

2. LINEÁRNÍ ALGEBRA



Průvodce studiem



Mnoho důležitých úloh v matematice vyžaduje znalost řešení soustav lineárních rovnic. Okolo 75 procent všech matematických problémů ve vědeckých nebo průmyslových aplikacích vede k jejich řešení na různých úrovních. Lineární systémy se objevují v oblastech jako je obchod, ekonomika, sociologie, ekologie, demografie, genetika, elektronika, fyzika a inženýrství v různých technických oblastech. Pro studenty všech technických oborů je proto důležité seznámit se s těmi základními matematickými pojmy a jejich vlastnostmi, které umožňují pochopit řešení soustav lineárních rovnic.

2.1. Vektorové prostory



Cíle



Cílem této části textu je seznámit čtenáře zejména s pojmem vektorového prostoru, který se již intuitivně používal při studiu středoškolské matematiky.



Výklad



V mnoha různých oblastech matematiky se používá operace sčítání spolu s operací násobení skalárem. Matematické systémy takového typu se nazývají vektorové prostory nebo lineární prostory. Před definicí vektorového prostoru uvedeme příklady.



Řešené úlohy



Příklad Množina všech orientovaných úseček v rovině s počátečním bodem O vzhledem ke sčítání orientovaných úseček a jejich násobení reálnými čísly je vektorový prostor.

Příklad Množina $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbf{R}, \text{ kde } i = 1, \dots, n; n \in \mathbf{N}\}$, v níž jsou operace definovány vztahy

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$k(x_1, x_2, \dots, x_n) = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n), k \in \mathbf{R},$$

je vektorový prostor, jehož prvky, vektory, jsou uspořádané n-tice reálných čísel

$$(x_1, \dots, x_n).$$



Výklad



Oba příklady ukazují nejběžnější typy vektorových prostorů. První z nich je *geometrický model vektorového prostoru*, druhý z nich nazýváme obvykle *aritmický vektorový prostor*.

Definice 2.1.1.

Množinu V spolu s operacemi $+: V \times V \rightarrow V$ a $\cdot: \mathbf{R} \times V \rightarrow V$,

tedy uspořádanou trojici $(V, +, \cdot)$ nazveme **vektorovým prostorem**, jsou-li splněny následující axiomy:

V1. $x + y = y + x$ pro každé $x, y \in V$,

V2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ pro každé $x, y, z \in V$,

V3. existuje prvek $o \in V$ tak, že $x + o = x$ platí pro každé $x \in V$,

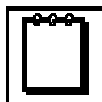
V4. pro každé $x \in V$ existuje prvek $-x \in V$ tak, že $x + (-x) = o$,

V5. $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ pro každé $x, y \in V$ a $a \in \mathbf{R}$,

V6. $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ pro každé $x \in V$ a $a, b \in \mathbf{R}$,

V7. $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ pro každé $x \in V$ a $a, b \in \mathbf{R}$,

V8. $1 \cdot x = x$ pro každé $x \in V$.

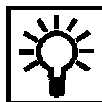
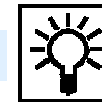
**Poznámka**

1. Prvky z V se nazývají **vektory**, reálná čísla se nazývají **skaláry**. Množina skalárů může být obecně jiná, než je množina reálných čísel, musí však tvořit algebraickou strukturu zvanou komutativní těleso, v níž sčítání a násobení splňují stejné axiomy jako sčítání a násobení v množině reálných čísel.

2. Sčítání v množinách V a \mathbf{R} splňuje tytéž axiomy, a proto v nich nebudeme označení „+“ rozlišovat. Z podobných důvodů lze stejně jako v množině \mathbf{R} vynechat označení operace „ \cdot “ a budeme psát ax místo $a \cdot x$.

3. Prvek $o \in V$, pro který platí axióm V3, nazveme **nulový vektor**. Prvek $-x \in V$ opačný k prvku $x \in V$, pro který platí axióm V4, nazveme **opačný vektor** k vektoru x .

