

1. FUNKCE



Průvodce studiem



V denním životě, v přírodě, v technice a hlavně v matematice se neustále setkáváme s funkčními závislostmi jedné veličiny (např. y) na druhé (např. x). Tak např. cena jízdenky druhé třídy osobního vlaku závisí na počtu kilometrů.

Elektrický proud I podle Ohmova zákona závisí při daném napětí U na odporu R vodiče podle vztahu $I = U/R$.

Objem V kruhového kužele o poloměru r při dané výšce v závisí na velikosti poloměru r podle vzorce

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v.$$

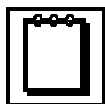
Vezměme v úvahu rovnici $y = 3x^2 + 1$. Zvolíme-li libovolné konkrétní reálné číslo x_0 , je touto rovnicí určeno právě jedno číslo y_0 , které se rovná $3x_0^2 + 1$. Tak např. číslu $x_1 = 0$ odpovídá číslo $y_1 = 1$, kdežto pro číslo $x_2 = -1$ dostaneme $y_2 = 4$, apod. Zvolíme-li tedy libovolné číslo $x \in (-\infty, +\infty)$, je mu rovnicí $y = 3x^2 + 1$ přiřazeno právě jedno číslo $y \in [1, +\infty)$.

Třebaže všechny uvedené příklady jsou různého druhu, lze v nich vystihnout společnou charakteristickou vlastnost touto definicí:

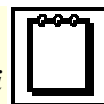
**Definice:**

- a) Zobrazení, viz [2], $f : M \rightarrow \mathbf{C}$, kde $M \subset \mathbf{C}$ se nazývá **komplexní funkce komplexní proměnné**.
- b) Zobrazení $f : M \rightarrow \mathbf{C}$, kde $M \subset \mathbf{R}$ se nazývá **komplexní funkce reálné proměnné**.
- c) Zobrazení $f : M \rightarrow \mathbf{R}$, kde $M \subset \mathbf{R}$ se nazývá **reálná funkce reálné proměnné**.

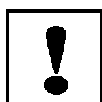
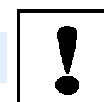


**Poznámka**

Při dalším studiu se v základním kurzu matematiky budeme setkávat pouze s reálnými funkcemi reálné proměnné. Jedinou výjimkou jsou polynomy, a proto se o nich krátce zmíníme úvodem.

**1.1. Polynomy****Cíle**

Cílem této kapitoly je rozšíření znalostí o polynomech (mnohočlenech), které jsou nezbytně nutné pro řešení příkladů v některých dalších kapitolách studijních textů z předmětu matematika.

**Předpokládané znalosti**

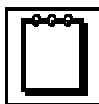
Jsou předpokládány znalosti operací s polynomy v rozsahu střední školy, tj. sčítání polynomů, násobení polynomu číslem a polynomem, dělení polynomu polynomem a řešení jednoduchých typů algebraických rovnic (např. kvadratická rovnice, binomická rovnice, reciproké rovnice).

**Výklad****Definice 1.1.1.**

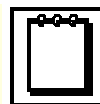
Komplexní funkce komplexní proměnné $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$,

kde $x \in \mathbb{C}$, $a_k \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se nazývá **polynom n-tého stupně**.

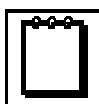


**Poznámky**

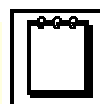
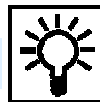
1. Zobrazení $C \rightarrow \{0\}$ nazýváme **nulový polynom** a nezavádíme pro něj stupeň.
2. Pro polynom užíváme také název **mnohočlen**.
3. Čísla $a_k, k = 0, \dots, n$ nazýváme **koeficienty polynomu** $p(x)$, které pro naše potřeby budou obvykle čísla reálnými.

**Řešené úlohy****Příklad**

$p(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1, x \in C$ je polynom čtvrtého stupně s koeficienty
 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 0, a_4 = 2$.

**Poznámka**

Součet, rozdíl a součin polynomů je polynom. Podíl dvou polynomů být polynomem nemusí.

**Řešené úlohy**

Příklad Vypočtěte podíl $\frac{x^3 + 2x + 2}{x + 1}$.

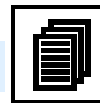
Řešení: $(x^3 + 2x + 2) : (x + 1) = x^2 - x + 3 - \frac{1}{x + 1}$

$$\begin{array}{r} \underline{-(x^3 + x^2)} \\ -x^2 + 2x + 2 \\ \underline{-(-x^2 - x)} \\ 3x + 2 \\ \underline{-(3x + 3)} \\ -1 \end{array}$$

Výsledek obsahuje člen $\frac{1}{x+1}$ a není tedy polynomem.



Výklad



Definice 1.1.2.

Říkáme, že $x_0 \in \mathbb{C}$ je **kořenem** nenulového polynomu $p(x)$, jestliže $p(x_0) = 0$. Polynom $x - x_0$ prvního stupně, kde $p(x_0) = 0$, nazýváme **kořenovým činitelem** polynomu $p(x)$.

