3.3. Operace s vektory

Výklad

Definice 3.3.1.

Nechť φ je úhel dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (obr. 3). **Skalárním součinem vektorů** $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ rozumíme číslo, které budeme označovat $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ (někdy stručně $\mathbf{uv}$) a které definujeme rovností

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\,\mathbf{u}\,|\,|\,\mathbf{v}\,|\cos\varphi. \qquad (1)$$

Jestliže je alespoň jeden z vektorů nulový, pak definujeme $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0$.

Věta 3.3.1. Skalární součin dvou vektorů je roven nule právě tehdy, když oba vektory jsou buď nenulové na sebe kolmé nebo alespoň jeden z vektorů je nulový.

***Důkaz*:** Věta je přímým důsledkem předcházející definice.

Věta 3.3.2. Pro libovolné dva vektory $\mathbf{u} = (u_1, \dots , u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots , v_n)$ platí:

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n \qquad (2)$$

***Důkaz*.**

a) Předpokládejme nejprve, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé. Potom jsou body A, B, C vrcholy trojúhelníka (obr. 3), v němž platí kosinová věta

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi,$$

čili

$$(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2 = (u_1)^2 + (u_2)^2 + \dots + (u_n)^2 + (v_1)^2 + (v_2)^2 + \dots +$$
$$+ (v_n)^2 - 2(\mathbf{u}.\mathbf{v}).$$

Jednoduchá úprava této rovnosti nás dovede ke vzorci (2).

b) Předpokládejme, že vektory **u**, **v** jsou lineárně závislé. V tomto případě body A, B, C leží na jedné přímce a obratu s kosinovou větou nelze použít. Jeden z obou vektorů můžeme napsat jako součin druhého vektoru a reálného čísla k. Nechť například **v** = k.**u**. Předpokládejme nejprve, že k > 0. Potom můžeme psát:

$\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos 0 = |\mathbf{u}|.|k\,\mathbf{u}| =$

$$= k\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}\;.\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2} = ku_1^2 + ku_2^2 + \ldots + ku_n^2 = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n .$$

V případě, že k< 0, postupujeme analogicky, případ k = 0 je evidentní. Tím je věta dokázána.

Poznámka

1. Ze vzorců (3), (kap. 3.2) a (2) (kap. 3.3) plyne okamžitě správnost dalšího vzorce pro výpočet velikosti vektoru $\boldsymbol{u}$*:*

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u}}.$$

Užijeme-li označení $\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{u}$*, můžeme předcházející vzorec napsat stručně ve tvaru*

$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}^2}$, *nebo* $|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u}^2$.

2. Skalární součin vektorů, který je zobrazením

$V_n \times V_n \to \boldsymbol{R},\ (\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}) \to u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n \in \boldsymbol{R},$

splňuje následující vztahy, jejichž správnost plyne z vlastností reálných čísel:

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.\boldsymbol{u},$

$(k\boldsymbol{u}).\boldsymbol{v} = k(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}),$

$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}).\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}.\boldsymbol{w},$

pro každé $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V_n$ *a* $k \in \boldsymbol{R}$.

3. Velikost vektoru je zobrazení $V_n \to \langle 0, \infty),\ |\boldsymbol{u}| \to \sqrt{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u}} \in \boldsymbol{R}$ *a z vlastností reálných čísel vyplývají přímo vztahy*

$|\boldsymbol{u}| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o},$

$|k\boldsymbol{u}| = |k|\,|\boldsymbol{u}|$,

$|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}| \le |\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}|$,

pro všechna $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V_n$ *a* $k \in \boldsymbol{R}$.

4. Vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$*, které jsou lineárně závislé, tj.* $\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$, $k \in \boldsymbol{R}$*, se nazývají* ***kolineární.***

Řešené úlohy

Příklad Určeme úhel vektorů $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ a $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.

Řešení:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{1.0 + 1.1 + 0.1}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}\,.$$

Definice 3.3.2.

Nechť jsou dány vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Vektor

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right),$$

který značíme $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, se nazývá **vektorový součin vektorů** $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.

Poznámky

1. Vektorový součin je zobrazení $V_3^2 \to V_3$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \to \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \in V_3$ *splňující vztahy*

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$,

$(k\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$,

$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$,

pro všechna $k \in R$ *a* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V_3$.

2. Vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ *lze zapsat ve tvaru determinantu*

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

kde $\boldsymbol{i}$ *= (1, 0, 0),* $\boldsymbol{j}$ *= (0, 1, 0),* $\boldsymbol{k}$ *= (0, 0, 1) jsou jednotkové vektory ve směru os kartézské soustavy souřadnic. Rozvojem podle prvního řádku totiž dostaneme*

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{j}\begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

3. Z definice vektorového součinu zřejmě plyne, že pro nenulové vektory $\boldsymbol{u}$*,* $\boldsymbol{v}$ *platí, že* $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ *právě tehdy, když* $\boldsymbol{u}$*,* $\boldsymbol{v}$ *jsou lineárně závislé.*

Věta 3.3.3. Vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je vektor kolmý na vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3$.

Důkaz: Pro vektor $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}.(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}.\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}.\mathbf{i} & \mathbf{u}.\mathbf{j} & \mathbf{u}.\mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Vzhledem k tomu, že skalární součin $\mathbf{u}.(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$, jsou vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ na sebe kolmé.

Pro vektor $\mathbf{v}$ je důkaz obdobný.

Věta 3.3.4. Pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3$ platí

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin\varphi, \text{ kde } \varphi \text{ je úhel vektorů } \mathbf{u}, \mathbf{v}.$$

Důkaz: Dokazovaný vztah umocníme na druhou. Levá strana rovnosti pak je

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 +$$

$$+ (u_1v_2 + u_2v_1)^2 = u_2^2v_3^2 - 2u_2u_3v_2v_3 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_1^2 - 2u_1u_3v_1v_3 + u_1^2v_3^2 +$$

$$+ u_1^2v_2^2 - 2u_1u_2v_1v_2 + u_2^2v_1^2.$$

Upravíme pravou stranu užitím věty 2.

$$| \mathbf{u} |^2 | \mathbf{v} |^2 \sin^2 \varphi = | \mathbf{u} |^2 | \mathbf{v} |^2 (1 - \cos^2 \varphi) = | \mathbf{u} |^2 | \mathbf{v} |^2 - | \mathbf{u} |^2 | \mathbf{v} |^2 \cos^2\varphi =$$

$$= | \mathbf{u} |^2 | \mathbf{v} |^2 - (\mathbf{u}.\mathbf{v})^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 =$$

$$= u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_1^2 + u_3^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_2^2 + u_3^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 + u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_3^2 - u_1^2 v_1^2 - u_2^2 v_2^2 -$$

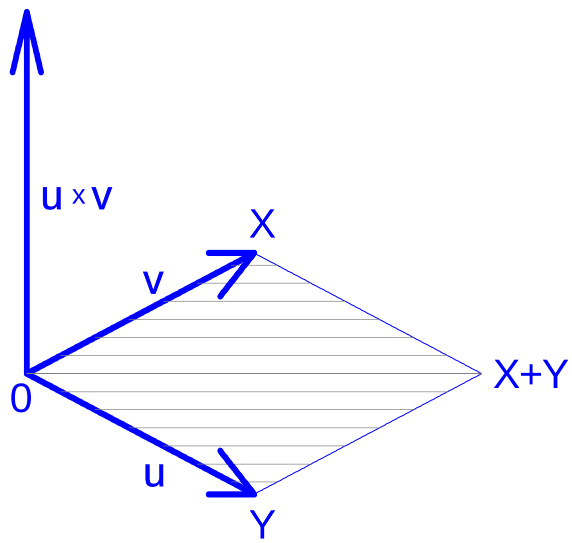
$$- u_3^2 v_3^2 - 2u_1 u_2 v_1 v_2 - 2u_1 u_3 v_1 v_3 - 2u_2 u_3 v_2 v_3 =$$

$$= u_2^2 v_1^2 + u_3^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_3^2 + u_1^2 v_3^2 + u_2^2 v_3^2 - 2u_1 u_2 v_1 v_2 - 2u_1 u_3 v_1 v_3 - 2u_2 u_3 v_2 v_3 .$$

Z porovnání výsledků plyne, že levá strana rovnosti se rovná pravé.

