

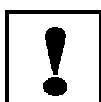
1. MATEMATICKÁ LOGIKA A MNOŽINY



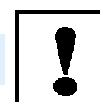
Průvodce studiem



V následující kapitole si připomeneme některé význačné poznatky z matematické logiky a teorie množin, tvořící základ množinově logického aparátu. S celou řadou pojmů, které zde budou uvedeny, se čtenář seznámil už v průběhu studia na střední škole, a proto se zaměříme v podstatě na systematické utřídění těchto pojmů a na zdůraznění některých vzájemných souvislostí. Zatím uveďme, že *logika* se zabývá formami a pravidly správného myšlení a *teorie množin* zkoumá nejobecnější vztahy mezi souhrny (množinami) určitých předmětů (prvků). Obě dnes široce rozvinuté matematické disciplíny budeme používat jen jako vyjadřovací prostředek.



Předpokládané znalosti



V celé kapitole Matematická logika a množiny se předpokládá, že si čtenář zopakuje středoškolské znalosti z oblastí výrokové logiky, teorie množin a číselných oborů.

1.1. Některé pojmy logické výstavby matematiky



Cíle



Cílem kapitoly je opakování a rozšíření středoškolských látky z oblastí výrokové logiky a výstavby matematického vyjadřování (axiómy, definice, věty, důkazy).



Výklad



Výrokem nazveme každou vyslovenou nebo napsanou myšlenku, o níž má smysl říci, že je buď pravdivá nebo nepravdivá. Výrokem může tedy být pouze věta oznamovací. Výroky



budeme označovat velkými písmeny A, B, ... , jejich **pravdivostní hodnotu**, tj. pravdivost, resp. nepravdivost výroku, označíme symbolem (číslicí) 1, resp. 0.

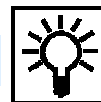
Hypotézou nazveme výrok, jehož pravdivostní hodnotu zatím neznáme; pokoušíme se ji odvodit logickými operacemi z jiných pravdivých výroků.

Z daných výroků lze vytvářet nové výroky negací, užitím logických spojek a závorek.

Negace výroku A je nový výrok, který vyjadřujeme slovy „neplatí A“ a označujeme symbolem $\neg A$. Je-li výrok A pravdivý, je výrok $\neg A$ nepravdivý; je-li výrok A nepravdivý, je výrok $\neg A$ pravdivý. Výroky A a $\neg A$ se vzájemně vylučují, jejich pravdivostní hodnoty jsou opačné.



Řešené úlohy



Příklady správné a nesprávné negace výroků

Výrok A	Negace výroku A	Výroky, které nejsou negacemi výroku A
Číslo x je záporné.	Není pravda, že číslo x je záporné. Číslo x je nezáporné.	Číslo x je kladné.
Mám červený svetr.	Není pravda, že mám červený svetr. Nemám červený svetr.	Mám bílý svetr. Mám černý svetr. Mám zelený svetr.

Negování výroků s údajem o počtu prvků

Výrok	Negace výroku
Alespoň dva odešli. Žádný nepřišel. Zůstaneme nejvýše tři. Daná rovnice má právě jeden kořen.	Nejvýše jeden odešel. Alespoň jeden přišel. Zůstaneme aspoň čtyři. Daná rovnice nemá žádný kořen nebo má alespoň dva kořeny.

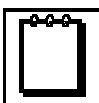
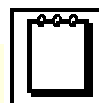
**Výklad**

Logické spojky (funktory) jsou čtyři: 1. Spojka **a**, kterou označujeme symbolem \wedge ; 2. spojka **nebo** (\vee); 3. spojka **jestliže - pak** (\Rightarrow); 4. spojka **právě tehdy, když** (\Leftrightarrow). Pomocí logických spojek vytváříme z výroků A, B nové výroky:

Konjunkce výroků A, B je výrok, který vyjadřujeme spojkou **a**; označujeme jej $A \wedge B$, což čteme A **a** B. Konjunkce je pravdivým výrokem, právě když **oba výroky** A a B **jsou pravdivé**. **Disjunkce výroků** A, B je výrok, který vyjadřujeme spojkou **nebo**; označujeme jej $A \vee B$, což čteme A **nebo** B. Disjunkce je pravdivým výrokem, když je **pravdivý aspoň jeden** z výroků A, B.

