



ZÁKLADY MATEMATIKY

**Marie Dostálová
Eliška Gardavská
Radka Hamříková
Věra Janků
Miloslava Tannenbergová**

Vytvořeno v rámci projektu Operačního programu Rozvoje lidských zdrojů
CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016

Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického
základu studia.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

OBSAH

<u>TITULNÍ STRÁNKA</u>	1
<u>ÚVOD</u>	5
1. <u>ČÍSELNÉ OBORY</u> (ELIŠKA GARDAVSKÁ)	9
2. <u>FUNKCE</u> (RADKA HAMŘÍKOVÁ)	29
3. <u>ROVNICE A NEROVNICE</u> (VĚRA JANKŮ)	84
4. <u>KOMPLEXNÍ ČÍSLA</u> (MILOSLAVA TANNENBERGOVÁ)	115
5. <u>POSLOUPNOSTI</u> (MARIE DOSTÁLOVÁ)	151
6. <u>KOMBINATORIKA</u> (VĚRA JANKŮ)	180
7. <u>ANALYTICKÁ GEOMETRIE V ROVINĚ</u> (RADKA HAMŘÍKOVÁ)	196
<u>LITERATURA</u>	253

STUDIJNÍ OPORY S PŘEVAŽUJÍCÍMI DISTANČNÍMI PRVKY PRO PŘEDMĚTY TEORETICKÉHO ZÁKLADU STUDIA

je název projektu, který uspěl v rámci první výzvy Operačního programu Rozvoj lidských zdrojů. Projekt je spolufinancován státním rozpočtem ČR a Evropským sociálním fondem. Partnery projektu jsou Regionální středisko výchovy a vzdělávání, s.r.o. v Mostě, Univerzita obrany v Brně a Technická univerzita v Liberci. Projekt byl zahájen 5.1.2006 a bude ukončen 4.1.2008.

Cílem projektu je zpracování studijních materiálů z matematiky, deskriptivní geometrie, fyziky a chemie tak, aby umožnily především samostatné studium a tím minimalizovaly počet kontaktních hodin s učitelem. Je zřejmé, že vytvořené texty jsou určeny studentům všech forem studia. Studenti kombinované a distanční formy studia je využijí k samostudiu, studenti v prezenční formě si z nich mohou doplnit získané vědomosti z výuky. Všem studentům texty pomohou při procvičení a ověření získaných vědomostí. Nezanedbatelným cílem projektu je umožnit zvýšení kvalifikace širokému spektru osob, které nemohly ve studiu na vysoké škole z různých důvodů (sociálních, rodinných, politických) pokračovat bezprostředně po maturitě.

V rámci projektu jsou vytvořeny jednak standardní učební texty v tištěné podobě, koncipované pro samostatné studium, jednak e-learningové studijní materiály, přístupné prostřednictvím internetu. Součástí výstupů je rovněž banka testových úloh pro jednotlivé předměty, na níž si studenti ověří, do jaké míry zvládli prostudované učivo.

Bližší informace o projektu můžete najít na adrese <http://www.studopory.vsb.cz/>.

Přejeme vám mnoho úspěchů při studiu a budeme mít radost, pokud vám předložený text pomůže při studiu a bude se vám líbit. Protože nikdo není neomylný, mohou se i v tomto textu objevit nejasnosti a chyby. Předem se za ně omlouváme a budeme vám vděční, pokud nás na ně upozorníte.

ESF – ROVNÉ PŘÍLEŽITOSTI PRO VŠECHNY

POKYNY KE STUDIU

V úvodu si vysvětlíme jednotnou pevnou strukturu každé kapitoly textu, která by vám měla pomoci k rychlejší orientaci při studiu. Pro zvýraznění jednotlivých částí textu jsou používány ikony a barevné odlišení, jejichž význam nyní objasníme.



Průvodce studiem



vás stručně seznámí s obsahem dané kapitoly a jejím členěním.



Cíle



vás seznámí s učivem, které v dané kapitole poznáte a které byste po jejím prostudování měli umět.



Předpokládané znalosti



shrnují stručně učivo, které byste měli znát ještě dříve než kapitolu začnete studovat. Jsou nezbytným předpokladem pro úspěšné zvládnutí dané kapitoly.



Výklad



označuje samotný výklad učiva dané kapitoly, který je členěn způsobem obvyklým v matematice na definice, věty, případně důkazy.

Definice

Zavádí základní pojmy v dané kapitole.

Věta

Uvádí základní vlastnosti pojmů zavedených v dané kapitole.

Důkaz: Vychází z předpokladů věty a dokazuje tvrzení uvedené ve větě.

**Poznámka**

doplňuje nebo komentuje vykládanou látku.

**Řešené úlohy**

označují vzorové příklady, které ilustrují probrané učivo.



Příklad Uvádí zadání příkladu.

Řešení: Uvádí podrobné řešení zadaného příkladu.

**Úlohy k samostatnému řešení**

obsahují zadání příkladů k procvičení probraného učiva. Úlohy označené **✖** patří k obtížnějším a jsou určeny zájemcům o hlubší pochopení tématu.

**Výsledky úloh k samostatnému řešení**

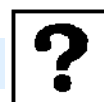
obsahují správné výsledky předchozích příkladů, slouží ke kontrole správnosti řešení.

**Klíč k řešení úloh**

obsahuje postup při řešení příkladů k samostatnému řešení.

**Kontrolní otázky**

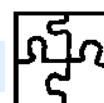
obsahují soubor otázek k probranému učivu.

**Kontrolní test**

obsahuje soubor příkladů k probranému učivu.

**Výsledky testu**

uvádějí správné odpovědi na příklady kontrolního testu.



**Shrnutí lekce**

obsahuje stručný přehled probraného učiva.

**Literatura**

obsahuje seznam knih, které byly použity při tvorbě příslušného textu a na které byly případně uvedeny odkazy k hlubšímu prostudování tématu.



Piktogram, který upozorňuje na důležité vztahy nebo vlastnosti, které je nezbytné si zapamatovat.



Předkládaná skripta pro předmět Základy matematiky (dále jen ZM) jsou určena pro studenty denního i kombinovaného studia VŠ technického a ekonomického zaměření. Mají jim sloužit jako učební pomůcka pro zopakování pro ně dále důležitých partií středoškolské matematiky, jejichž znalost je nutným předpokladem pro zvládnutí navazujících předmětů vysokoškolského studia.

Látka ZM je rozdělena do sedmi kapitol. Podrobný obsah, umístěný před každou kapitolou, poskytuje studentovi přehled o náplni jednotlivých kapitol a umožní mu zvolit si ty partie, které potřebuje zopakovat.

V textu je zachováno značení obvyklé na středních školách, s výjimkou 6. kapitoly. Tato část, týkající se počtu variací a kombinací, uvádí místo $V(k, n)$ a $K(k, n)$ označení $V_k(n)$ a $C_k(n)$. Zvolené označení se používá v textech předmětu Počet pravděpodobnosti a statistika, se kterým se posluchači setkají v průběhu studia na VŠB-TUO.

Mnoho úspěchů ve studiu matematiky přeje za celý kolektiv autorek

Eliška Gardavská.

V Ostravě, září 2006

1. ČÍSELNÉ OBORY	10
1.1. Některé pojmy z matematické logiky	10
1.1.1. Výroková logika	10
1.1.2. Množiny a vztahy mezi nimi	12
1.1.3. Množinové operace	13
1.1.4. Grafické znázornění množin	14
1.2. Číselné obory	15
1.2.1. Čísla – názvy a jejich charakteristiky	15
1.2.2. Charakteristiky číselných oborů	17
1.2.3. Základní početní operace	17
1.2.4. Intervaly	17
1.3. Algebraické výrazy	19
1.3.1. Polynomy (mnohočleny)	19
1.3.2. Úprava racionálních lomených výrazů (vzorce a pravidla pro umocňování).	20
1.3.3. Úprava iracionálních algebraických výrazů (pravidla pro odmocňování)	22
1.3.4. Absolutní hodnota reálného čísla	23
1.3.5. Rozklad kvadratického trojčlenu	24
Kontrolní otázky	24
Úlohy k samostatnému řešení	25
Výsledky úloh k samostatnému řešení	25
Klíč k řešení úloh	26
Kontrolní test	27
Výsledky testu	28

1. ČÍSELNÉ OBORY



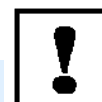
Průvodce studiem



Tato kapitola Základů matematiky je rozdělena do tří menších celků a ty jsou ještě dále rozčleněny na menší oddíly, v nichž je podán stručný přehled těch partií ze středoškolské matematiky, které potřebujete k pochopení dalšího učiva. Jejím prostudováním si zopakujete a doplníte případné mezery ve svých matematických znalostech. Do třetí podkapitoly jsou zařazeny řešené příklady a po nich Úlohy k samostatnému řešení s výsledky. Jak dalece jste zvládli učivo 1.kapitoly si ověříte na kontrolním testu.



Předpokládané znalosti



Znát základní vlastnosti početních operací (komutativnost, asociativnost, distributivnost), umět mnohočleny sčítat, odečítat, násobit, znát výpočet kořenů kvadratické rovnice.

1.1. Některé pojmy z matematické logiky



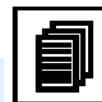
Cíle



Cílem této kapitoly je stručně se seznámit se základními pojmy z matematické logiky a teorie množin.



Výklad



1.1.1. Výroková logika

VÝROK je vyslovené nebo napsané tvrzení, o němž má smysl rozhodnout, zda je pravdivé nebo nepravdivé, přičemž musí nastat právě jedna z těchto dvou možností.

Tvrzení, o nichž v daném okamžiku nejsme schopni říct, zda jsou pravdivé či nepravdivé, nazýváme **HYPOTÉZY** (domněnky).

Je-li výrok **pravdivý**, pak můžeme také říct, že výrok **platí**.

Je-li výrok **nepravdivý**, pak můžeme také říct, že výrok **neplatí**.

Výroky označujeme velkými písmeny latinské abecedy (A, B, C, ...).

Proměnná je symbol, který označuje kterýkoli objekt z dané množiny objektů.

Logická spojka má symbolické označení : $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Pomocí logických spojek vytvoříme z daných výroků výroky nové.

Základní složené výroky vidíme v následující tabulce. Základní se jim říká proto, že vzniknou použitím pouze jediné logické spojky.

Symbol logické spojky	Název složeného výroku	Symbolické označení výroku	Vyjádření v jazyce
$\neg$	negace výroku A	$\neg A$	není pravda, že A
$\wedge$	konjunkce výroků A, B	$A \wedge B$	A a B, A a zároveň B, (A i B)
$\vee$	disjunkce výroků A, B	$A \vee B$	A nebo B, (nebo není vylučovací!)
$\Rightarrow$	implikace výroku A výrokem B	$A \Rightarrow B$	jestliže A, pak B A je postačující podmínkou pro B B je nutnou podmínkou pro A
$\Leftrightarrow$	ekvivalence výroků A, B	$A \Leftrightarrow B$	A právě tehdy když B A tehdy a jen tehdy, když B A je nutnou a postačující podmínkou pro B

Výrokům se přiřazují tzv. **pravdivostní hodnoty**. **Pravdivému výroku** se přiřazuje pravdivostní hodnota **1** a **nepravdivému výroku** se přiřazuje pravdivostní hodnota **0**.

Tabulka pravdivostních hodnot základních složených výroků:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Základní kvantifikátory

Název kvantifikátoru	Označení	Čtení – jazykový význam
Obecný kvantifikátor	$\forall$	pro každé, pro všechna
Existenční kvantifikátor	$\exists$	existuje (alespoň jedno)
Kvantifikátor jednoznačné existence	$\exists!$	existuje právě jedno

Výrazy vytvořené z konečného počtu výrokových proměnných, logických spojek a případných závorek se nazývají **výrokové formule**. Výrokové formule, které jsou vždy pravdivé, se nazývají **tautologie**, Výrokové formule, které jsou vždy nepravdivé, se nazývají **kontradikce**. Výroky vzniklé kvantifikací všech proměnných ve výrokové formuli se nazývají **výroky s kvantifikátory**. Uvedeme si je na příkladech výroků s jednou proměnnou:

- a) **Obecný výrok** $\forall x \in R : x^2 \geq 0$...pravdivý výrok
- b) **Existenční výrok**: $\exists x \in R : x^2 = 2$...pravdivý výrok
- c) **Výrok o existenci a unicitě**: $\exists! x \in R : x^2 = 2$...nepravdivý

1.1.2. Množiny a vztahy mezi nimi

MNOŽINA je soubor libovolných navzájem rozlišitelných objektů, které mají stejnou vlastnost, vzhledem ke které jsou chápány jako jeden celek. Množinu pokládáme za určenou, je-li možno o každém objektu jednoznačně rozhodnout, zda do ní patří, či nikoliv.

Každý z objektů, který patří do množiny, se nazývá **prvek množiny**.

K označování množin se většinou používají velká písmena latinské abecedy $A, B, M, \dots$, k označování jejich prvků malá písmena $a, b, x, \dots$. Výjimkou je např. značení v geometrii.

Značení: $a \in A$ objekt a je prvkem (elementem) množiny A ,

$b \notin A$ objekt b není prvkem (elementem) množiny A .

Množina obsahující alespoň jeden prvek se nazývá neprázdná.

Množina, která neobsahuje žádný prvek se nazývá prázdná a značí se $\emptyset$.

Z hlediska počtu prvků můžeme množiny rozdělit na

konečné – mají konečný počet prvků (prázdná množina nebo množina, jejíž počet prvků je přirozené číslo). Počet prvků konečné množiny A označujeme $|A|$.

nekonečné – ty, které nejsou konečné.

Způsoby zadání množiny:

a) **výčtem prvků**, tj. vyjmenováním všech prvků množiny, např. $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Pozor! množina přirozených čísel $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ není dána výčtem prvků.

Tímto způsobem lze zadat pouze množinu konečnou.

Množina všech jednociferných přirozených čísel $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

b) charakteristickou **vlastností**, tj. vlastností, kterou mají právě jen prvky zadávané množiny

Prvky množin mohou být opět množiny. Množinu, jejímiž prvky jsou jiné množiny, nazýváme **systém množin**. Vylučuje se případ množiny, která by obsahovala jako prvek samu sebe a případ množiny všech množin.

Vztahy mezi množinami A, B

vztah	symbol	čtení symbolu	definice
Inkluze množin A a B	$A \subseteq B$	množina A je podmnožinou (částí) množiny B	A je podmnožinou B , právě když každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B
Rovnost množin A a B	$A = B$	množina A se rovná množině B	A a B jsou si rovny, právě když $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq A$
Ostrá inkluze množin A a B	$A \subset B$	množina A je vlastní podmnožinou B	A je vlastní podmnožinou B , právě když $A \subseteq B$ a zároveň $A \neq B$, $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

1.1.3. Množinové operace

Základní operace s množinami A a B

operace	symbol	definice
Sjednocení množin A a B	$A \cup B$	Sjednocení množin A a B je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin A, B .
Průnik množin A a B	$A \cap B$	Průnik množin A a B je množina všech prvků, které patří do množiny A a zároveň do množiny B .
Rozdíl množin A a B	$A - B$	Rozdíl množin A a B je množina všech prvků, které patří do množiny A a zároveň nepatří do množiny B .
Doplňek množiny A	A'_U	Doplňek množiny A je množina všech prvků z množiny U , které nepatří do množiny A .

Pro $A \subset B$ nazveme rozdíl $B - A$ **doplňkem** množiny A v množině B . Značíme A'_B .

Říkáme, že množina A je **disjunktní s množinou** B , právě když mají množiny A a B prázdný průnik ($A \cap B = \emptyset$), tj. nemají žádný společný prvek.



Řešená úloha

Příklad 1.1.1. Jsou dány intervaly $A = \langle 1; 4 \rangle$ a $B = (-2; 3)$. Určete sjednocení, průnik a rozdíl těchto intervalů.

Řešení: $A \cup B = (-2; 4 \rangle$, $A \cap B = \langle 1; 3 \rangle$; $A - B = \langle 3; 4 \rangle$; $B - A = (-2; 1)$.



**Výklad****Kartézské násobení množin**

to je vytváření kartézských součinů, představuje další operaci s množinami, avšak podstatně odlišnou od základních množinových operací.

Kartézským součinem množiny A a množiny B , který značíme $A \times B$, nazveme množinu všech uspořádaných dvojic, jejichž první člen je libovolný prvek z množiny A a druhý člen je libovolný prvek z množiny B .

$$A \times B = \{[x_i, y_j], x_i \in A, y_j \in B\}$$

Pro počet prvků kartézského součinu dvou konečných množin A s počtem prvků n a B s počtem prvků m platí: $|A \times B| = |A| \cdot |B| = n \cdot m$.

**Řešená úloha**

Příklad 1.1.2. Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$.

Vytvořte kartézský součin $A \times B$ a $B \times A$.

Řešení: $A \times B = \{[1, a], [1, b], [2, a], [2, b], [3, a], [3, b]\}$,

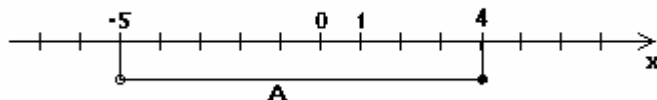
$B \times A = \{[a, 1], [a, 2], [a, 3], [b, 1], [b, 2], [b, 3]\}$.

1.1.4. Grafické znázornění množin**a) číselných**

Číselné množiny nejčastěji znázorňujeme na číselné ose, a to buď přímo na ní nebo pomocí vodorovných čar rovnoběžných s číselnou osou. Pokud číselná množina obsahuje nekonečně mnoho reálných čísel (viz dále), potom jedna z možností, jak zapsat množinu nebo její část, je **interval**, který může, ale nemusí obsahovat krajní hodnoty. Pokud krajní hodnota intervalu do množiny patří, vyznačíme tuto hodnotu plným kolečkem. Pokud do množiny nepatří, vyznačíme ji kolečkem prázdným. To, zda krajní hodnota do intervalu patří, či ne, poznáme podle uzávorkování intervalu. Špičatá závorka označuje hodnotu, která ještě do intervalu patří a kulatá závorka hodnotu, která již do intervalu nepatří.

**Řešená úloha**

Příklad 1.1.3. Je dána množina $A = \{ x \in R : x \in (-5; 4) \}$, znázorněte ji na číselné ose.

**Výklad****b) nečíselných**

Nečíselné množiny a množiny číselné, které z nějakého důvodu nelze nebo není vhodné znázornit na číselné ose, znázorňujeme pomocí tzv. **množinových diagramů**. Jedná se o grafické znázornění množiny v rovině.

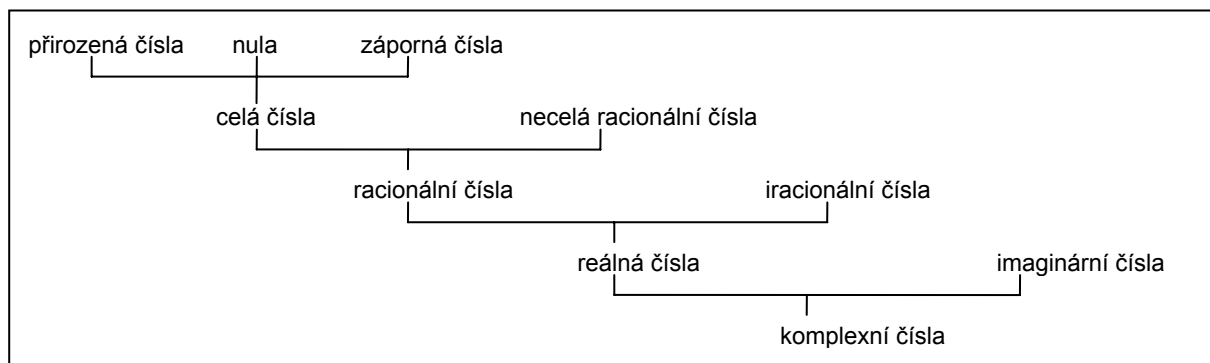
Množinové diagramy znázorňující vztahy mezi množinami a operace s množinami se nazývají **Vennovy diagramy**.

1.2. Číselné obory**Cíle**

Po prostudování této kapitoly by měl student umět bezpečně zařadit dané číslo do příslušného číselného oboru a ovládat všechny způsoby jeho zápisu, obnovit si znalosti základních vlastností početních operací a umět jich využívat, umět zobrazit reálná čísla na číselné ose.

**Výklad****1.2.1. Čísla – názvy a jejich charakteristiky**

Jeden z nejdůležitějších pojmů matematiky je pojem čísla. Pojem čísla se postupně rozšiřoval a prohluboval v souladu s potřebami vývoje lidské společnosti. Vztahy mezi jednotlivými **druhy čísel** vyjadřuje následující schéma:



Množina všech čísel určitého druhu, ve které jsou definovány bez omezení operace sčítání a násobení, se nazývá **obor čísel**.

Obvyklé označení nejdůležitějších číselných oborů :

N obor přirozených čísel $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$,

N₀ obor nezáporných celých čísel $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$,

Z obor celých čísel $\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$,

Q obor racionálních čísel $\{\dots, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{5}, \frac{12}{11}, 2 = \frac{2}{1}, \dots\}$,

R obor reálných čísel $\{\dots, -\sqrt{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{3}, \pi, \dots\}$,

C obor komplexních čísel (viz kap.4.).

Platí tyto inkluze: $\mathbf{N} \subset \mathbf{N}_0 \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

Přirozená čísla vyjadřují počet prvků konečných neprázdných množin a pořadí prvků v uspořádaných n-ticích.

Celá čísla umožňují vyjádřit nejen počty prvků konečných množin, ale i změny těchto počtů (přírůstky a úbytky).

Racionální čísla v porovnání s celými čísly, jež jsou jejich speciálním případem, dovolují navíc vyjádřit údaje o počtech dílů určitého celku. Racionální číslo je každé reálné číslo, které lze psát ve tvaru zlomku p/q , kde p je celé číslo a q je přirozené číslo.

Iracionální čísla jsou charakterizována nekonečným neperiodickým desetinným rozvojem.

Reálná čísla jsou sjednocením všech racionálních a iracionálních čísel.

Komplexními čísly se podrobně zabývá 4.kapitola Základů matematiky.

1.2.2. Charakteristiky číselných oborů

a) Obor přirozených čísel $\mathbf{N}$ je uzavřen vzhledem k operacím sčítání a násobení, tzn. výsledkem těchto operací je opět přirozené číslo.

b) Uzavřenosti vzhledem k operaci odčítání lze docílit rozšířením oboru $\mathbf{N}$ na obor $\mathbf{Z}$ celých čísel, který obsahuje přirozená čísla, nulu a celá záporná čísla.

c) Abychom docílili uzavřenosti oboru čísel vzhledem k operaci dělení (číslem různým od nuly), rozšiřuje se obor $\mathbf{Z}$ na obor racionálních čísel $\mathbf{Q}$. Obor $\mathbf{Q}$ je uzavřený vzhledem k operaci sčítání, odčítání, násobení a dělení.

d) Sjednocením racionálních a iracionálních čísel vytvoříme obor reálných čísel $\mathbf{R}$, který je uzavřený vzhledem k operacím sčítání, odčítání, násobení a dělení.

1.2.3. Základní početní operace

Použití čísel si vyžádalo zavedení početních operací, jimiž ke dvěma či více číslům přiřazujeme předepsaným způsobem jisté číslo.

Sčítání $a + b$ sčítanec + sčítanec = součet

Odčítání $a - b$ menšenec – menšitel = rozdíl

Násobení $a \cdot b$ činitel · činitel = součin

Dělení $a : b$ dělenec : dělitel = podíl

$$\frac{a}{b} \quad \frac{\text{čitatel}}{\text{jmenovatel}} = \text{podíl}$$

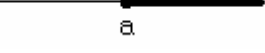
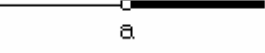
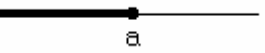
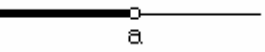
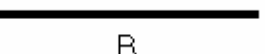
Umocňování a^n n -tá mocnina čísla a , n exponent, a základ

Odmocňování $\sqrt[n]{a}$ n -tá odmocnina čísla a

1.2.4. Intervaly

Interval je každá množina reálných čísel, jejichž obrazy na číselné ose vyplňují její souvislou podmnožinu.

Různé druhy intervalů jsou popsány v následující tabulce:

Množina všech reálných čísel x , pro která platí:	Označení	Grafické znázornění na číselné ose
$a \leq x \leq b$	$\langle a, b \rangle$	
$a < x < b$	(a, b)	
$a \leq x < b$	$\langle a, b)$	
$a < x \leq b$	$(a, b \rangle$	
$x \geq a$	$\langle a, +\infty)$	
$x > a$	$(a, +\infty)$	
$x \leq a$	$(-\infty, a \rangle$	
$x < a$	$(-\infty, a)$	
$x \in \mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$	

Číslům a, b říkáme **krajní body intervalu** nebo také **meze intervalu** (dolní a horní mez).
 Libovolný bod intervalu, který není jeho krajním bodem, se nazývá **vnitřní bod** intervalu.
 Vnitřních bodů intervalu je nekonečně mnoho.

