} : f_2(x) = 0\})$ se nazývá **podíl funkcí** f_1, f_2.

Definice 1.4.7.

Mějme funkce g a h. Je-li $u = g(x) \in D_h$ pro $x \in D_g$, můžeme k x přiřadit hodnotu $y = h(u) = h(g(x))$. Říkáme, že funkce $f(x) = h(g(x)), D_f = \{x \in D_g : g(x) \in D_h\}$ je funkce složená. Funkci h nazveme **vnější** složkou a funkci g **vnitřní složkou** skládání.

Řešené úlohy

Příklad Funkci $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $D_f = <-1,1>$ můžeme rozložit na složky $g(x) = 1 - x^2, D_g = \boldsymbol{R}$ a $h(u) = \sqrt{u}$, $D_h = <0, \infty)$.

Výklad

Definice 1.4.8.

Nechť je $f(x)$ prostá funkce na D_f a nechť H_f je její obor funkčních hodnot. Funkce $f^{-1}(y)$ definovaná na H_f předpisem $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$ se nazývá **inverzní funkce** k funkci $f(x)$.

Věta 1.4.2. Pro každou prostou funkci *f* a k ní inverzní funkci f^{-1} platí, že

$$\forall x \in D_f : f^{-1}(f(x)) = x \text{ a } \forall y \in D_{f^{-1}} : f(f^{-1}(y)) = y.$$

Důkaz plyne přímo z definice.

Řešené úlohy

Příklad Platí $\ln e^x = x,\ x \in \boldsymbol{R}$ a také $e^{\ln y} = y,\ y \in (0, \infty)$. Logaritmické a exponenciální funkce jsou inverzní.

Výklad

Věta 1.4.3. Jestliže je funkce *f* rostoucí (klesající), pak funkce f^{-1} je rostoucí (klesající).

Důkaz (sporem):
Provedeme pro funkci rostoucí. Předpokládejme, že

$\exists y_1, y_2 \in D_{f^{-1}} : y_1 < y_2 \wedge f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2).$

Funkce *f* je rostoucí a tedy dostaneme $f(f^{-1}(y_1) \geq f(f^{-1}(y_2))$. Podle věty 1.4.2 je $y_1 \geq y_2$, což je spor s předpokladem.

Řešené úlohy

Příklad K funkci $f(x) = x^3,\ x \in \boldsymbol{R},\ H_f = \boldsymbol{R}$ je inverzní funkcí funkce

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y},\ y \in \boldsymbol{R}$. Obě funkce jsou implicitně určeny rovnicí $x^3 - y = 0$ a mají stejný graf. Vyměníme-li v rovnici $x = \sqrt[3]{y}$ proměnné, dostáváme funkci $y = \sqrt[3]{x},\ x \in \boldsymbol{R}$, jejíž graf je s grafem funkce $y = x^3$ symetrický podle přímky $y = x$.

Poznámka

Často se používá název inverzní funkce k funkci $f(x)$ nejen pro funkci $f^{-1}(y)$, ale také pro funkci $f^{-1}(x)$.

S cyklometrickými funkcemi ($\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arccotg} x$) se seznámíte v kapitole 1.5.6.

Kontrolní otázky

1. Která z uvedených možností platí pro funkci reálné proměnné: Funkce je každé zobrazení $f:\ M \to \boldsymbol{R},\ M \subset \boldsymbol{R}$, které každému $x \in M$ přiřadí
   a) alespoň jednu hodnotu $y \in \boldsymbol{R}$,
   b) právě jednu hodnotu $y \in \boldsymbol{R}$.
2. Která z možností platí pro graf funkce liché?
   a) je souměrný podle osy x,
   b) je souměrný podle osy y,
   c) je souměrný podle počátku soustavy souřadnic.
3. Je každá funkce prostá monotónní?
   a) ano; b) ne; c) nemusí.
4. Co platí pro definiční obor D_f součinu dvou funkcí $f_1(x) \cdot f_2(x)$?
   a) $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2}$,
   b) $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$.
5. Ke které z funkcí lze nalézt inverzní funkci?
   a) ke každé funkci,
   b) jen k periodické funkci,
   c) jen k prosté funkci.