4. Vektorový prostor značíme $V = (V, +, \cdot)$ nebo jen V . Písmenem V tedy budeme často značit jak množinu V , tak množinu V spolu s operacemi „+“ a „ \cdot “.

**Řešené úlohy**

Příklad Necht' $C < a, b >$ je množina všech funkcí jedné proměnné definovaných a spojitých na uzavřeném intervalu $< a, b >$ a necht' sčítání funkcí a násobení funkce reálným číslem je definováno vztahy

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x),$$

pro všechna $x \in < a, b >$. Množina $C < a, b >$ spolu s operacemi „+“ a „ \cdot “ je **vektorovým prostorem všech funkcí jedné proměnné, definovaných a spojitých v uzavřeném intervalu $< a, b >$** . Spojitost funkcí f a g implikuje spojitost funkcí $f + g$ a $k \cdot f$. Čtenář si může ověřit, že uvedené operace splňují axiomy V1 - V8 vektorového prostoru.

Věta 2.1.1. Necht' V je vektorový prostor a $x \in V$, pak platí

1. $0 \cdot x = o$,
2. z rovnosti $x + y = o$ vyplývá $y = -x$ (jednoznačnost existence opačného vektoru),
3. $(-1)x = -x$.

D ů k a z :

1. Z axiomů V6 a V8 vyplývá

$$x = 1x = (1 + 0)x = 1x + 0x = x + 0x.$$

Užitím předchozího výsledku a axiomu V2 dostaneme

$$-x + x = -x + (x + 0x) = (-x + x) + 0x.$$

Z platnosti axiomů V1, V3 a V4 je

$$-x + x = o, \quad \text{a tedy} \quad o = o + 0x = 0x.$$

2. Předpokládejme $x + y = o$. Pak platí

$$-x = -x + o = -x + (x + y).$$

Z předchozího vztahu a platnosti axiomů V1, V2, V3 a V4 dostaneme

$$-x = (-x + x) + y = o + y = y.$$

3. Z 1. tvrzení věty 1. a V6 vyplývá

$$o = 0x = (1 + (-1))x = 1x + (-1)x.$$

Podle V8 je

$$x + (-1)x = o$$

a z 2. tvrzení věty 1. vyplývá

$$(-1)x = -x.$$

**Výklad**

Uvažujme nyní trojici vektorů $x = (1, -1, 2)$, $y = (-2, 3, 1)$ a $z = (-1, 3, 8)$ z vektorového prostoru \mathbf{R}^3 . Existují reálná čísla 3, 2 a -1 tak, že

$$3x + 2y - 1z = (3, -3, 6) + (-4, 6, 2) + (1, -3, -8) = (0, 0, 0) = \mathbf{o}.$$

Pro jinou trojici vektorů $x = (1, -1, 2)$, $y = (-2, 3, 1)$ a $u = (-1, 3, 7)$ je však podobná rovnice splněna pouze v případě, že všechna tři reálná čísla jsou rovna 0, t.j.

$$0x + 0y + 0u = \mathbf{o}.$$

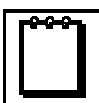
Tato skutečnost nás vede k rozlišení skupin vektorů, z nichž lze získat nulový vektor součtem jejich nenulových násobků nebo pouze součtem jejich nulových násobků.

Definice 2.1.2.

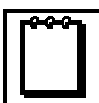
Vektory $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ nazýváme **lineárně nezávislé**, jestliže rovnice

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = \mathbf{o} \quad (1)$$

je splněna pouze v případě, že skaláry c_1, \dots, c_n jsou všechny rovny 0. Jestliže je rovnice (1) splněna a alespoň jeden ze skalárů c_1, \dots, c_n je různý od nuly, říkáme, že vektory v_1, \dots, v_n jsou **lineárně závislé**.

**Poznámka**

Levou stranu rovnice (1) nazýváme **lineární kombinací** vektorů v_1, \dots, v_n . V případě, že c_1, \dots, c_n jsou všechna rovna 0, hovoříme o **triviální kombinaci vektorů** v_1, \dots, v_n .