Patří-li k intervalu obě jeho meze, nazývá se **uzavřený interval**.

Patří-li k intervalu jediná z jeho mezí, nazývá se **polouzavřený** nebo **polootvřený interval**.

Nepatří-li k intervalu žádná z jeho mezí, nazývá se **otevřený interval**.



Řešená úloha



Příklad 1.2.1. Jinak запиšte : a) $(2, 6) \cap < 4, \infty)$, b) $< 2, 6) \cup (4, 10)$, c) $(-\infty, 3) \cup (0, \infty)$.

Řešení:

a) $< 4, 6)$,

b) $< 2, 10)$,

c) $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

1.3. Algebraické výrazy

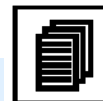


Cíle

Umět používat při úpravách algebraických výrazů vzorce uváděné v jednotlivých podkapitolách.



Výklad



Algebraický výraz je výraz (zápis) skládající se z čísel a z písmen označujících proměnné, jež jsou spojeny znaky operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování. Je-li třeba, obsahuje také závorky, které určují pořadí provádění operací.

K výrazům obsahujícím proměnné se připojuje obor proměnných. Není-li uveden, rozumí se jím obvykle číselný obor **R**.

Definičním oborem D algebraického výrazu jsou podmnožiny oborů proměnných, pro jejichž hodnoty má daný výraz smysl.

Pravidla pro stanovování definičního oboru algebraického výrazu jsou:

- a) jmenovatel musí být různý od nuly,
- b) pod sudou odmocninou nesmí být záporné číslo.

1.3.1. Polynomy (mnohočleny)

Jednočlen je výraz, který vznikne součinem konstanty a mocniny proměnné.

Polynom je součtem několika jednočlenů. Člen s nejvyšší mocninou udává **stupeň** polynomu.

Polynom n -tého stupně proměnné x může mít zápis

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ kde } a_n \neq 0.$$

Jednočlen $a_0 \neq 0$ je polynom nultého stupně, je-li roven nule, nazývá se nulovým polynomem.

Kořenem polynomu nazveme každé reálné číslo, které, po dosazení za proměnnou, daný polynom převede na polynom nulový.

Mějme kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ s podmínkou, že $b^2 - 4ac \geq 0$ a označme jeho kořeny x_1, x_2 . Pak jeho rozklad v oboru **R** bude mít tento zápis:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Je-li absolutní člen $c=0$, pak pro rozklad kvadratického dvojčlenu platí: $ax^2 + bx = x(ax + b)$.

Je-li $b=0, a>0, c>0$, pak kvadratický dvojčlen se dá rozložit takto:

$$ax^2 - c = a\left(x - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{c}{a}}\right).$$

Při úpravách algebraických výrazů používáme tyto vzorce:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

V oboru reálných čísel $\mathbb{R}$ jsou kvadratický dvojčlen $a^2 + b^2$ a kvadratické trojčleny

$a^2 \pm ab + b^2$ nerozložitelné na součin lineárních dvojčlenů.

1.3.2. Úprava racionálních lomených výrazů (vzorce a pravidla pro umocňování).

Při úpravách racionálních lomených výrazů se používají výše uvedené vzorce o rozkladu mnohočlenů a dále vzorce pro počítání se zlomky. V úlohách o úpravách lomených výrazů je nutné klást podmínky, že jmenovatel každého zlomku v původních výrazech i v upravených tvarech musí být různý od nuly.

Při úpravách výrazů budeme používat tato pravidla pro početní operace se zlomky:

rozšíření zlomku číslem $k \neq 0$: $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}, b \neq 0, k \neq 0$

krácení zlomku číslem $k \neq 0$: $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}, b \neq 0, k \neq 0$

sčítání zlomků: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}, b \neq 0, d \neq 0$

odčítání zlomků: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}, \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}, b \neq 0, d \neq 0$

násobení zlomků: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad b \neq 0, d \neq 0$

dělení zlomků: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0$

úprava složeného zlomku: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0$

umocňování: pro přirozená čísla r, s a pro reálná čísla a, b platí:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$a^r : a^s = a^{r-s}, \quad a \neq 0$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}, \quad b \neq 0$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}, \quad a \neq 0.$$



Řešené úlohy



Příklad 1.3.1 Zjednodušte algebraický výraz $\left(a + \frac{1}{b}\right)^{-2} \left(b - \frac{1}{a}\right)^{-3} \left(ab - \frac{1}{ab}\right)^2$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{1}{b}\right)^{-2} \left(b - \frac{1}{a}\right)^{-3} \left(ab - \frac{1}{ab}\right)^2 &= \left(\frac{ab+1}{b}\right)^{-2} \left(\frac{ab-1}{a}\right)^{-3} \left(\frac{a^2b^2-1}{ab}\right)^2 \\ &= \left(\frac{b}{ab+1}\right)^2 \left(\frac{a}{ab-1}\right)^3 \left(\frac{(ab-1)(ab+1)}{ab}\right)^2 = \\ &= \frac{b^2}{(ab+1)^2} \cdot \frac{a^3}{(ab-1)^3} \cdot \frac{(ab-1)^2(ab+1)^2}{a^2b^2} = \frac{a}{(ab-1)}. \end{aligned}$$

Podmínky řešitelnosti výrazu vycházejí z toho, že všechny výrazy ve jmenovatelích musí být nenulové, takže postupně dostáváme: $b \neq 0$, $a \neq 0$, $ab \neq -1$, $ab \neq 1$.

Příklad 1.3.2. Zjednodušte algebraický výraz $\frac{a^2 + a - 2}{a^4 - 3a^3} \left[\frac{(a+2)^2 - a^2}{4a^2 - 4} - \frac{3}{a^2 - a} \right]$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + a - 2}{a^4 - 3a^3} \left[\frac{(a+2)^2 - a^2}{4a^2 - 4} - \frac{3}{a^2 - a} \right] &= \frac{a^2 + a - 2}{a^3(a-3)} \left[\frac{a^2 + 4a + 4 - a^2}{4(a-1)(a+1)} - \frac{3}{a(a-1)} \right] = \\ &= \frac{a^2 + a - 2}{a^3(a-3)} \left[\frac{4(a+1)}{4(a-1)(a+1)} - \frac{3}{a(a-1)} \right] = \frac{a^2 + a - 2}{a^3(a-3)} \left[\frac{1}{(a-1)} - \frac{3}{a(a-1)} \right] = \\ &= \frac{(a+2)(a-1)}{a^3(a-3)} \frac{a-3}{a(a-1)} = \frac{a+2}{a^4} \end{aligned}$$

Podmínky řešitelnosti výrazu neboli společný definiční obor:

všechny výrazy ve jmenovateli musí být nenulové, takže postupně dostáváme:

$$a \neq 0, \quad a \neq 3, \quad a \neq 1, \quad a \neq -1.$$



Výklad



1.3.3. Úprava iracionálních algebraických výrazů (pravidla pro odmocňování)

Při úpravách iracionálních algebraických výrazů využíváme poznatků o odmocninách a mocninách s racionálními mocniteli a pravidel pro početní operace se zlomky. Podmínky, za nichž prováděné úpravy mají smysl, především vyjadřují, že základy všech sudých odmocnin musí být nezáporné a jmenovatelé zlomků se nesmějí rovnat nule.

Pravidla pro počítání s odmocninami ($a \geq 0, b \geq 0$):

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \text{pro } b \neq 0,$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N},$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}, \quad p \in \mathbb{N}.$$



Poznámka

Odmocnina ze součtu **se nerovná** součtu odmocnin!!

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$





Řešená úloha



Příklad 1.3.3.: Upravte výraz $V(x) = \frac{\sqrt{x^3}\sqrt{x^2}\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[12]{x^{11}}}$ převodem odmocnin na mocniny s racionálními exponenty.

$$\text{Řešení: } V(x) = \frac{\sqrt{x^3}\sqrt{x^2}\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[12]{x^{11}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{2}}x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{11}{12}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}}}{x^{\frac{11}{12}}} = x^{\frac{23}{12}-\frac{11}{12}} = x^{\frac{12}{12}} = x$$

za předpokladu, že $x > 0$.



Výklad



1.3.4. Absolutní hodnota reálného čísla

Každému reálnému číslu a je přiřazeno právě jedno reálné číslo $|a|$ takto:

$$|a| = a \text{ pro } a \geq 0, \quad |a| = -a \text{ pro } a < 0.$$

Toto číslo $|a|$ se nazývá **absolutní hodnota** reálného čísla a .

Některé vlastnosti absolutní hodnoty reálného čísla.

- 1) Pro $\forall a \in \mathbb{R} : |a| \geq 0, \quad |-a| = a, \quad |a| \geq a, \quad |a| \geq -a.$
- 2) Pro $\forall a, b \in \mathbb{R} : |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ pro } b \neq 0.$
- 3) Pro $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a + b| \leq |a| + |b|.$
- 4) Pro $\forall a, k \in \mathbb{R}, k > 0 : |a| < k \Leftrightarrow -k < a < k, \text{ neboli } a \in (-k, k).$
- 5) Pro $\forall a \in \mathbb{R} : \sqrt{a^2} = |a|, \quad \sqrt{a^2} = a \text{ pro } a \geq 0, \quad \sqrt{a^2} = -a \text{ pro } a < 0.$

Geometrický význam absolutní hodnoty reálných čísel: na číselné ose představuje $|a|$ vzdálenost obrazu čísla a od počátku, $|a - b|$ vzdálenost obrazů čísel a, b .

1.3.5. Rozklad kvadratického trojčlenu

Kvadratickým trojčlenem s nenulovými koeficienty a, b, c nazveme výraz $ax^2 + bx + c$.

Je-li diskriminant příslušné kvadratické rovnice $D \geq 0$ a její kořeny označíme x_1, x_2 , pak můžeme provést rozklad kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů v oboru $\mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Je-li koeficient $a = 1$, pak kvadratický trojčlen se nazývá **normovaný** s koeficienty p, q ,

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

přičemž platí $x_1 + x_2 = -p, x_1 x_2 = q$.



Řešená úloha



Příklad 1.3.4. Upravte a) $\frac{x^3 - 8}{x^2 + 5x - 14} : \frac{2x^2 + 4x + 8}{x^2 - 49}$,

b) $\frac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 25} : \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5}$.

Řešení: a) $\frac{x^3 - 8}{x^2 + 5x - 14} : \frac{2x^2 + 4x + 8}{x^2 - 49} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x + 7)(x - 2)} \cdot \frac{(x + 7)(x - 7)}{2(x^2 + 2x + 4)} = \frac{x - 7}{2},$

za podmínky, že $x \neq 2, x \neq \pm 7$.

b) $\frac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 25} : \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5} = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 5)(x + 5)} \cdot \frac{(x - 5)(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{2}{x + 5},$

za podmínky, že $x \neq \pm 5, x \neq -1$.



Poznámka

Rozkladem kvadratického trojčlenu se také zabývá kapitola 3.2. a příklady na procvičení jsou uvedeny pod číslem 2. a 4. téže kapitoly.



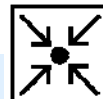
Kontrolní otázky



1. Umíte přečíst symbolická označení $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$?
2. Čeho se týkají symboly $\cup, \cap, \subset, \in, \notin$?
3. Kolik jste si zapamatovali vzorců z kap. 1.3.1.?



Úlohy k samostatnému řešení



1. Upravte a stanovte podmínky:

a) $\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{2}{a} + \frac{1}{a+b},$

b) $\left(\frac{x}{x-1} - 1\right) \frac{x^2-1}{x},$

c) $\left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2}\right) : \frac{a}{a+2},$

d) $\frac{2}{x+y} + \frac{2y}{x^2-y^2},$

e) $\frac{\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2}}{\frac{8}{4-x^2}},$

f) $\frac{2x^2-2x+2}{x^2-25} : \frac{x^3+1}{x^2-4x-5}.$

2. Zjednodušte v $\mathbf{R}$ daný výraz s mocninami:

a) $\left(\frac{2x}{3a}\right)^3 \left(\frac{9a}{2x}\right)^2,$

b) $(3x^2y^{-3}z^{-5})^{-3} : (27x^3y^{-2}z)^{-2},$

c) $\left[\left(a^3b\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} : \left[\left(a^3b^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}},$

d) $\frac{\sqrt[12]{a^5b^6}\sqrt[5]{b^{-1}}}{a^{\frac{-3}{4}}b^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{a^2}},$

e) $\sqrt{a^3b} : \sqrt[3]{b^{-1}\sqrt{a^3}},$

f) $\left(\sqrt[3]{\frac{x\sqrt{x}}{x^{-2}}} : \sqrt{\frac{x^{-3}\sqrt{x}}{x^2}}\right)^{-1} \sqrt{\frac{x^{-3}\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}}.$



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $\frac{-3b}{a(a+b)}, a \neq 0, a \neq -b,$

b) $\frac{x+1}{x}, x \neq 0, x \neq 1,$

c) $\frac{2}{a-2}, a \neq 0, a \neq \pm 2,$

d) $\frac{2x}{x^2-y^2}, x \neq \pm y,$

e) $-x, x \neq \pm 2,$

f) $\frac{2}{x+5}, x \neq -1, x \neq \pm 5.$

2. a) $\frac{6x}{a}, a \neq 0, x \neq 0,$

b) $27y^5z^{17}, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0,$

c) $\sqrt{b}, a > 0, b > 0,$

d) $\sqrt{a}, a > 0, b > 0,$

e) $\sqrt{b}, a > 0, b > 0,$

f) $x^{-5}, x > 0.$



Klíč k řešení úloh



Ve všech příkladech je uveden jen postup úpravy algebraických výrazů bez podmínek.

1.

$$a) \frac{a-b}{a(a+b)} - \frac{2}{a} + \frac{1}{a+b} = \frac{a-b-2(a+b)+a}{a(a+b)} = \frac{a-b-2a-2b+a}{a(a+b)} = \frac{-3b}{a(a+b)},$$

$$b) \frac{x-(x-1)}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x} = \frac{(x-x+1)(x+1)}{x} = \frac{x+1}{x},$$

$$c) \frac{a-2+a+2}{(a+2)(a-2)} \cdot \frac{a+2}{a} = \frac{2a}{a-2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{2}{a-2},$$

$$d) \frac{2(x-y)+2y}{(x+y)(x-y)} = \frac{2x-2y+2y}{x^2-y^2} = \frac{2x}{x^2-y^2},$$

$$e) \frac{(x+2)^2-(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} : \frac{8}{4-x^2} = \frac{x^2+4x+4-x^2+4x-4}{x^2-4} \cdot \frac{4-x^2}{8} = \frac{8x}{-(4-x^2)} \cdot \frac{4-x^2}{8} = -x,$$

$$f) \frac{2(x^2-x+1)}{(x+5)(x-5)} \cdot \frac{(x-5)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{2}{x+5}.$$

2.

$$a) 2^3 x^3 3^{-3} a^{-3} 3^4 a^2 2^{-2} x^{-2} = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot a^{-1} = \frac{6x}{a},$$

$$b) 3^{-3} x^{-6} y^9 z^{15} \cdot (3^3 x^3 y^{-2} z)^2 = 3^{-3} x^{-6} y^9 z^{15} 3^6 x^6 y^{-4} z^2 = 3^3 x^0 y^5 z^{17} = 27 y^5 z^{17},$$

$$c) (a^3 b)^{\frac{1}{6}} \cdot (a^3 b^{-2})^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{6}} a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b},$$

$$d) a^{\frac{5}{12}} b^{\frac{5}{6}} b^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{4}} b^{-\frac{1}{3}} a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{5+9-8}{12}} b^{\frac{5-3-2}{6}} = a^{\frac{6}{12}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a},$$

$$e) (ab^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} : (b^{-1} a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{6}} (b^{-1} a^{\frac{3}{2}})^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{2}} = a^0 b^{\frac{1+2}{6}} = b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b},$$

$$f) \left(\sqrt[3]{xx^{\frac{1}{2}}x^2} : \sqrt{x^{-3}x^{\frac{1}{2}}x^{-2}} \right)^{-1} \sqrt{x^{-3}x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}} = \left(\sqrt[3]{x^{\frac{2+1+4}{2}}} : \sqrt{x^{\frac{-6+1-4}{2}}} \right)^{-1} \sqrt{x^{\frac{-18+3-4}{6}}} =$$

$$\left(x^{\frac{7}{6}} \right)^{-\frac{1}{3}} \left(x^{\frac{9}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(x^{-\frac{19}{6}} \right)^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{7}{6} - \frac{9}{4} + \frac{19}{12}} = x^{-\frac{14-27+19}{12}} = x^{-\frac{60}{12}} = x^{-5}.$$



Kontrolní test



- Rozhodněte o pravdivosti výroku : $\{ \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x| \}$.
a) výrok je pravdivý, b) výrok je nepravdivý, c) není to výrok.
- Výčtem prvků запиšte množinu $C = \{ x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x < 2 \}$.
a) $C = \{-1, 0, 1\}$, b) $C = \{-1, 0, 1, 2\}$, c) $C = \{-1, 1, 2\}$.
- Doplňěk množiny $\{x \in \mathbb{R} : -3 < x \leq 5\}$ v $\mathbb{R}$ запиšte jako sjednocení dvou intervalů.
a) $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$, b) $(-\infty; -3) \cup (-3; 5)$,
c) $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$, d) $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$.
- Proveďte rozklad kvadratického polynomu $2x^2 - 5x + 2$.
a) $(x-2)(x-1)$, b) $(2x-1)(x-2)$, c) $(2x+1)(x-2)$, d) $(2x-1)(x+2)$.
- Proveďte úplný rozklad polynomu $4x^3 - 64x$.
a) $x(x-4)(x-4)$, b) $4(x+4)(4-x)$, c) $4x(x-4)(x+4)$, d) $4(x+4)(x+4)$.
- Sestavte normovaný kvadratický trojčlen, jestliže známe kořeny: $x_1 = 8$, $x_2 = -3$.
a) $x^2 - 5x - 24$, b) $x^2 + 5x - 24$, c) $x^2 - 5x + 24$, d) $x^2 - 11x - 24$.
- Použitím pravidel pro počítání s mocninami a odmocninami vypočtete:

$$\left[\left(2^2 \cdot \frac{1}{3} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}} : \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 3^2 \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2$$

a) $\frac{4}{9}$, b) 12, c) 36, d) $\frac{9}{4}$.
- Zjednodušte a uveďte podmínky, za jakých má daný výraz smysl. Výsledek запиšte ve tvaru odmocniny.

$$\left(\frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x}}{x^{-1} \sqrt{x}} \right)^3.$$

a) $\sqrt{x^7}$, $x \neq 0$, $x > 0$,

b) $\sqrt[3]{x^2}$, $x > 0$,

c) $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $x \neq 0$, $x > 0$.

9. Zjednodušte algebraický výraz a uveďte podmínky řešitelnosti:

$$\left(1 - \frac{2}{1-3x}\right) \left(1 - \frac{9x-9x^2}{3x+1}\right) : (1-9x^2).$$

a) $(3x+1)^{-1}$, $x \neq -\frac{1}{3}$,

b) $\frac{-1}{3x+1}$, $x \neq \frac{1}{3}$,

c) $\frac{-1}{3x+1}$, $x \neq \pm \frac{1}{3}$.

10. Zjednodušte algebraický výraz a uveďte podmínky řešitelnosti:

$$\frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}} : \frac{(1-b)^2}{2b^2-b^3-b}.$$

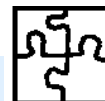
a) $2a$, $a \neq \pm b$, $b \neq 0$, $b \neq 1$,

b) $-2a$, $a \neq \pm b$,

c) $2a$, $a \neq \pm b$, $b \neq 0$.



Výsledky testu



1a); 2a); 3d); 4b); 5c); 6a); 7a); 8a); 9c); 10a).



Shrnutí lekce



Na testu jste si ověřili, zda vaše znalosti jsou výborné (100%), dostatečné (80%) nebo si potřebujete ještě vše znovu zopakovat a odstranit nedostatky při zvládnutí uváděných příkladů. Znovu si projděte řešené příklady a podle nich si propočítejte úlohy k samostatnému řešení. Základní znalosti a početní dovednosti, které vycházejí z vyřešení co největšího počtu úloh, jsou zárukou úspěšného studia na VŠ technického směru. Další příklady k procvičování najdete v kterékoliv sbírce matematiky pro střední školy.

Podrobnější výklad pojmů z matematické logiky a teorie množin najdete v 1.kapitole předmětu Matematika I nebo v některé z učebnic matematiky pro gymnázia.

2. FUNKCE	30
2.1. Funkce	31
2.2. Základní vlastnosti	33
2.2.1. Ohraničená a neohraničená funkce	33
2.2.2. Monotónnost funkce, funkce rostoucí a klesající	34
2.2.3. Prostá funkce	36
2.2.4. Sudá a lichá funkce	37
2.2.5. Periodická funkce	39
2.2.6. Inverzní funkce	40
Úlohy k samostatnému řešení	41
2.3. Definiční obory	42
Úlohy k samostatnému řešení	44
2.4. Konstantní funkce	44
Výklad	44
2.5. Lineární funkce	45
Úlohy k samostatnému řešení	45
2.6. Kvadratické funkce	46
Úlohy k samostatnému řešení	50
2.7. Lineární lomená funkce	51
2.7.1. Nepřímá úměrnost	51
2.7.2. Lineární lomená funkce	53
Úlohy k samostatnému řešení	53
2.8. Mocninné funkce	54
2.9. Exponenciální funkce	56
Úlohy k samostatnému řešení	58
2.10. Logaritmická funkce	59
2.11. Goniometrické funkce	63
2.11.1. Velikost úhlu – oblouková a stupňová míra	64
2.11.2. Funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens	64
Úlohy k samostatnému řešení	73
2.11.3. Goniometrické vzorce	73
Úlohy k samostatnému řešení	75
Výsledky úloh k samostatnému řešení	75
Klíč k řešení úloh	75
Kontrolní otázky	82
Kontrolní test	83
Výsledky testu	83

2. FUNKCE



Průvodce studiem



Kapitola *Funkce* je rozdělena do devíti menších celků a ty jsou ještě dále rozděleny na menší oddíly. V každém oddíle je nejdříve vysvětlena teorie, jsou zavedeny nové pojmy a vzorce. Pak následují *Řešené úlohy*. V *Úlohách k samostatnému řešení* si prověříte získané vědomosti. K těmto úlohám jsou na konci kapitoly uvedeny výsledky a pro ty, kteří by si s úlohami nevěděli rady, také nápověda. Na samý závěr se otestujete, jak jste zvládli tuto kapitolu. Grafy v textu byly vytvořeny pomocí programu Matematika. Hodně zdaru při studiu.



Cíle



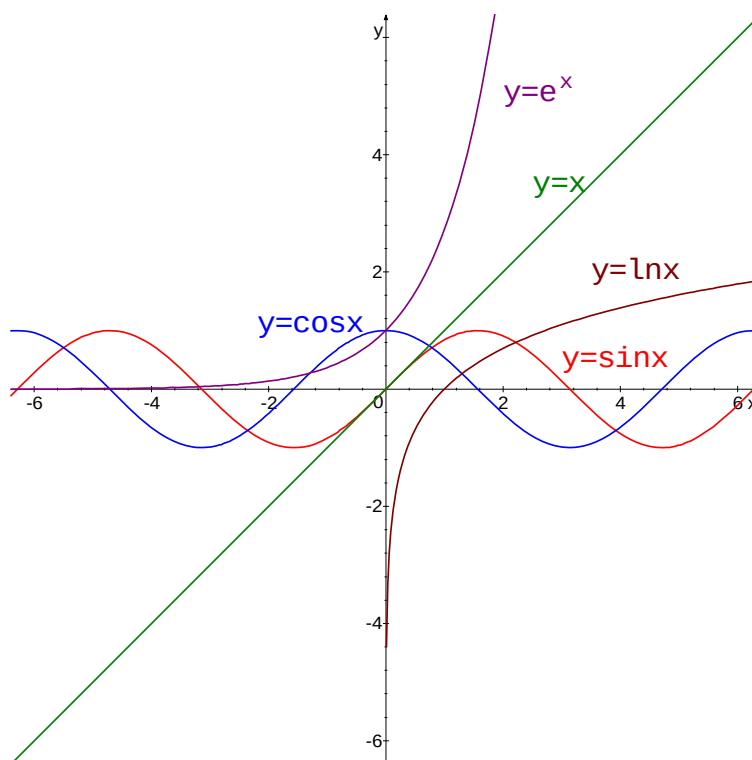
Seznámíte se s elementárními funkcemi, poznáte jejich definiční obory a obory hodnot, budete umět nakreslit jejich grafy. Budete umět určit vlastnosti funkcí. Grafy elementárních funkcí, s nimiž budete pracovat, jsou vykresleny na úvodním obrázku.



Předpokládané znalosti



Umíte řešit nerovnice metodou nulových bodů, kterou si můžete zopakovat v 3. kapitole, a také umíte pracovat s kartézskou soustavou souřadnic Oxy v rovině.



