

2.6. Vlastní čísla a vlastní vektory matice



Cíle



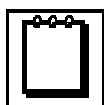
V této části se budeme zabývat hledáním čísla λ , které je řešením rovnice

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \quad (1)$$

kde \mathbf{A} je matice řádu n . Znalost řešení takové rovnice má řadu aplikací nejen v matematice.

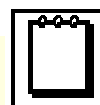
Definice 2.6.1.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice řádu n , kde $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá **vlastní** nebo **charakteristické číslo** matice \mathbf{A} , jestliže existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tak, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$. Vektor \mathbf{x} se nazývá **vlastní** nebo **charakteristický vektor** příslušný k λ .



Poznámka

Množinu všech vlastních čísel matice \mathbf{A} nazýváme **spektrum** matice \mathbf{A} .



Řešené úlohy



Příklad Necht'

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pak

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \mathbf{x}.$$

To znamená, že $\lambda = 3$ je vlastní číslo matice \mathbf{A} a $\mathbf{x} = (2, 1)^T$ je vlastní vektor příslušný k $\lambda = 3$. Zřejmě také každý nenulový násobek vektoru \mathbf{x} je vlastním vektorem, protože

$$\mathbf{A} \cdot (k \mathbf{x}) = k(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = k(\lambda \mathbf{x}) = \lambda(k \mathbf{x}).$$

Tak například $(4, 2)^T$ je také vlastní vektor příslušný k $\lambda = 3$. Platí

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



Výklad



Rovnici (1) můžeme zapsat ve tvaru

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

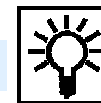
což představuje soustavu homogenních rovnic

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned},$$

která má netriviální řešení, právě když $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$. Vypočteme-li předchozí determinant, získáme polynom $p(\lambda)$ stupně n . Tento polynom se nazývá *charakteristickým polynomem* a rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$, *charakteristickou rovnicí* matice \mathbf{A} . Řešením rovnice $p(\lambda) = 0$ jsou vlastní čísla matice \mathbf{A} . Tak dostaneme n , ne nutně různých, vlastních čísel matice \mathbf{A} .



Řešené úlohy



Příklad Určeme vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Charakteristická rovnice má tvar
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dostaneme $(2-\lambda)(-2-\lambda)(2-\lambda) - 6 - (-2-\lambda) + 6(2-\lambda) = 0$, t.j.

$$-\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$$

Vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Spektrum matice \mathbf{A} je tedy množina $\{0, 1\}$.

Nalezení vlastních vektorů příslušných k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ pak vede k řešení soustavy rovnic

$$(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

což je soustava

$$\begin{pmatrix} 2-0 & 3 & 1 \\ 1 & -2-0 & 1 \\ 1 & -3 & 2-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

t.j.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Použitím Gaussovy eliminační metody zjistíme, že ekvivalentní soustava má tvar

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Položíme $x_3 = t$ a dostaneme $x_1 = x_2 = x_3 = t$. Řešení soustavy je tedy tvaru

$$\mathbf{x} = (t, t, t)^T, \quad t \in \mathbf{C}.$$

Každý násobek vektoru $(1, 1, 1)^T$ je vlastním vektorem matice \mathbf{A} příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$.

Podobně pro vlastní číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ budeme řešit soustavu

$$(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

což je soustava

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -3 & 1 \\ 1 & -2-1 & 1 \\ 1 & -3 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tj.

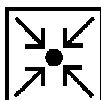
$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

Použitím Gaussovy eliminační metody určíme ekvivalentní soustavu

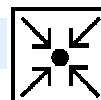
$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 0.$$

Položíme $x_2 = r$, $x_3 = s$ a dostaneme $x_1 = 3r - s$. Řešení soustavy je tedy tvaru

$$\mathbf{x} = (3r - s, r, s)^T, \quad r, s \in \mathbf{C}.$$

Každý násobek vektoru $(2, 1, 1)^T$ je vlastním vektorem matice \mathbf{A} příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Úlohy k samostatnému řešení



1. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice:

$$\begin{aligned}\text{a) } & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, & \text{b) } & \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, & \text{c) } & \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{d) } & \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \\ \text{e) } & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, & \text{f) } & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{g) } & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{h) } & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \\ \text{i) } & \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, & \text{j) } & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, & \text{k) } & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \\ \text{l) } & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $\lambda_1 = 5$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{x} = (t, -2t)^T$, b) $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x} = (4t, 3t)^T$; $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$,
 c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$, d) $\lambda_1 = 3 + 4i$, $\mathbf{x} = (2it, t)^T$; $\lambda_2 = 3 - 4i$, $\mathbf{x} = (-2it, t)^T$,
 e) $\lambda_1 = 2 + i$, $\mathbf{x} = (t, (1 + i)t)^T$; $\lambda_2 = 2 - i$, $\mathbf{x} = (t, (1 - i)t)^T$, f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$,

