3.5. Přímka

Výklad

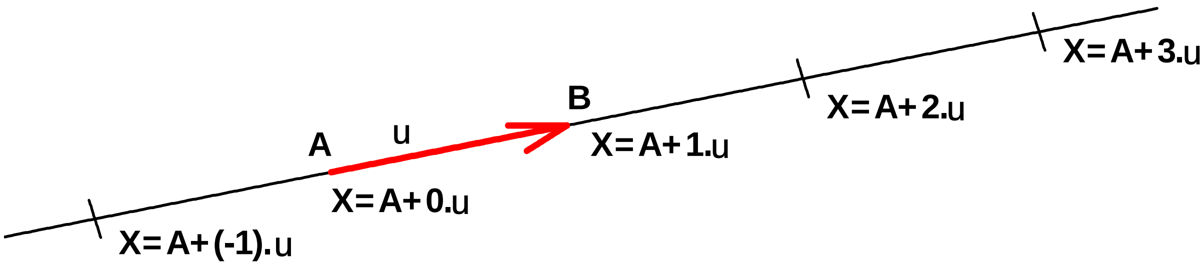
Předpokládejme, že v prostoru E_3 je dána dvěma různými body A, B přímka, kterou označíme AB. Sestrojme vektor $\mathbf{u}$ = B - A. Libovolný bod X leží na přímce AB právě tehdy, když vektory $\mathbf{u}$ a X - A jsou lineárně závislé, tj. když existuje $t \in \mathbf{R}$ tak, že

$$X - A = t \,.\, \mathbf{u}.$$

Předchozí rovnici upravíme na tvar

$$X = A + t \,.\, \mathbf{u}. \tag{3}$$

Rovnici (3) nazýváme **vektorovou rovnicí přímky**. Zřejmě ke každému $X \in AB$ existuje právě jedno $t \in \mathbf{R}$ tak, že platí (3) a obráceně, pro každé $t \in \mathbf{R}$ existuje právě jeden bod X přímky AB. Situace pro $t \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$ je znázorněna na obr. 12.



Obr. 12

Vektor $\mathbf{u}$ a každý jeho nenulový násobek nazveme **směrovým vektorem přímky** AB.

Jestliže je dána přímka p bodem $A = (x_0, y_0, z_0)$ a směrovým vektorem $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, pak ze vztahu (3) dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\,u_1 \\ y &= y_0 + t\,u_2 \\ z &= z_0 + t\,u_3\,, \end{aligned}$$

které nazýváme parametrickými rovnicemi přímky p.

Mějme nyní roviny $\alpha_1: \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$

$\alpha_2: \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$

V případě, že α_1, α_2 jsou různoběžné, tj. $\alpha_1 \cap \alpha_2 = p$, můžeme uvažovanou soustavu rovnic pokládat za **implicitní vyjádření přímky** p. Implicitním vyjádřením přímky p je také každá soustava ekvivalentní s uvažovanou soustavou.

Řešené úlohy

Příklad Určeme parametrické rovnice přímky $p = \alpha_1 \cap \alpha_2$, kde

$\alpha_1: \quad x + y - 2z = 0,$

$\alpha_2: \quad x - y + 1 = 0.$

Řešení: Bod X hledaného průniku musí vyhovovat oběma rovnicím a je tedy řešením soustavy dvou rovnic o třech neznámých. Řešení této soustavy je $x = -\frac{1}{2} + t$, $y = \frac{1}{2} + t$, $z = t$, které závisí na jednom parametru $t \in \mathbf{R}$ a je parametrickým vyjádřením přímky p.

Kontrolní otázky

1. K sestavení parametrických rovnic přímky nezbytně potřebujme:
   a) právě 3 body přímky,
   b) 1 bod přímky a směrový vektor přímky,
   c) aspoň 3 body přímky.

2. Určité hodnotě parametru $t \in \mathbf{R}$ ve vektorové rovnici přímky odpovídá:

   a) právě jeden bod přímky,

   b) aspoň jeden bod přímky,

   c) nekonečně mnoho bodů přímky.

3. Ke každému bodu přímky odpovídá:

   a) nejvýše jedna hodnota parametru $t \in \mathbf{R}$ ve vektorové rovnici přímky,

   b) právě jedna hodnota parametru $t \in \mathbf{R}$ ve vektorové rovnici přímky,

   c) hodnoty parametru $t \in < 0,1 >$.

4. Je-li $\mathbf{u}$ směrovým vektorem přímky p, je i každý vektor

   a) vektor $k.\mathbf{u}$, kde $k \in \mathbf{R} - \{0\}$,

   b) vektor $k.\mathbf{u}$, kde $k \in \mathbf{R}$,

   c) vektor $k.\mathbf{u}$, kde $k \in < 0,1 >$.