2.1. Funkce



Výklad



Funkce f na množině $A \subset \mathbf{R}$ je předpis, který každému číslu z množiny A přiřadí právě jedno reálné číslo. Množina A se nazývá **definiční obor funkce**.

Označení $D(f), D_f$.

Obor hodnot funkce f je množina všech $y \in \mathbf{R}$, ke kterým existuje aspoň jedno x z definičního oboru funkce f tak, že $y = f(x)$.

Označení $H(f), H_f$.

$y = f(x)$ je **funkční předpis** vyjadřující závislost y na x .

x je **nezávisle** proměnná, nebo také používáme označení **argument**, vybíráme ji z $D(f)$.

y je **závisle** proměnná, $y \in H(f)$.

Hodnotu funkce f v bodě x_0 označíme $f(x_0) = y_0$ a nazývá se **funkční hodnota** funkce f v x_0 .



Řešené úlohy



Příklad 2.1.1. Zapište funkci, která vyjadřuje závislost

- a) obvodu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku na délce a jeho odvěsny,
- b) obvodu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku na délce c jeho přepony.

Řešení:

a) přepona $c = a\sqrt{2}$,

obvod trojúhelníku $o = 2a + c = 2a + a\sqrt{2} = a(2 + \sqrt{2})$,

$o = (2 + \sqrt{2})a$, $a \in (0, \infty)$.

b) $c = a\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{c}{\sqrt{2}}$, $o = 2a + c = 2\frac{c}{\sqrt{2}} + c = c(\sqrt{2} + 1)$,

$o = (\sqrt{2} + 1)c$, $c \in (0, \infty)$.



Výklad



Graf funkce f ve zvolené soustavě souřadnic Oxy je množina všech bodů $X[x, f(x)]$, kde x patří do definičního oboru funkce f . Ve skutečnosti nakreslíme (načrtneme) jen část grafu na zvoleném intervalu $I \subset D(f)$.



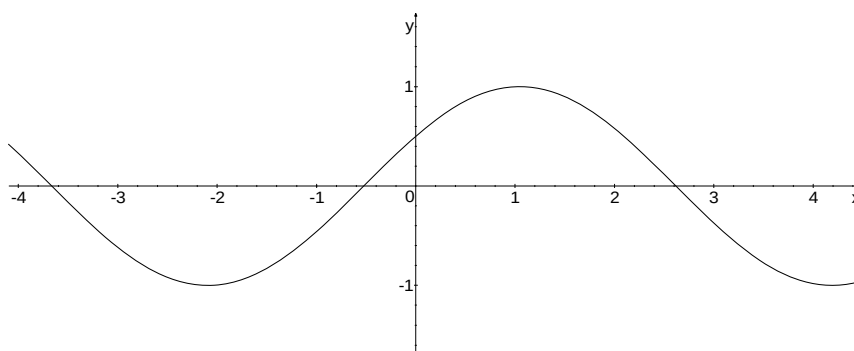
Řešené úlohy



Příklad 2.1.2. Rozhodněte, která z množin bodů na uvedeném obrázku je grafem funkce.

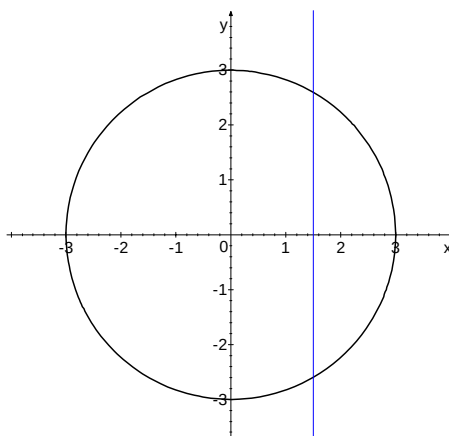
Svá tvrzení zdůvodněte

a)



Řešení: Toto je graf funkce, každému x přísluší jediné y . Každá přímka rovnoběžná s osou y danou množinu bodů protne nejvýše v jednom bodě.

b)



Řešení: V tomto případě se o graf funkce nejedná, pro $x = 1,5$ nacházíme dvě hodnoty. Tato situace je stejná pro všechna $x \in (-3, 3)$, každá přímka rovnoběžná s osou y protne danou množinu bodů ve dvou různých bodech.

2.2. Základní vlastnosti

2.2.1. Ohraničená a neohraničená funkce



Výklad



Funkce f se nazývá **ohraničená shora** na množině M , existuje-li takové číslo h , že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq h$.

Funkce f se nazývá **ohraničená zdola** na množině M , existuje-li takové číslo d , že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq d$.

Funkce f je **ohraničená** na množině M , je-li v ní ohraničená shora i zdola.

V opačném případě se funkce f nazývá **neohraničená** na množině M .

Geometrický význam ohraničenosti funkce.

Je-li funkce $y = f(x)$ na množině $M \subseteq D(f)$ ohraničená shora, leží její graf pro každé číslo $x \in M$ stále pod přímkou $y = h$ nebo na ní.

Je-li funkce $y = f(x)$ na množině $M \subseteq D(f)$ ohraničená zdola, leží její graf pro každé číslo $x \in M$ stále nad přímkou $y = d$ nebo na ní.

Je-li funkce $y = f(x)$ na množině $M \subseteq D(f)$ ohraničená, leží její graf pro každé číslo $x \in M$ stále mezi přímkami $y = h$ a $y = d$ nebo na nich.

Věta 2.2.1. Funkce f je na množině $M \subseteq R$ ohraničená, právě když existuje taková konstanta $K \geq 0$, že pro $\forall x \in M$ platí $|f(x)| \leq K$.



Řešená úloha



Příklad 2.2.1. Dokažte, že funkce $y = \frac{x}{(1+x^2)}$ je pro všechna $x \in R$ ohraničená.

Řešení: Protože pro $\forall x \in R$ platí nerovnost $(x \pm 1)^2 \geq 0$ neboli $x^2 + 1 \geq 2|x|$,

dostáváme odtud $\frac{x^2 + 1}{|x|} \geq 2 \Rightarrow \frac{|x|}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$. Platí tedy pro $\forall x \in R$: $\left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2}$.

Podle věty 2.2.1. je daná funkce ohraničená, $K = \frac{1}{2}$.

2.2.2. Monotónnost funkce, funkce rostoucí a klesající



Výklad



Je dána funkce f a interval I , který je částí jejího definičního oboru ($I \subset D(f)$).

Funkce f se nazývá **rostoucí na intervalu I** , právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:

Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **klesající na intervalu I** , právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:

Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **neklesající na intervalu I** , právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:

Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **nerostoucí na intervalu I** , právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:

Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Tyto funkce na I se souhrnně nazývají **monotónní funkce** na $I \subset D(f)$, rostoucí a klesající funkce na I se souhrnně nazývají **ryze monotónní funkce** na $I \subset D(f)$.

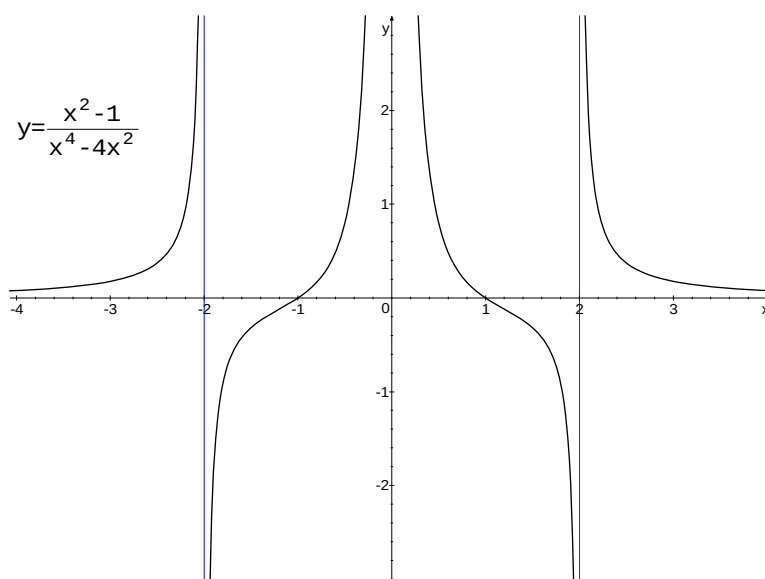
Z definice je zřejmé, že každá rostoucí funkce je zároveň neklesající na I a každá klesající funkce je zároveň nerostoucí na I .



Řešené úlohy

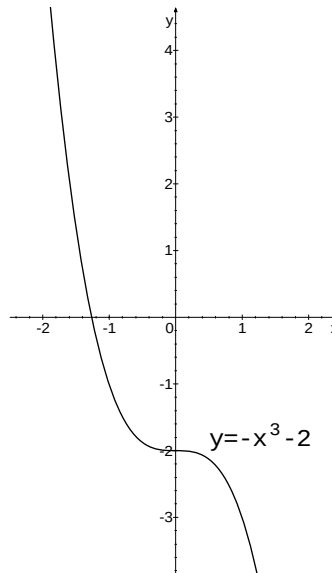
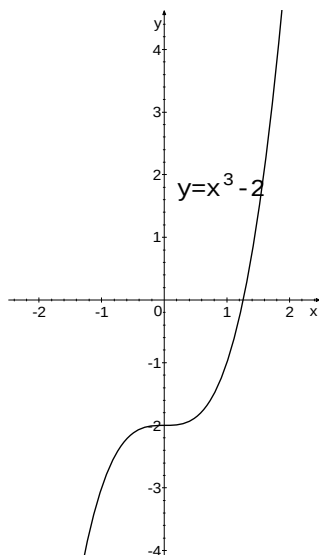


Příklad 2.2.1. Z grafu rozhodněte, kde je funkce rostoucí a kde klesající.



Řešení: Funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -2)$ a $(-2, 0)$, na intervalech $(0, 2)$ a $(2, \infty)$ klesá.

Příklad 2.2.2. Která z funkcí f_1, f_2 je rostoucí a která klesající na $D(f)$?



Řešení:

Definiční obor obou funkcí $D(f) = \mathbb{R}$.

Z grafů těchto funkcí lze vyčíst, že rostou-li hodnoty proměnné x , rostou hodnoty funkce f_1 a klesají hodnoty funkce f_2 . Pro libovolná $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, pro která platí $x_1 < x_2$ dostaneme:

$$x_1^3 - 2 < x_2^3 - 2,$$

$$f_1(x_1) < f_1(x_2),$$

$$-x_1^3 - 2 > -x_2^3 - 2,$$

$$f_2(x_1) > f_2(x_2).$$

Pro ilustraci zvolíme čísla $x_1 = -1, x_2 = 1$ a dosadíme do nerovnic funkčních hodnot

$$-3 < -1$$

$$1 > -3$$

Funkce f_1 je příkladem rostoucí funkce a f_2 je příkladem klesající funkce na $\mathbb{R}$.

2.2.3. Prostá funkce

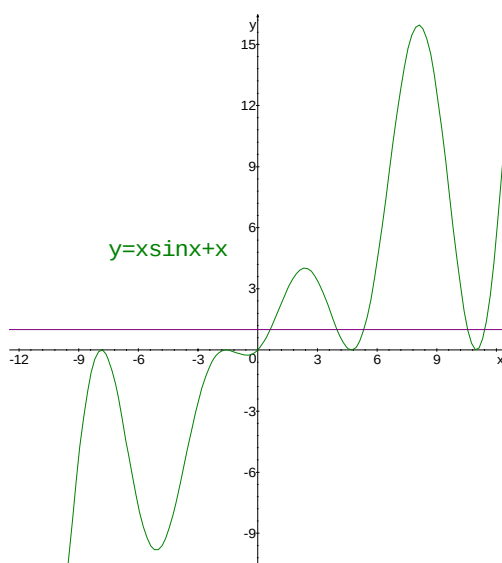
Výklad

Funkce se nazývá **prostá**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:

Je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

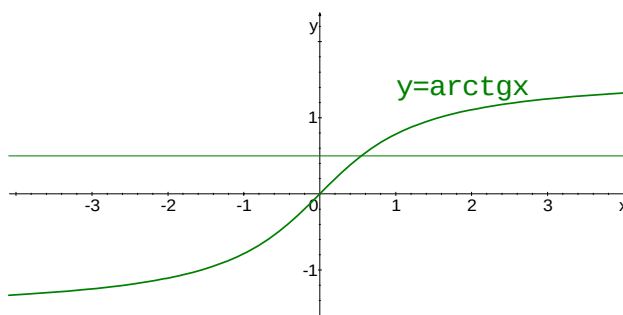
Řešené úlohy

Příklad 2.2.3. Z grafu rozhodněte, zda je funkce prostá.



Řešení: Funkce není prostá, pro různá x existují stejné funkční hodnoty.

Příklad 2.2.4. Z grafu rozhodněte, zda je funkce prostá.



Řešení: Funkce je prostá, platí podle definice, že pro $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Funkce rostoucí nebo klesající na celém definičním oboru je prostá.

2.2.4. Sudá a lichá funkce



Výklad



Funkce f se nazývá **sudá**, právě když zároveň platí:

1. Pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$.
2. Pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = f(x)$.

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y .

Funkce f se nazývá **lichá**, právě když zároveň platí:

1. Pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$.
2. Pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = -f(x)$.

Graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic Oxy .

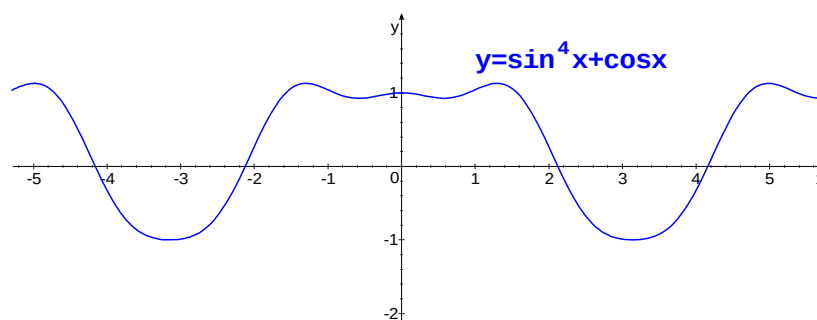
Není-li splněna ani jedna z uvedených podmínek, není funkce ani sudá ani lichá.



Řešené úlohy

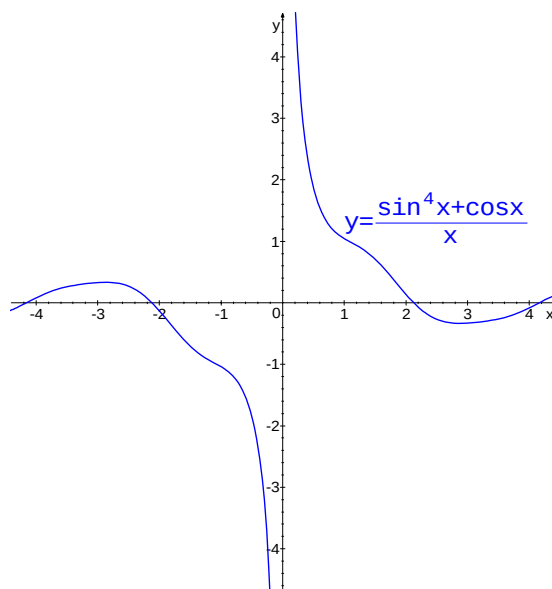


Příklad 2.2.5. Z grafu určete, zda je funkce lichá nebo sudá na intervalu $(-5, 5)$.



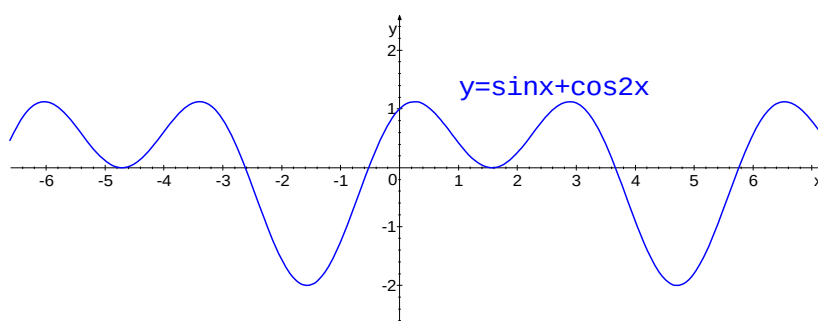
Řešení: Funkce je sudá, její graf je souměrný podle osy y .

Příklad 2.2.6. Z části grafu určete, zda je funkce lichá nebo sudá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.



Řešení: Funkce je na $D(f)$ lichá, její graf je souměrný podle počátku.

Příklad 2.2.7. Z grafu určete, zda je v intervalu $(-6, 6)$ funkce lichá nebo sudá.



Řešení: Funkce není ani sudá ani lichá.

Příklad 2.2.8. Rozhodněte, zda je funkce sudá či lichá: $y = 3x^2 - \frac{x^4 - 5}{x^2}$.

Řešení: 1. $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $\forall x \in D(f) \Rightarrow (-x) \in D(f)$.

$$2. f(-x) = 3(-x)^2 - \frac{(-x)^4 - 5}{(-x)^2} = 3x^2 - \frac{x^4 - 5}{x^2} = f(x)$$

Funkce $y = 3x^2 - \frac{x^4 - 5}{x^2}$ je sudá.

2.2.5. Periodická funkce



Výklad



Funkce se nazývá **periodická**, právě když existuje takové číslo $p > 0$, že pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí následující podmínky:

Je-li $x \in D(f)$, pak $x + kp \in D(f)$ a platí $f(x + kp) = f(x)$.

Číslo p se nazývá **perioda funkce** f .

Pokud v množině čísel p existuje nejmenší kladné číslo, pak tuto periodu $p > 0$ nazýváme základní (primitivní) periodou funkce f .

Graf periodické funkce se pravidelně (periodicky) opakuje po intervalech, jejichž délka je rovna základní periodě p .

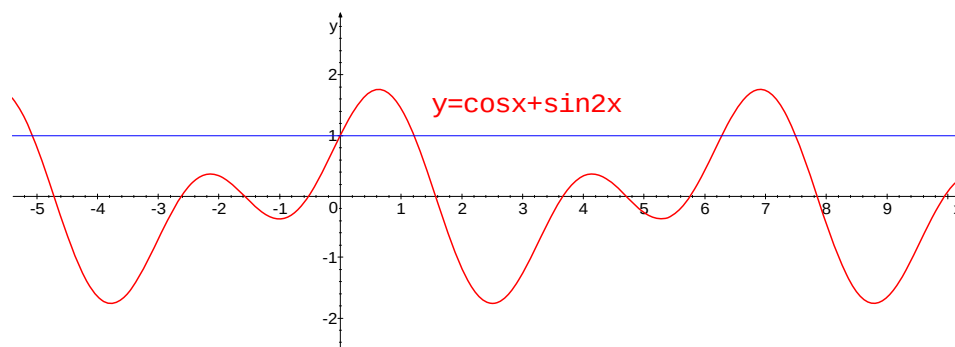
Nejvýznamnější periodické funkce jsou goniometrické funkce (kap. 2.11.)



Řešené úlohy



Příklad 2.2.9. Z grafu periodické funkce odhadněte její primitivní periodu.



Řešení: Primitivní perioda je zřejmě $p = 2\pi$.

2.2.6. Inverzní funkce

Výklad

Inverzní funkce k prosté funkci $f(x)$ je f^{-1} , která každému $y \in H(f)$ přiřadí právě to $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$.

Označení proměnných můžeme volit libovolně, a protože je obvyklé značit závisle proměnnou x a nezávisle proměnnou y , zaměňujeme označení proměnných. Důsledkem toho je, že $D(f^{-1}) = H(f)$ (a $H(f^{-1}) = D(f)$). Proto grafy obou funkcí jsou souměrné podle osy I. a III. kvadrantu $y = x$.

Platí také, že inverzní funkce k rostoucí funkci je také rostoucí a inverzní funkce ke klesající funkci je klesající.

Řešené úlohy

Příklad 2.2.10. Dokažte, že funkce $f: y = 2x + 1, x \in \mathbb{R}$, je rostoucí (a tedy prostá).

Určete funkci k ní inverzní f^{-1} .

Řešení: Je zřejmé, že oborem hodnot $H(f) = \mathbb{R}$

Funkce f je rostoucí, neboť pro $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ platí:

je-li $x_1 < x_2$, pak je $2x_1 + 1 < 2x_2 + 1$, takže $f(x_1) < f(x_2)$.

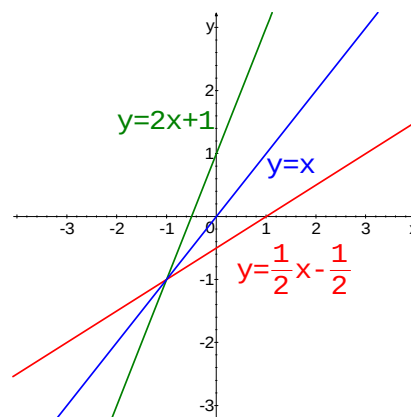
Funkce je rostoucí, tedy prostá, a proto k ní existuje funkce inverzní f^{-1} , která je také rostoucí. Její funkční předpis určíme tak, že z rovnice $y = 2x + 1$ vyjádříme x :

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}, \quad y \in \mathbb{R}$$

a po záměně proměnných máme

funkční předpis pro funkci inverzní

$$f^{-1}: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad D(f^{-1}) = H(f) = \mathbb{R}.$$



Příklad 2.2.11. Dokažte, že funkce $f : y = \sqrt{x} + 2, x \in < 0, \infty)$, je rostoucí (a tedy prostá).

Určete funkci k ní inverzní f^{-1} .

Řešení: Je zřejmé, že oborem hodnot $H(f) = < 2, \infty)$

Funkce f je rostoucí, neboť pro $\forall x_1, x_2 \in R$ platí:

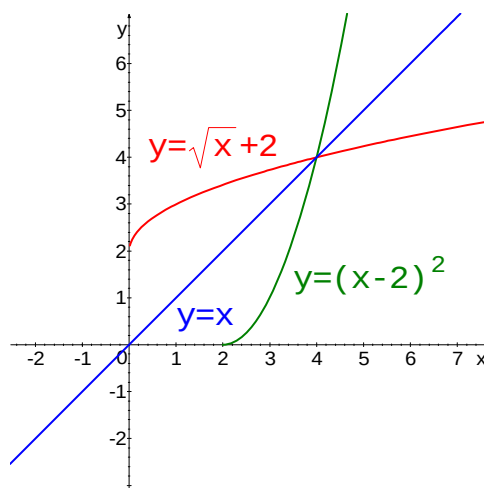
je-li $x_1 < x_2$, pak je $\sqrt{x_1} + 2 < \sqrt{x_2} + 2$, takže $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce je rostoucí, tedy prostá, a proto k ní existuje funkce inverzní f^{-1} , která je také rostoucí. Její funkční předpis určíme tak, že z rovnice $y = \sqrt{x} + 2$ vyjádříme x :

$$x = (y - 2)^2, \quad y \in < 2, \infty).$$

Po záměně proměnných máme funkční předpis pro inverzní funkci

$$f^{-1} : y = (x - 2)^2, \quad D(f^{-1}) = < 2, \infty), \quad H(f^{-1}) = < 0, \infty).$$



Úlohy k samostatnému řešení



1. Rozhodněte, zda je funkce sudá či lichá:

a) $y = 3x^3 - \frac{x^4 + 2x - 5}{x - 2}$, b) $y = -\frac{x - 5x^3}{x^2}$, c) $y = x(\cos x - x \sin x)$,

d) $y = x \ln 2^x$, e) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, f) $y = x(x^3 - x^2 \sin x)$,

g) $y = x^2 + 2x - 5$.

2.3. Definiční obory



Výklad



Funkci f považujeme za definovanou, je-li známo pravidlo, kterým je každému číslu $x \in D$ přiřazena příslušná jediná hodnota $f(x) \in H$, tj. je-li dán předpis, kterým je toto přiřazení jednoznačně určeno. Tento předpis může být vyjádřen tabelárně (příslušnou tabulkou), graficky nebo analyticky..

Tabelární způsob definování funkce se vyskytuje v technických vědách velmi často, zvláště hledáme-li experimentálně funkční závislost mezi dvěma uvažovanými veličinami. Výhodou tohoto vyjádření je to, že z něho můžeme vyčíst hodnoty funkce v tabelovaných hodnotách argumentu. Jeho velkou nevýhodou však je, že obvykle neobsahuje hodnoty funkce ve všech potřebných hodnotách argumentu. Dalším nedostatkem tabelárního vyjádření je i to, že si při něm nemůžeme učinit bližší představu o povaze funkční závislosti mezi argumentem a závisle proměnnou. Proto se obvykle snažíme vyjádřit tuto závislost graficky nebo (přibližným) analytickým vzorcem.

Výhodou grafického způsobu zadání funkce je názornost, neboť podle grafu funkce si obvykle uděláme jasnou představu o povaze funkční závislosti. Jeho nevýhodou je, že vyjadřuje funkční hodnoty jen přibližně a nedovoluje vyšetřovat vlastnosti funkcí metodami matematické analýzy.