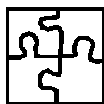
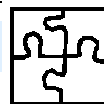
$\mathbf{x} = (t, 0, 0)^T$, g) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t, 0)^T$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\mathbf{x} = (r, s, -s)^T$, h) $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x} = (t, 0, 0)^T$;
 $\lambda_2 = 4$, $\mathbf{x} = (t, t, t)^T$; $\lambda_3 = -2$, $\mathbf{x} = (-t, -t, 5t)^T$, i) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x} = (7t, 3t, t)^T$; $\lambda_2 = 1$,
 $\mathbf{x} = (3t, 2t, t)^T$; $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{x} = (t, t, t)^T$, j) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\mathbf{x} = (t, 0, t)^T$, k) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$,
 $\mathbf{x} = (r, s, 0, 0)^T$; $\lambda_3 = 3$, $\mathbf{x} = (0, 0, t, 0)^T$; $\lambda_4 = 4$, $\mathbf{x} = (0, 0, 0, t)^T$; l) $\lambda_1 = 3$,
 $\mathbf{x} = (t, 2t, 0, 0)^T$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x} = (0, t, 0, 0)^T$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$, $\mathbf{x} = (0, 0, t, 0)^T$,
 vždy pro $r, s, t \in \mathbb{C}$.



Kontrolní otázky



- Vlastní (charakteristické) číslo matice \mathbf{A} řádu n je takové číslo $\lambda \in \mathbb{C}$,
 - které se v matici vyskytuje nejčastěji,
 - že platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$, kde \mathbf{x} je vlastní vektor,
 - že platí $\lambda \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \lambda$, kde \mathbf{x} je vlastní vektor.
- K matici \mathbf{A} řádu n existuje
 - právě n vlastních čísel matice \mathbf{A} ,
 - nejvýše 1 vlastní číslo matice \mathbf{A} ,
 - právě n různých vlastních čísel matice \mathbf{A} .
- Je-li vektor \mathbf{x} vlastním vektorem matice \mathbf{A} , pak je vlastním vektorem matice \mathbf{A} také
 - každý násobek vektoru \mathbf{x} ,
 - každý nenulový násobek vektoru \mathbf{x} ,
 - součet vektoru \mathbf{x} a jednotkového vektoru.
- Charakteristickou rovnicí matice \mathbf{A} nazýváme
 - $\det \mathbf{A} = 0$,
 - $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
 - $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$.
- Řešením charakteristické rovnice matice \mathbf{A} dostaneme
 - vlastní čísla matice \mathbf{A} ,
 - vlastní vektory matice \mathbf{A} ,
 - prvky inverzní matice.

**Odpovědi na kontrolní otázky**

1. b); 2. a); 3. b); 4. c); 5. a).

**Kontrolní test**

1. Najděte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \\ -16 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3,$ b) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2.$

2. Najděte vlastní čísla matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4,$ b) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3.$

3. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \mathbf{x}_1 = (t, -t), \mathbf{x}_2 = (t, t),$ b) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4, \mathbf{x}_1 = (2t, -t), \mathbf{x}_2 = (3t, t).$

4. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \mathbf{x}_1 = (1, t), \mathbf{x}_2 = (t, 2),$

b) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 6, \mathbf{x}_1 = (t, -t), \mathbf{x}_2 = (t, t).$

5. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -16 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

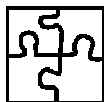
a) $\lambda_{1,2,3} = 0, \mathbf{x} = (t, \frac{2}{3}t, \frac{1}{3}t),$ b) $\lambda_{1,2,3} = 1, \mathbf{x} = (t, -t, t).$

6. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice

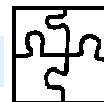
$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 3, \mathbf{x}_1 = (t, 0, 0), \mathbf{x}_2 = (t, -t, 2t),$

b) $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -2, \lambda_3 = -3, \mathbf{x}_1 = (1, 1, t), \mathbf{x}_2 = (3t, -t, 1).$



Výsledky testu



1. b); 2. b); 3. a); 4. b); 5. a); 6 a).



Průvodce studiem



Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 4 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.6. znovu.