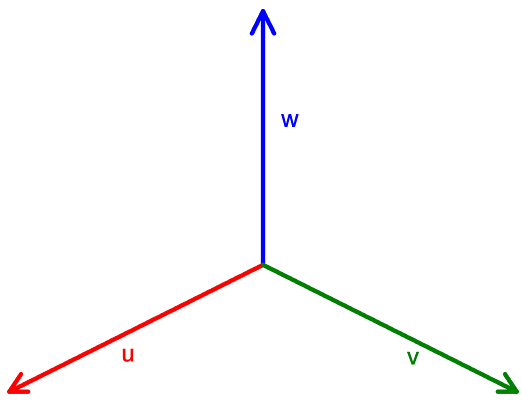
Poznámky

1. Při umístění vektorů $\overrightarrow{OX} \in \mathbf{u}$, $\overrightarrow{OY} \in \mathbf{v}$ *je velikost vektorového součinu rovna obsahu rovnoběžníka O, X, Y, X+Y (obr. 4) pro* $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \neq 0$.



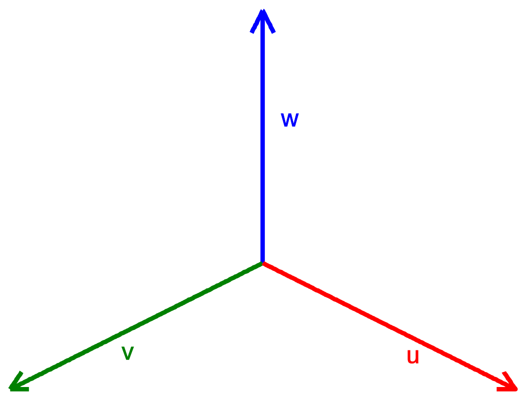
Obr. 4

2. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *a* $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *v tomto pořadí tvoří tzv. pravotočivou trojici (obr. 5).*



pravotočivá trojice vektorů

(**u**, **v**, **w**)



levotočivá trojice vektorů

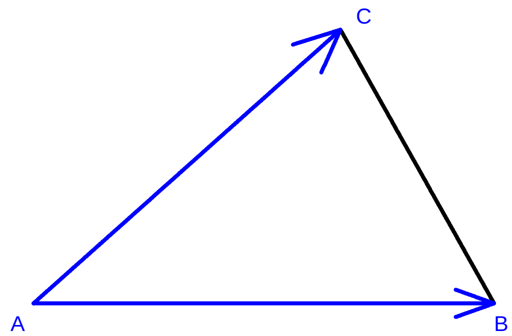
(**u**, **v**, **w**)

Obr. 5

Řešené úlohy

Příklad Stanovme obsah trojúhelníka o vrcholech A = (1, 0, 1), B = (2, -1, 1) a C = (1, 1, -1) (obr. 6).

Řešení:



Obr. 6

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 1, -2).$$

$$P\Delta = \frac{1}{2}\,|\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\,| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\,|\,2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}\,| = \frac{1}{2}\,|\,(2, 2, 1)\,| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4+4+1} = \frac{3}{2}.$$

Definice 3.3.3.

Číslo $\mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ se nazývá **smíšený součin vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$** $\in V_3$.

Poznámky

1. Smíšený součin vektorů je zobrazení $V_3^3 \to \mathbf{R}$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \to \boldsymbol{u}.(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \in \mathbf{R}$.

2. Smíšený součin vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ *lze vyjádřit následujícím způsobem:*

$$(u_1, u_2, u_3)\,.\,((v_1, v_2, v_3) \times (w_1, w_2, w_3)) = (u_1, u_2, u_3)\,.\,\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

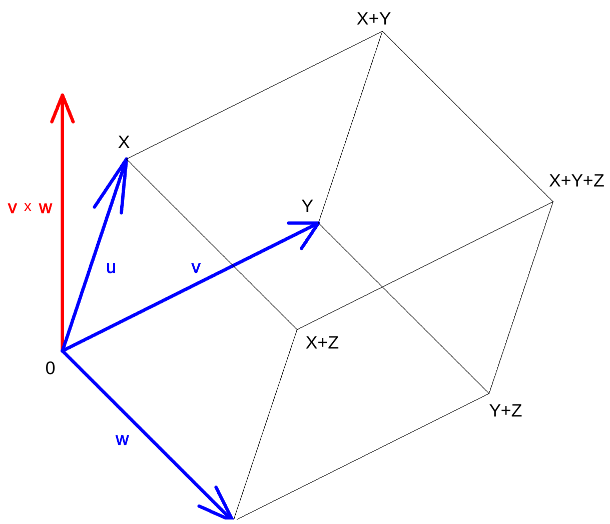
3. Z vlastností determinantů plyne, že jakákoliv výměna dvou vektorů smíšeného součinu mění jeho znaménko.