Analytický způsob definování funkce (funkčním předpisem) je nejvýznamnějším způsobem vyjádření funkce. Jeho předností je, že použitím metod matematické analýzy můžeme zkoumat vlastnosti uvažované funkce. Určitým nedostatkem analytického vyjádření je, že postrádá názornost grafického vyjádření. Proto často používáme k snadnějšímu a názornějšímu výkladu vlastností uvažované funkce i jejího grafického, popř. tabelárního vyjádření.

Je-li funkce zadaná funkčním předpisem $y = f(x)$ a není-li zároveň uveden definiční obor funkce, pak se jím rozumí nejširší možný obor, v němž má výraz $f(x)$ smysl.

Ve funkčním předpisu nás budou zajímat následující možnosti:

- Je-li ve funkčním předpisu zlomek, jmenovatel musí být různý od nuly.
- Je-li ve funkčním předpisu odmocnina se sudým odmocnitelem, výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule (nezáporný).
- Je-li ve funkčním předpisu logaritmus, jeho argument musí být větší než nula (kladný).

- Je-li ve funkčním předpisu tangens, $\left(\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\right)$, musí být jmenovatel, tedy $\cos x$, nenulový.
- Je-li ve funkčním předpisu kotangens, $\left(\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\right)$, musí být jmenovatel, tedy $\sin x$, nenulový.



Řešené úlohy



Příklad 2.3.1. Určete definiční obor funkce $y = \frac{x-1}{x^2-4}$.

Řešení:

$$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2, x \neq -2.$$

$$D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty) \text{ nebo zápis } D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}.$$

Příklad 2.3.2. Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{\frac{x+10}{x^2+2}}$.

Řešení:

$$\frac{x+10}{x^2+2} \geq 0 \wedge x^2+2 \neq 0 \text{ druhá podmínka platí vždy a také } x^2+2 > 0 \text{ vždy platí.}$$

$$\text{Stačí tedy vyřešit nerovnici } x+10 \geq 0 \Rightarrow x \geq -10.$$

$$D(f) = \langle -10, \infty \rangle.$$

Příklad 2.3.3. Určete definiční obor funkce $y = \log(3x-5)$.

Řešení:

$$3x-5 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{3} \Rightarrow D(f) = \left(\frac{5}{3}, \infty\right).$$

Příklad 2.3.4. Určete definiční obor funkce $y = \operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{3})$.

Řešení: $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) \neq 0 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \left| + \frac{\pi}{3} \right.$
 $2x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi \quad | :2, \text{ takže } x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 $D(f) = \mathbb{R} - \{ \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \} \text{ pro } \forall k \in \mathbb{Z}.$

Příklad 2.3.5. Určete definiční obor funkce $y = \operatorname{cotg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$.

Řešení: $\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \quad \left| + \frac{\pi}{4} \right.$
 $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \quad | \cdot 2, \text{ takže } x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$
 $D(f) = \mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \} \text{ pro } \forall k \in \mathbb{Z}.$



Úlohy k samostatnému řešení



2. Určete definiční obor funkce:

a) $y = \ln \frac{2-x}{2+x}$, b) $y = \ln \ln x$, c) $y = \sqrt[4]{\frac{9-x^2}{2+x}}$,
d) $y = \operatorname{cotg} 3x$, e) $y = 2^{\frac{2+x}{3-x}}$, f) $y = \ln(x^2 - 2x)$.

2.4. Konstantní funkce



Výklad



Konstantní funkce je každá funkce na množině $\mathbb{R}$, která je dána předpisem $y = c$.

Definičním oborem jsou všechna reálná čísla, obor hodnot je roven konstantě c .

Grafem je přímka rovnoběžná s osou x procházející bodem $[0, c]$, funkce není prostá.

2.5. Lineární funkce



Výklad



Lineární funkce je každá funkce na množině $\mathbf{R}$, která je dána předpisem $y = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbf{R}$, a, b konstanty.

Definičním oborem a oborem hodnot jsou všechna reálná čísla.

Grafem lineární funkce je přímka různoběžná s osou y . Každá přímka, která není rovnoběžná s osami x, y je grafem nějaké lineární funkce. K sestrojení grafu nám tedy stačí 2 různé body.

- $a > 0$ funkce je rostoucí na $\mathbf{R}$, je prostá
- $a < 0$ funkce je klesající na $\mathbf{R}$, je prostá
- $b = 0$, $y = ax$ přímá úměrnost – graf funkce prochází počátkem soustavy souřadnic

Příklad užití lineární funkce ve fyzice:

Přímá úměrnost mezi zrychlením a hmotného bodu o konstantní hmotnosti m a velikosti působící síly F , $F = ma$.



Řešená úloha



Příklad 2.5.1. Nakreslete graf funkce $y = \frac{4}{3}x - 1$.

Řešení: Nejprve najdeme dva různé body grafu funkce:

Všimněte si, v zadání funkce je $b = -1$,

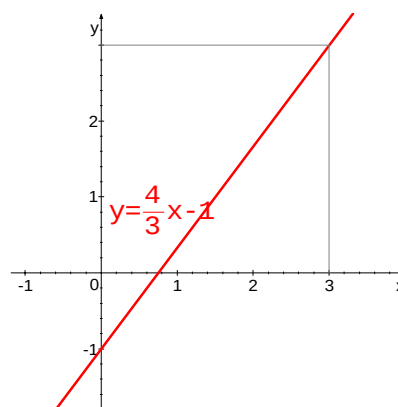
tzn. graf protíná osu y v bodě $[0, -1]$.

Další bod grafu zjistíme dosazením $x = 3$,

pak $y = 3$.

Body $[0, -1]$ a $[3, 3]$ spojíme

a výsledná přímka je grafem dané funkce.



Úlohy k samostatnému řešení



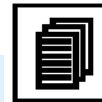
3. Nakreslete graf lineární funkce: a) $y = ax + 2$ pro $a = 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$,

b) $y = 2x + b$ pro $b = 1, -3, 4, -2, \frac{1}{2}, -1$.

2.6. Kvadratické funkce



Výklad



Kvadratickou funkcí rozumíme každou funkci na množině $\mathbb{R}$, která je dána předpisem $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$.

Definičním oborem jsou všechna reálná čísla. Obor hodnot se liší podle zadání.

Grafem kvadratické funkce je parabola, jejíž osa je rovnoběžná s osou y .

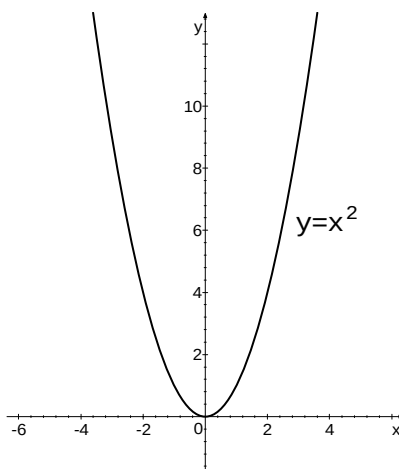


Řešené úlohy

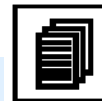


Příklad 2.6.1. Nakreslete graf funkce $y = x^2$.

Řešení: Vrchol paraboly je bod $V[0,0]$, osa paraboly je v ose y a vrcholová tečna paraboly je osa x . Další body si můžeme určit tabulkou.



Výklad



Všechny paraboly, které mají $a = 1$, mají stejný tvar, liší se pouze umístěním vzhledem k souřadnicovým osám.

Grafy funkcí a) $y = x^2 + c$, b) $y = (x - k)^2$ se nakreslí na základě posunutí grafu funkce $y = x^2$ (výchozí parabola) ve směru

a) osy y tak, že vrchol $V[0, 0]$ přejde do vrcholu $V'[0, c]$,

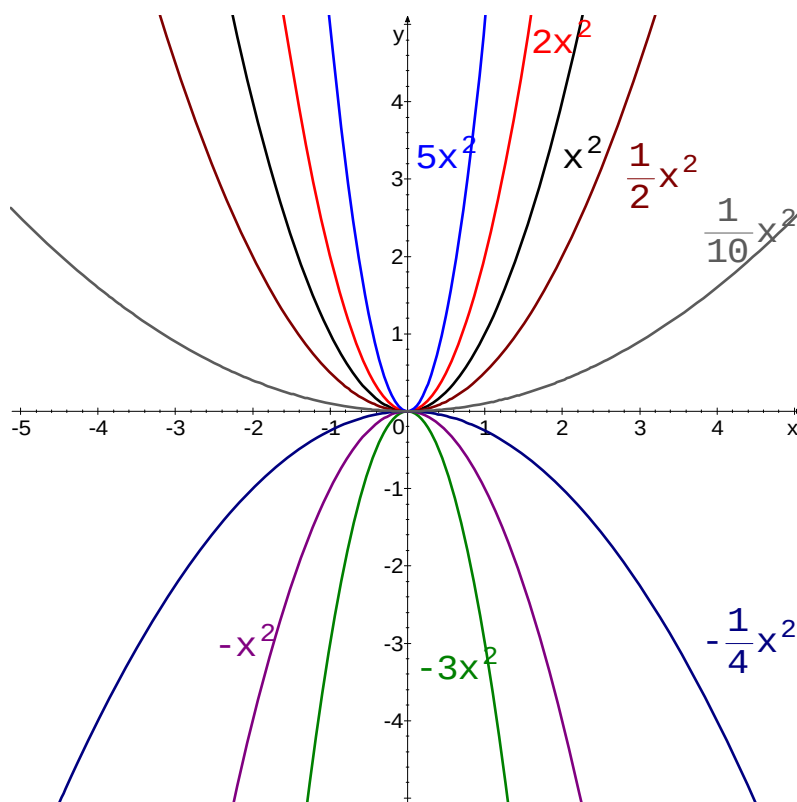
b) osy x tak, že vrchol $V[0, 0]$ přejde do vrcholu $V'[k, 0]$.

Podívejme se nyní na grafy funkcí, které mají různé hodnoty a .

a) $y = x^2$, b) $y = -3x^2$, c) $y = -x^2$, d) $y = -\frac{1}{4}x^2$,

e) $y = 2x^2$, e) $y = 5x^2$, g) $y = \frac{1}{2}x^2$, h) $y = \frac{1}{10}x^2$.

Pokud je $a > 0$, je parabola „otevřená“ ve směru kladné poloosy y , pokud je $a < 0$, je parabola „otevřená“ ve směru záporné poloosy y . Je-li $|a| > 1$, pak se parabola „zúží“ vzhledem k parabole $y = x^2$. Je-li $|a| < 1$, pak se parabola „rozšíří“. Tyto skutečnosti můžeme pozorovat na následujícím ilustračním obrázku



Funkce $y = ax^2 + bx + c$ není prostá na svém definičním oboru $D(f) = \mathbb{R}$. Je-li $a > 0$, pak funkce na intervalu $(-\infty, x_V)$ klesá a na (x_V, ∞) roste. Ve vrcholu $V[x_V, y_V]$ má funkce minimum. Je-li $a < 0$, pak funkce na intervalu $(-\infty, x_V)$ roste a na (x_V, ∞) klesá. Ve vrcholu $V[x_V, y_V]$ má funkce maximum.

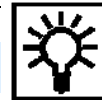
Při kreslení grafů kvadratických funkcí můžeme nejprve upravit výraz $ax^2 + bx + c$ doplněním na druhou mocninu dvojčlenu a přepsat funkční předpis do tvaru

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Z tohoto zápisu kvadratické funkce určíme snadno souřadnice vrcholu $V[x_0, y_0]$.



Řešené úlohy



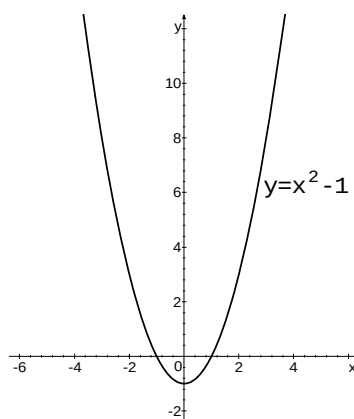
Příklad 2.6.2. Nakreslete graf funkce $y = x^2 - 1$.

Řešení:

Ze zápisu funkce vyčteme souřadnice vrcholu $V[0, -1]$. Protože je $a = 1$,

posuneme graf funkce $y = x^2$ o 1 jednotku ve směru záporné poloosy y .

Průsečíky grafu s osou x vypočítáme z rovnice $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$.



Příklad 2.6.3. Nakreslete graf funkce $y = x^2 + 4x$.

Řešení:

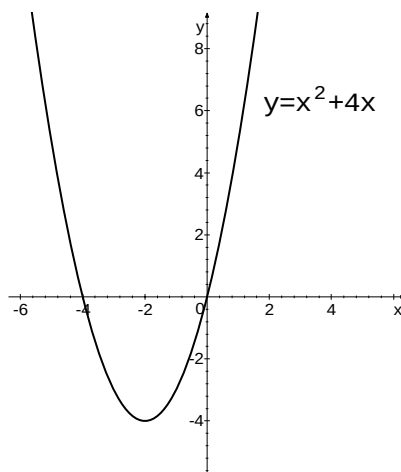
Pomocí průsečíků s osou x

Vyřešíme tedy rovnici $0 = x^2 + 4x$. Kořeny jsou $x_1 = 0, x_2 = -4$.

Protože parabola je souměrná podle své osy, která je kolmá k ose x , jsou body $x_1 = 0, x_2 = -4$ také podle této osy souměrné a osa paraboly je osa úsečky x_1x_2 . Její rovnice je $x = -2$. Vrchol paraboly na této ose leží a jeho první souřadnice je tedy $x_V = -2$. Druhou souřadnici vypočteme dosazením $x_V = -2$ do rovnice paraboly $y = x^2 + 4x$, $y_V = -4$. Vrchol má souřadnice $V[-2, -4]$. Protože $a = 1$, posuneme graf paraboly $y = x^2$ tak, aby na ose x procházel body $x_1 = 0, x_2 = -4$ a měl vrchol v bodě $V[-2, -4]$.

Doplněním na druhou mocninu dvojčlenu získáme souřadnice vrcholu paraboly.

Funkční předpis převedeme na tvar $y = x^2 + 4x + 4 - 4 \Rightarrow y = (x + 2)^2 - 4$,
 souřadnice vrcholu jsou $V[-2, -4]$. Protože je $a = 1$, posuneme graf funkce $y = x^2$
 o 4 jednotky ve směru záporné poloosy y a o 2 jednotky ve směru záporné
 poloosy x .

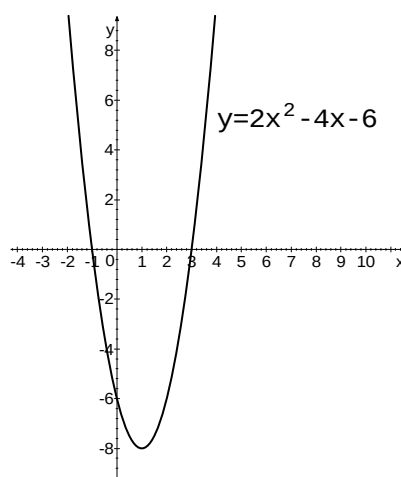


Příklad 2.6.4. Nakreslete graf funkce $y = 2x^2 - 4x - 6$.

Řešení:

Zápis funkce upravíme na tvar $y = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 6 \Rightarrow y = 2(x - 1)^2 - 2 - 6$,
 ze zápisu kvadratické funkce $y = 2(x - 1)^2 - 8$ určíme souřadnice vrcholu, $V[1, -8]$.
 Průsečíky s osou x zjistíme vyřešením rovnice $0 = 2x^2 - 4x - 6$, její kořeny jsou
 $x_1 = 3, x_2 = -1$. Průsečík s osou y je $[0, -6]$.

Protože je $a = 2$, posuneme graf funkce $y = 2x^2$ o 8 jednotek ve směru záporné
 poloosy y a o 1 jednotku ve směru kladné poloosy x .



Příklad 2.6.5. Nakreslete graf funkce $y = -x^2 + 3x$.

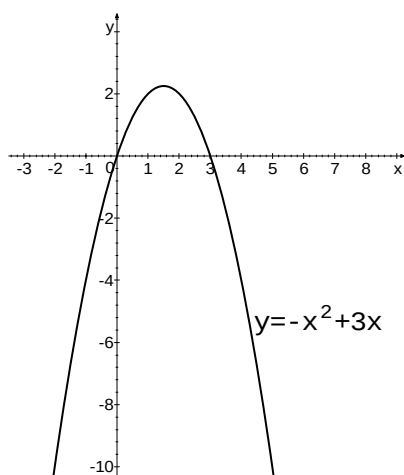
Řešení:

Zápis kvadratické funkce upravíme na tvar

$$y = -(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}) \Rightarrow y = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4}, \quad \text{vrchol } V[\frac{3}{2}, \frac{9}{4}].$$

Protože je $a = -1$, posuneme graf funkce $y = -x^2$ o 2,25 jednotek ve směru kladné poloosy y a o 1,5 jednotky ve směru kladné poloosy x .

Vyřešením rovnice $0 = -x^2 + 3x$ zjistíme průsečíky s osou x , kořeny jsou $x_1 = 3, x_2 = 0$.



Úlohy k samostatnému řešení



4. Nakreslete graf funkce.

a) $y = x^2 - 4x + 3$, b) $y = x^2 - 2x + 2$, c) $y = x^2 + 6x + 9$.

5. Nakreslete graf funkce.

a) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x$, b) $y = 3x^2 - 6x - 4$.

6. Nakreslete graf funkce.

a) $y = -x^2 - x + 2$, b) $y = -2x^2 + 8x - 9$.

2.7. Lineární lomená funkce



Výklad



Dříve, než se začneme zabývat lineární lomenou funkcí v obecném tvaru, zmíníme se krátce o funkci, která je jejím speciálním případem – nepřímou úměrností.

2.7.1. Nepřímá úměrnost



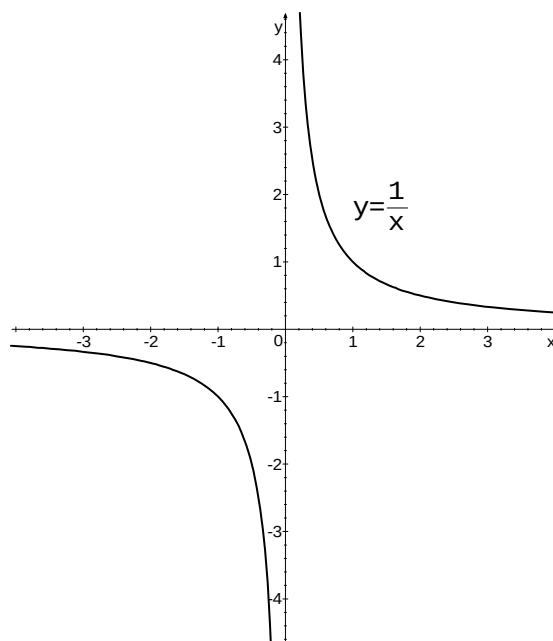
Výklad



Nepřímá úměrnost je každá funkce na množině $\mathbf{R} - \{0\}$ daná ve tvaru $y = \frac{k}{x}$,
kde $k \in \mathbf{R} - \{0\}$.

Podíváme se podrobně na graf nepřímé úměrnosti pro $k = 1$.

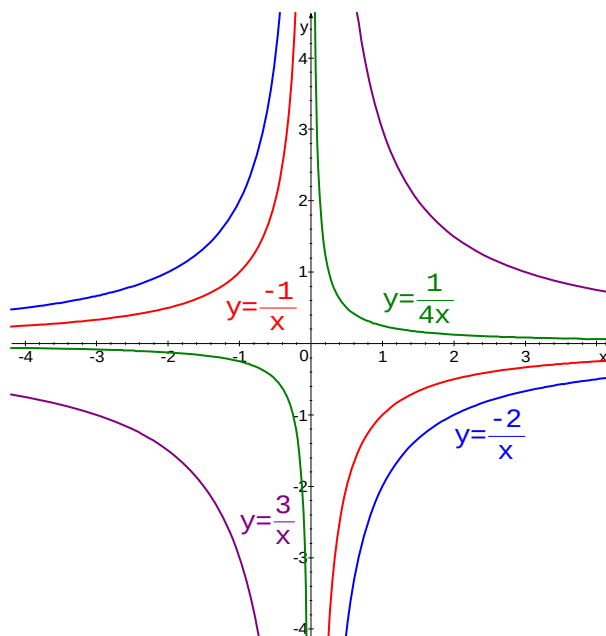
x	1	2	0,5	4	0,1	-1	-2	-0,5	-4	-0,1
$y = \frac{1}{x}$	1	0,5	2	0,25	10	-1	-0,5	-2	-0,25	-10



Grafem je rovnoosá hyperbola o středu $S[0, 0]$, osy souřadnicového systému jsou její asymptoty (hyperbola se k těmto přímkám přibližuje, ale neprotne je ani se jich nedotkne).

Graf nepřímé úměrnosti je souměrný podle počátku souřadnicového systému a funkce je tedy lichá.

Jak se mění průběh grafu funkce v závislosti na konstantě k , je zachycen na následujícím obrázku. Zvolíme pro k postupně hodnoty: -1 , -2 , 3 , $\frac{1}{4}$ a odpovídající grafy nakreslíme do jednoho souřadnicového systému.



Je-li $k > 0$, pak funkce na intervalu $(-\infty, 0)$ klesá a klesá také na intervalu $(0, \infty)$. Větvě hyperboly se nacházejí v I. a III. kvadrantu.

Je-li $k < 0$, pak funkce na intervalu $(-\infty, 0)$ roste a roste také na intervalu $(0, \infty)$. Větvě hyperboly se nacházejí v II. a IV. kvadrantu.

Nemůžeme však říci, že funkce je rostoucí nebo klesající na celém definičním oboru!

Funkce je prostá. Existuje k ní funkce inverzní, která má stejný zápis.

$$f^{-1} : y = \frac{k}{x}, \quad D(f^{-1}) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = H(f)$$

Příklad užití nepřímé úměrnosti v matematice a ve fyzice:

1. Délka y je nepřímo úměrná šířce x obdélníka při konstantním obsahu S .

$$y = \frac{S}{x}.$$

2. Zákon Boyleův-Marriottův pro izometrický děj s ideálním plynem

$$p = \frac{c}{V}, \quad \text{kde } c \text{ je konstanta,}$$

tlak p ideálního plynu je nepřímo úměrný jeho objemu V při konstantní teplotě T .

2.7.2. Lineární lomená funkce

Výklad

Lineární lomená funkce je každá funkce na množině $\mathbf{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, daná předpisem

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ kde } a, b, d \in \mathbf{R}; c \in \mathbf{R} - \{0\} \text{ a } ad - bc \neq 0.$$

Grafem každé lineární lomené funkce je rovnoosá hyperbola, kterou získáme z grafu funkce $y = \frac{k}{x}$ pomocí posunutí tak, že nejprve funkční předpis lineární lomené funkce f převedeme

na tvar $f: y = \frac{k}{x-x_0} + y_0$, bod $[0, 0]$ se posune do bodu $[x_0, y_0]$,

asymptoty procházejí středem $S[x_0, y_0]$ rovnoběžně se souřadnicovými osami.

Řešená úloha

Příklad 2.7.1. Nakreslete graf funkce $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Řešení: $D(f) = \mathbf{R} - \{-1\}$.

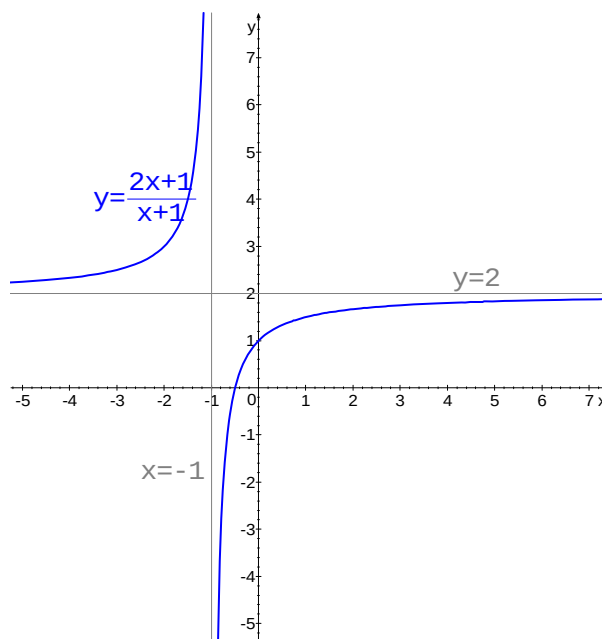
Zadanou funkci upravíme
na požadovaný tvar vydělením
čitatele jmenovatelem,

dostaneme $y = \frac{-1}{x+1} + 2$.

Střed má souřadnice $S[-1, 2]$,

rovnice asymptot jsou $x = -1, y = 2$

a $k = -1$.



