

### 3.2. Vektory



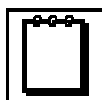
#### Výklad



Definujme nyní vektor tak, jak je obvyklé pro potřeby geometrie a fyziky.

#### Definice 3.2.1.

**Vektor**  $\mathbf{u}$  je množina všech souhlasně orientovaných rovnoběžných úseček stejné délky.



#### Poznámky



1. **Orientovanou úsečkou**  $\vec{AB}$  rozumíme uspořádanou dvojici bodů  $A, B$ , kde první bod  $A$  nazýváme počáteční a druhý bod  $B$  koncový.

2. Je-li  $\vec{AB} \in \mathbf{u}$ , nazýváme úsečku  $\vec{AB}$  **umístěním vektoru**  $\mathbf{u}$ , které budeme také někdy nazývat vektorem a značit také  $\vec{AB} = B - A$ .

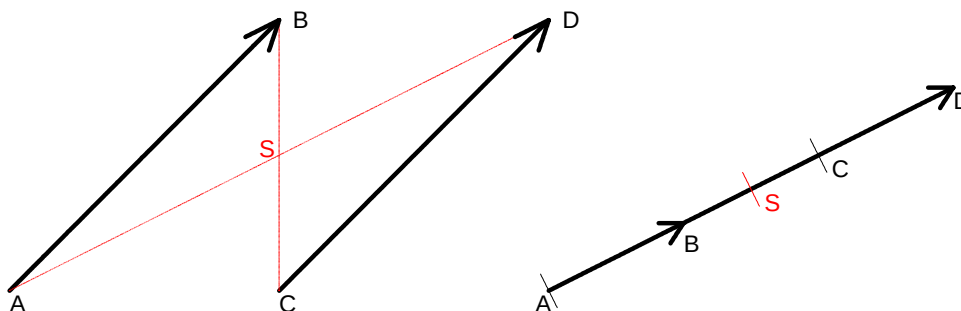
3. Je-li  $\vec{OX} \in \mathbf{u}$ , kde  $O$  je počátek souřadné soustavy, pak souřadnice bodu  $X$  jsou souřadnicemi vektoru  $\mathbf{u}$ . Vektor  $\vec{OX}$  nazýváme **polohový vektor** bodu  $X$  a při počítání nebudeme mezi bodem  $X$  a vektorem  $\vec{OX} = X - O$  dělat žádný rozdíl, tj.  $\vec{OX} = X$ .



#### Výklad



Z předchozí definice a následujících poznámek vyplývá, že pro každé umístění vektoru  $\vec{AB} \in \mathbf{u}$ ,  $A = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$ , umíme jednoznačně určit uspořádanou trojici  $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = B - A$ , (obr.1). Jestliže  $\vec{CD} \in \mathbf{u}$ ,  $C = (c_1, c_2, c_3)$ ,  $D = (d_1, d_2, d_3)$ , pak úsečky  $AD$  a  $BC$  (obr. 2) mají společný střed  $S = (s_1, s_2, s_3)$  a platí:



Obr. 2

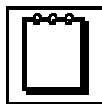
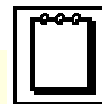
$$s_i = \frac{a_i + d_i}{2} = \frac{b_i + c_i}{2} \quad \text{pro } i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Odtud vyplývá, že

$$b_i - a_i = d_i - c_i \quad \text{pro } i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Obráceně předpokládejme, že pro dvě orientované úsečky platí vztahy (2). Pak platí i vztahy (1) a úsečky AD a BC mají stejný střed, t.j.  $\vec{AB} \in \mathbf{u}$  a  $\vec{CD} \in \mathbf{u}$ . Tím jsme dokázali následující větu.

**Věta 3.2.1.** Pro dvě orientované úsečky  $\vec{AB}, \vec{CD}$  platí  $\vec{AB} \in \mathbf{u}$  a zároveň  $\vec{CD} \in \mathbf{u}$  právě když platí vztahy:  $b_i - a_i = d_i - c_i$  pro  $i = 1, 2, 3$ .

**Poznámky**

1. Předpokládejme, že  $\vec{AB}$  je umístěním vektoru  $\mathbf{u}$ . Potom uspořádanou trojici čísel  $(u_1, u_2, u_3)$ , kde  $u_1 = b_1 - a_1$ ,  $u_2 = b_2 - a_2$ ,  $u_3 = b_3 - a_3$ , nazýváme **souřadnice vektoru  $\mathbf{u}$**  a píšeme  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , nebo také  $\mathbf{u} = B - A$  (obr. 1).
2. Věta 1 říká, že pro výpočet souřadnic vektoru nezáleží na výběru jeho umístění.
3. Označme  $V_3$  množinu všech vektorů v  $E_3$  a označme  $\mathbf{R}^3$  množinu všech uspořádaných trojic  $(u_1, u_2, u_3)$  reálných čísel. Nyní můžeme obě množiny ztotožnit,  $V_3 = \mathbf{R}^3$  a psát  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ . Podobně při označení množiny všech vektorů prostoru  $E_n$  symbolem  $V_n$  můžeme psát  $V_n = \mathbf{R}^n$  a  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ . Sčítání vektorů z  $V_n$  a jejich násobení je nyní dáno stejně jako v kap. 2.1.

**Definice 3.2.2.**

Nechť  $\vec{AB}$  je umístění vektoru  $\mathbf{u}$ . **Velikostí vektoru  $\mathbf{u}$** , kterou označíme  $|\mathbf{u}|$ , nazýváme vzdálenost bodů A,B. Jestliže  $|\mathbf{u}| = 1$ , potom říkáme, že  $\mathbf{u}$  je **jednotkový vektor**.