**Řešené úlohy**

Příklad Vektory $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ a $(1, 0, 0)$ jsou lineárně nezávislé. Najít čísla c_1, c_2, c_3 splňující rovnici

$$c_1(1, 1, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 0) = (c_1 + c_2 + c_3, c_1 + c_2, c_1) = (0, 0, 0)$$

vede k řešení soustavy

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$c_1 = 0,$$

která má jediné řešení $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$.

Příklad Vektory $(1, 2, 4)$, $(2, 1, 3)$ a $(4, -1, 1)$ jsou lineárně závislé. Nalezení čísel c_1, c_2, c_3 splňujících rovnici

$$c_1(1, 2, 4) + c_2(2, 1, 3) + c_3(4, -1, 1) = (c_1 + 2c_2 + 4c_3, 2c_1 + c_2 - c_3, 4c_1 + 3c_2 + c_3) = (0, 0, 0)$$

vede nyní k řešení soustavy rovnic

$$c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0,$$

$$2c_1 + c_2 - c_3 = 0,$$

$$4c_1 + 3c_2 + c_3 = 0,$$

která má například řešení $c_1 = 2, c_2 = -3, c_3 = 1$. Takových řešení je nekonečně mnoho tvaru $c_1 = 2t, c_2 = -3t, c_3 = t, t \in \mathbf{R}$.



Výklad



Je zřejmé, že geometrická interpretace vektorových prostorů \mathbf{R}^2 a \mathbf{R}^3 je různá. Vektory \mathbf{R}^2 lze umístit do roviny, vektory \mathbf{R}^3 do prostoru. Rozdělíme nyní vektorové prostory z tohoto pohledu.

Definice 2.1.3.

Vektorový prostor V se nazývá **n-dimenzionální** nebo také **prostor dimenze n** ($n > 0$), existuje-li ve V n lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ a platí-li, že každý vektor $z \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Poznámka

Sama množina reálných čísel \mathbf{R} je 1-dimenzionální vektorový prostor. Rozmyšlení ponecháváme čtenáři s tím, že v příkladu 2 položí $n = 1$. Pro úplnost můžeme definovat množinu $\{ \mathbf{o} \}$ jako 0-dimenzionální vektorový prostor. Vektorový prostor dimenze n budeme označovat V_n .

Řešené úlohy

Příklad Uvažujme aritmetický vektorový prostor \mathbf{R}^n . Označíme-li

$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$, pak pro každé

$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ platí $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \dots + u_n\mathbf{e}_n$. Je snadno vidět, že vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ jsou lineárně nezávislé a tedy \mathbf{R}^n je vektorový prostor dimenze n .

Výklad

Mějme vektorový prostor V , ve kterém jsou vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ lineárně nezávislé. Předpokládejme, že r je maximální počet lineárně nezávislých vektorů. Pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in V$ jsou pak vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ lineárně závislé, t.j. existuje netriviální kombinace $c\mathbf{u} + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_r\mathbf{v}_r = \mathbf{o}$, kde $c \neq 0$. Můžeme psát

$$\mathbf{u} = (-c^{-1})(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_r\mathbf{v}_r),$$

\mathbf{u} je lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$. Maximální počet lineárně nezávislých vektorů vektorového prostoru V je tedy roven dimenzi r .

Definice 2.1.4.

Každou množinu n lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V_n$ nazýváme **bází** ve V_n a zapisujeme $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$.



Řešené úlohy



Příklad Vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ z příkladu 6 této části jsou bází aritmetického vektorového prostoru \mathbf{R}^n .



Výklad



Věta 2.1.2. Necht' V_n je vektorový prostor a $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ jeho báze. Vyjádření každého vektoru $\mathbf{u} \in V_n$ ve tvaru lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ je jednoznačné.

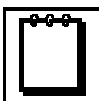
Důkaz: Necht'

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n, \quad \mathbf{u} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_n\mathbf{v}_n$$

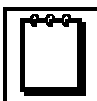
jsou dvě vyjádření vektoru \mathbf{u} . Po odečtení dostaneme

$$\mathbf{0} = (a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (a_n - b_n)\mathbf{v}_n,$$

což v důsledku lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ znamená, že pro všechna $i = 1, \dots, n$ platí $a_i - b_i = 0$, t.j. $a_i = b_i$.