Úlohy k samostatnému řešení

7. Nakreslete graf funkce:

a) $y = \frac{2x}{x-1}$,

b) $y = \frac{x}{x+1}$,

c) $y = \frac{x+1}{x}$,

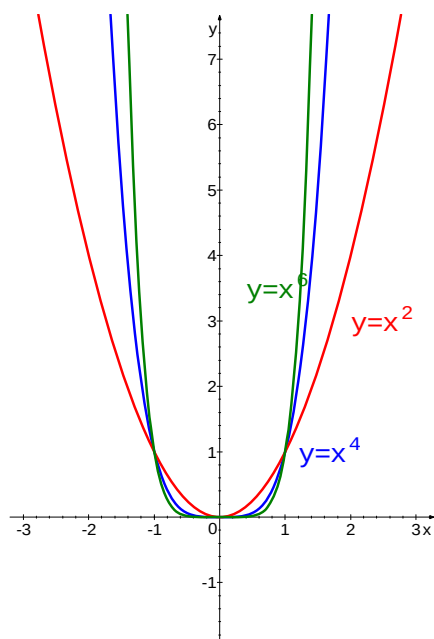
d) $y = \frac{3}{x-2}$.

2.8. Mocninné funkce

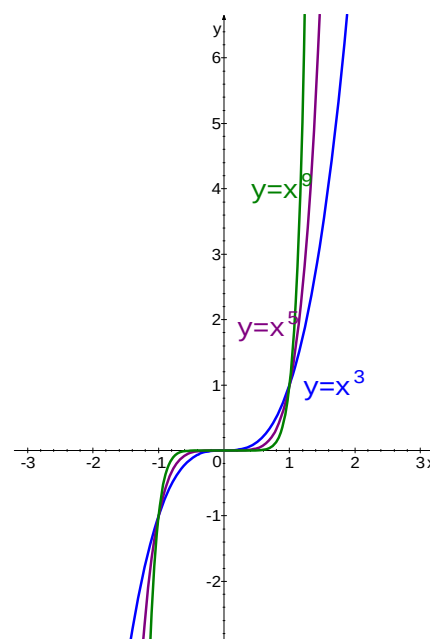
Výklad

Mocninné funkce jsou definovány předpisem $y = x^n, n \in \mathbb{N}$ a $y = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$. Jiný zápis pro druhou variantu $y = x^n, n \in \mathbb{Z}^-$. ($\mathbb{Z}^-$ značí celá záporná čísla).

$y = x^n, n \in \mathbb{N}, n$ sudé



n liché



Definiční obor:

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

Obor hodnot:

$\langle 0, \infty \rangle$

$\mathbb{R}$

Funkce

sudá

lichá

Klesající na

$(-\infty, 0)$

Rostoucí na

$\langle 0, \infty \rangle$

$\mathbb{R}$

Minimum:

$[0, 0]$

nemá

Maximum:

nemá

nemá

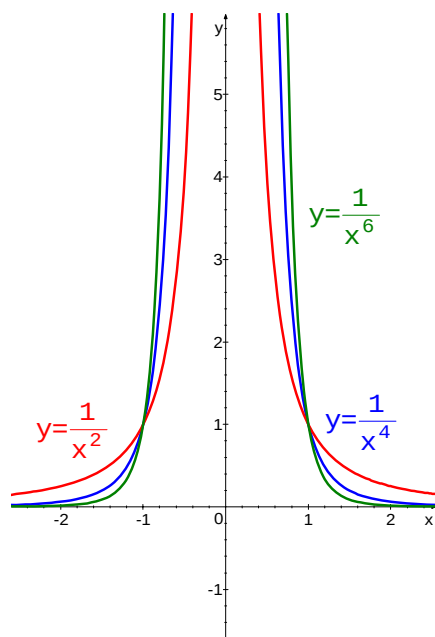
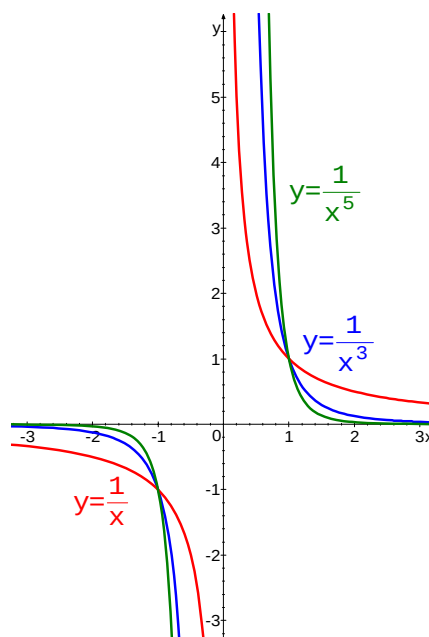
Uvedené grafy využijte k náčrtku grafů: a) $y = x^3 - 1$, b) $y = x^4 + 3$, c) $y = (x - 1)^5$.

V úloze a) se graf funkce $y = x^3$ posune o 1 jednotku ve směru záporné poloosy y ,

b) graf funkce $y = x^4$ se posune o 3 jednotky ve směru kladné poloosy y ,

c) graf funkce $y = x^5$ se posune o 1 jednotku ve směru kladné poloosy x .

$$y = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, \quad n \text{ sudé}$$


 $n \text{ liché}$
Definiční obor: $\mathbb{R} - \{0\}$ Obor hodnot: $(0, \infty)$

Funkce: sudá

Klesající na: $(0, \infty)$ Rostoucí na: $(-\infty, 0)$

Minimum: nemá

Maximum: nemá

 $\mathbb{R} - \{0\}$ $\mathbb{R} - \{0\}$

lichá

 $(-\infty, 0), (0, \infty)$

nemá

nemá

Uvedené grafy využijte k náčrtku grafů těchto funkcí:

a) $y = \frac{1}{x^3} - 1$,

b) $y = (x - 2)^{-2}$,

c) $y = (x + 1)^{-3}$.

V úloze a) graf funkce $y = \frac{1}{x^3}$ se posune o 1 jednotku ve směru záporné poloosy y .b) graf funkce $y = \frac{1}{x^2}$ se posune o 2 jednotky ve směru kladné poloosy x .c) graf funkce $y = \frac{1}{x^3}$ se posune o 1 jednotku ve směru záporné poloosy x .**Poznámka**Obecně se definují mocninné funkce předpisem $y = x^r$ pro $r \in \mathbb{R} - \{0\}$.

2.9. Exponenciální funkce

Výklad

Exponenciální funkce o základu a je funkce na množině $\mathbb{R}$ daná předpisem $y = a^x$, kde $a > 0, a \neq 1$.

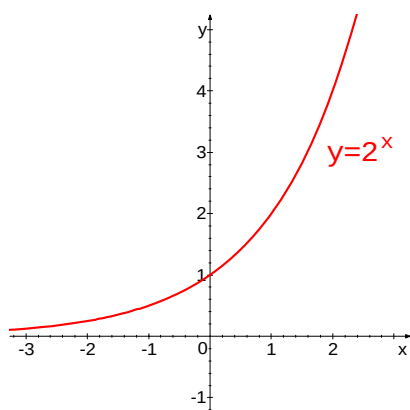
Exponenciální funkce o základu $a = e$ je velmi důležitou funkcí matematické analýzy.

Grafem exponenciální funkce je tzv. **exponenciální křivka** (krátce exponenciála).

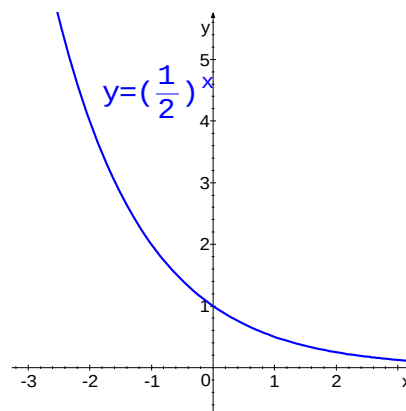
Každý graf exponenciální funkce o libovolném základě prochází bodem $[0, 1]$, protože platí pro všechna $a \neq 0$: $a^0 = 1$, osa x je asymptotou.

Exponenciální křivky $y = a^x$, $y = \frac{1}{a^x}$ pro totéž a jsou souměrně sdružené podle osy y , viz následující obrázky.

$a > 1$



$0 < a < 1$



$$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}^+$$

Je zdola ohraničená, shora není ohraničená.

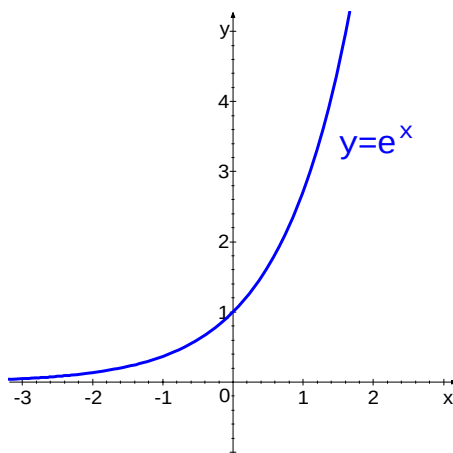
Nemá v žádném bodě ani maximum ani minimum.

Funkční hodnota v bodě 0 je rovna 1.

Funkce je rostoucí, tedy prostá.

Funkce je klesající, tedy prostá.

Je-li základem exponenciální funkce **Eulerovo číslo** $e \doteq 2,718281828 \dots$, mluvíme o **přirozené exponenciální funkci**, $y = e^x$.



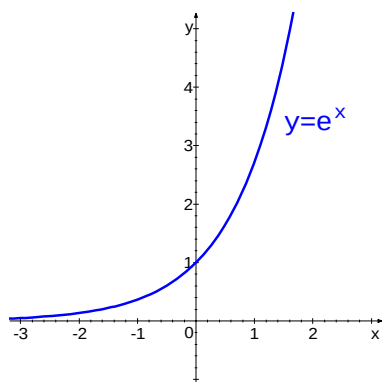
Řešené úlohy



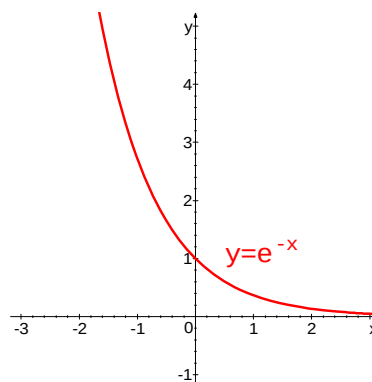
Příklad 2.9.1. Nakreslete graf exponenciální funkce:

- | | | |
|--------------------|--------------------|-----------------------|
| a) $y = e^x$, | b) $y = e^{-x}$, | c) $y = 3e^x$, |
| d) $y = e^{x+2}$, | e) $y = e^x - 1$, | f) $y = e^{-x} - 1$. |

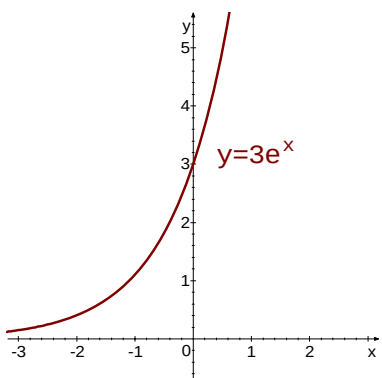
Řešení: a)



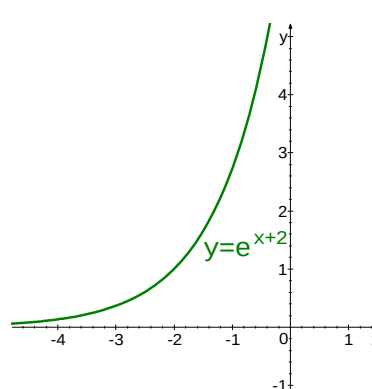
b)



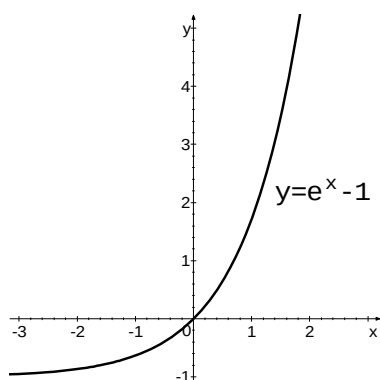
c)



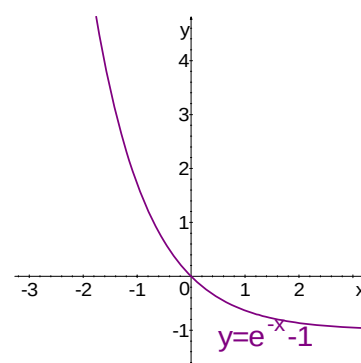
d)



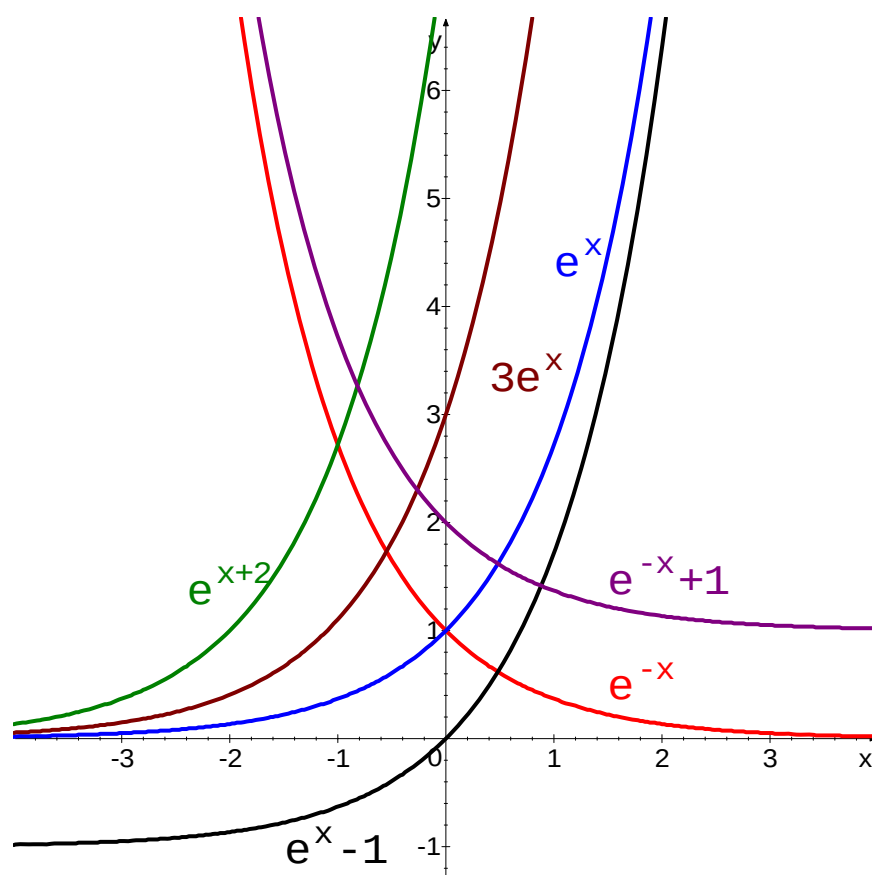
e)



f)



Na ilustračním obrázku máte pro srovnání průběh všech funkcí z úlohy. Všimněte si posunutí základních grafů funkcí $y = e^x$, $y = e^{-x}$



Úlohy k samostatnému řešení



8. Nakreslete graf funkce:

a) $y = 10^x$,

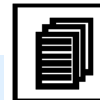
b) $y = 5^x$,

c) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

2.10. Logaritmická funkce



Výklad



Logaritmická funkce o základu a je funkce inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$, kde a je libovolné kladné číslo různé od jedné, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ a $x \in \mathbb{R}$ resp. $D(f) = \mathbb{R}$.

Logaritmus čísla x při základu a je takové číslo y , pro které platí $a^y = x$, tedy

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y.$$

Nejčastěji používáme funkce:

o základu $a = 10$, pak se logaritmus nazývá **dekadický** a značí se $y = \log x$,

o základu $a = e$, pak se logaritmus nazývá **přirozený** a značí se $y = \ln x$.

Pravidla pro počítání s logaritmy:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x,$$

$$\log_a a = 1, \quad \log 10 = 1, \quad \ln e = 1,$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \log 1 = 0, \quad \ln 1 = 0.$$



Řešené úlohy



Příklad 2.10.1. Nakreslete graf funkce:

a) $y = \log_2 x$,

b) $y = \log x$,

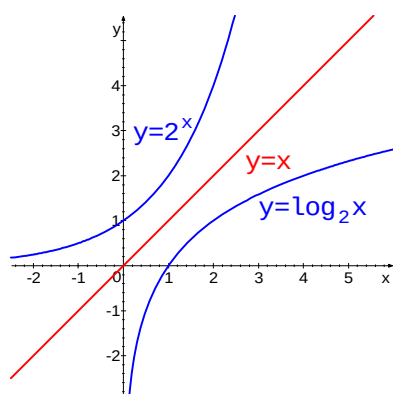
c) $y = \ln x$,

d) $y = \log_{1/2} x$,

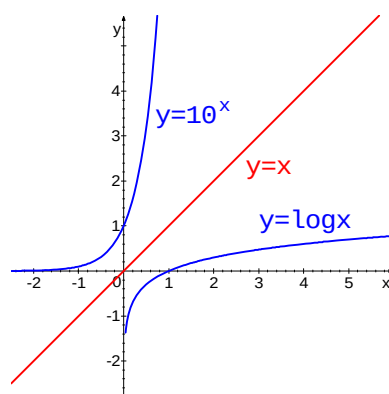
e) $y = \log_{0,1} x$.

Řešení: Graf sestojíme souměrně podle osy I. a III. kvadrantu ke grafu funkce $y = a^x$.

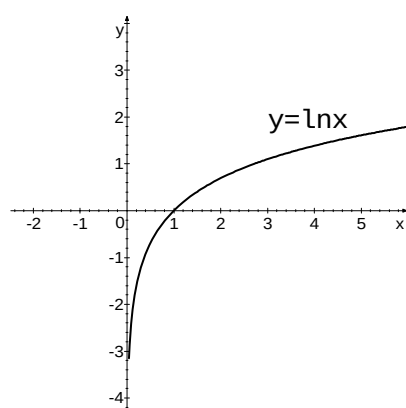
a)



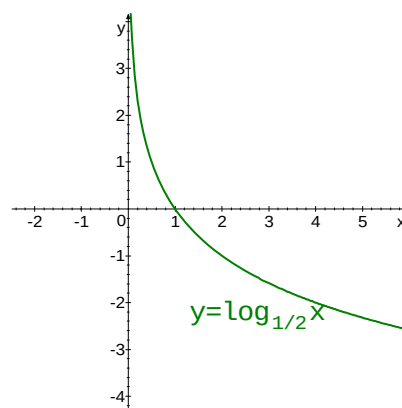
b)



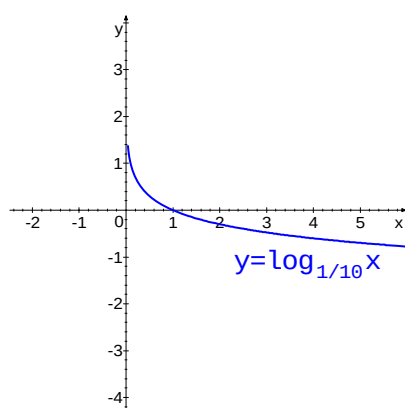
c)



d)



e)

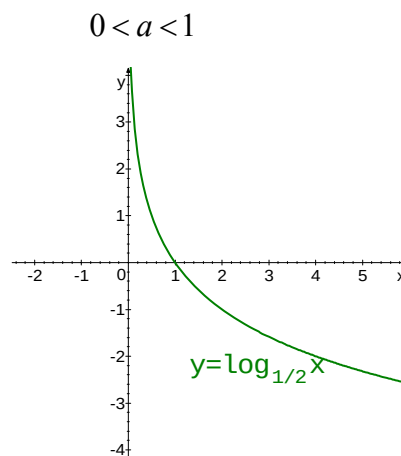
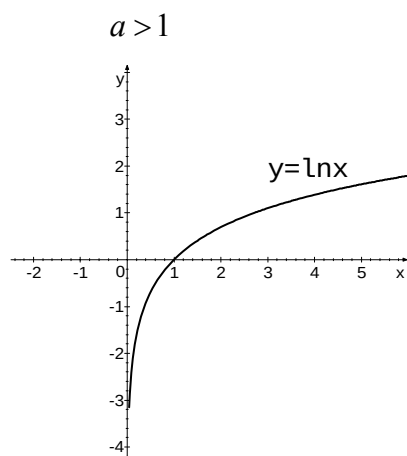




Výklad



Srovnáme průběhy funkcí $y = \log_a x$, pro různá $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $x \in \mathbb{R}^+$.



$$D(f) = (0, \infty), \quad H(f) = \mathbb{R}$$

Je zdola i shora neohraničená.

Nemá v žádném bodě ani maximum ani minimum.

Funkční hodnota v bodě 1 je rovna 0.

Funkce je rostoucí, tedy prostá.

Funkce je klesající, tedy prostá.



Řešené úlohy

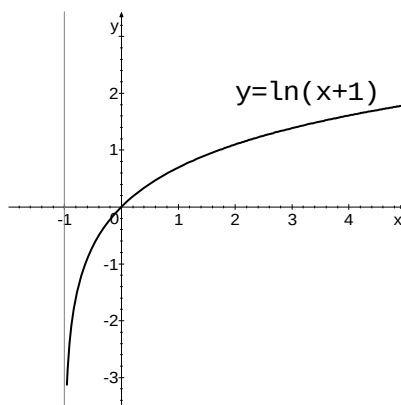


Příklad 2.10.2. Nakreslete graf funkce:

- a) $y = \ln(x+1)$, b) $y = \log 2x$, c) $y = 3 \log_{\frac{1}{2}} x$, d) $y = \log_{0,1} x - 2$.

Řešení: a) Argument logaritmické funkce musí být kladný, proto $x > -1$ a $D(f) = (-1, \infty)$.

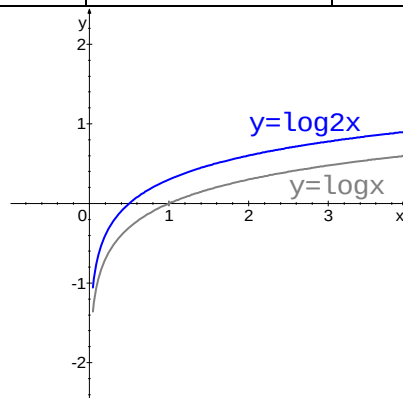
Posuneme graf funkce $y = \ln x$ o 1 jednotku ve směru záporné poloosy x .



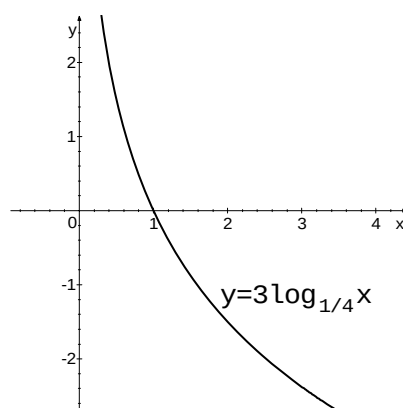
V ostatních příkladech budeme postupovat obdobně:

b) dvojnásobný argument „zrychlí“ průběh funkce

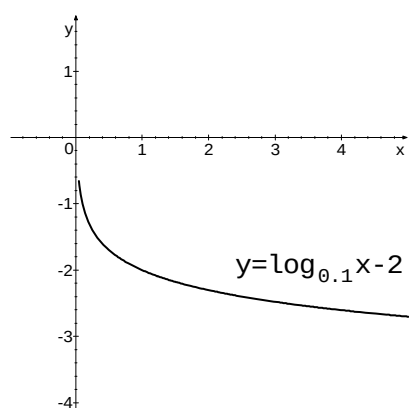
x	0,5	1	2	4
$\log x$	-0,301	0	0,301	0,602
$\log 2x$	0	0,301	0,602	0,903



c) funkční hodnota se ztrojnásobí



d) graf funkce $y = \log_{0,1} x$ se posune o 2 jednotky ve směru záporné poloosy y .



2.11. Goniometrické funkce



Výklad



Goniometrické funkce ostrého úhlu jste poznali již na základní škole, zavedli jste je jako poměry stran v pravoúhlém trojúhelníku. Následující definice jsou speciálními případy obecné definice těchto funkcí.

Mějme tedy pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b a přeponou c . Pak definujeme:

Sinus α je poměr délky odvěsny protilehlé k úhlu α a délky přepony pravoúhlého trojúhelníku.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Kosinus α je poměr délky odvěsny přilehlé k úhlu α a délky přepony pravoúhlého trojúhelníku.

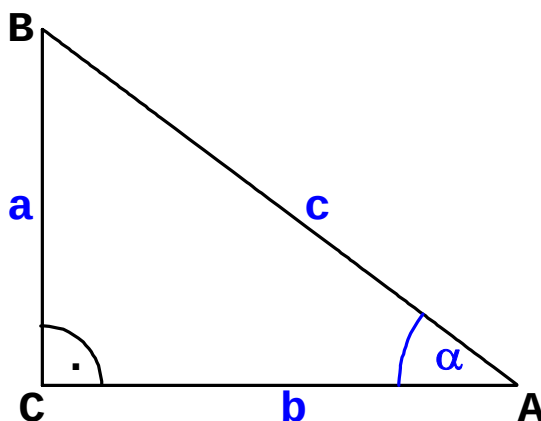
$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Tangens α je poměr délek odvěsny protilehlé k úhlu α a odvěsny přilehlé k úhlu α pravoúhlého trojúhelníku.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Kotangens α je poměr délek odvěsny přilehlé k úhlu α a odvěsny protilehlé k úhlu α pravoúhlého trojúhelníku

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}.$$



2.11.1. Velikost úhlu – oblouková a stupňová míra

Středoškolská definice goniometrických funkcí se opírá především o pojem velikost úhlu, kterou udáváme buď v míře obloukové, nebo v míře stupňové.