Věta 3.3.5. Nechť $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$ jsou umístěním lineárně nezávislých vektorů

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_3$. Pak $|\,\mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w})\,|$ je rovna objemu šikmého hranolu (rovnoběžnostěnu)

o vrcholech O, X, Y, X+Y, Z, X+Z, Y+Z, X+Y+Z.

Důkaz:



Obr. 7

Obsah rovnoběžníka O, Y, Y+Z, Z je roven $\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$. Platí $|\mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = |\mathbf{u}|.\ |\mathbf{v} \times \mathbf{w}||\cos\varphi|$, kde φ je úhel vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Výraz $|\mathbf{u}|.|\cos\varphi|$ je pak velikost výšky uvažovaného hranolu na stěnu O, Y, Y+Z, Z.

Poznámky

1. Z definice smíšeného součinu a z věty 5 plyne, že pro nenulové vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ *platí* $\boldsymbol{u}.(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = 0$ *právě tehdy, když jsou lineárně závislé.*

2. Lineárně závislé vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ *se nazývají komplanární.*

Řešené úlohy

Příklad Stanovme objem hranolu určeného vrcholy (0,0,0), (1,1,1), (2,-1,0), (4,0,-1).

Řešení: Zbývající vrcholy mají souřadnice (3,0,1), (5,1,0), (6,-1,-1) a (7,0,0).

$$V = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right| = |1+4+2| = 7.$$

Kontrolní otázky

1. Jak je definována vzdálenost dvou libovolných bodů $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$ 3-rozměrného euklidovského prostoru:

   a) $\rho(A,B)=\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2}$,

   b) $\rho(A,B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}$,

   c) $\rho(A,B)=\sqrt{(a_1^2-b_1^2)+(a_2^2-b_2^2)+(a_2^2+b_2^2)}$.

2. Pro úhel φ vektorů $\mathbf{u},\mathbf{v}$ platí:

   a) $\varphi \in <0,\pi>$,

   b) $\varphi \in <0,2\pi>$,

   c) $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

3. Platí-li pro $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$: $\mathbf{v} = k \cdot \mathbf{u}$, nazýváme vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

   a) kolineární,

   b) komplanární,

   c) opačné.

4. Který z následujících výroků definuje skalární součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

   a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin\varphi$,

   b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\varphi$,

   c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \operatorname{tg}\varphi$,

5. Výraz $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o}$ platí právě tehdy, když nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou:

   a) lineárně nezávislé,

   b) lineárně závislé.

6. Co je geometrickým významem velikosti vektorového součinu vektorů $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$:

   a) objem rovnoběžnostěnu se základnou $O, X, Y, X+Y$,

   b) obsah trojúhelníka s vrcholy O, X, Y,

   c) obsah rovnoběžníka s vrcholy $O, X, Y, X+Y$.

7. Smíšeným součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ nazýváme:

   a) vektor $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$,

   b) číslo $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$,

   c) číslo $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$,

8. Výraz $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ platí právě tehdy, když nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou:

   a) komplanární,

   b) navzájem kolmé.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b), 2. a), 3. a), 4. b), 5. b), 6. c), 7. c), 8. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte skalární součin a úhel vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, když

a) $\mathbf{a} = (1, 1, -4)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 2)$,

b) $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (13, -6, 8)$.

2. Pro vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ platí $|\mathrm{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 4$ a jejich úhel $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Určete a) $\mathbf{a}.\mathbf{b}$, b) $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{b}^2$,

c) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$.

3. Doplňte chybějící složky kolineárních vektorů $\mathbf{a} = (3, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, 4, b_3)$, $\mathbf{c} = (6, 2, -3)$.