Věta 1.1.1. Každý polynom stupně $n \geq 1$ má alespoň jeden kořen $x_0 \in \mathbb{C}$.

Důkaz věty je obtížný a nebudeme jej provádět.

Věta 1.1.2. Číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ je kořenem polynomu $p(x)$ stupně $n \geq 1$, právě když existuje polynom $p_1(x)$ stupně $n-1$ takový, že platí $p(x) = (x - x_0) p_1(x)$.

Důkaz: Věta 1.1.2. je větou ve tvaru ekvivalence, to znamená, že důkaz je nutno provést ve dvou krocích. Ujijeme vzorce $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$, který si můžeme ověřit vynásobením pravé strany rovnosti.

1. Předpokládejme, že x_0 je kořenem polynomu $p(x)$, tj. $p(x_0) = 0$. Pak platí:

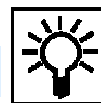
$$\begin{aligned} p(x) &= p(x) - p(x_0) = \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=0}^n a_k x_0^k = \sum_{k=0}^n a_k (x^k - x_0^k) = \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (x - x_0) (x^{k-1} + x^{k-2}x_0 + \dots + x x_0^{k-2} + x_0^{k-1}) = \\ &= (x - x_0) \sum_{k=1}^n (a_k x^{k-1} + a_k x_0 x^{k-2} + \dots + a_k x_0^{k-2} x + a_k x_0^{k-1}) \end{aligned}$$

Výrazy $a_k x^{k-1} + a_k x_0 x^{k-2} + \dots + a_k x_0^{k-2} x + a_k x_0^{k-1}$ jsou polynomy stupně $k-1$ pro $k=1, \dots, n$. To znamená, že jejich součtem dostaneme polynom stupně $n-1$, který označíme $p_1(x)$ a dostaneme $p(x) = (x-x_0)p_1(x)$.

2. Předpokládejme, že platí rovnost $p(x) = (x-x_0)p_1(x)$. Dosadíme $x = x_0$ a dostaneme $p(x_0) = (x_0-x_0)p_1(x_0) = 0$. Číslo x_0 je tedy kořenem polynomu $p(x)$.



Řešené úlohy



Příklad Číslo $x_0 = -1$ je kořenem polynomu $p(x) = x^3 + 2x + 3$.

Řešení: $p(x) = x^3 + 2x + 3 = (x+1)(x^2 - x + 3) = (x+1)p_1(x) \Rightarrow x+1$ je kořenový činitel $\Rightarrow x_0 = -1$ je kořenem polynomu $p(x)$.

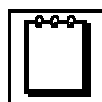


Výklad



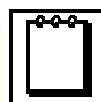
Definice 1.1.3.

Platí-li $p(x) = (x-x_0)^k p_1(x)$, kde $p_1(x_0) \neq 0, k \in \mathbb{N}$, pak říkáme, že x_0 je **k-násobný kořen** polynomu $p(x)$.



Poznámka

Místo 1-násobný budeme říkat **jednoduchý kořen**.





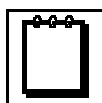
Výklad



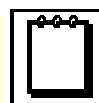
Věta 1.1.3. Necht' $p(x)$ je polynom stupně $n \geq 1$. Pak existují čísla $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, která nemusí být různá, taková, že

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Bez důkazu.



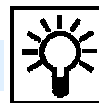
Poznámka



Podaří-li se nám zapsat polynom $p(x)$ ve tvaru z předchozí věty, říkáme, že jsme provedli **rozklad polynomu $p(x)$ na kořenové činitele** v oboru komplexních čísel.



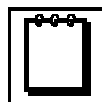
Řešené úlohy



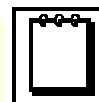
Příklad Polynom $p(x) = 2x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 6x - 2$ má kořeny $1, i, 1, -i, 1$. Jeho rozklad na kořenové činitele má tvar

$$p(x) = 2(x-1)(x-i)(x-1)(x+i)(x-1) = 2(x-1)^3(x-i)(x+i).$$

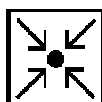
Vidíme, že kořen 1 je trojnásobný a kořeny $i, -i$ jsou jednoduché.



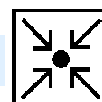
Poznámka



Určit kořeny polynomů 1. a 2. stupně vede na řešení lineární a kvadratické rovnice. Obtížné nastávají při určení kořenů polynomů stupně $n \geq 3$. Pro $n=3$ a $n=4$ existují poměrně komplikované vzorce pro určení kořenů, podobně jako existuje vzorec pro řešení kvadratické rovnice. Pro $n \geq 5$ takové vzorce však vůbec nelze určit. Pro naše potřeby bude stačit návod na určení kořenů polynomů stupně $n \geq 3$, který uvedeme v příští kapitole. S přibližným určením kořenů polynomů se studenti seznámí v předmětu numerické metody.