Mějme libovolný orientovaný úhel AVB , který umístíme do kartézské soustavy souřadnic tak, že vrchol V umístíme do jejího počátku O , počáteční rameno AV do osy x .

Sestrojíme jednotkovou kružnici k se středem V , tj. kružnici o poloměru 1. Délka této kružnice je 2π . Obloukovou míru úhlu AVB definujeme jako délku oblouku jednotkové kružnice mezi průsečíky ramen VA , VB a jednotkové kružnice. Pokud délka tohoto oblouku má velikost 1, je velikost úhlu AVB rovna 1 rad (radián).

Na střední škole se většinou dávala přednost vyjádření velikosti úhlu ve stupňové míře.

Jednotka stupňové míry zvaná úhlový stupeň je úhel rovnající se $\frac{1}{90}$ pravého úhlu. Kromě jednotky 1 stupeň, značíme 1° , používáme i menší jednotky: 1 minuta (značíme $1'$) pro šedesátinu stupně a 1 vteřina (značíme $1''$) pro jednu šedesátinu minuty. Protože celé kružnici odpovídá úhel 360° , přísluší oblouku délky 2π úhel velikosti 360° , takže jednomu radiánu přísluší úhel $\frac{360^\circ}{2\pi} \doteq 57^\circ 17' 45''$.

Převodní vztah mezi stupni a radiány dostaneme z přímé úměrnosti

$$2\pi \text{ rad} \dots\dots\dots 360 \text{ stupňů}$$

$$x \text{ rad} \dots\dots\dots \alpha \text{ stupňů}$$

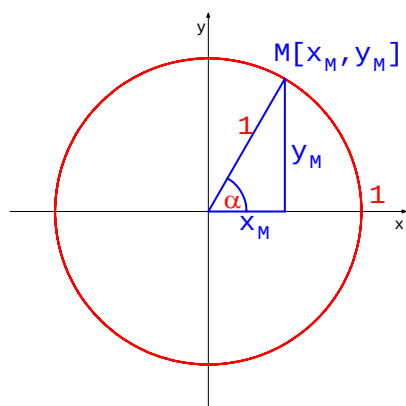
$$x = \frac{\alpha\pi}{180}, \quad \alpha = \frac{180x}{\pi}.$$

2.11.2. Funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens

Goniometrické funkce reálné proměnné x definujeme pomocí jednotkové kružnice. V kartézské soustavě souřadnic sestrojíme kružnici se středem v počátku a o poloměru jedna. Každému reálnému číslu můžeme přiřadit orientovaný úhel velikosti x (v obloukové míře), jehož počáteční rameno je kladná poloosa x a vrchol je v počátku soustavy souřadnic. Průsečík koncového ramene s kružnicí označme $M[x_M, y_M]$.

Nepřehlédněme podstatný fakt, že definičním oborem každé z goniometrických funkcí je podmnožina reálných čísel; ani jednou nebude řeč o stupních!!

Funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens definujeme takto:



$$\sin x = y_M,$$

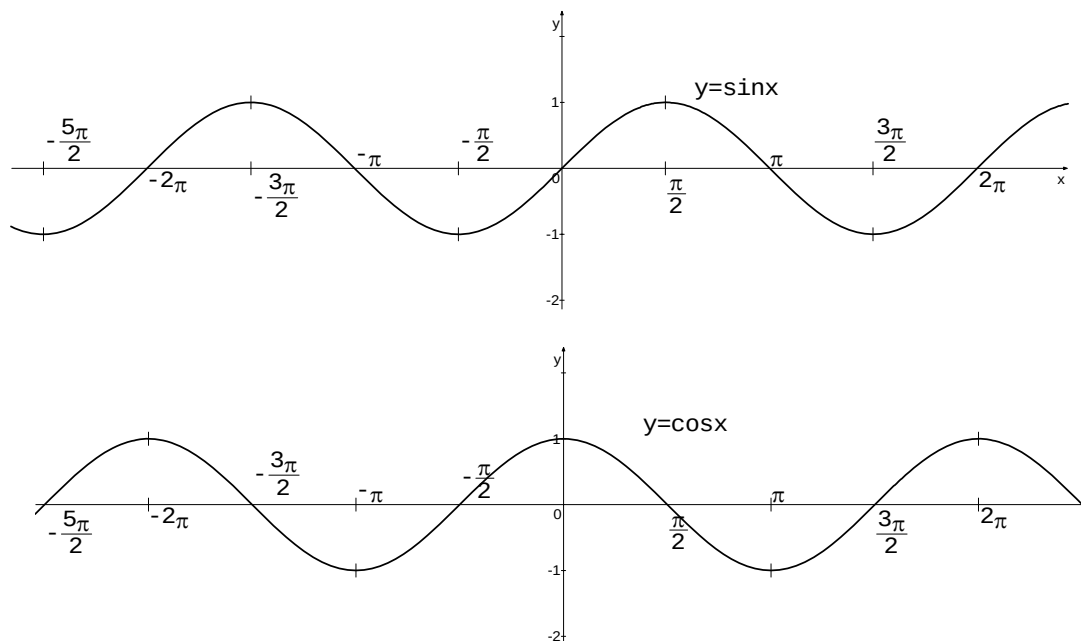
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0$$

$$\cos x = x_M,$$

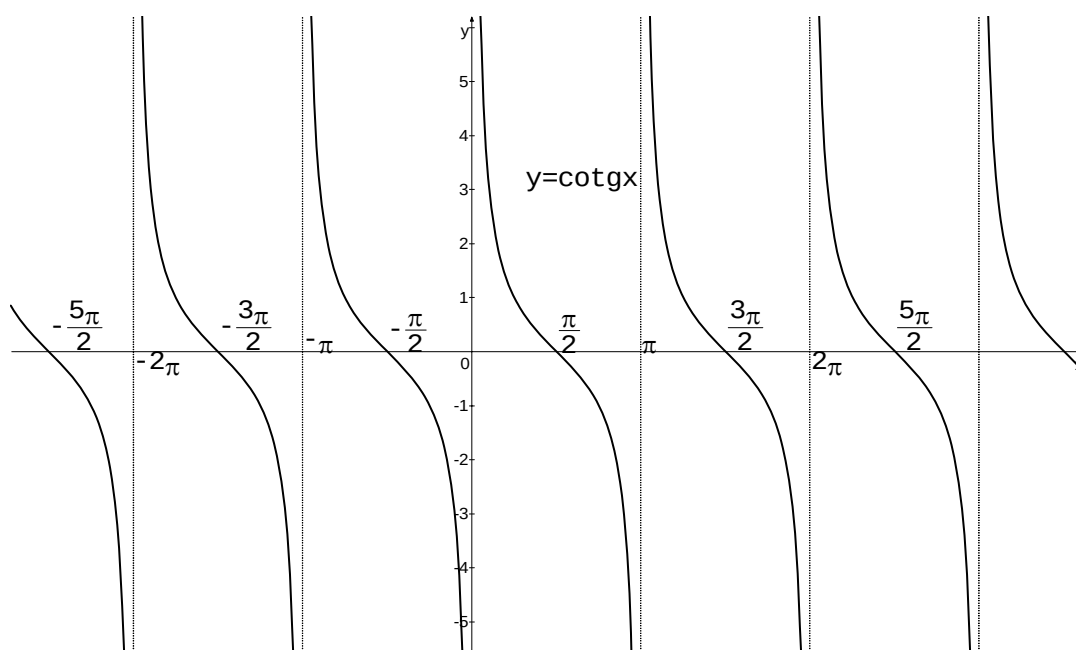
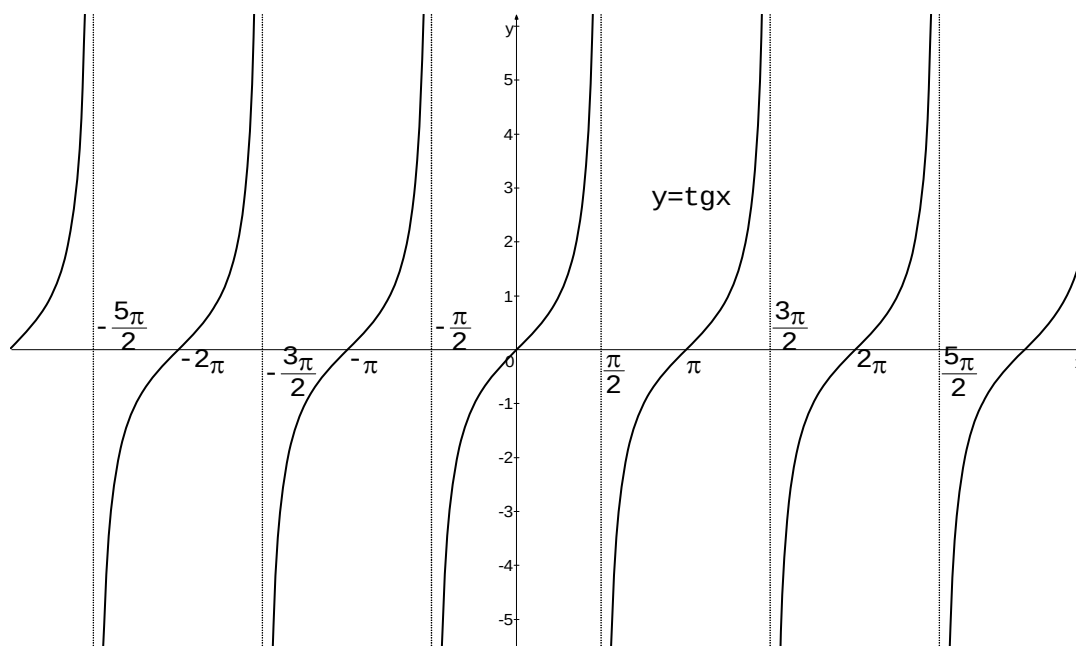
$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sin x \neq 0$$

	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Definiční obor	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
Obor hodnot	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle -1, 1 \rangle$
Funkce	lichá	sudá
Základní perioda	2π	2π
Rostoucí	v každém intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$	v každém intervalu $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$
Klesající	v každém intervalu $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$	v každém intervalu $\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$
	shora i zdola ohraničená	shora i zdola ohraničená
Maximum	v každém bodě $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	v každém bodě $x = 2k\pi$
Minimum	v každém bodě $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	v každém bodě $x = \pi + 2k\pi$

Písmeno k v tabulce označuje libovolné celé číslo.



	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{cotg} x$
Definiční obor	množina všech $x \in R - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$ pro $\forall k \in Z$	množina všech $x \in R - \{k\pi\}$ pro $\forall k \in Z$
Obor hodnot	R	R
Funkce	lichá	lichá
Základní perioda	π	π
Rostoucí	v každém intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$	_____
Klesající	_____	v každém intervalu $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$
	shora i zdola neohraničená	shora i zdola neohraničená
Maximum	neexistuje	neexistuje
Minimum	neexistuje	neexistuje



Znaménko funkce	I. kvadrant	II. kvadrant	III. kvadrant	IV. kvadrant
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-
$\operatorname{cotg} x$	+	-	+	-

Monotónnost	I. kvadrant	II. kvadrant	III. kvadrant	IV. kvadrant
$\sin x$	roste	klesá	klesá	roste
$\cos x$	klesá	klesá	roste	roste
$\operatorname{tg} x$	roste	roste	roste	roste
$\operatorname{cotg} x$	klesá	klesá	klesá	klesá

Goniometrické funkce jsou periodické.

Platí: Pro každé $k \in \mathbf{Z}$ a pro každé $x \in \mathbf{R}$ je $\cos(x + k2\pi) = \cos x$

$$\sin(x + k2\pi) = \sin x.$$

Pro každé $k \in \mathbf{Z}$ a pro každé $x \in \mathbf{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$ je $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$.

Pro každé $k \in \mathbf{Z}$ a pro každé $x \in \mathbf{R} - \{k\pi\}$ je $\operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x$.

Funkce sinus je lichá, platí tedy pro $\forall x \in \mathbf{R}$ $\sin(-x) = -\sin x$.

Funkce kosinus je sudá, platí tedy pro $\forall x \in \mathbf{R}$ $\cos(-x) = \cos x$.

Funkce tangens je lichá, platí tedy pro $\forall x \in \mathbf{R}$ $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

Funkce kotangens je lichá, platí tedy pro $\forall x \in \mathbf{R}$ $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$.

x rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.	0	nedef.	0
$\operatorname{cotg} x$	nedef.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nedef.	0	nedef.

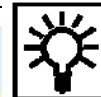
nedef. v tabulce značí, že hodnota není definována, bod nepatří definičnímu oboru.

Pro kteroukoliv goniometrickou funkci f platí rovnost:

$$|f(x)| = |f(\pi - x)| = |f(\pi + x)| = |f(2\pi - x)|.$$



Řešené úlohy



Příklad 2.11.1. Určete hodnoty goniometrických funkcí $f(x)$ pro $x = \frac{5}{6}\pi$.

Řešení:

$x = \frac{5}{6}\pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ tj. II. kvadrant. Vyjádříme si tedy $x = \frac{5}{6}\pi$ ve tvaru $\pi - x_0$, kde

$x_0 = \frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Znaménka hodnot goniometrických funkcí určíme podle tabulky.

Znaménko funkce	II. kvadrant
$\sin x$	+
$\cos x$	-
$\operatorname{tg} x$	-
$\operatorname{cotg} x$	-

$$\sin \frac{5}{6}\pi = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{5}{6}\pi = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

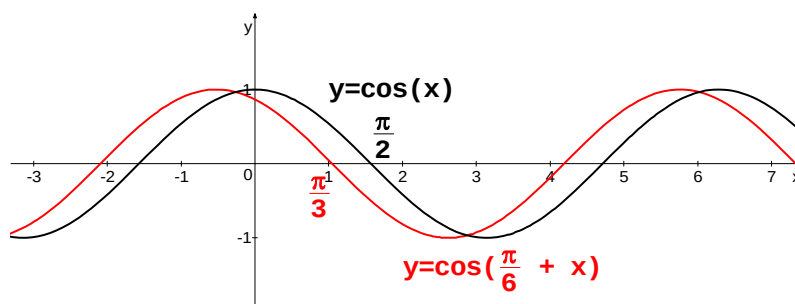
$$\operatorname{tg} \frac{5}{6}\pi = \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{5}{6}\pi = \operatorname{cotg} \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

Příklad 2.11.2. Nakreslete graf funkce $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$.

Řešení:

Graf funkce $y = \cos x$, jehož průběh známe, posuneme o $\frac{\pi}{6}$ ve směru záporné poloosy x .



Příklad 2.11.3. Nakreslete graf funkce $y = \sin 2x$.

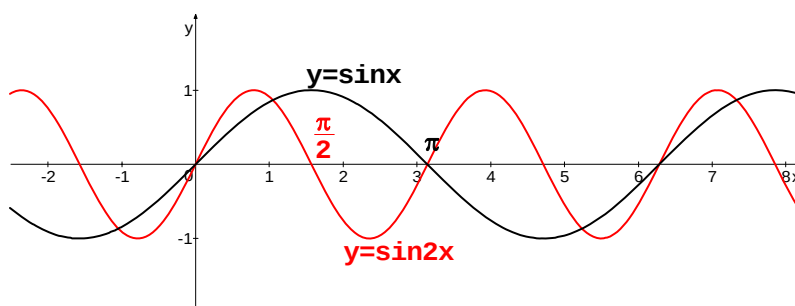
Řešení:

Budeme postupovat od jednoduššího grafu. Tím je graf funkce $y = \sin x$.

Nyní sestrojíme graf funkce $y = \sin 2x$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
y	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0

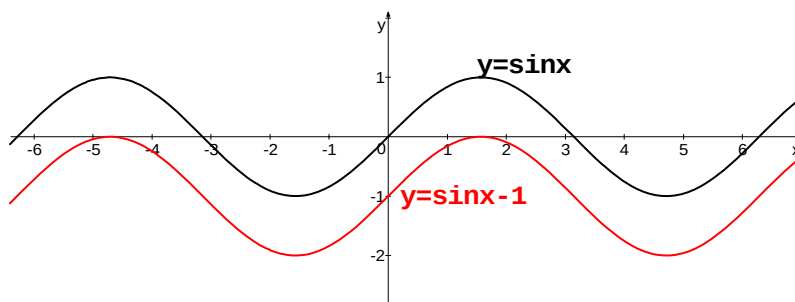
Průběh grafu se dvakrát „zrychlí“, perioda se zkrátí na polovinu.



Příklad 2.11.4. Nakreslete graf funkce $y = \sin x - 1$.

Řešení:

Graf funkce $y = \sin x$ se posune o 1 jednotku ve směru záporné poloosy y .

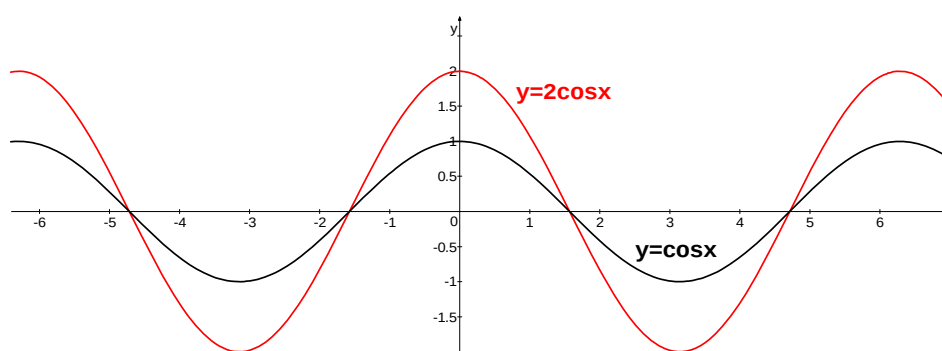


Příklad 2.11.5. Nakreslete graf funkce $y = 2 \cos x$.

Řešení: Graf funkce $y = \cos x$ je výchozím grafem pro sestrojení grafu funkce $y = 2 \cos x$.

Funkční hodnoty se zvětší dvakrát.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
y	0	$\sqrt{3}$	1	0	-2



Při sestrovování grafů goniometrických funkcí vždy vycházíme ze základního grafu.

Jestliže se jedná o násobek funkce, tj. $y = kf(x)$, funkční hodnoty se násobí. Je-li

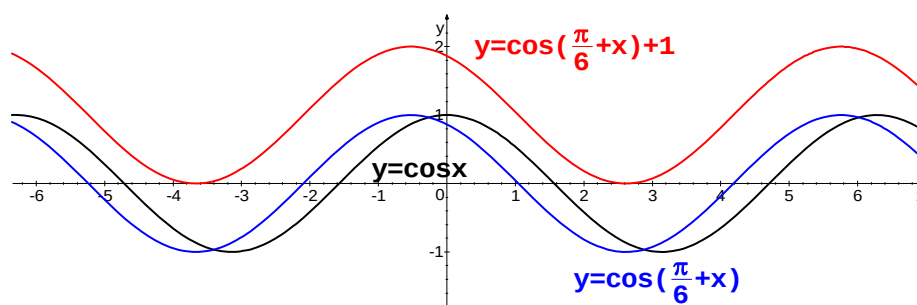
$k > 1$ graf se „zvětšuje“, je-li $k \in (0, 1)$ graf se „smršťuje“ vzhledem k ose x .

Příklad 2.11.6. Nakreslete graf funkce $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + 1$.

Řešení: Opět začínáme od grafu funkce $y = \cos x$, ten posuneme o $\frac{\pi}{6}$ ve směru záporné

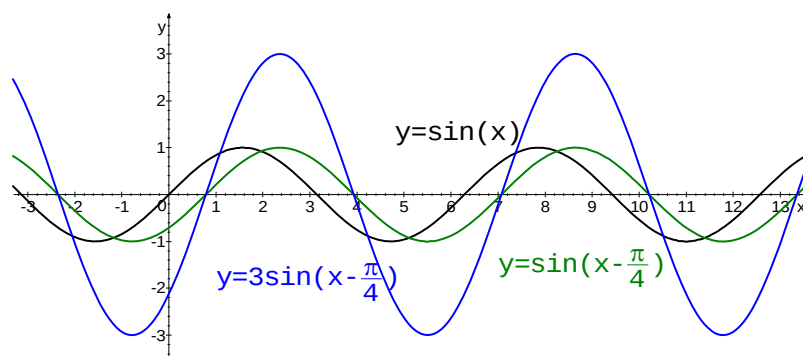
poloosy x a sestrojíme tak graf funkce $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$, ten pak posuneme o

1 jednotku ve směru kladné poloosy y .



Příklad 2.11.7. Nakreslete graf funkce $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Řešení: Budeme postupovat od grafu funkce $y = \sin x$, který posuneme o $\frac{\pi}{4}$ ve směru kladné poloosy x , máme graf funkce $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ a nyní funkční hodnoty vynásobíme 3.

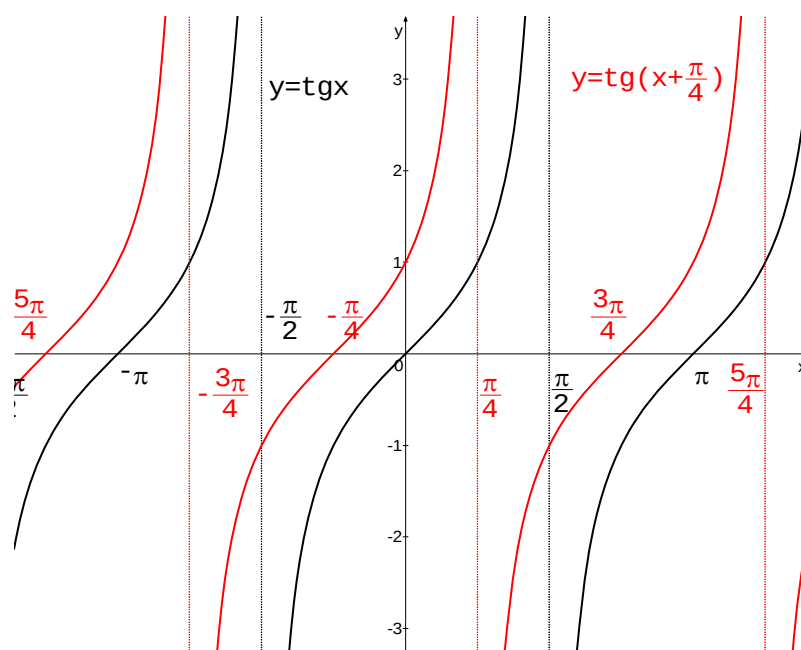


Příklad 2.11.8. Nakreslete graf funkce $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Řešení: Nejdříve určíme definiční obor funkce: $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$, odtud $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

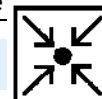
Graf funkce $y = \operatorname{tg} x$ posuneme o $\frac{\pi}{4}$ ve směru záporné poloosy x ,

přímky $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ jsou asymptoty grafu funkce.





Úlohy k samostatnému řešení



9. Postupně zakreslete do téže soustavy souřadnic grafy těchto funkcí

a) $y = \sin x$, $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$, $y = 0,7 \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$, $y = 0,7 \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + 1$,

b) $y = \cos x$, $y = \cos 0,5x$, $y = \cos\left(0,5x + \frac{\pi}{4}\right)$, $y = 2 \cos\left(0,5x + \frac{\pi}{4}\right)$.

10. Nakreslete graf funkce $y = -0,5 \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

2.11.3. Goniometrické vzorce



Výklad



Pro každé $x \in D(f)$ platí: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

Součtové vzorce:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{cotg}(x + y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x}$$

$$\operatorname{cotg}(x - y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y + 1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x}$$

Vzorce pro dvojnásobný argument:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x}$$

Vzorce pro poloviční argument:

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

Goniometrické vzorce používáme k úpravám výrazů, k důkazům platnosti rovnic a k řešení goniometrických rovnic (viz kap. 3.7.).