Poznámka



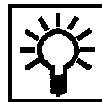
Říkáme, že každá báze $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ vektorového prostoru V_n určuje *soustavu souřadnic*. Zobrazení $V_n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u} \rightarrow (u_1, u_2, \dots, u_n)$, definované vztahem

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{v}_1 + u_2\mathbf{v}_2 + \dots + u_n\mathbf{v}_n,$$

určuje *souřadnice* u_1, u_2, \dots, u_n vektoru \mathbf{u} vzhledem k dané bázi prostoru V_n .



Řešené úlohy



Příklad Určete souřadnice vektoru $\mathbf{a} = (1, 2)$ z $V_2 = \mathbf{R}^2$

a) vzhledem k bázi $\langle (1, 1), (-1, 0) \rangle$,

b) vzhledem k bázi $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle$.

Řešení:

a) Platí $(1, 2) = a_1(1, 1) + a_2(-1, 0)$,

$$1, 2) = (a_1, a_1) + (-a_2, 0),$$

$$(1, 2) = (a_1 - a_2, a_1),$$

tj. $a_1 - a_2 = 1$, $a_1 = 2$.

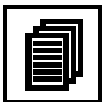
V dané bázi má vektor \mathbf{a} souřadnice 2, 1.

b) Podobně $(1, 2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1)$. Upravíme a dostaneme $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. V bázi $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle$ lze aritmetický vektor ztotožnit s uspořádanou dvojicí jeho souřadnic.

Výsledek příkladu 8b lze snadno rozšířit pro aritmetické vektorové prostory V_n s báží $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, \dots, 0, 1)$.



Výklad



Pro úplnost budeme definovat pojem podprostoru vektorového prostoru V .

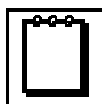
Definice 2.1.5.

Jestliže $V' \subset V$ a jsou splněny podmínky:

(1) $kx \in V'$ pro všechna $x \in V'$ a $k \in \mathbf{R}$,

(2) $x + y \in V'$ pro všechna $x, y \in V'$,

pak V' nazveme vektorovým **podprostorem** vektorového prostoru V .

**Poznámka**

Množinu $\{0\}$ nazýváme nulovým podprostorem; celý prostor V je svým podprostorem.

**Řešené úlohy**

Příklad Necht' $V' = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2, x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, 3\}$, pak V' je podprostorem prostoru \mathbf{R}^3 .

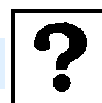
Platí:

- (1) Jestliže $x = (a, a, b) \in V'$, pak $kx = (ka, ka, kb) \in V'$.
- (2) Jestliže $(a, a, b), (c, c, d) \in V'$, pak $(a, a, b) + (c, c, d) = (a + c, a + c, b + d) \in V'$.

Příklad Necht' $V' = \{(x, 1) : x \in \mathbf{R}\}$, pak V' není podprostorem prostoru \mathbf{R}^2 .

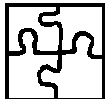
Platí:

- (1) $k(x, 1) = (kx, k) \notin V'$, pro $x \in \mathbf{R}$,
- (2) $(x, 1) + (y, 1) = (x + y, 2) \notin V'$, pro $x, y \in \mathbf{R}$.

**Kontrolní otázky**

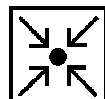
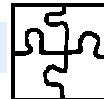
1. Která z uvedených číselných množin spolu s uvedenou operací tvoří vektorový prostor ?
 - a) Množina \mathbf{N} přirozených čísel spolu s operací sčítání $+$,
 - b) množina \mathbf{R} reálných čísel spolu s operacemi sčítání $+$ a násobení \cdot ,
 - c) množina \mathbf{C} celých čísel spolu s operacemi sčítání $+$ a násobení \cdot .
2. Kolik nulových vektorů 0 existuje v daném vektorovém prostoru ?
 - a) Nekonečně mnoho, b) dva, c) jeden.
3. Kolik opačných vektorů $-x$ existuje v daném vektorovém prostoru k vektoru x ?
 - a) Jeden, b) dva, c) nekonečně mnoho.

4. Vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ jsou lineárně závislé, jestliže rovnice $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ je splněna
- pouze, když c_1, c_2, \dots, c_n jsou všechny rovny nule,
 - pro alespoň jedno číslo c_1, c_2, \dots, c_n různé od nuly,
 - každé z čísel c_1, c_2, \dots, c_n musí být různé od nuly.
5. Vektorový prostor se nazývá n-dimenzionální, jestliže
- existuje v tomto prostoru n lineárně nezávislých vektorů a každý vektor prostoru lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci
 - každý vektor prostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci n + 1 lineárně nezávislých vektorů prostoru,
 - každý vektor prostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci dvou vektorů.
6. Báze n-dimenzionálního vektorového prostoru je
- každá množina n lineárně závislých vektorů prostoru,
 - každá množina n lineárně nezávislých vektorů prostoru,
 - každá množina n - 1 lineárně nezávislých vektorů prostoru.



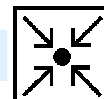
Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. c); 3. a); 4. b); 5. a); 6. b).



Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete aritmetický vektor \mathbf{x} , pro který platí:
- $\mathbf{x} = 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - \mathbf{c}$, je-li $\mathbf{a} = (4, 1, 3, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -3, 2)$, $\mathbf{c} = (16, 9, 1, -3)$,
 - $\mathbf{x} = -\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 6\mathbf{c} + 2\mathbf{d}$, je-li $\mathbf{a} = (1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{c} = (\frac{1}{2}, 0, 1, 4)$,
 $\mathbf{d} = (-1, -1, 1, 1)$,
 - $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 2(\mathbf{b} - 3\mathbf{c}) - 3(\mathbf{c} - 5\mathbf{a})$, je-li $\mathbf{a} = (2, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$,
 - $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c} - 4\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{a} = (5, -8, -3, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -1, 4, -3)$, $\mathbf{c} = (-3, 2, -5, 4)$,
 - $\mathbf{a} - \mathbf{x} + \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{x}) - \frac{1}{4}(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (2, 0, 2)$,
 - $5\mathbf{u} - 4\mathbf{x} - 3\mathbf{v} + \mathbf{x} + 2\mathbf{w} = \mathbf{u} + 2\mathbf{x}$, kde $\mathbf{u} = (1, -1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, 2, 2)$,
 $\mathbf{w} = (3, -3, 3, -3)$.



2. Zjistěte, zda daná množina V spolu s operací sčítání uspořádaných n -tic a násobením n -tice reálným číslem tvoří vektorový prostor, v kladném případě určete jeho nulový vektor.
- $V = \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\}$,
 - $V = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2) : x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$,
 - $V = \{(x, 2) : x \in \mathbf{R}\}$.
3. Určete, která z následujících množin funkcí spolu s operací sčítání funkcí a operací násobení funkce reálným číslem tvoří vektorový prostor:
- množina funkcí ohraničených na $\langle a, b \rangle$,
 - množina funkcí rostoucích na $\langle a, b \rangle$,
 - množina funkcí monotonních na $\langle a, b \rangle$,
 - množina sudých funkcí na $\langle -a, a \rangle$, $a > 0$.
4. Určete, které z číselných množin při sčítání a násobení reálným číslem definovanými přirozeným způsobem tvoří vektorový prostor a v kladném případě určete jeho nulový vektor:
- množina komplexních čísel \mathbf{C} ,
 - množina reálných čísel \mathbf{R} ,
 - množina kladných reálných čísel \mathbf{R}^+ ,
 - množina racionálních čísel \mathbf{Q} .
5. Nechť P je množina posloupností reálných čísel spolu s operací sčítání (součet posloupností) a násobení reálným číslem (násobení posloupnosti reálným číslem). Zjistěte, zda P tvoří vektorový prostor, jestliže:
- P je množina všech posloupností, které mají limitu 0,
 - P je množina všech posloupností, které mají limitu 1,
 - P je množina všech konvergentních posloupností.
6. Najděte všechny hodnoty t , pro které je možno vektor u vyjádřit jako lineární kombinace vektorů a, b, c :
- $u = (5, 3, t)$, $a = (1, 0, 2)$, $b = (0, 1, 1)$, $c = (4, 1, 9)$,
 - $u = (4, 3, t)$, $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, -1, 1)$, $c = (1, 7, 8)$,