5. Je-li $\begin{array}{l} \alpha_1 : \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ \alpha_2 : \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array}$

   implicitní vyjádření rovnice přímky, pak

   a) roviny α_1 a α_2 musí být rovnoběžné,

   b) roviny α_1 a α_2 musí být totožné,

   c) roviny α_1 a α_2 musí být různoběžné.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. b); 4. a); 5. c).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete parametrické rovnice přímky procházející bodem $X_0 = (1, -1, -3)$ rovnoběžně

   a) s vektorem $\mathbf{u} = (2, -3, 4)$,

   b) s přímkou $x = -1 + 3t$, $y = 3 - 2t$, $z = 2 + 5t$.

2. Trojúhelník má vrcholy A = (5, 7, 2), B = (-7, -11, 6), C = (-5, 3, 2). Napište rovnice přímek, na nichž leží

a) strany trojúhelníka,

b) těžnice trojúhelníka.

3. Napište parametrické rovnice přímky:

a) $p: \begin{cases} 3x + 2y - 2z - 11 = 0, \\ x + 2y - 2z - 9 = 0, \end{cases}$ **b)** $q: \begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0, \end{cases}$

c) $r: \begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$

4. Zjistěte, zda dané přímky jsou navzájem rovnoběžné nebo na sebe kolmé:

a) p: x = 5 + 2t, y = 2 - t, z = -7 + t, $q: \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$

b) p: x = 1 + 2t, y = -2 + 3t, z = 1 - 6t, $q: \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$

c) $p: \begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0, \end{cases}$ $q: \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$

d) $p: \begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0, \\ x - y + z + 3 = 0, \end{cases}$ $q: \begin{cases} x + 2y - 5z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3z - 9 = 0. \end{cases}$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. **a)** x = 1 + 2t, y = -1 - 3t, z = -3 + 4t, **b)** x = 1 + 3t, y = -1 - 2t, z = -3 + 5t.

2. **a)** a: x = -7 + t, y = -11 + 7t, z = 6 - 2t; b: x = -5 + 5t, y = 3 + 2t, z = 2; c: x = 5 - 6t, y = 7 - 9t, z = 2 + 2t, **b)** t_a: x = 5 - 11t, y = 7 - 11t, z = 2 + 2t; t_b: x = -7 + 7t, y = -11 + 16t, z = 6 - 4t; t_c: x = -5 + 4t, y = 3 - 5t, z = 2 + 2t.

3. **a)** x = 3 + 2t, y = 4 + 4t, z = 1 + 5t, **b)** x = 1 + t, y = -7t, z = -3 - 19t, **c)** x = 1 - t, y = 2 + 3t, z = -1 + 5t.

4. **a)** rovnoběžné, **b)** kolmé, **c)** kolmé, **d)** rovnoběžné.

Kontrolní test

1. Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází bodem $M = (4, -5, 7)$ a je rovnoběžná s přímkou $q: x = 3 - t,\ y = 2 + 2t, z = 3$.

a) $p: x = 4 - t,\ y = -5 + 2t,\ z = 7,$ b) $p: x = 4 + 3t,\ y = -5 + 2t,\ z = 7 + 3t.$

2. Napište parametrické rovnici přímky p, která prochází bodem $P = (3,1,2)$ a je kolmá na rovinu $x - 2y + 2z + 1 = 0.$

   a) $p: x = 1 + 3t,\ y = -2 + t,\ z = 2 + 2t,$ b) $p: x = 3 + t,\ y = 1 - 2t,\ z = 2 + 2t.$

3. Vyšetřete, zda na přímce $x = 3t - 2,\ y = t + 3,\ z = -2t - 1$ leží bod $A = (-1,2,-3).$

   a) ano, b) ne.

4. Napište parametrické rovnice přímky, která prochází body $A = (2,9,3),\ B = (5,3,11).$

   a) $x = 2 + 3t,\ y = 9 - 6t,\ z = 3 + 8t,$ b) $x = 2 - 3t,\ y = 9 + 5t,\ z = 3.$

5. Napište parametrické rovnice přímky, která prochází bodem $P = (3,1,2)$ a je kolmá k rovině $z = 0$.

   a) $x = 3 + t,\ y = 1 + t,\ z = 2,$ b) $x = 3,\ y = 1,\ z = 2 + t.$

6. Přímka p je určena jako průsečnice dvou rovin

   $p: \begin{cases} x - 2y + 5z - 1 = 0, \\ x - 4y + z + 1 = 0. \end{cases}$ Najděte její parametrické rovnice.

   a) $x = 3 + 9t,\ y = 1 + 2t,\ z = -t,$ b) $x = 1 + t,\ y = -2 - 4t,\ z = 5 + t.$

7. Přímka p je určena rovnicemi

   $\begin{cases} x + 2y - 4z + 7 = 0, \\ 3x - 5y + z + 1 = 0. \end{cases}$ Určete její směrový vektor.

   a) $(-18,1,2),$ b) $(18,13,11).$

Výsledky testu

1. a); 2. b); 3. b); 4. a); 5. b); 6. a); 7. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 4 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.5. znovu.