Příklad 2.11.9. Určete pro která $x \in R$ mají dané výrazy smysl a pak výrazy zjednodušte:

- a) $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x,$
- b) $\frac{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}{1 - \cos^2 x},$
- c) $1 - \sin^2 x + \operatorname{cotg}^2 x \cdot \sin^2 x.$

Řešení:

- a) Při úpravě použijeme dva vzorce: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$
 $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin 2x = 1, x \in R.$

- b) Při úpravě použijeme vztahy: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x, x \neq k \frac{\pi}{2}, k \in Z.$$

- c) Při úpravě použijeme vztahy: $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$

$$\cos^2 x + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \sin^2 x = 2 \cos^2 x, x \neq k\pi, k \in Z.$$

Příklad 2.11.10. Dokažte: a) $\cos(x + \frac{2}{3}\pi) + \cos(x + \frac{5}{3}\pi) = 0,$

$$b) \sin(x + \frac{\pi}{2}) - \sin(x - \frac{\pi}{2}) = 2 \cos x.$$

Řešení:

a) K důkazu potřebujeme součtové vzorce,

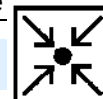
$$L = \cos x \cos \frac{2}{3}\pi - \sin x \sin \frac{2}{3}\pi + \cos x \cos \frac{5}{3}\pi - \sin x \sin \frac{5}{3}\pi =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0 = P.$$

b) $L = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} - \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} =$
 $= 0 + \cos x - 0 + \cos x = 2 \cos x = P.$



Úlohy k samostatnému řešení



11. Dokažte: a) $\cos x + \cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(x + \frac{4}{3}\pi\right) = 0$,

b) $\sin(x + \pi) + \sin(x - \pi) = -2 \sin x$,

c) $2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos x$,

d) $1 + \sin x = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2$.



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) ani sudá, ani lichá; b) lichá; c) lichá; d) sudá; e) lichá; f) sudá; g) ani sudá, ani lichá.

2. a) $x \in (-2, 2)$, b) $x \in (1, \infty)$, c) $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 3)$, d) $x \neq \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$, e) $x \neq 3$;

f) $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.



Klíč k řešení úloh



1. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, číslo -2 patří $D(f)$, není splněna 1.podmínka, proto funkce

není ANI SUDÁ, ANI LICHÁ.

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, pro $\forall x \in D(f)$ je $(-x) \in D(f)$,

$$f(-x) = -\frac{-x - 5(-x)^3}{(-x)^2} = -\frac{-x + 5x^3}{x^2} = \frac{x - 5x^3}{x^2} = -f(x) \quad \text{LICHÁ}$$

c) $D(f) = \mathbb{R}$, pro $\forall x \in D(f)$ je $(-x) \in D(f)$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x(\cos(-x) - (-x)\sin(-x)) = -x(\cos x + x(-\sin x)) = \\ &= -x(\cos x - x\sin x) = -f(x) \quad \text{LICHÁ.} \end{aligned}$$

d) $D(f) = R$, pro $\forall x \in D(f)$ je $(-x) \in D(f)$,

$$f(-x) = -x \ln 2^{-x} = x \ln 2^x = f(x) \quad \text{SUDÁ}$$

e) $D(f) = R$, pro $\forall x \in D(f)$ je $(-x) \in D(f)$,

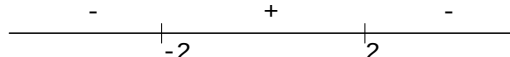
$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}} = -f(x) \quad \text{LICHÁ}$$

f) $D(f) = R$, pro $\forall x \in D(f)$ je $(-x) \in D(f)$,

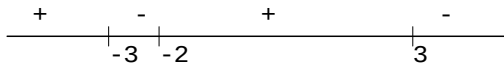
$$f(-x) = -x((-x)^3 - (-x)^2 \sin(-x)) = -x(-x^3 + x^2 \sin x) = x(x^3 - x^2 \sin x) = f(x) \quad \text{SUDÁ}$$

g) $D(f) = R$, pro $\forall x \in D(f)$ je $(-x) \in D(f)$,

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) - 5 = x^2 - 2x - 5 \quad \text{ANI SUDÁ ANI LICHÁ}$$

2. a) $\frac{2-x}{2+x} > 0 \wedge 2+x \neq 0, \quad x \in (-2, 2)$ 

b) $\ln x > 0 \wedge x > 0, \ln x > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in (1, \infty)$.

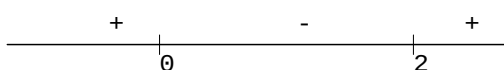
c) $\frac{9-x^2}{2+x} \geq 0 \wedge 2+x \neq 0,$ 
 $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 3)$

d) $\cotg 3x = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}, \sin 3x \neq 0 \Rightarrow 3x \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

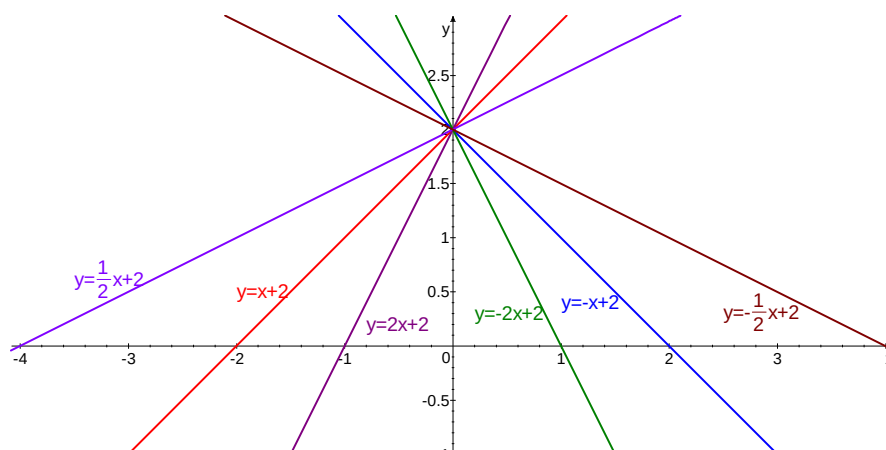
e) $3-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 3, D(f) = R - \{3\}.$

f) $x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x(x-2) > 0$

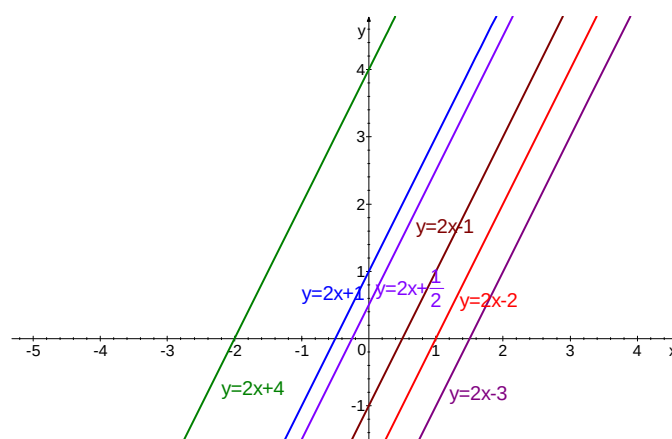
$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$



3. a) Jedná se o různoběžky procházející bodem 2 na ose y .

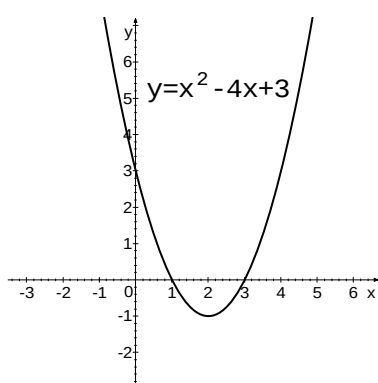


b) Jedná se o rovnoběžky, které vytínají na ose y úsek b .



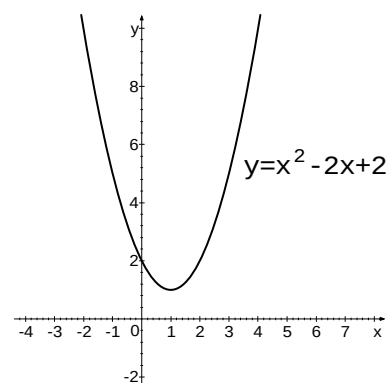
4. a) $y = (x - 2)^2 - 1$, $V[2, -1]$,

průsečíky s osami jsou $[0, 3]$, $[1, 0]$, $[3, 0]$

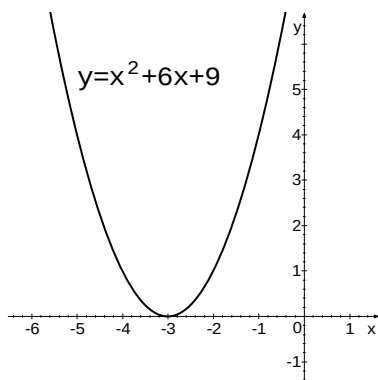


b) $y = (x - 1)^2 + 1$, $V[1, 1]$

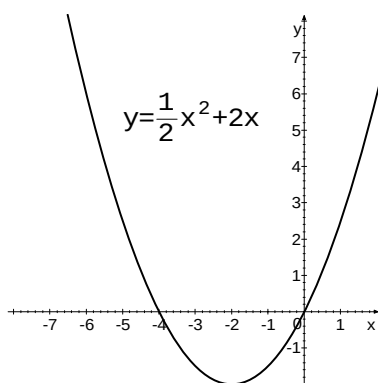
průsečík s osou y $[0, 2]$



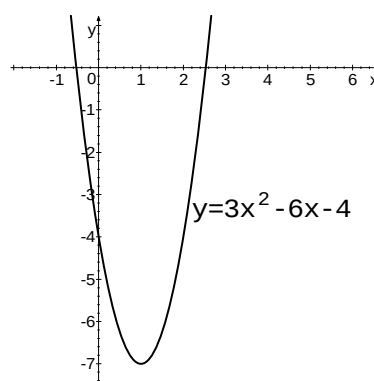
c) $y = (x+3)^2$, $V[-3, 0]$, průsečík s osou y $[0, 9]$



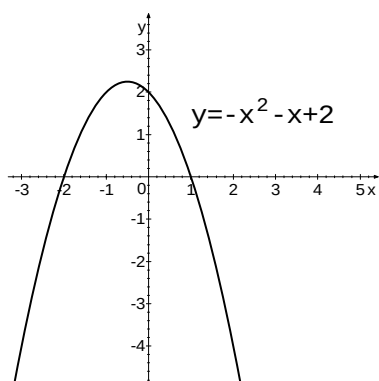
5. a) $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$, $V[-2, -2]$,
průsečíky $[0, 0]$, $[-4, 0]$



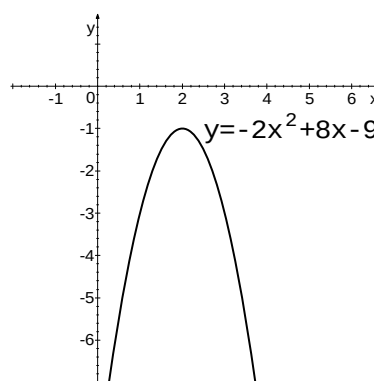
b) $y = 3(x-1)^2 - 7$, $V[1, -7]$,
průsečík s osou y $[0, -4]$



6. a) $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$, $V[-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}]$,
průsečíky $[0, 2]$, $[1, 0]$, $[-2, 0]$

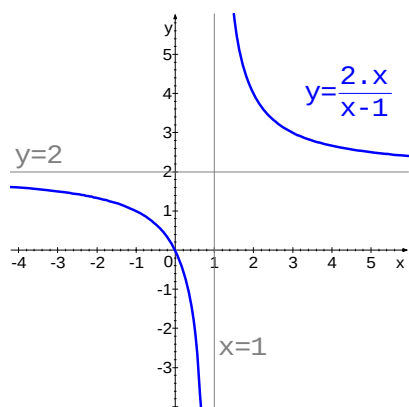


b) $y = -2(x-2)^2 - 1$, $V[2, -1]$,
průsečík s osou y $[0, -9]$



7.

a)

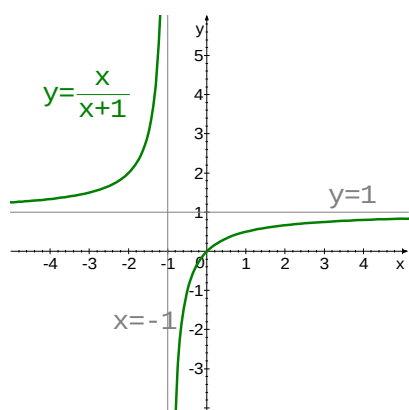


$$y = \frac{2x}{x-1} = \frac{2x-2+2}{x-1} = \frac{2x-2}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

$$y = \frac{2}{x-1} + 2$$

 $S[1,2], k=2, \text{ průsečík } [0,0]$

b)

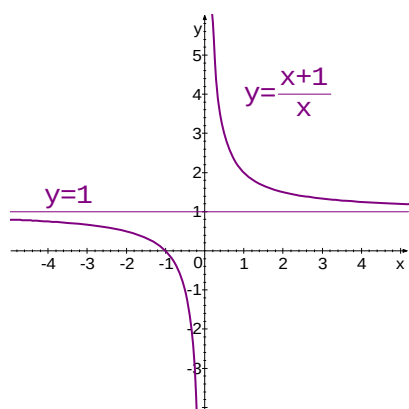


$$y = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$y = \frac{-1}{x+1} + 1$$

 $S[-1,1], k=-1, \text{ průsečík } [0,0]$

c)

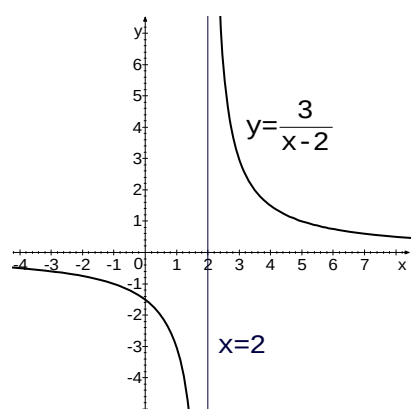


$$y = \frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x} + 1$$

 $S[0,1], k=1, \text{ průsečík s osou } x [-1,0]$

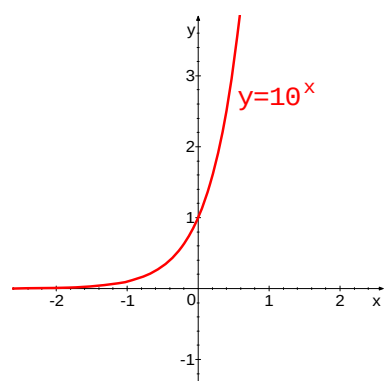
d)



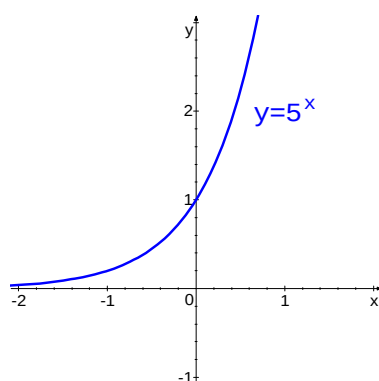
$S[2,0]$, $k=3$, průsečík s osou y $[0, -\frac{3}{2}]$

8.

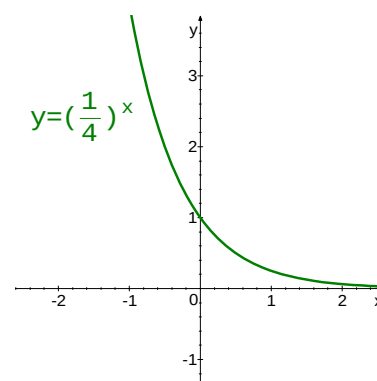
a)



b)

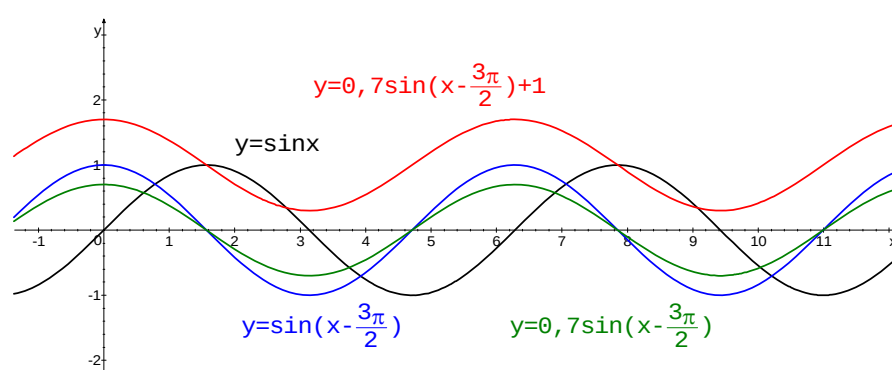


c)

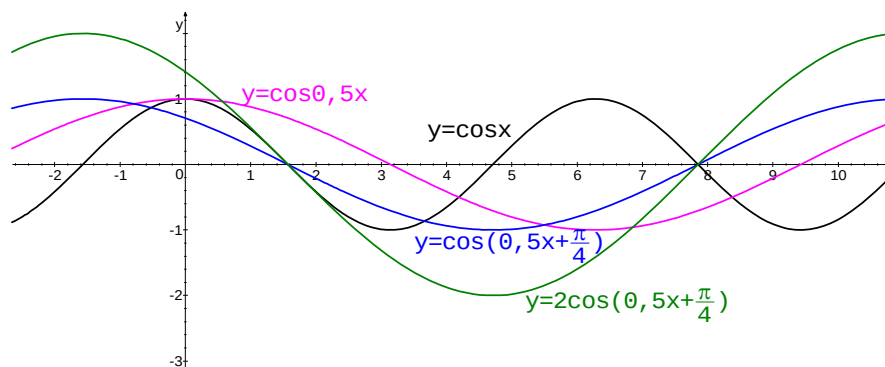


9.

a)



b)



10. Určíme definiční obor: $\cos(x + \frac{\pi}{6}) \neq 0$ odtud $x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi$. Pak $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ jsou rovnice asymptot grafu ($\forall k \in \mathbb{Z}$). Budeme postupovat opět od nejjednoduššího grafu, jako v předchozích příkladech s funkcemi sinus a kosinus.

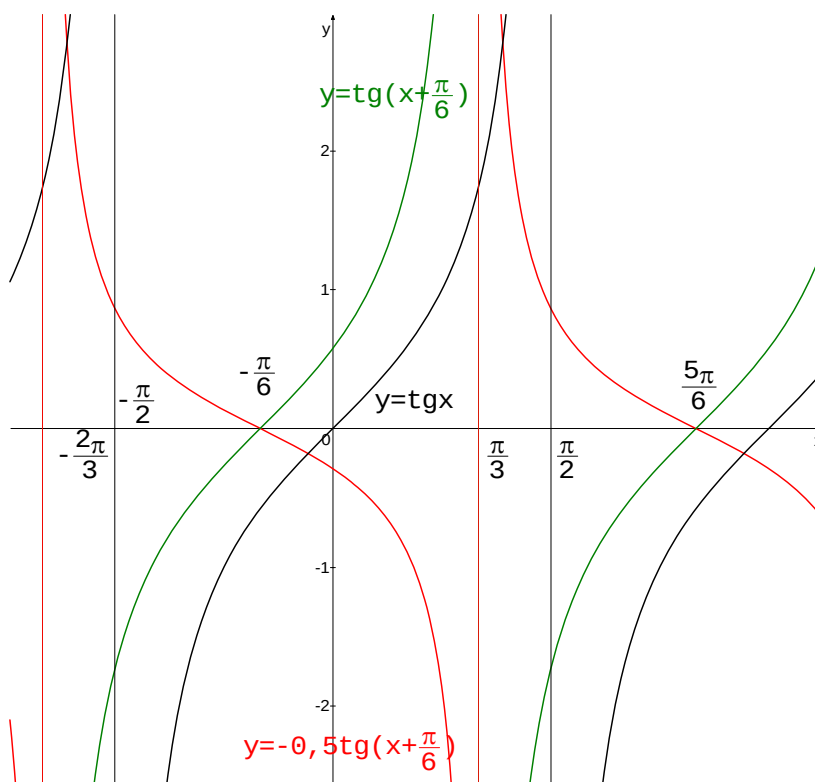
$$y = \operatorname{tg} x$$

$$y = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6})$$

Graf $y = \operatorname{tg} x$ posuneme o $\frac{\pi}{6}$ ve směru záporné poloosy x .

$$y = -0,5 \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6})$$

Funkční hodnoty vynásobíme $-0,5$.



11. a) $L = \cos x + \cos x \cos \frac{2}{3}\pi - \sin x \sin \frac{2}{3}\pi + \cos x \cos \frac{4}{3}\pi - \sin x \sin \frac{4}{3}\pi =$
 $= \cos x + \cos x \left(-\frac{1}{2}\right) - \sin x \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \left(-\frac{1}{2}\right) - \sin x \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 = P,$

b) $L = \sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi + \sin x \cos \pi - \cos x \sin \pi =$
 $= -\sin x + 0 - \sin x - 0 = -2\sin x = P,$

c) $L = 2 \frac{1 + \cos x}{2} - 1 = \cos x = P,$

d) $P = \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \sin x = L.$



Kontrolní otázky



1. Jak je definována funkce?
2. Jak poznáte, že je funkce sudá nebo lichá, znáte-li její funkční předpis?
3. Jak poznáte, že je funkce sudá nebo lichá, znáte-li její graf?
4. Kdy je funkce rostoucí nebo klesající na definičním oboru funkce?
5. Jakou funkci nazýváme prostou?
6. Jak poznáte periodickou funkci, znáte-li její funkční předpis?
7. Na co všechno musíte brát ohled, určujete-li definiční obor funkce?
8. Jak poznáte lineární funkci? Jaký je její definiční obor, obor hodnot, vlastnosti a graf?
9. Jak poznáte kvadratickou funkci, jaký je její definiční obor, obor hodnot, vlastnosti a graf?
10. Jak poznáte lineární lomenou funkci, jaký je její definiční obor, obor hodnot a vlastnosti ?
Načrtněte graf.
11. Jak poznáte mocninovou funkci, jaký je její definiční obor, obor hodnot a vlastnosti?
Načrtněte graf.
12. Jak poznáte exponenciální funkci, jaký je její definiční obor, obor hodnot a vlastnosti?
Načrtněte graf.
13. Jak poznáte logaritmickou funkci, jaký je její definiční obor, obor hodnot a vlastnosti?
Načrtněte graf.
14. Jaké goniometrické funkce znáte? Jaký je jejich definiční obor, obor hodnot a jaké mají vlastnosti ? Načrtněte jejich grafy.

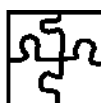
Odpovědi najdete v textu.



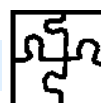
Kontrolní test



1. Najděte definiční obor funkce $y = \ln(x+4)$:
 a) $\langle 0, \infty \rangle$, b) $(-4, \infty)$, c) $\langle -4, \infty \rangle$, d) $(-\infty, -4)$.
2. Najděte definiční obor funkce $y = \sqrt{16-4x^2}$:
 a) $(-2, 2)$, b) $\langle -4, 4 \rangle$, c) $\langle -2, 2 \rangle$, d) $(-4, 4)$.
3. Najděte definiční obor funkce $y = \frac{x+4}{x-5}$:
 a) $(5, \infty)$, b) $(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$, c) $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$, d) $\langle -5, 5 \rangle$.
4. Najděte definiční obor funkce $y = \operatorname{tg} 3x$:
 a) $x \neq \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3}$, b) $\mathbf{R}$, c) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, d) $(-3, 3)$.
5. Najděte definiční obor funkce $y = \sqrt[3]{x^2-4x+3}$:
 a) $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, b) $(1, 3)$, c) $\mathbf{R}$, d) $\langle 1, 3 \rangle$.
6. Najděte definiční obor funkce $y = \operatorname{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$:
 a) $x \neq k\pi$, b) $x \neq \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2}$, c) $\mathbf{R}$, d) $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.
7. Poznejte, která funkce je sudá.
 a) $y = x^2 + 3x - 7$, b) $y = x^2 - \cos x$, c) $y = x - \frac{1}{x}$, d) $y = x - \sin 3x$.
8. Poznejte, která funkce je lichá.:
 a) $y = x^2 - \cos x$, b) $y = x^2 + 3x - 7$, c) $y = x - \sin 3x$, d) $y = x - \frac{1}{x}$.



Výsledky testu



1. b), 2. c), 3. b), 4. a), 5. c), 6. b), 7. b), 8. c) i d).

3. ROVNICE A NEROVNICE	85
3.1. Lineární rovnice	85
3.2. Kvadratické rovnice	86
3.3. Rovnice s absolutní hodnotou	88
3.4. Iracionální rovnice	90
3.5. Exponenciální rovnice	92
3.6. Logaritmické rovnice	94
3.7. Goniometrické rovnice	98
3.8. Nerovnice	101
Úlohy k samostatnému řešení	104
Výsledky úloh k samostatnému řešení	107
Shrnutí lekce	109
Kontrolní test	109
Výsledky testu	110
Klíč k řešení úloh	110

3. ROVNICE A NEROVNICE



Průvodce studiem



V kapitolách 3.1.-3.7. se naučíte poznávat jednotlivé typy rovnic a na řešených příkladech se seznámíte s výpočtem jejich kořenů. Získané vědomosti pak použijete při řešení nerovnic v kapitole 3.8., která se zcela opírá o získané znalosti z předchozích kapitol. Na závěr jsou zařazeny úlohy k procvičení a k upevnění získaných vědomostí, které si ověříte na kontrolním testu.



