1. FUNKCE

Průvodce studiem

V denním životě, v přírodě, v technice a hlavně v matematice se neustále setkáváme s funkčními závislostmi jedné veličiny (např. y) na druhé (např. x). Tak např. cena jízdenky druhé třídy osobního vlaku závisí na počtu kilometrů.

Elektrický proud I podle Ohmova zákona závisí při daném napětí U na odporu R vodiče podle vztahu $I = U/R$.

Objem V kruhového kužele o poloměru r při dané výšce v závisí na velikosti poloměru r podle vzorce

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v.$$

Vezměme v úvahu rovnici $y = 3x^2 + 1$. Zvolíme-li libovolné konkrétní reálné číslo x_0, je touto rovnicí určeno právě jedno číslo y_0, které se rovná $3x_0^2 + 1$. Tak např. číslu $x_1 = 0$ odpovídá číslo $y_1 = 1$, kdežto pro číslo $x_2 = -1$ dostaneme $y_2 = 4$, apod. Zvolíme-li tedy libovolné číslo $x \in (-\infty, +\infty)$, je mu rovnicí $y = 3x^2 + 1$ přiřazeno právě jedno číslo $y \in < 1, +\infty)$.

Třebaže všechny uvedené příklady jsou různého druhu, lze v nich vystihnout společnou charakteristickou vlastnost touto definicí:

Definice:

a) Zobrazení, viz [2], $f: M \to \boldsymbol{C}$, kde $M \subset \boldsymbol{C}$ se nazývá **komplexní funkce komplexní proměnné**.

b) Zobrazení $f: M \to \boldsymbol{C}$, kde $M \subset \boldsymbol{R}$ se nazývá **komplexní funkce reálné proměnné**.

c) Zobrazení $f: M \to \boldsymbol{R}$, kde $M \subset \boldsymbol{R}$ se nazývá **reálná funkce reálné proměnné**.

Poznámka

Při dalším studiu se v základním kurzu matematiky budeme setkávat pouze s reálnými funkcemi reálné proměnné. Jedinou výjimkou jsou polynomy, a proto se o nich krátce zmíníme úvodem.

1.1. Polynomy

Cíle

Cílem této kapitoly je rozšíření znalostí o polynomech (mnohočlenech), které jsou nezbytně nutné pro řešení příkladů v některých dalších kapitolách studijních textů z předmětu matematika.

Předpokládané znalosti

Jsou předpokládány znalostí operací s polynomy v rozsahu střední školy, tj. sčítání polynomů, násobení polynomu číslem a polynomem, dělení polynomu polynomem a řešení jednoduchých typů algebraických rovnic (např. kvadratická rovnice, binomická rovnice, reciproké rovnice).

Výklad

Definice 1.1.1.

Komplexní funkce komplexní proměnné $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,

kde $x \in \boldsymbol{C}, a_k \in \boldsymbol{C}$, $a_n \neq 0$ a $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ se nazývá **polynom n-tého stupně**.

Poznámky

1. Zobrazení $\boldsymbol{C} \to \{0\}$ *nazýváme* ***nulový polynom*** *a nezavádíme pro něj stupeň.*

2. Pro polynom užíváme také název ***mnohočlen****.*

3. Čísla $a_k, k = 0, \ldots, n$ *nazýváme* ***koeficienty polynomu*** $p(x)$*, které pro naše potřeby budou obvykle čísly reálnými.*

Řešené úlohy

Příklad

$p(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1,\ x \in \boldsymbol{C}$ je polynom čtvrtého stupně s koeficienty

$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 0, a_4 = 2.$

Poznámka

Součet, rozdíl a součin polynomů je polynom. Podíl dvou polynomů být polynomem nemusí.

Řešené úlohy

Příklad Vypočtěte podíl $\dfrac{x^3 + 2x + 2}{x + 1}$.

Řešení: $(x^3 + 2x + 2) : (x + 1) = x^2 - x + 3 - \dfrac{1}{x+1}$

$$
\begin{array}{l}
\underline{-(x^3 + x^2)} \\
\quad -x^2 + 2x + 2 \\
\quad \underline{-(-x^2 - x)} \\
\qquad 3x + 2 \\
\qquad \underline{-(3x + 3)} \\
\qquad -1
\end{array}
$$

Výsledek obsahuje člen $\dfrac{1}{x+1}$ a není tedy polynomem.

Výklad

Definice 1.1.2.

Říkáme, že $x_0 \in \boldsymbol{C}$ je **kořenem** nenulového polynomu $p(x)$, jestliže $p(x_0)=0.$ Polynom $x-x_0$ prvního stupně, kde $p(x_0)=0,$ nazýváme **kořenovým činitelem** polynomu $p(x)$.