6. Funkce sinus je funkcí periodickou. Je i ohraničenou zdola?

   a) ano, b) ne.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. c); 3. c); 4. b); 5. c); 6. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Zjistěte, zda je daná funkce ohraničená. Pokud není uvedeno jinak, uvažujte všechna x, pro něž je funkce definovaná:

a) $y=\dfrac{2}{3+x^2}$, b) $y=1-\dfrac{2}{x-1}$, c) $y=\pi+\arccos(2x-1)$,

d) $y=\dfrac{2}{(x-1)^2}-1$, e) $y=1-3x,\quad x\in(-3,7)$, f) $y=2\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$.

2. Nalezněte intervaly, v nichž je funkce monotónní. Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $y=2x^2+4x+3$, b) $y=-\sqrt{x+5}$, c) $y=|x-2|+|2x-1|$,

d) $y=\dfrac{1}{x+3}$, e) $y=3^{-2x}$, f) $y=\dfrac{x+2}{3-x}$.

3. Z grafu funkce nalezněte maximální hodnotu funkce:

a) $y=5-x^2$, b) $y=-x^2-3x+2$, c) $y=-2x^2+ax-a^2$.

4. Z grafu funkce nalezněte maximální a minimální hodnotu funkce na daném intervalu:

a) $y=\dfrac{4}{x},\quad x\in<1,5>$, b) $y=\dfrac{x}{2-x},\quad x\in<1,4>$, c) $y=\dfrac{1-x}{1+x},\quad x\in<0,4>$.

5. Zjistěte, zda je funkce sudá, lichá nebo není ani sudá, ani lichá:

a) $y=3x^2-\sqrt{1-x^2}$, b) $y=2^{x-x^3}$, c) $y=\log\dfrac{2-x}{2+x}$,

d) $y=\dfrac{3x}{2+x^4}$, e) $y=\dfrac{1}{x^2}\cos x$, f) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,

g) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, h) $y=\dfrac{\sin x}{(x+\sin x)^2}$, i) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x}}{|x|}$,

j) $y=x\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$, k) $y=\dfrac{\cos x}{\cos x+x\sin x}$, l) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. Rozhodněte, zda jsou dané funkce periodické. Pokud ano, určete periodu p :

a) $y=\sin^2 x$, b) $y=\sin x^2$, c) $y=x\cos x$,

d) $y=\left|\sin\frac{x}{2}\right|$, e) $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$, f) $y=1+3\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$,

g) $y=\sin x+\cos 2x$, h) $y=\log(\sin x+\cos x)$, i) $y=\frac{1}{2}\sin(4\pi x+2)$.

7. Jsou dány funkce *f(x)* a *g(x)*. Vytvořte složené funkce $f\circ g$ a $g\circ f$, určete jejich definiční obory:

a) $f: y=\ln x \quad g: y=\sqrt{1-|x|}$, b) $f: y=\sqrt{x} \quad g: y=\ln(x+1)$,

c) $f: y=-\sqrt{x+5} \quad g: y=x^2-5$, d) $f: y=\frac{1}{x} \quad g: y=2^x$.

8. Nalezněte inverzní funkci k dané funkci. Určete definiční obor a obor hodnot inverzní funkce. Pokud není daná funkce prostá na celém definičním oboru, proveďte zúžení funkce na množinu, na níž je prostá.

a) $y=\frac{5x-1}{x+2}$, b) $y=\frac{1}{2+e^x}$, c) $y=\frac{1}{\sqrt[4]{(x+2)^3}}$,

d) $y=-\sqrt{x+5}$, e) $y=\frac{1}{2}3^{x-1}$, f) $y=\frac{3}{\ln(x-2)}$,

g) $y=1-\arccos(x-3)$, h) $y=\ln(1-e^x)$, i) $y=\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) ohraničená, $0<y\le\frac{2}{3}$; b) neohraničená; c) ohraničená, $\pi\le y\le 2\pi$; d) ohraničená zdola, $y\ge -1$; e) ohraničená, $-20<y<10$; f) ohraničená, $-\pi<y<\pi$. **2.** a) klesající v $(-\infty,-1)$, rostoucí v $(-1,\infty)$; b) klesající v $(-5,\infty)$; c) klesající v $(-\infty,\frac{1}{2})$, rostoucí v $(\frac{1}{2},\infty)$; d) klesající v $(-\infty,-3)\cup(-3,\infty)$; e) klesající v $(-\infty,\infty)$; f) rostoucí v $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$. **3.** a) $y_{MAX}=y(0)=5$; b) $y_{MAX}=y(-\frac{3}{2})=\frac{17}{4}$; c) $y_{MAX}=y(\frac{a}{4})=-\frac{7a^2}{8}$. **4.** a) $y_{MAX}=y(1)=4$, $y_{MIN}=y(5)=\frac{4}{5}$;

b) $y = \dfrac{x}{2-x} = -1 + \dfrac{2}{2-x}$, funkce je neohraničená; c) $y = \dfrac{1-x}{1+x} = -1 + \dfrac{2}{1+x}$,