4. Vypočtěte $\mathbf{a}.\mathbf{b}$, jestliže $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

5. Jsou dány tři body A = (-1, 2, 3), B = (1, 1, 1), C = (0, 0, 5). Dokažte, že $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ a stanovte vnitřní úhel β při vrcholu B v trojúhelníku ABC.

6. Při kterých hodnotách čísel α, β jsou vektory $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$ a $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ kolineární ?

7. Určete vektor $\mathbf{x}$ kolineární s vektorem $\mathbf{a} = (3, 1, -2)$, jestliže $\mathbf{x}.\mathbf{a} = 42$.

8. Vektor $\mathbf{x}$ je kolmý na vektory $\mathbf{a} = (6, 3, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 7, 2)$. Určete jeho souřadnice, je-li $\mathbf{x}.\mathbf{c} = 6$, kde $\mathbf{c} = (4, -4, -2)$.

9. Jsou dány tři vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Určete vektor $\mathbf{x}$, platí-li $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{b} = (1, -3, 2)$, $\mathbf{c} = (3, 2, -4)$, $\mathbf{x}.\mathbf{a} = -5$, $\mathbf{x}.\mathbf{b} = -15$, $\mathbf{x}.\mathbf{c} = 20$.

10. Určete velikost pravoúhlého průmětu vektoru $\mathbf{b}$ do vektoru $\mathbf{a}$, je-li dáno $\mathbf{a} = (-2, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-4, 2, 1)$.

11. Vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ svírají úhel $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Určete $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, je-li $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$.

12. Určete $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, je-li $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 2, 1)$.

13. Zjednodušte výraz $(\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$.

14. Odvoďte platnost výrazu $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{\mathbf{a}.\mathbf{b}}$, kde φ je úhel vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

15. Jsou dány vektory $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Určete vektor $\mathbf{c}$ kolmý k daným vektorům.

16. Jsou dány body A, B, C. Určete souřadnice bodu D a obsah rovnoběžníka ABCD, je-li dáno A = (8, 7, 6), B = (-12, 10, 10), C = (-8, 1, 10).

17. Určete obsah Δ ABC, když A = (1, 2, 0), B = (3, 0, -3), C = (5, 2, 6).

18. Je dán Δ ABC. Vypočtěte výšky trojúhelníka v_a, v_b, v_c. A = (3, 2, 1), B = (0, -1, 1), C = (-2, 2, 0).

19. Jsou dány vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Určete $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

a) $\mathbf{a}$ = (2, 3, 0), $\mathbf{b}$ = (-1, 0, 1), $\mathbf{c}$ = (2, 1, 1)

b) $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

20. Zjistěte, zda vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ jsou komplanární.

a) $\mathbf{a}$ = (3, 4, 0), $\mathbf{b}$ = (5, 4, -3), $\mathbf{c}$ = (4, 8, 3),

b) $\mathbf{a}$ = (0, 2, -3), $\mathbf{b}$ = (6, 4, -2), $\mathbf{c}$ = (-2, 1, 3),

c) $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

21. Zjistěte, zda dané čtyři body leží v jedné rovině: A = (0, -7, 1), B = (4, -2, 0), C = (8, 0, -2), D = (1, -5, 1).

22. Je dán rovnoběžnostěn ABCD $A'B'C'D'$ vrcholy A = (0, 1, 2), B = (5, 2, 3), D = (-1, 6, 4), A' = (0, 1, 6). Určete souřadnice vrcholů C, B', C', D' a objem tělesa.

23. Určete objem čtyřstěnu ABCD, jestliže platí $V_{\text{čtyřstěnu}} = \frac{1}{6} V_{\text{rovnoběžnostěnu}}$. Vrcholy čtyřstěnu: A = (2, 1, 0), B = (7, 4,), C = (10, 3, -4), D = (3, 6, 3).