Úlohy k samostatnému řešení



1. Pro dané polynomy $p(x) = x^3 - 2x + 5$ a $q(x) = 3x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 2$ vypočtěte:

- | | | |
|-----------------|--------------------|--------------------|
| a) $p(2)$, | b) $p(-2)$, | c) $q(0)$, |
| d) $q(-1)$, | e) $p(i)$, | f) $q(-i)$, |
| g) $p(1+i)$, | h) $p(x) + q(x)$, | i) $q(x) - p(x)$, |
| j) $p(x)q(x)$, | k) $p(3)q(1)$, | l) $q(x) : p(x)$. |

2. Stanovte koeficienty polynomů tak, aby platilo $p(x) = q(x)$:

- a) $p(x) = a_3x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$,
- b) $p(x) = 5x^2 - 8x - 4$, $q(x) = (a+b)x^2 + (-a+b+c)x + (a+c)$.

3. Vynásobte polynomy:

- a) $(-3x+2)(-3x-2)$, b) $(x-1)(x^2+x+1)$, c) $(x^3-x+2)(x^3-x-2)$,
- d) $(2x-5)(4x^2+10x+25)$, e) $(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)$.

4. Vypočtěte podíl polynomů:

- a) $(2x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 3) : (x + 1)$, b) $(2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x + 4) : (x + 2)$,
- c) $(x^5 - 3x^4 + 2x^3) : (x - 2)$, d) $(x^4 - x^3 + 2x - 1) : (x^2 - 2x)$,
- e) $(x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 2x + 4) : (x^3 - x + 1)$,
- f) $(x^6 + 2x^5 - 6x^4 - x^3 + 7x^2 - 5x) : (x^3 - x + 1)$.

5. Rozložte polynomy na součin kořenových činitelů:

- a) $p(x) = -x^2 + 1$, b) $p(x) = 2x^2 + 4x + 2$, c) $p(x) = x^2 + x - 6$,
- d) $p(x) = 3x^2 + 2x - 1$, e) $p(x) = x^2 + 4$, f) $p(x) = 2x^2 + 5$,
- g) $p(x) = x^2 + 13x - 48$, h) $p(x) = 9x^2 - 16$, i) $p(x) = -x^2 + 2x - 2$.

6. Rozložte polynomy na součin kořenových činitelů:

- a) $p(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$, b) $p(x) = x^3 - 8$, c) $p(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$,
- d) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 3x$, e) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, f) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 26$,
- g) $p(x) = x^4 - 9$, h) $p(x) = 2x^4 - 32$, i) $p(x) = x^6 - 1$.



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) 9 ; b) 1 ; c) 2 ; d) -7 ; e) $5 - 3i$; f) $10 + 7i$; g) 1 ; h) $3x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 2x + 7$;
 i) $3x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 2x - 3$; j) $3x^7 + 7x^6 - 11x^5 + x^4 + 47x^3 - 25x^2 - 4x + 10$; k) 182 ;
 l) $3x + 7 + \frac{x^2 - x - 33}{x^3 - 2x + 5}$. 2. a) $a_3 = 0$, $b_2 = 3$, $b_1 = 2$, $b_0 = 1$; b) $a = 3$, $b = 2$, $c = -7$.
3. a) $9x^2 - 4$; b) $x^3 - 1$; c) $(x^3 - x)^2 - 4 = x^6 - 2x^4 + x^2 - 4$; d) $8x^3 - 125$;
 e) $(x^2 + 1)^2 - 2x^2 = x^4 + 1$. 4. a) $2x^3 - x^2 + 3$; b) $2x^4 - x^3 + 2$; c) $x^4 - x^3$;
 d) $x^2 + x + 2 + \frac{6x - 1}{x^2 - 2x}$; e) $x^2 + 3x - 4 + \frac{2x^2 - 5x + 8}{x^3 - x + 1}$; f) $x^3 + 2x^2 - 5x$. 5. a) $(1 - x)(1 + x)$;
 b) $2(x + 1)^2$; c) $(x - 2)(x + 3)$; d) $3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$; e) $(x - 2i)(x + 2i)$;
 f) $2(x - i\sqrt{\frac{5}{2}})(x + i\sqrt{\frac{5}{2}})$; g) $(x - 3)(x + 16)$; h) $(3x - 4)(3x + 4) = 9(x - \frac{4}{3})(x + \frac{4}{3})$;
 i) $-(x - 1 + i)(x - 1 - i)$. 6. a) $3x(x - 2)(x + 1)$; b) $p(x) = (x - 2)(x + 1 + i\sqrt{3})(x + 1 - i\sqrt{3})$;
 c) $(2x + 1)^3 = 8(x + \frac{1}{2})^3$; d) $x(2x + 3)(x - 1) = 2x(x + \frac{3}{2})(x - 1)$; e) $(x + 1)(x - 2)^2$;
 f) $(x - 1)^3 + 27 = (x + 2)(x - \frac{5}{2} + \frac{i3\sqrt{3}}{2})(x - \frac{5}{2} - \frac{i3\sqrt{3}}{2})$; g) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + i\sqrt{3})(x - i\sqrt{3})$;
 h) $2(x + 2)(x - 2)(x + 2i)(x - 2i)$;
 i) $(x + 1)(x - 1)(x + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2})$.