- c) $u = (t, 6, 7)$, $a = (1, 4, 5)$, $b = (3, 8, 10)$, $c = (0, -4, -5)$,
- d) $u = (1, 3, 5)$, $a = (1, 3, 4)$, $b = (2, 8, -2)$, $c = (3, 11, t)$.
7. Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé a v kladném případě vyjádřete jeden z nich jako lineární kombinaci ostatních:
- a) $a = (1, 2, 3)$, $b = (3, 6, 7)$,
- b) $a = (4, -2, 6)$, $b = (6, -3, 9)$,
- c) $a = (5, 4, 3)$, $b = (3, 3, 2)$, $c = (8, 1, 3)$,
- d) $a = (0, 1, 0, 3)$, $b = (3, 0, 1, 0)$, $c = (0, 3, 0, 1)$.
8. Určete číslo t tak, aby vektory u , v , w byly lineárně závislé:
- a) $u = (2, 1, 3)$, $v = (1, 2, -5)$, $w = (3, 0, t)$,
- b) $u = (1, 2, 2)$, $v = (2, t, 3)$, $w = (2, 5, 4)$,
- c) $u = (-1, t, 2)$, $v = (1, 1, 2)$, $w = (3, 0, t)$,
- d) $u = (4, 5, 2)$, $v = (2, 2t, t)$, $w = (2, 10-6t, 4-3t)$.
9. Necht' V je vektorový prostor funkcí definovaných a spojitých v daném intervalu. Zjistěte, zda jsou funkce (vektory) v daném intervalu lineárně závislé nebo nezávislé:
- a) $a = e^x$, $b = x$, $x \in \mathbf{R}$,
- b) $a = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, $b = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}$, $c = x^2 + x - 2$, $x \in \mathbf{R}$,
- c) $a = \sin x$, $b = \cos x$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$,
- d) $a = 2\cos^2 x$, $b = -\cos 2x$, $c = -1$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$.
10. Mezi danými vektory najděte maximální počet lineárně nezávislých a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci:
- a) $a = (1, 2, 0, 0)$, $b = (1, 2, 2, 4)$, $c = (3, 6, 0, 0)$,
- b) $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, 3, 4)$, $c = (3, 2, 3)$, $d = (4, 3, 4)$, $e = (1, 1, 1)$,
- c) $u = (1, 1, 0, 1)$, $v = (2, 1, 1, -1)$, $w = (1, -1, 0, -1)$, $x = (1, 0, -1, 2)$.
11. Zjistěte, zda dané vektory tvoří bázi vektorového prostoru \mathbf{R}^3 . V kladném případě vyjádřete vektor $a = (1, 1, 2)$ jako jejich lineární kombinaci a stanovte souřadnice vektoru a v dané bázi:
- a) $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (2, 0, 0)$,
- b) $u_1 = (0, 1, -1)$, $u_2 = (0, 2, -2)$, $u_3 = (1, 1, 3)$,

c) $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (0, 0, 3)$.

12. Z daných vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých a doplňte je vhodně na bázi příslušného vektorového prostoru \mathbf{R}^n :

a) $a_1 = (2, 1, -1, 4)$, $a_2 = (-1, 3, 0, -1)$, $a_3 = (-1, -4, 1, -3)$, $a_4 = (3, -2, -1, 5)$,

b) $b_1 = (4, -1, 5, 3, 1)$, $b_2 = (3, -2, 1, 4, 0)$, $b_3 = (1, 0, -2, 4, -3)$.