Implikace výroků A, B (v daném pořadí) je výrok, který vyjadřujeme slovním spojením **jestliže - pak**. Označujeme jej $A \Rightarrow B$, což čteme: Jestliže platí A, pak platí B. Implikace je pravdivým výrokem při všech možných pravdivostních hodnotách výroků A, B kromě případu, kdy A je pravdivým a B nepravdivým výrokem.

Ekvivalence výroků A, B je výrok, který vyjadřujeme slovním spojením **právě tehdy, když**. Označujeme jej $A \Leftrightarrow B$, což čteme: A platí právě tehdy, když platí B. Ekvivalence je pravdivým výrokem, pokud výroky A, B jsou oba pravdivé nebo výroky A, B jsou oba nepravdivé.

**Poznámka**

Tabulka pravdivostních hodnot výroků odvozených z výroků A, B negací a užitím logických spojek

A	B	non A	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

**Výklad**

Výroková formule je zápis z písmen A, B, \dots , znaku pro negaci, logických spojek a závorek, který je sestaven tak, aby byl výrokem, pokud písmena A, B, \dots označují výroky.

Zápisy konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence jsou výrokovými formulemi. I u složitějších výrokových formulí můžeme sestavit tabulku jejich pravdivostních hodnot. Využíváme přitom tabulku pravdivostních hodnot.

**Řešené úlohy**

Příklad Sestavme tabulku pravdivostních hodnot výrokové formule $(A \wedge B) \vee \text{non } A$.

Řešení:

A	B	$A \wedge B$	non A	$(A \wedge B) \vee \text{non } A$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

**Výklad**

Tautologie je výroková formule, která nabývá ve všech případech pravdivostní hodnoty 1.

Výroková forma $S(x)$ je slovní vyjádření, v němž se vyskytuje proměnná x . Toto vyjádření má tu vlastnost, že se stane výrokem, jestliže proměnnou nahradíme prvky jisté množiny, kterou označíme D a nazveme **definičním oborem** výrokové formy $S(x)$. Množinu všech prvků, pro něž je $S(x)$ pravdivým výrokem, nazveme **oborem pravdivosti** výrokové formy $S(x)$ a označíme P .

Např. výroková forma „ x je celé číslo“ není výrokem, neboť neznáme význam proměnné x . Teprve tehdy, nahradíme-li proměnnou x určitým číslem, dostaneme výrok, a to buď pravdivý (např. nahradíme-li x číslem 2) nebo nepravdivý (např. nahradíme-li x číslem $\frac{1}{2}$). Definičním oborem této výrokové formy je množina \mathbf{R} , příp. \mathbf{C} , pravdivostním oborem množina \mathbf{Z} .

Podobně jsou definovány výrokové formy, které obsahují dvě a více proměnných.



Kvantifikátory. Vedle nahrazení proměnných konstantami existuje ještě jiný způsob, jak dostaneme z výrokových forem výroky. Např. výroková forma $x + y = y + x$ je pravdivým výrokem, nahradíme-li x a y libovolnými reálnými čísly. Tento výrok vyjádříme slovy:



Pro všechna reálná čísla x, y platí $x + y = y + x$.

V symbolice matematické logiky píšeme tento výrok ve tvaru

$$\forall x, y \in \mathbf{R} : x + y = y + x ,$$

kde \forall označuje tzv. *obecný kvantifikátor*.

Výroková forma $x > y$ je pravdivým výrokem pouze pro některé dvojice reálných čísel. Tuto vlastnost vyjádříme výrokem:

Existují taková reálná čísla x, y , že platí $x > y$.

V symbolice matematické logiky píšeme tento výrok ve tvaru

$$\exists x, y \in \mathbf{R} : x > y ,$$

kde \exists je tzv. *existenční kvantifikátor*. Někdy se užívá také symbol $\exists!$, který čteme: Existuje právě jeden



Operace s výrokovými formami. Tak jako jsme z výroků tvořili nové výroky pomocí negace, logických spojek a závorek, můžeme stejným postupem vytvořit z výrokových forem nové výrokové formy. Jestliže $U(x)$ a $V(x)$ jsou dvě výrokové formy, zapisujeme nové výrokové formy ve tvaru:



$\text{non } U(x)$, tj. není pravda, že platí $U(x)$,

$U(x) \wedge V(x)$, tj. platí $U(x)$ a $V(x)$,

$U(x) \vee V(x)$, tj. platí $U(x)$ nebo $V(x)$,

$U(x) \Rightarrow V(x)$, tj. jestliže platí $U(x)$, pak platí $V(x)$,

$U(x) \Leftrightarrow V(x)$, tj. $U(x)$ platí právě tehdy, když platí $V(x)$.