Věta 1.1.1. Každý polynom stupně $n \geq 1$ má alespoň jeden kořen $x_0 \in \boldsymbol{C}$.

Důkaz věty je obtížný a nebudeme jej provádět.

Věta 1.1.2. Číslo $x_0 \in \boldsymbol{C}$ je kořenem polynomu $p(x)$ stupně $n \geq 1$, právě když existuje polynom $p_1(x)$ stupně $n-1$ takový, že platí $p(x)=(x-x_0)\, p_1(x)$.

Důkaz: Věta 1.1.2. je větou ve tvaru ekvivalence, to znamená, že důkaz je nutno provést ve dvou krocích. Užijeme vzorce $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\ldots+ab^{k-2}+b^{k-1}),$ který si můžeme ověřit vynásobením pravé strany rovnosti.

1. Předpokládejme, že x_0 je kořenem polynomu $p(x),$ tj. $p(x_0)=0.$ Pak platí:

$$p(x)=p(x)-p(x_0)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k - x_0^k) =$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_k (x-x_0)\,(x^{k-1}+x^{k-2}x_0+\ldots+xx_0^{k-2}+x_0^{k-1}) =$$

$$=(x-x_0)\sum_{k=1}^{n} (a_k x^{k-1}+a_k x_0 x^{k-2}+\ldots+a_k x_0^{k-2}x+a_k x_0^{k-1})$$

Výrazy $a_k x^{k-1} + a_k x_0 x^{k-2} + \dots + a_k x_0^{k-2} x + a_k x_0^{k-1}$ jsou polynomy stupně $k-1$ pro $k = 1, \dots, n$. To znamená, že jejich součtem dostaneme polynom stupně $n-1$, který označíme $p_1(x)$ a dostaneme $p(x) = (x - x_0) p_1(x)$.

2. Předpokládejme, že platí rovnost $p(x) = (x - x_0) p_1(x)$. Dosadíme $x = x_0$ a dostaneme $p(x_0) = (x_0 - x_0) p_1(x_0) = 0$. Číslo x_0 je tedy kořenem polynomu $p(x)$.

Řešené úlohy

Příklad Číslo $x_0 = -1$ je kořenem polynomu $p(x) = x^3 + 2x + 3$.

Řešení: $p(x) = x^3 + 2x + 3 = (x+1)(x^2 - x + 3) = (x+1) p_1(x) \Rightarrow x+1$ je kořenový činitel $\Rightarrow x_0 = -1$ je kořenem polynomu $p(x)$.

Výklad

Definice 1.1.3.

Platí-li $p(x) = (x - x_0)^k p_1(x)$, kde $p_1(x_0) \neq 0, k \in \boldsymbol{N}$, pak říkáme, že x_0 je **k-násobný kořen** polynomu $p(x)$.

Poznámka

Místo 1– *násobný budeme říkat* ***jednoduchý kořen****.*

Výklad

Věta 1.1.3. Nechť $p(x)$ je polynom stupně $n \geq 1$. Pak existují čísla $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{C}$, která nemusí být různá, taková, že

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Bez důkazu.

Poznámka

Podaří-li se nám zapsat polynom $p(x)$ ve tvaru z předchozí věty, říkáme, že jsme provedli ***rozklad polynomu*** $p(x)$ ***na kořenové činitele*** *v oboru komplexních čísel.*

Řešené úlohy

Příklad Polynom $p(x) = 2x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 6x - 2$ má kořeny $1, i, 1, -i, 1$. Jeho rozklad na kořenové činitele má tvar

$$p(x) = 2(x-1)(x-i)(x-1)(x+i)(x-1) = 2(x-1)^3(x-i)(x+i).$$

Vidíme, že kořen *1* je trojnásobný a kořeny *i*, *-i* jsou jednoduché.

Poznámka

Určit kořeny polynomů 1. a 2. stupně vede na řešení lineární a kvadratické rovnice. Obtíže nastávají při určení kořenů polynomů stupně $n \geq 3$. Pro $n = 3$ a $n = 4$ existují poměrně komplikované vzorce pro určení kořenů, podobně jako existuje vzorec pro řešení kvadratické rovnice. Pro $n \geq 5$ takové vzorce však vůbec nelze určit. Pro naše potřeby bude stačit návod na určení kořenů polynomů stupně $n \geq 3$, který uvedeme v příští kapitole. S přibližným určením kořenů polynomů se studenti seznámí v předmětu numerické metody.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Pro dané polynomy $p(x)=x^3-2x+5$ a $q(x)=3x^4+7x^3-5x^2+2$ vypočtěte:

a) $p(2)$, b) $p(-2)$, c) $q(0)$,

d) $q(-1)$, e) $p(i)$, f) $q(-i)$,

g) $p(1+i)$, h) $p(x)+q(x)$, i) $q(x)-p(x)$,

j) $p(x)q(x)$, k) $p(3)q(1)$, l) $q(x):p(x)$.

