

1.2. Hornerův algoritmus



Cíle



V této kapitole se naučíme určovat zejména celočíselné kořeny některých polynomů.



Výklad



Při výpočtu hodnoty polynomu $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ n -tého stupně, $n \geq 1$ v bodě $x_0 \in \mathbb{C}$

musíme provést $(n-1)$ -krát umocnění $x_0^2, x_0^3, \dots, x_0^n$, n násobení koeficienty a n sčítání.

Budeme se snažit počet operací snížit. Způsob řešení ukážeme nejdříve na příkladu.



Řešené úlohy



Příklad Pro $p(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 3$ určete $p(2)$.

Řešení:

a) Dosazením: $p(2) = 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = 8 + 16 + 4 + 3 = 31$.

b) Metodou, kterou budeme nazývat Hornerovým algoritmem (schématem):

$$p(x) = (x^2 + 4x + 2)x + 3 = ((x + 4)x + 2)x + 3,$$

$$p(2) = ((2 + 4)2 + 2)2 + 3 = (6 \cdot 2 + 2)2 + 3 = 14 \cdot 2 + 3 = 31.$$

Zapišme nyní do prvního řádku tabulky koeficienty daného polynomu, do druhého řádku nejprve opišme hodnotu $a_3 = 1$ a pak zvýrazněné součty z předchozího výpočtu:

x_0	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	4	2	3
2	1	6	14	31

Lze se přesvědčit, že čísla 6, 14, 31 dostaneme tak, že číslem $x_0 = 2$ násobíme číslo 1 z druhého řádku a přičteme k němu číslo 4 z prvního řádku. Pak číslo 6 násobíme opět číslem 2 a přičteme další číslo z prvního řádku, tj. číslo 2 a dostaneme 14. Poslední krok už je zřejmý $2 \cdot 14 + 3 = 31$. Dostali jsme hodnotu $p(2) = 31$.



Výklad

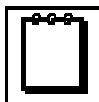


Zobecnění algoritmu:

K polynomu $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ stupně n a číslu $x_0 \in \mathbb{C}$ přiřadíme postupně čísla $b_{n-1} = a_n, b_{k-1} = x_0 b_k + a_k$ pro $k = n-1, n-2, \dots, 1$ a $r = x_0 b_0 + a_0$, kde r je hodnota $p(x_0)$.

Tabulku pak můžeme zapsat ve tvaru:

	a_n	a_{n-1}	\dots	a_1	a_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-1}	\dots	b_0	r



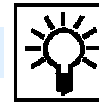
Poznámka

Koeficienty b_{n-1}, \dots, b_0 jsou koeficienty polynomu $p_1(x)$ stupně $n-1$, pro který platí:

$$p(x) = (x - x_0)p_1(x) + r.$$



Řešené úlohy



Příklad Určete hodnoty polynomu $p(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 3$ pro $-1, 2, 3$.

Řešení:

	1	4	2	3
-1	1	3	-1	4
2	1	6	14	31
3	1	7	23	72



Výklad



Pro určení kořenů některých polynomů uvedeme bez důkazu větu:

Věta 1.2.1. Jestliže v polynomu $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $a_k \in \mathbf{Z}$ je $a_n = 1$ a má-li $p(x)$ kořeny patřící do \mathbf{Z} , pak jsou tyto kořeny děliteli čísla a_0 .



Řešené úlohy



Příklad Užitím Hornerova schématu určete kořeny polynomu

$$p(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6.$$

Řešení: Pokud existují celočíselné kořeny, pak podle věty 1.2.1 to mohou být čísla $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ a ± 6 . Sestavíme tabulku a uvědomíme si, že jsou-li x_0, x_1 kořeny polynomu $p(x)$ a $p(x) = (x - x_0)p_1(x)$, pak x_1 musí být kořenem polynomu $p_1(x)$. To znamená, že v tabulce můžeme při výpočtu použít nově vzniklý řádek.

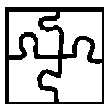
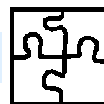
	1	-1	-7	1	6	
1	1	0	-7	-6	0	$\Rightarrow x_1 = 1$ je kořen $\Rightarrow p(x) = (x-1)(x^3 - 7x - 6)$,
-1	1	-1	-6	0		$\Rightarrow x_2 = -1$ je kořen $\Rightarrow p(x) = (x-1)(x+1)(x^2 - x - 6)$,
2	1	1	-4			$\Rightarrow x_0 = 2$ není kořen,
-2	1	-3	0			$\Rightarrow x_3 = -2$ je kořen $\Rightarrow p(x) = (x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$,
3	1	0				$\Rightarrow x_4 = 3$ je kořen.

Rozklad polynomu $p(x)$ na součin kořenových činitelů lze napsat ve tvaru

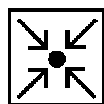
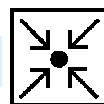
$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)(x+1)(x+2)(x-3).$$

**Kontrolní otázky**

- Kterou z funkcí nazýváme polynomem?
 - Komplexní funkci komplexní proměnné,
 - komplexní funkci reálné proměnné,
 - reálnou funkci reálné proměnné.
- Je součinem polynomů polynom?
 - ano, b) ne, c) nemusí být.
- Je podílem polynomů polynom?
 - ano, b) ne, c) nemusí být.
- Hornerovým algoritmem lze pro polynom $p(x)$ určit
 - jen kořen polynomu,
 - jen hodnotu polynomu v daném bodě,
 - oboje.
- Řešení které z uvedených rovnic vede k určení kořenů polynomu 2. stupně?
 - Lineární rovnice,
 - kvadratické rovnice,
 - kubické rovnice.

**Odpovědi na kontrolní otázky**

1. a); 2. a); 3. c); 4. c); 5. b).