Z těchto výrokových forem můžeme vytvářet složitější výrokové formy.

Zapamatujeme si: Rovnice, resp. nerovnice je výrokovou formou; rovnost, resp. nerovnost je výrokem.



Axiómy, definice, věty



Axióm je počátečním výrokem budované matematické teorie, jehož pravdivost předpokládáme (a nedokazujeme). Např. výrok „dvěma různými body je určena jediná přímka“ je jedním z axiomů, které zvolil Euklides pro vybudování vědeckých základů elementární geometrie. Axiomaticky lze budovat matematiku a některé části přírodních věd (např. klasickou mechaniku, speciální teorii relativity).

Definice je ekvivalence, na jejíž jedné straně je nový pojem a na druhé straně jsou jen pojmy dříve známé. Definice vystihují důležité a často se vyskytující pojmy dané teorie a umožňují stručnější vyjadřování matematických výroků. Definice nedokazujeme.

Věta je pravdivý výrok dokazatelný v dané teorii (z axiomů nebo předem známých pravdivých vět; např. Pythagorova věta je větou euklidovské geometrie).



Důkaz matematické věty. V matematice se používají nejčastěji tyto tři typy důkazů:



1. Důkaz přímý,
2. důkaz nepřímý,
3. důkaz metodou matematické indukce.

Za **důkaz přímý** považujeme řetězec pravdivých implikací $A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, \dots, A_{n-1} \Rightarrow A_n$ za předpokladu, že A_1 je axiom nebo platná (už dokázaná) věta.

Stručně můžeme psát

$$A_1, A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n, \text{ tedy } A_n.$$



Řešené úlohy



Příklad Dokažme toto tvrzení: Pro každé reálné číslo $a \neq 0$ platí:

$$a > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Řešení: $a > 0 \Rightarrow (a - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Rightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Rightarrow \frac{a^2 + 1}{a} \geq 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2.$$



Výklad



Za *nepřímý důkaz* považujeme důkaz implikace $\text{non } B \Rightarrow \text{non } A$, která je obměnou implikace $A \Rightarrow B$ a má stejnou pravdivostní hodnotu jako původní implikace $A \Rightarrow B$.



Řešené úlohy



Příklad Dokažme výrok: Jestliže je druhá mocnina celého čísla k číslo sudé (výrok A), pak je číslo k sudé (výrok B).

Řešení: Dokážeme obměnu této implikace, tedy výrok: Jestliže je k liché číslo (výrok $\text{non } B$), pak je číslo k^2 liché (výrok $\text{non } A$). Vyjádříme-li číslo k ve tvaru $k = 2l + 1$ (l celé), je $k^2 = 4l^2 + 4l + 1$, tj. rovněž liché číslo.



Výklad

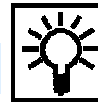


Nepřímým důkazem je i *důkaz sporem*. Tento důkaz provedeme ve třech krocích:

1. Vyslovíme negaci výroku A, tj. $\text{non } A$,
2. sestavíme řetězec implikací $\text{non } A \Rightarrow B_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow B$, kde B neplatí,
3. uzavřeme, že neplatí $\text{non } A$, tj. platí výrok A.



Řešené úlohy



Příklad Dokažme, že číslo $\sqrt{2}$ není racionálním číslem.

Řešení: Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo p/q , kde p a $q \neq 0$ jsou nesoudělná celá čísla a žádné z nich není rovno 1. Tento předpoklad vede ke sporu. Umocněním rovnosti $\sqrt{2} = p/q$ dostaneme

$$p^2 = 2q^2,$$

p^2 je tedy číslo sudé a podle příkladu 3 je i p číslo sudé; můžeme je proto vyjádřit ve tvaru $p = 2l$ (l celé). Dosazením za p do předchozí rovnice dostaneme $p^2 = 4l^2 = 2q^2$,

$$q^2 = 2l^2,$$

což znamená, že také číslo q je sudé číslo. Došli jsme tedy k závěru, že čísla p, q jsou sudá, tj. soudělná, což odporuje našemu předpokladu, že čísla p, q nejsou soudělná. Předpoklad byl nesprávný, číslo $\sqrt{2}$ není racionální.



Výklad



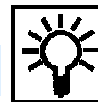
Důkaz matematickou indukcí se obvykle užívá, když máme dokázat, že pro každé přirozené číslo n (popř. pro čísla začínající číslem $n_0 \geq 1$) platí jistý výrok (např. vzorec), který označme $V(n)$. Důkaz matematickou indukcí provádíme ve dvou krocích.