Výsledky úloh k samostatnému řešení



- a) $(1, 4, -7, 7)$, b) $(-6, -3, -3, -21)$, c) $(38, 4, 9)$, d) $(0, -1, -\frac{5}{2}, 2)$, e) $(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}, 1)$,
f) $(2, -\frac{16}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{8}{5})$.
- a) ano, $o = (0, 0)$, b) ano, $o = (0, 0, 0)$, c) ne.
- a) ano, b) ne, je-li f rostoucí, pak rf pro $r < 0$ není rostoucí, c) ne, např. $f_1(x) = x^2$,
 $f_2(x) = -x$, jsou monotónní na $\langle 0, 1 \rangle$, ale $f_1 - f_2$ není monotónní na $\langle 0, 1 \rangle$, d) ano.
- a) ano, $o = 0$, b) ano, $o = 0$, c) ne, pro $x \in \mathbf{R}^+$ a $k \in \mathbf{R}$ nemusí platit $kx \in \mathbf{R}^+$, d) ne, pro
 $x \in \mathbf{Q}$ a $k \in \mathbf{R}$ nemusí platit $kx \in \mathbf{Q}$.
- a) ano, b) ne, c) ano.
- a) $t = 13$, b) $t = 7$, c) pro žádné t , d) $t \neq 2$.
- a) nezávislé, b) závislé, $b = \frac{3}{2}a$, c) závislé, $c = 7a - 9b$, d) nezávislé.
- a) $t = 11$, b) neexistuje, c) $t_1 = 2, t_2 = 3$, d) t libovolné.
- a) nezávislé, b) závislé, např. $2a - 3b - c = 0$, c) nezávislé, d) závislé, např.
 $a + b + c = 0$.
- a) $a, b; c = 3a + 0b$ nebo $b, c; a = 0b + \frac{1}{3}c$, b) mimo trojic $a, b, e; c, d, e$ jsou
libovolné tři trojice lineárně nezávislé. Např. $a, b, c; d = -a + b + c$,
 $e = -a + b + 0c$, c) např. $u, v, w; x = 2u - v + w$.
- a) ano, $a = 2u_1 - u_2$, a má souřadnice $(2, -1, 0)$, b) ne, c) ano, $a = u_1 - u_2 + \frac{2}{3}u_3$,
a má souřadnice $(1, -1, \frac{2}{3})$.
- a) např. $a_2, a_3, a_5 = (0, 0, 1, 0)$, $a_6 = (0, 0, 0, 1)$, b) $b_1, b_2, b_3, b_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$,
 $b_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$.



Kontrolní test



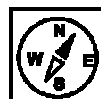
- Určete aritmetický vektor \mathbf{x} , pro který platí $\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{x} + 2\mathbf{b} = \mathbf{c}$, je-li
 $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$.
 a) $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$, b) $\mathbf{x} = (2, 4, -2)$, c) $\mathbf{x} = (2, 2, -2)$.
- Najděte všechny hodnoty t , pro které je možno vektor $\mathbf{u} = (1, 0, t)$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$.
 a) pro všechna t , b) pro $t \neq 0$, c) pro žádné t .
- Zjistěte, zda jsou vektory $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 1, 1)$ lineárně závislé, v kladném případě vyjádřete vektor \mathbf{a} jako lineární kombinaci \mathbf{b} , \mathbf{c} .
 a) $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$, b) $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$, c) jsou lineárně nezávislé.
- Určete číslo t tak, aby vektory $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 0, t)$ byly lineárně závislé.
 a) pro všechna t , b) pro $t \neq 0$, c) pro $t = 0$.
- Zjistěte, zda vektory $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 1, 1)$ tvoří bázi aritmetického vektorového prostoru \mathbf{R}^3 a v kladném případě vyjádřete vektor $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ jako jejich lineární kombinaci.
 a) $\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$, b) netvoří bázi, c) $\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$.



Výsledky testu



1. b); 2. a); 3. c); 4. c); 5. a).



Průvodce studiem



Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 3 případech, pokračujte další kapitolou.
 V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.1. znovu.