$y_{MAX} = y(0) = 1$, $y_{MIN} = y(4) = -\dfrac{3}{5}$. **5.** a) sudá; b) ani sudá, ani lichá, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$;

c) lichá; d) lichá; e) sudá; f) sudá; g) ani sudá, ani lichá, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$; h) lichá; i) lichá;

j) sudá; k) sudá; l) lichá. **6.** a) $p = \pi$; b) není periodická; c) není periodická; d) $p = 2\pi$;

e) $p = \pi$; f) $p = 2\pi$; g) $p = 2\pi$; h) $p = 2\pi$; i) $p = \dfrac{1}{2}$. **7.** a) $f \circ g : y = \ln\sqrt{1-|x|}$,

$x \in (-1,1)$; $g \circ f : y = \sqrt{1-|\ln x|}$, $x \in < e^{-1}, e >$; b) $f \circ g : y = \sqrt{\ln(x+1)}$, $x \in < 0, \infty)$;

$g \circ f : y = \ln(\sqrt{x}+1)$, $x \in < 0, \infty)$; c) $f \circ g : y = -|x|$, $x \in \mathbf{R}$; $g \circ f : y = x$, $x \in < -5, \infty) \Rightarrow$

g je inverzní k f; d) $f \circ g : y = \dfrac{1}{2^x}$, $x \in \mathbf{R}$; $g \circ f : y = 2^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$; **8.** a) $y = \dfrac{2x+1}{5-x}$, $x \neq 5$,

$y \neq -2$; b) $y = \ln(\dfrac{1}{x} - 2)$, $x \in (0, \dfrac{1}{2})$, $y \in \mathbf{R}$; c) $y = -2 + \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^4}}$, $x > 0$, $y > -2$;

d) $y = x^2 - 5$, $x \leq 0$, $y \geq -5$; e) $y = 1 + \log_3 2x$, $x > 0$, $y \in \mathbf{R}$; f) $y = 2 + e^{\frac{3}{x}}$, $x \neq 0$,

$y \in (2,3) \cup (3,\infty)$; g) $y = 3 + \cos(1-x)$, $x \in < 1-\pi, 1 >$, $y \in < 2, 4 >$; h) $y = \ln(1-e^x)$, $x < 0$,

$y < 0$ (totožná s danou funkcí); i) $y = 3 - \dfrac{2}{1+x^2}$, $x > 0$, $y \in < 1, 3)$.

Kontrolní test

1. Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4+x}$.

   a) $x \in < -4, 0 >$; b) $x \in < 0, 4 >$.

2. Rozhodněte, které z uvedených funkcí jsou prosté:

   a) $h_1 = \{(0,1), (-2,3), (0,4), (7,2), (6,4)\}$;

   b) $h_2 = \{(-2,1), (0,6), (5,7), (-3,0)\}$;

   c) $h_3 = \{(7,5), (8,6), (-2,0), (8,4)\}$.

   a) h_1, h_2; b) h_2; c) h_3.

3. Sestrojte graf funkce $y = |x^2 - x - 2|$ a určete interval, na kterém je funkce klesající:

 a) $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, 2)$; b) $x \in (-1, \frac{1}{2})$.

4. Řešte graficky nerovnici: $|x+1| \le 3$.

 a) $x = 2$; b) $x_1 = -4, x_2 = 2$; c) $x \in < -4, 2 >$.

5. Určete funkci $F(x) = f\left[g(x)\right]$ a její definiční obor, je-li

 $g(x) = \frac{1-x}{x}$, $f(u) = \sqrt[3]{1+u}$, $u = g(x)$.

 a) $F(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$, $x \ne 0$;

 b) $F(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x}{x}}$, $x > 0$;

 c) $F(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$, $x \ne 0$.

6. Určete lineární funkci $f(x)$, pro niž platí $f(0) = -4, f(3) = 11$. Najděte funkci k ní inverzní.

 a) $f(x) = 5x - 4$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$;

 b) $f(x) = -4x + 5$, $f^{-1}(x) = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}$.

Výsledky testu

1. a); 2. b); 3. a); 4. c); 5. a); 6. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 5 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.3. a 1.4. znovu.