1. Ověříme, že výrok $V(n)$ platí pro určité nejmenší přirozené číslo $n_0 \geq 1$.
2. Předpokládáme, že $V(n)$ platí pro některé přirozené číslo $n = k$ a výpočtem nezávislým na n dokážeme, že platí také pro $n = k + 1$.

Spojení obou kroků dokazuje platnost výroku $V(n)$ pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$.



Řešené úlohy



Příklad Dokažme, že pro každé přirozené číslo n platí vzorec $V(n)$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Řešení: 1. Vzorec platí pro $n = 1$, neboť $1^2 = \frac{1}{6} 1(1+1)(2+1)$.

2. Předpokládejme, že vzorec platí pro $n = k$, tj.

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1).$$

K oběma stranám rovnice připočteme $(k+1)^2$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + \frac{6}{6} (k+1)^2.$$

Úpravou pravé strany [vytknutím výrazu $\frac{1}{6}(k+1)$] a jejím porovnáním s pravou stranou

vzorce $V(n)$ pro $n = k+1$, tj. s výrazem $\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]$, vidíme, že

vzorec $V(n)$ skutečně platí pro $n = k+1$.

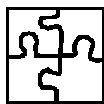
Spojení kroků 1 a 2 dokazuje platnost vzorce $V(n)$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$.



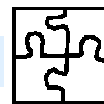
Kontrolní otázky



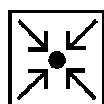
- Výrokem rozumíme každou větu nebo sdělení, o kterém má smysl uvažovat, zda je pravdivý nebo nepravdivý, přičemž nastane:
 - právě jedna z možností,
 - alespoň jedna z možností,
 - nenastane žádná z možností.
- Patří předpovědi počasí mezi:
 - hypotézy,
 - výroky.
- Tautologie je výroková formule, která nabývá ve všech případech pravdivostní hodnoty:
 - 0),
 - 1
 - 0 nebo 1.
- Rovnice, resp. nerovnice je:
 - výrokovou formou,
 - výrokem,
 - hypotézou.
- Důkaz sporem matematické věty řadíme mezi důkazy:
 - přímé,
 - nepřímé,
 - matematickou indukcí.



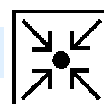
Odpovědi na kontrolní otázky



1. a); 2. a); 3. b); 4. a); 5. b).



Úlohy k samostatnému řešení



- Rozhodněte, které z následujících vět jsou výroky, a pokud je to možné, určete jejich pravdivostní hodnoty: a) Máš peníze ? b) Kéž by přestalo sněžit ! c) V roce 2020 nebudeme mít žádné uhlí. d) Lagos je hlavní město Zambie. e) $4^3 - 62 = 2$. f) $4^3 - 62 = 1$. g) Druhá mocnina každého přirozeného čísla je kladná. h) $x^2 + x - 6 = 0$.
- Rozhodněte, zda výrok: Alespoň jeden kořen této rovnice je kladný je negací výroku: Všechny kořeny této rovnice jsou záporné.
- Vyslovte negace výroků: a) V daném trojúhelníku je nejvýše jeden tupý úhel. b) Žádné prvočíslo není sudé. c) Alespoň jeden kořen dané rovnice je kladný. d) Alespoň jeden koeficient dané rovnice není záporný. e) Alespoň tři z nás mluví španělsky. f) Nedostal žádnou knihu. g) Každý mlčel. h) Předběhl každého soupeře.
- Rozhodněte, zda jsou pravdivé následující implikace: a) Jestliže je číslo 25 dělitelné 17, pak i číslo $471 + 7.25$ je dělitelné 17. b) Jestliže i je imaginární jednotka, potom i^2 je imaginární číslo. c) Jestliže $\ln 5 = 2$, potom $\ln 10 = 3$. d) Jestliže $2 < 5$, potom má Praha více než milión obyvatel.
- Zapište následující výroky v symbolice matematické logiky: a) Buď platí A a B, nebo neplatí A ani B. b) Platí nejvýše jeden z výroků A, B. c) Platí aspoň jeden z výroků A, B. d) Platí právě jeden z výroků A, B.
- Sestavte tabulky pravdivostních hodnot výrokových formulí: a) $(B \wedge A) \Rightarrow \vee (B \Rightarrow \text{non } A)$, b) $\text{non } A \Rightarrow B$, c) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
- Rozhodněte, které z následujících výrokových formulí jsou tautologie: a) $(A \wedge B) \Rightarrow A$, b) $(A \vee B) \Rightarrow A$, c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$.
- Rozhodněte, které z následujících dvojic výrokových formulí jsou ekvivalentní: a) $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, b) $A \Leftrightarrow B$, $\text{non } A \Leftrightarrow \text{non } B$, c) $\text{non } (A \Rightarrow B)$, $A \wedge \text{non } B$.