Výsledky úloh k samostatnému řešení

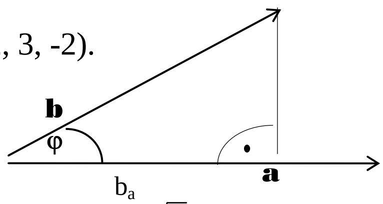
1.a) $\mathbf{a}.\mathbf{b} = -9$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; **b)** $\mathbf{a}.\mathbf{b} = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. **2. a)** 10, b) 25, 16,

c) $\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 = 21$. **3.** $\mathbf{a}$ = (3; 1; -1,5), $\mathbf{b}$ = (12, 4, -6). **4.** $\mathbf{a}.\mathbf{b} = 16$.

5. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$. **6.** $\alpha = 10$, $\beta = -4$.

7. $\mathbf{x}$ = (9, 3, -6). **8.** $\mathbf{x}$ = (-6, 12, -39). **9.** $\mathbf{x}$ = (2, 3, -2).

10. $b_a = |\mathbf{b}|.\cos\varphi = \frac{a.b}{|a|} = \frac{8+2+2}{\sqrt{4+1+4}} = 4$.



11. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 6\sqrt{3}$. **12.** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ = (-4, 8, -4), $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 4.\sqrt{6}$. **13.** $6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

14. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{|\mathbf{a}|\,.\,|\mathbf{b}|\,.\sin\varphi}{|\mathbf{a}|\,.\,|\mathbf{b}|\,.\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$. **15.** $\mathbf{c} = l(-4, -1, 12)$, kde $l \in \mathbf{R}$, $l \neq 0$.

16. D = (12, -2, 6), P = 172,56. **17.** $P\Delta = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 14$, kde $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$.

18. $v_a = \dfrac{|\mathbf{a} \times \mathbf{c}|}{|\mathbf{a}|} = 4{,}17$, kde $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$, analogicky $v_b = 3{,}06$, $v_c = 3{,}67$.

19. a) 7, b) 36. **20.** a) ano ($\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$), b) ne, c) ano.

21. Body A,B,C,D leží v jedné rovině.

22. C = (4, 7, 5), B′= (6, 2, 7), C′= (5, 7, 9), D′= (0, 6, 8), V = 104. 23. V = 14.

Kontrolní test

1. Určete jednotkový vektor $\mathbf{e}$, který je kolmý k vektorům $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$:

   a) $\mathbf{e} = \dfrac{-1}{\sqrt{35}}(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$,

   b) $\mathbf{e} = \dfrac{1}{5}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$,

   c) $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$.

2. Pro vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ platí: $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Určete úhel vektorů $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

   a) $\varphi = 115^\circ 40'$, b) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, c) $\varphi = 85^\circ 10'$.

3. Vypočtěte $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, jsou-li $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jednotkové vektory a pro něž platí $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{o}$:

   a) $-\dfrac{3}{2}$, b) $\dfrac{2}{3}$, c) $-\dfrac{2}{3}$.

4. Vypočtěte obsah trojúhelníka ABC, je-li $A = (3, 1, 4)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (5, 0, 8)$.

   a) $\dfrac{1}{2}\sqrt{83}$, b) $\dfrac{1}{2}\sqrt{29}$, c) $\dfrac{1}{2}\sqrt{38}$.

5. Vypočtěte obsah a výšky rovnoběžníka určeného vektory $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$:

   a) $P = 21$, $v_1 = \dfrac{21}{5}$, $v_2 = \dfrac{1}{5}$,

   b) $P = 21$, $v_1 = v_2 = \sqrt{\dfrac{21}{5}}$,

   c) $P = \sqrt{21}$, $v_1 = v_2 = \sqrt{\dfrac{21}{5}}$.

6. Zjistěte, zda vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou komplanární:

$\mathbf{a} = (3,2,0)$, $\mathbf{b} = (1,1,1)$, $\mathbf{c} = (5,4,2)$.

a) ano, b) ne.

7. Vektory $\mathbf{a}= 3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $\mathbf{b}= 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ je určen rovnoběžnostěn. Vypočtěte jeho objem, obsah stěny dané vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ a délku její výšky.

   a) $V = 15$, $S = 3$, $v = 5$,

   b) $V = 5$, $S = 15$, $v = 3$,

   c) $V = 15$, $S = 5$, $v = 3$.

Výsledky testu

1. a), 2. a), 3. a), 4. c), 5. c), 6. a), 7. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 5 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 3.1., 3.2., 3.3. znovu.