2. Stanovte koeficienty polynomů tak, aby platilo $p(x)=q(x)$:

a) $p(x)=a_3x^3+3x^2+2x+1,\ q(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$,

b) $p(x)=5x^2-8x-4,\ q(x)=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)$.

3. Vynásobte polynomy:

a) $(-3x+2)(-3x-2)$, b) $(x-1)(x^2+x+1)$, c) $(x^3-x+2)(x^3-x-2)$,

d) $(2x-5)(4x^2+10x+25)$, e) $(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)$.

4. Vypočtěte podíl polynomů:

a) $(2x^4+x^3-x^2+3x+3):(x+1)$, b) $(2x^5+3x^4-2x^3+2x+4):(x+2)$,

c) $(x^5-3x^4+2x^3):(x-2)$, d) $(x^4-x^3+2x-1):(x^2-2x)$,

e) $(x^5+3x^4-5x^3+2x+4):(x^3-x+1)$,

f) $(x^6+2x^5-6x^4-x^3+7x^2-5x):(x^3-x+1)$.

5. Rozložte polynomy na součin kořenových činitelů:

a) $p(x)=-x^2+1$, b) $p(x)=2x^2+4x+2$, c) $p(x)=x^2+x-6$,

d) $p(x)=3x^2+2x-1$, e) $p(x)=x^2+4$, f) $p(x)=2x^2+5$,

g) $p(x)=x^2+13x-48$, h) $p(x)=9x^2-16$, i) $p(x)=-x^2+2x-2$.

6. Rozložte polynomy na součin kořenových činitelů:

a) $p(x)=3x^3-3x^2-6x$, b) $p(x)=x^3-8$, c) $p(x)=8x^3+12x^2+6x+1$

d) $p(x)=2x^3+x^2-3x$, e) $p(x)=x^3-3x^2+4$, f) $p(x)=x^3-3x^2+3x+26$,

g) $p(x)=x^4-9$, h) $p(x)=2x^4-32$, i) $p(x)=x^6-1$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 9 ; b) 1 ; c) 2 ; d) -7 ; e) 5 - 3i ; f) 10 + 7i ; g) 1 ; h) $3x^4+8x^3-5x^2-2x+7$; i) $3x^4+6x^3-5x^2+2x-3$; j) $3x^7+7x^6-11x^5+x^4+47x^3-25x^2-4x+10$; k) 182 ; l) $3x+7+\dfrac{x^2-x-33}{x^3-2x+5}$. **2.** a) $a_3=0,\ b_2=3,\ b_1=2,\ b_0=1$; b) $a=3,\ b=2,\ c=-7$.

3. a) $9x^2-4$; b) x^3-1 ; c) $(x^3-x)^2-4=x^6-2x^4+x^2-4$; d) $8x^3-125$; e) $(x^2+1)^2-2x^2=x^4+1$. **4.** a) $2x^3-x^2+3$; b) $2x^4-x^3+2$; c) x^4-x^3 ; d) $x^2+x+2+\dfrac{6x-1}{x^2-2x}$; e) $x^2+3x-4+\dfrac{2x^2-5x+8}{x^3-x+1}$; f) x^3+2x^2-5x . **5.** a) $(1-x)(1+x)$; b) $2(x+1)^2$; c) $(x-2)(x+3)$; d) $3(x+1)(x-\frac{1}{3})$; e) $(x-2i)(x+2i)$; f) $2(x-i\sqrt{\frac{5}{2}})(x+i\sqrt{\frac{5}{2}})$; g) $(x-3)(x+16)$; h) $(3x-4)(3x+4)=9(x-\frac{4}{3})(x+\frac{4}{3})$; i) $-(x-1+i)(x-1-i)$. **6.** a) $3x(x-2)(x+1)$; b) $p(x)=(x-2)(x+1+i\sqrt{3})(x+1-i\sqrt{3})$; c) $(2x+1)^3=8(x+\frac{1}{2})^3$; d) $x(2x+3)(x-1)=2x(x+\frac{3}{2})(x-1)$; e) $(x+1)(x-2)^2$; f) $(x-1)^3+27=(x+2)(x-\frac{5}{2}+\frac{i3\sqrt{3}}{2})(x-\frac{5}{2}-\frac{i3\sqrt{3}}{2})$; g) $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+i\sqrt{3})(x-i\sqrt{3})$; h) $2(x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)$; i) $(x+1)(x-1)(x+\frac{1+i\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1+i\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1-i\sqrt{3}}{2})$.