9. Najděte definiční obory a obory pravdivosti výrokových forem: a) $S_1(x) : x^2 + 3x + 2 = 0$,
 b) $S_2(x) : x > 0 \wedge x^2 > x$, c) $S_3(x) : x$ je studentem přírodovědecké fakulty UK, d) $S_4(x) :$
 Jestliže x je muž, potom měří více než 190 cm.
10. Přímým důkazem dokažte výrok: Jestliže celé číslo a není dělitelné třemi, pak číslo $a^2 - 1$ je dělitelné třemi.
11. Dokažte matematickou indukcí platnost vztahů: a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$,
 b) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
12. Dokažte, že číslo $\log 5$ je iracionální. Zvolte důkaz sporem.



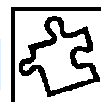
Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. **a), b), h)** nejsou výroky, **c)** je hypotéza, **e), g)** jsou výroky pravdivé, **d), f)** jsou výroky nepravdivé.
2. Není negací, kořeny mohou být rovny nule.
3. **a)** alespoň dva, **b)** alespoň jedno, **c)** žádný kořen, **d)** žádný koeficient, **e)** nejvýše dva, **f)** dostal alespoň jednu, **g)** alespoň jeden nemlčel, **h)** nepředběhl alespoň jednoho soupeře.
4. **b)** nepravdivá, ostatní pravdivé.
5. **a)** $A \Leftrightarrow B$, **b)** $\text{non}(A \wedge B)$, **c)** $A \vee B$, **d)** $A \Leftrightarrow \text{non} B$, příp. $\text{non} A \Leftrightarrow B$.
7. **a).**
8. **b), c).**
9. **a)** $D_1(x) = \mathbf{R}$, $P_1 = \{-1, -2\}$, **b)** $D_2(x) = \mathbf{R}$, $P_2 = (1, \infty)$, **c)** $D_3(x)$ = množina všech lidí, P_3 = množina všech studentů přírodovědecké fakulty UK, **d)** $D_4(x)$ = množina všech lidí, P_4 = množina všech žen sjednocená s množinou všech mužů vyšších než 190 cm.
10. Návod: $a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$.

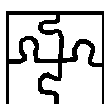


Kontrolní test

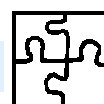


1. Určete, která z následujících sdělení jsou výroky:
 - a) číslo x je záporné,
 - b) číslo 7 není prvočíslo,
 - c) trojúhelník ABC je rovnostranný,
 - d) $u - v = 6$,

- e) Ostrava je hlavním městem ČR,
f) začněte se balit!
g) už je půlnoc?
2. Určete, která sdělení z bodu 1 jsou výrokovými formami.
3. Negací výroku: „V noci přšelo“ je výrok:
a) v noci sněžilo,
b) v noci bylo jasno,
c) není pravda, že v noci přšelo.
4. Rozhodněte, které z následujících implikací jsou nepravdivé:
a) jestliže $3 < 4$, potom má Ostrava více než tisíc obyvatel,
b) jestliže i je imaginární jednotka, potom i^2 není imaginární číslo,
c) jestliže číslo 15 je dělitelné 3, potom i číslo $16 + 4 \cdot 700$ je dělitelné 3.
5. Rozhodněte, které z následujících výrokových formulí jsou tautologie:
a) $(A \wedge B) \Rightarrow A$, b) $(A \vee B) \Rightarrow A$, c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$,
6. Určete obor pravdivosti výrokové formy $S(X): x^2 - x - 6 = 0$.
a) \mathbf{R} , b) $\{3, -2\}$, c) \emptyset .
7. Přímým důkazem rozhodněte, že věta: „Jestliže celé číslo a není dělitelné třemi, pak číslo $a^2 - 1$ je dělitelné třemi:
a) platí, b) neplatí, c) nelze rozhodnout.



Výsledky testu



1. b), c), e), f), g); 2. a), d); 3. c); 4. c); 5. a); 6. b); 7. a).



Průvodce studiem



Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 4 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.1. znovu.