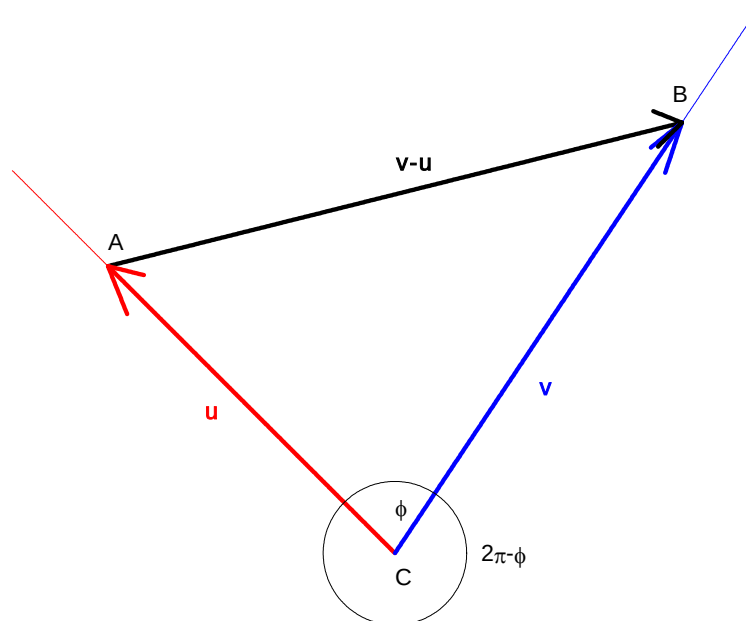
**Věta 3.2.2.** Pro velikost vektoru  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ , platí

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}. \quad (3)$$

**D ů k a z :** Jestliže je  $\vec{AB}$  umístěním vektoru  $\mathbf{u}$ , potom  $u_1 = b_1 - a_1$ ,  $u_2 = b_2 - a_2$ , ...,  $u_n = b_n - a_n$ . Z rovnosti  $|\mathbf{u}| = \rho(A, B)$  a ze vzorce (1, kap. 3.1) ihned vyplývá (3). Tím je důkaz věty proveden.

## Výklad

Předpokládejme, že jsou dány dvě polopřímky  $CA$ ,  $CB$  (obr. 3). Obě polopřímky mají společný počáteční bod  $C$  a rozdělují rovinu  $ABC$  v obecném případě na dva neorientované úhly, z nichž jeden je konvexní (v obr. 3 je jeho velikost označena  $\varphi$ ) a druhý je nekonvexní (v obr. 3 je jeho velikost označena  $2\pi - \varphi$ ). Číslo  $\varphi$  nazveme odchylkou polopřímek  $CA$ ,  $CB$ .

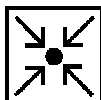


Obr. 3

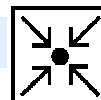
V případě, že polopřímky  $CA$ ,  $CB$  jsou totožné, resp. navzájem opačné, definujeme  $\varphi = 0$ , resp.  $\varphi = \pi$ . Z předcházející úvahy vyplývá, že pro odchylku dvou polopřímek o společném počátku platí:  $\varphi \in [0, \pi]$ .

**Definice 3.2.3.**

Nechť  $\vec{CA}$ ,  $\vec{CB}$  jsou umístění dvou nenulových vektorů  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  (obr. 3). Označme symbolem  $\varphi$  odchylku polopřímek  $CA$ ,  $CB$ . Číslo  $\varphi$  nazýváme **úhlem vektorů  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$** . Jestliže  $\varphi = \pi/2$ , potom říkáme, že vektory  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  jsou **navzájem kolmé**.



## Úlohy k samostatnému řešení



1. Určete koncový bod N vektoru  $\mathbf{a} = \vec{MN} = (4, 2, 3)$ , je-li jeho počáteční bod  $M = (2, 0, -1)$ .
2. Určete velikost vektorů  $\mathbf{p} = (0, -4, 3)$ ,  $\mathbf{q} = (3, 4, -12)$ ,  $\mathbf{r} = (2, 1, \sqrt{3})$ .
3. Vypočítejte souřadnice a velikost vektorů  $\mathbf{a} = \vec{CA}$ ,  $\mathbf{b} = \vec{CB}$ , kde  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (2, -2, -6)$ ,  $C = (-3, 0, 3)$ .
4. Jsou dány tři za sebou jdoucí vrcholy rovnoběžníka ABCD:  $A = (2, -2, 2)$ ,  $B = (4, 2, 0)$ ,  $C = (7, 4, 3)$ . Najděte souřadnice vrcholu D.
5. Najděte souřadnice středu S úsečky AB, kde  $A = (1, -2, 4)$ ,  $B = (1, 3, 2)$ .



## Výsledky úloh k samostatnému řešení



1.  $N = (6, 2, 2)$ .
2.  $|\mathbf{p}| = 5$ ,  $|\mathbf{q}| = 13$ ,  $|\mathbf{r}| = 2\sqrt{2}$ .
3.  $\mathbf{a} = (4, 2, 0)$ ,  $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{5}$ ,
- $\mathbf{b} = (5, -2, -9)$ ,  $|\mathbf{b}| = \sqrt{110}$ .
4.  $\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow D = (5, 0, 5)$ .
5.  $S = (1, \frac{1}{2}, 3)$ .