**Úlohy k samostatnému řešení**

- 1.** Vypočítejte hodnoty následujících polynomů v bodech 0, 1, -1, -2, 3 přímým dosazením a pomocí Hornerova algoritmu:

a) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$, b)

$q(x) = x^4 - 2x^2 + x - 4$, c)

$r(x) = x^5 - 3x^3 + 2x - 2$.

- 2.** Nalezněte kořeny polynomu a proveďte rozklad na kořenové činitele:

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2$,

b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$,

c) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$,

d) $x^3 - 3x + 2$,

e) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$,

f) $x^3 - 3x^2 + 4$,

g) $x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$,

h) $x^4 - 3x^3 + 4x$,

i) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$,

j) $x^3 - x^2 + x - 1$,

k) $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$,

l) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$.

3. Pomocí Hornerova algoritmu vydělte polynomy:

a) $(2x^5 - 7x^4 + 13x^3 - 9x^2 - 14x + 8) : (x - 2)$,

b) $(2x^5 - 7x^4 + 13x^3 - 9x^2 - 14x + 8) : (x + 2)$,

c) $(3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 7) : (x + 1)$,

d) $(3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 7) : (x - 1)$,

e) $(x^6 - 6x^5 + 3x^4 + 19x^3 + 2x^2 - 22x + 21) : (x - 3)$.

4. Nalezněte všechny kořeny polynomu $p(x)$, znáte-li jeden kořen polynomu:

a) $p(x) = x^3 - 7x + 6$, $x_1 = -3$, b) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$, $x_1 = 2$,

c) $p(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 5$, $x_1 = 2$, d) $p(x) = x^3 - x^2 + 3x + 5$, $x_1 = -1$,

e) $p(x) = x^4 - x^3 - 17x^2 - 15x$, $x_1 = 5$, f) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 16x$, $x_1 = 4$.

5. Která z čísel -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4 jsou kořeny polynomu

$$p(x) = x^5 - x^4 - 10x^3 - 5x^2 - 21x + 36 ?$$



Výsledky úloh k samostatnému řešení



- 1.** a) 3, 5, 5, 5, 45 ; b) -4, -4, -6, 2, 62 ; c) -2, -2, -2, -14, 166 . **2.** a) 1, -1, 2 ;
 $(x-1)(x+1)(x-2)$; b) 1, -1, -2 ; $(x-1)(x+1)(x+2)$; c) 2, -2, -3 ; $(x-2)(x+2)(x+3)$; d) 1,
 1, -2 ; $(x-1)^2(x+2)$ e) -1, -2, -2 ; $(x+1)(x+2)^2$ f) -1, 2, 2 ; $(x+1)(x-2)^2$; g) 0, -1, 2, -2 ;
 $x(x+1)(x-2)(x+2)$ h) 0, -1, 2, 2 ; $x(x+1)(x-2)^2$; i) -1, -1, 2, 3 ; $(x+1)^2(x-2)(x-3)$ j) 1,
 $+i, -i$; $(x-1)(x-i)(x+i)$ k) 2, $1+i, 1-i$; $(x-2)(x-1-i)(x-1+i)$ l) -1, 2, $+i, -i$;
 $(x+1)(x-2)(x-i)(x+i)$. **3.** a) $2x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 5x - 4$;
 b) $2x^4 - 11x^3 + 35x^2 - 79x + 144 - \frac{280}{x+2}$; c) $3x^4 - 6x^3 + x^2 + 5x - 7$;
 d) $3x^4 - 5x^2 + x - 1 - \frac{8}{x-1}$; e) $x^5 - 3x^4 - 6x^3 + x^2 + 5x - 7$. **4.** a) -3, 1, 2 ; b) 2, -1, $\frac{1}{2}$;
 c) 2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$; d) -1, $1+2i, 1-2i$; e) 5, 0, -1, -3 ; f) 4, 0, $-1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}$. **5.** 1, -3, 4.

**Kontrolní test**

1. Určete koeficienty u x^5 a x^4 součinu $f(x) \cdot g(x)$ polynomů

$$f(x) = 7x^6 + \frac{3}{5}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 2x - 3,$$

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5.$$

a) $-15, \frac{67}{3}$; b) $5, \frac{67}{3}$; c) $\frac{67}{3}, 5$.

2. Rozložte polynom $f(x)$ na součin kořenových činitelů:

$$f(x) = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1.$$

a) $(9x+1)^3$; b) $(3x-1)^3$; c) $(9x-1)^3$.

3. Určete celé kořeny polynomu $f(x)$ (užijte Hornerův algoritmus):

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24.$$

a) $-2; 3; 4$; b) $2; 3; -4$; c) $2; -3; 4$.

4. Určete další kořeny polynomu $f(x)$ a jeho rozklad na součin kořenových činitelů, znáte-li jeden jeho kořen x_1 :

$$f(x) = 7x^4 + 50x^3 - 50x - 7, \quad x_1 = -7.$$

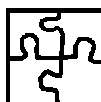
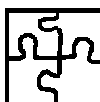
a) $-1; 1; \frac{1}{7}$; b) $1; -7; 7$; c) $-1; -\frac{1}{7}; \frac{1}{7}$.

5. Řešte rovnici: $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x - 15 = 0$.

a) $0; 1; 3; 5$; b) $1; 1; -3; 5$; c) $1; 3; -5; 5$.

6. Řešte nerovnici: $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 < 0$.

a) $x \in \langle 1, 2 \rangle$; b) $x \in (-1, 2)$; c) $x \in (1, 2)$.

**Výsledky testu**

1. a); 2. b); 3. a); 4. a); 5. b); 6. b).

**Průvodce studiem**

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 5 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.1. a 1.2. znovu.