Cíle



Po prostudování této kapitoly budete schopni řešit lineární, kvadratické rovnice, rovnice s absolutní hodnotou, iracionální, exponenciální, logaritmické a goniometrické rovnice a na závěr se seznámíte s řešením nerovnic.

Úlohy budete řešit v oboru přirozených, celých, racionálních a reálných čísel.



Předpokládané znalosti

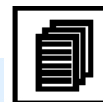


Předpokladem pro studium této kapitoly je alespoň zvládnutí počítání se zlomky a úprav algebraických výrazů.

3.1. Lineární rovnice



Výklad



Lineární rovnice jsou rovnice, jež je možné upravit na tvar $ax + b = 0$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Jich řešením je jediné číslo $x = -\frac{b}{a}$.

Tvar $ax + b = 0$, stejně jako řešení $x = -\frac{b}{a}$, získáváme ze složitějšího zadání ekvivalentními úpravami o nichž víme, že nezmění řešení rovnice. Patří k nim:

- přičítání (odčítání) téhož výrazu k oběma stranám rovnice
- násobení (dělení) obou stran rovnice týmž výrazem ($\neq 0$)

**Řešená úloha**

Příklad 3.1.1. Řešte rovnici $\frac{3x}{2} - \frac{2-x}{10} = \frac{5+x}{4} + \frac{4}{5}$.

Řešení: Obě strany vynásobíme společným jmenovatelem (20) a dostaneme:

$$30x - 4 + 2x = 25 + 5x + 16 \quad / \text{ k oběma stranám přičteme } (4 - 5x)$$

$$27x = 45 \quad / \text{ vydělíme } 27$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Zkouška: $L\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{2} - \frac{1}{30} = \frac{75-1}{30} = \frac{74}{30} = \frac{37}{15},$

$$P\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{20}{12} + \frac{4}{5} = \frac{100+48}{60} = \frac{148}{60} = \frac{37}{15}.$$

Číslo $\frac{5}{3}$ je řešením rovnice.

3.2. Kvadratické rovnice**Výklad**

Kvadratická rovnice je rovnice, kterou je možno upravit na tvar $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Jejím řešením je dvojice čísel, kterou můžeme získat např. ze vzorce:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Výraz $D = b^2 - 4ac$ nazýváme **diskriminantem** kvadratické rovnice. Je-li $D > 0$, pak má rovnice dva různé reálné kořeny, je-li $D = 0$, pak má jeden dvojnásobný reálný kořen, je-li $D < 0$, pak rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel, ale má dva komplexně sdružené kořeny.

Je-li $b = 0$ nebo $c = 0$, jedná se o **neúplnou kvadratickou rovnici**, kterou řešíme následovně:

a) $ax^2 + c = 0$

b) $ax^2 + bx = 0$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

$$x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \frac{-b}{a}$$

Je-li x_1 kořen kvadratické rovnice, pak výraz $(x - x_1)$ se nazývá **kořenový činitel** a $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ je **rozklad kvadratického trojčlenu** na součin kořenových činitelů.



Řešené úlohy



Příklad 3.2.1. Určete kořeny kvadratické rovnice:

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$,

d) $9x^2 - 4 = 0$,

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$,

e) $x^2 + 5x = 0$.

c) $x^2 - 4x + 13 = 0$,

Řešení: a) $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix}$ kořeny reálné, různé,

b) $(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow$ rovnice má jeden dvojnásobný kořen $x_1 = x_2 = 1$,

c) $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = \begin{matrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{matrix}$ kořeny komplexní,

d) $9x^2 = 4, x^2 = \frac{4}{9}, |x| = \sqrt{\frac{4}{9}}, x = \pm \frac{2}{3}$,

e) $x(x + 5) = 0, x = 0 \vee x = -5$.



Výklad



Jsou-li x_1, x_2 kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, resp. $x^2 + px + q = 0$ (rovnice v normovaném tvaru), pak pro kořeny platí **Viètovy vzorce**:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{a} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$\text{resp. } x_1 \cdot x_2 = q \quad \text{a} \quad x_1 + x_2 = -p.$$



Řešené úlohy



Příklad 3.2.2. Určete kořeny kvadratické rovnice $x^2 + 4x - 45 = 0$ pomocí výše uvedených vztahů.

Řešení: $x_1 \cdot x_2 = -45 \Rightarrow -45 = (-1)45 \vee -45 = 1 \cdot (-45) \vee -45 = (-5)9 \vee -45 = 5(-9),$

$x_1 + x_2 = -4,$

zvolené dvojice dosadíme do 2. rovnice:

$$\left. \begin{array}{l} -1 + 45 = 44 \\ 1 - 45 = -44 \\ -5 + 9 = 4 \end{array} \right\} \text{ nevyhovují}$$

$5 - 9 = -4$, proto vyhovuje dvojice $x_1 = 5$, $x_2 = -9$.

Příklad 3.2.3. Pomocí vztahů mezi kořeny a koeficienty sestavte kvadratickou rovnici, jejíž

kořeny jsou: a) $x_1 = -3\sqrt{3}$, $x_2 = 2\sqrt{3}$,

b) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$.

Řešení: a) $x_1 \cdot x_2 = -3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = -18 = q$, $x_1 + x_2 = -3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = -\sqrt{3} = -p$.

Hledaná rovnice má tvar $x^2 + \sqrt{3}x - 18 = 0$.

b) $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} = q$, $x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2} = -p$.

Hledaná rovnice má tvar $x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ nebo $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

3.3. Rovnice s absolutní hodnotou



Výklad



Rovnice s absolutní hodnotou jsou rovnice, v nichž se vyskytuje neznámá alespoň jednou v absolutní hodnotě. Řešit je, znamená upravit je na rovnice, v nichž absolutní hodnota není.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$



Řešené úlohy



Příklad 3.3.1. Řešte rovnici $|x + 3| - |x - 2| = -5$.

Řešení:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{pro } x+3 \geq 0, \text{ t.j. pro } x \in [-3, \infty) \\ -x-3 & \text{pro } x+3 < 0, \text{ t.j. pro } x \in (-\infty, -3) \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{pro } x-2 \geq 0, \text{ t.j. pro } x \in [2, \infty) \\ -x+2 & \text{pro } x-2 < 0, \text{ t.j. pro } x \in (-\infty, 2) \end{cases}$$

	$(-\infty, -3)$	$[-3, 2)$	$[2, \infty)$
$ x+3 $	$-x-3$	$x+3$	$x+3$
$ x-2 $	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
	$-x-3+x-2=-5$ $-5=-5$ pravdivý výrok vyhovují všechna čísla intervalu $(-\infty, -3)$, $x \in (-\infty, -3)$	$x+3-(-x+2)=-5$ $2x+1=-5$ $x=-3$ $x=-3$ vyhovuje, patří do intervalu $[-3, 2)$, $x=-3$	$x+3-(x-2)=-5$ $x+3-x+2=-5$ $5=-5$ nepravdivý výrok nevyhovuje žádné $x \in [2, \infty)$

Řešením rovnice jsou všechna $x \in (-\infty, -3)$.

Příklad 3.3.2. Řešte rovnici $|2y+1| - |3-y| = y$.

Řešení:

$$|2y+1| = \begin{cases} 2y+1 & \text{pro } 2y+1 \geq 0, \text{ t.j. pro } y \in [-\frac{1}{2}, \infty) \\ -2y-1 & \text{pro } 2y+1 < 0, \text{ t.j. pro } y \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$|3-y| = \begin{cases} 3-y & \text{pro } 3-y \geq 0, \text{ t.j. pro } y \in (-\infty, 3] \\ -3+y & \text{pro } 3-y < 0, \text{ t.j. pro } y \in (3, \infty) \end{cases}$$

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$[-\frac{1}{2}, 3]$	$(3, \infty)$
$ 2y+1 $	$-2y-1$	$2y+1$	$2y+1$
$ 3-y $	$3-y$	$3-y$	$-3+y$

$-2y - 1 - (3 - y) = y$ $-2y - 1 - 3 + y = y$ $-2y = 4$ $y = -2$ $y = -2$ patří do $(-\infty, -\frac{1}{2})$	$2y + 1 - (3 - y) = y$ $2y + 1 - 3 + y = y$ $2y = 2$ $y = 1$ $y = 1$ patří do $(-\frac{1}{2}, 3)$	$2y + 1 - (-3 + y) = y$ $2y + 1 + 3 - y = y$ $4 = 0$ nepravdivý výrok nevyhovuje žádné $x \in (-\infty, 3, \infty)$
--	---	--

Řešením rovnice jsou čísla $y = -2$ a $y = 1$.

3.4. Iracionální rovnice



Výklad



Iracionální rovnice jsou rovnice, v nichž se vyskytuje neznámá alespoň jednou pod odmocninou.

Řešit iracionální rovnici znamená, upravit ji na rovnici, v níž odmocniny nejsou. Toho dosáhneme **umocňováním**.

Protože umocňování není ekvivalentní úprava, můžeme zajistit platnost kořenů dvojím způsobem:

- řešíme rovnici a platnost kořenů ověříme **zkouškou**,
- při každém umocňování stanovíme podmínky pro to, aby rovnice daná a umocněná byly ekvivalentní. Tento způsob užíváme jen u jednoduchých iracionálních rovnic.



Poznámka

Rychlejší je způsob řešení a).



Řešené úlohy



Příklad 3.4.1. Řešte rovnici $3 + \sqrt{x-1} = x$ oběma způsoby.

Řešení: 1. způsob: $3 + \sqrt{x-1} = x \quad | -3$ osamostatníme odmocninu

$$\sqrt{x-1} = x-3 \quad |^2 \quad \text{umocníme}$$

$$x-1 = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

Zkouška:

$$\left. \begin{array}{l} L(5) = 3 + \sqrt{5-1} = 5 \\ P(5) = 5 \end{array} \right\} \quad L(5) = P(5) \quad - \text{kořen } 5 \text{ vyhovuje}$$

$$\left. \begin{array}{l} L(2) = 3 + \sqrt{2-1} = 4 \\ P(2) = 2 \end{array} \right\} \quad L(2) \neq P(2) \quad - \text{kořen } 2 \text{ nevyhovuje}$$

2. způsob: $3 + \sqrt{x-1} = x$

$$\sqrt{x-1} = x-3 \quad |^2 \quad \text{podmínka:} \quad x-1 \geq 0 \quad \wedge \quad x-3 \geq 0$$

$$x-1 = x^2 - 6x + 9 \quad x \geq 1 \quad \wedge \quad x \geq 3$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad \text{rovnici dále řešíme pro } x \geq 3$$

$$x_{1,2} = \left\langle \begin{array}{l} 5 \quad \text{vyhovuje podmínce.} \\ 2 \quad \text{nevyhovuje podmínce.} \end{array} \right.$$

Závěr: Řešením zadané rovnice je $x = 5$.



Výklad



Je-li v rovnici více odmocnin, opět jednu osamostatníme a ostatní členy rovnice převedeme (před umocňováním) na druhou stranu. Je zřejmé, že bude třeba postup a umocňování opakovat.

Příklad 3.4.2. Řešte rovnici $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = 7$

Řešení: $\sqrt{x+5} = 7 - \sqrt{x-2} \quad /^2$

$$x+5 = 49 - 14\sqrt{x-2} + x-2$$

$$14\sqrt{x-2} = 42 \quad / :14$$

$$\sqrt{x-2} = 3 \quad /^2$$

$$x-2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 11$$

Zkouška: $L(11) = \sqrt{11+5} + \sqrt{11-2} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7 = P.$

Závěr: Řešením dané rovnice je $x = 11$.

3.5. Exponenciální rovnice



Výklad



Exponenciální rovnice jsou rovnice, které mají neznámou v exponentu mocniny.

Jejich řešení probíhá ve dvou krocích:

1) rovnici převedeme na základní tvar $a^x = b$, kde $a > 0$, $a \neq 1$

2) základní tvar řešíme.

V převodu na základní tvar užíváme především znalostí o počítání s mocninami, ojediněle pak substituce $a^x = y$

Při řešení základního tvaru $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$ platí:

pro $b < 0$ nemá rovnice řešení

$b > 0$ řešení má a rozlišujeme dvě možnosti:

1. a a b z rovnice $a^x = b$ lze převést na **mocniny o stejném základu**. Pak použijeme vlastnost $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
2. a a b nelze převést na mocniny o stejném základu. Pak použijeme definice logaritmu nebo obě strany rovnice zlogaritmujeme.



Poznámka

Obecně lze exponenciální rovnice řešit graficky nebo přibližnými numerickými metodami.



Řešené úlohy



Příklad 3.5.1. Řešte rovnici $2^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+2} = 240$.

Řešení:

a) převod na základní tvar (užijeme znalostí o počítání s mocninami):

$$2^x - 3 \cdot 2^x \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^x \cdot 2^2 = 240$$

$$2^x [1 - 6 + 20] = 240$$

$$2^x \cdot 15 = 240 \quad / :15$$

$$2^x = 16,$$

b) řešení základního tvaru $2^x = 16$

$$2^x = 2^4, \text{ protože platí: } a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x), \\ x = 4.$$

Příklad 3.5.2. Řešte rovnici $3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 4 = 0$.

Řešení: a) převod na základní tvar substitucí

$$\begin{aligned} (3^x)^2 + 3(3^x) - 4 &= 0 & 3^x = a \text{ je vhodná substituce} \\ a^2 + 3a - 4 &= 0 \\ a_{1,2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 1 \\ -4 \end{matrix} \end{aligned}$$

b) řešení základního tvaru: po dosazení do substituční rovnice dostaneme

$$3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0 \text{ je řešením dané rovnice.}$$

Rovnice $3^x = -4$ nemá řešení, neboť vždy platí $3^x > 0$.

Příklad 3.5.3. Řešte rovnici $4^x + 3^{x+3} = 4^{x+3} - 3^{x+2}$.

Řešení: a) převod na základní tvar:

$$\begin{aligned} 3^{x+3} + 3^{x+2} &= 4^{x+3} - 4^x \\ 3^x \cdot 3^3 + 3^x \cdot 3^2 &= 4^x \cdot 4^3 - 4^x \\ 3^x \cdot (27 + 9) &= 4^x \cdot (64 - 1) \\ \frac{3^x}{4^x} &= \frac{63}{36} = \frac{7}{4} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^x &= \frac{7}{4}, \end{aligned}$$

b) základní tvar řešíme zlogaritmováním obou stran rovnice:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{3}{4}\right)^x &= \log \frac{7}{4} \\ x \log \frac{3}{4} &= \log \frac{7}{4} \Rightarrow x = \frac{\log \frac{7}{4}}{\log \frac{3}{4}} \doteq -1,94526. \end{aligned}$$

3.6. Logaritmické rovnice



Výklad



Logaritmické rovnice jsou rovnice, které mají neznámou v argumentu logaritmu.

Při řešení logaritmických rovnic používáme nejčastěji:

a) definici logaritmu: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

b) vlastnosti logaritmů: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0.$$

Při řešení logaritmických rovnic se často setkáme s těmito typickými situacemi:

a) obdržíme logaritmickou rovnici v základním tvaru $\log_a x = b$, ($a > 0, a \neq 1$) a pro libovolné b má tato rovnice jediné řešení $x = a^b$ (příklad 3.6.1.)

b) zadání je složitější a pomocí vlastností logaritmů převedeme na:

1. základní tvar $\log_a x = b$, (příklad 3.6.2.)

2. základní tvar $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, což platí tehdy a jen tehdy, když $f(x) = g(x)$,

(příklad 3.6.3.)

c) zadání naznačuje, že by zjednodušení pomocí substituce $\log_a x = y$ nebo $a^{\log x} = y$ převedlo rovnici logaritmickou na rovnici algebraickou, jež by byla snáze řešitelná, (příklad 3.6.4. a 3.6.5).



Poznámka

Obecně se logaritmické rovnice řeší graficky nebo přibližnými numerickými metodami.





Řešené úlohy



Příklad 3.6.1. Řešte rovnici $\log_2 x = 4$.

Řešení: Rovnice je definována pro $x > 0$. Pak podle definice logaritmu platí:

$$x = 2^4$$

$$x = 16, \quad \text{což vyhovuje podmínce.}$$

Příklad 3.6.2. Řešte logaritmickou rovnici $\log x + 3 \log x^2 + 5 \log x^3 = 11$.

Řešení: Rovnice je definována pro $x > 0$.

$$\log x + 3 \cdot 2 \log x + 5 \cdot 3 \log x = 11$$

$$(1 + 6 + 15) \log x = 11$$

$$\log x = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$$

$$x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}, \quad \text{což vyhovuje podmínce.}$$

Příklad 3.6.3. Řešte logaritmickou rovnici $\log(x+3)^2 - \log[4(x+1)^2] = 0$.

Řešení: Podmínka: $(x+3)^2 > 0 \wedge 4(x+1)^2 > 0$, $x \neq -3 \wedge x \neq -1$.

Levou stranu rovnice upravíme pomocí vlastností logaritmů a pravou stranu vyjádříme jako logaritmus:

$$\log \frac{(x+3)^2}{4(x+1)^2} = \log 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{4(x+1)^2} = 1 \quad | \cdot 4(x+1)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 = 4x^2 + 8x + 4$$

$$3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 35}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-2 \pm 8}{6} = \left\langle -\frac{5}{3} \right.$$

Závěr: $x = 1$ i $x = -\frac{5}{3}$ vyhovují podmínce a jsou řešením dané rovnice.

Příklad 3.6.4. Řešte logaritmickou rovnici $\log_2^2 x + 2 \log_2 x - 3 = 0$.

Řešení: Zvolíme substituci $\log x = y$ a dostaneme kvadratickou rovnici

$$y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (y+3)(y-1) = 0 \Rightarrow y_1 = -3, y_2 = 1.$$

Dosadíme zpět do substituční rovnice:

$$\log_2 x = -3 \Rightarrow x = 2^{-3} = \frac{1}{8},$$

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2.$$

Závěr: $x = \frac{1}{8}, x = 2$ vyhovují podmínce $x > 0$ a jsou řešením dané rovnice.



Poznámka

Pozor na psaní mocniny: $\log^2 x \neq \log x^2$.



Příklad 3.6.5. Určete všechna přirozená čísla x splňující rovnici $4^{\log x} - 7 \cdot 2^{\log x} - 8 = 0$.

Řešení: Nejprve si převedeme zápis $4^{\log x} = (2^2)^{\log x} = 2^{2 \log x} = (2^{\log x})^2$ a pomocí

substituce $2^{\log x} = y$ danou rovnici převedeme na rovnici kvadratickou

$$y^2 - 7y - 8 = 0 \Rightarrow (y+1)(y-8) = 0 \Rightarrow y = -1, y = 8.$$

Vrátíme se k substituci a dosadíme za y jen hodnotu 8, protože -1 nevyhovuje

podmínce $x > 0$, takže $2^{\log x} = 8 = 2^3 \Rightarrow \log x = 3 \Rightarrow x = 10^3$

Příklad 3.6.6. Řešte rovnici: $2^{\log x} + 3^{\log x-1} = 2^{\log x+1} - 3^{\log x-2}$.

Řešení: Nejprve upravíme rovnici tak, abychom měli na levé straně rovnice mocniny o základu 2, na pravé straně mocniny o základu 3 a zároveň využijeme znalostí o počítání s mocninami.

$$2^{\log x} - 2^{\log 2} \cdot 2 = -3^{\log x} \cdot 3^{-2} - 3^{\log x} \cdot 3^{-1},$$

vytkneme mocninu $2^{\log x} (1 - 2) = 3^{\log x} \left(-\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right)$.

$$\text{Upravíme na tvar} \quad \frac{2^{\log x}}{3^{\log x}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Získali jsme exponenciální rovnici o stejném základu, takže platí

$$\log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100.$$

Příklad 3.6.7. Řešte logaritmickou rovnici $\log(x+1)^2 \cdot \log \sqrt{x+1} = 2 + \log \frac{1}{x+1}$.

Řešení: Podmínka: $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$

Pomocí vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar:

$$\begin{aligned} 2 \log(x+1) \cdot \frac{1}{2} \log(x+1) &= 2 + \log 1 - \log(x+1) & | \log 1 = 0 \\ [\log(x+1)]^2 + \log(x+1) - 2 &= 0 & | \log(x+1) = y \text{ (substituce)} \\ y^2 + y - 2 &= 0 \\ y_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \end{aligned}$$

Vrátíme se k substituční rovnici:

$$\log(x+1) = -2 \quad \text{a} \quad \log(x+1) = 1,$$

základní tvar logaritmické rovnice je pak

$$\log(x+1) = \log 10^{-2}, \quad \log(x+1) = \log 10,$$

$$x+1 = 10^{-2} \quad x+1 = 10^1$$

$$x = \frac{1}{100} - 1 \quad x = 9$$

$$x = -\frac{99}{100} = -0,99$$

Závěr: $x = -0.99$ a $x = 9$ vyhovují podmínce a jsou řešením dané rovnice.

Příklad 3.6.8. Vyřešte rovnici $\frac{\log(x^2+9)}{\log \sqrt{x+3}} = 4$ a stanovte podmínky řešitelnosti.

Řešení: Protože existují jen logaritmy kladných čísel, musí být $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$,

dále musí platit: $\log \sqrt{x+3} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+3} \neq 1 \Rightarrow x \neq -2$,

takže rovnice je řešitelná pro $x \in (-3; -2) \cup (-2; \infty)$.

Po vynásobení jmenovatelem máme $\log(x^2+9) = 4 \log \sqrt{x+3}$,

převědeme úpravou na základní tvar $\log(x^2+9) = \log(x+3)^2$,

odtud po odlogaritmování dostaneme $x^2+9 = x^2+6x+9 \Rightarrow x = 0$.

Závěr: $x = 0$ vyhovuje podmínce a je řešením dané rovnice.

3.7. Goniometrické rovnice



Výklad



Goniometrické rovnice jsou rovnice, které mají neznámou v argumentu goniometrické funkce.

Základní typy goniometrických rovnic a jejich řešení

a) Typ $\sin x = a$, $\cos x = a$, kde $a \in (-1, 1)$, $\operatorname{tg} x = b$, $\operatorname{cotg} x = b$.

Tyto rovnice mají nekonečně mnoho řešení, a proto určíme nejdříve kořeny ležící v základním intervalu. Ten je u sinu a kosinu $\langle 0, 2\pi \rangle$ a pak všechna řešení zapíšeme přidáním celého násobku periody $T = 2\pi$, u tangens a kotangens určíme kořeny ležící v základním intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nebo $(0, \pi)$ a opět všechna řešení zapíšeme přičtením celého násobku periody $T = \pi$, (viz řešené příklady 3.7.1.).

b) Typ $\sin A(x) = a$, $\cos A(x) = a$, $a \in (-1, 1)$, $\operatorname{tg} A(x) = b$, $\operatorname{cotg} A(x) = b$,
kde $A(x)$ je algebraický výraz v proměnné x , řešíme substitucí $A(x) = \alpha$, (příklad 3.7.2.).

c) Typ obsahující různé mocniny goniometrické funkce stejného argumentu převedeme na algebraickou rovnici, (příklad 3.7.3.).

d) Typ obsahující více goniometrických funkcí stejného argumentu, řešíme převedením všech funkcí na jedinou funkci téhož argumentu, (příklad 3.7.4.).

e) Typ rovnice anulované, jejíž levou stranu lze rozložit na součin, řešíme tak, že jednotlivé činitele položíme rovny nule a řešíme, (příklad 3.7.5.).



Řešené úlohy



Příklad 3.7.1. Řešte rovnice: a) $\sin x = 0,5$,

b) $\operatorname{tg} x = -1$.

Řešení: a) $\sin x = 0,5$

Kladných hodnot v základním intervalu nabývá sinus v I. a II. kvadrantu.

Proto: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ je řešení v I. kvadrantu,

$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ je řešení v II. kvadrantu.

Všechna řešení dané rovnice jsou: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\operatorname{tg} x = -1$

$\operatorname{tg} x = 1$ pro $x = \frac{\pi}{4}$, záporných hodnot nabývá funkce tangens ve II. kvadrantu, tedy

kořen $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Všechna řešení dané rovnice jsou $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, kde k je celé číslo.

Příklad 3.7.2. Řešte rovnici $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = -1$.

Řešení: Zvolíme substituci $2x + \frac{\pi}{6} = \alpha$, pak rovnice bude ve tvaru $\cos \alpha = -1$,

$\alpha = \pi$ je pak řešení v základním intervalu $< 0, 2\pi >$.

$$2x + \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ jsou všechna řešení.}$$

Příklad 3.7.3. Řešte goniometrickou rovnici $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Řešení: Substitucí $\sin x = y$ se změni daná rovnice na $2y^2 - y - 1 = 0$,

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \left\langle -\frac{1}{2} \right.$$

Pro $\sin x = 1$ je $x_1 = \frac{\pi}{2}$ řešení v základním intervalu,

pro $\sin x = -\frac{1}{2}$ je řešení ve III. a IV. kvadrantu. Opět je vhodné vyjít z řešení rovnice

$\sin x' = \frac{1}{2}$ v intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, pak $x' = \frac{\pi}{6}$ a pro III.kvadrant je $x_2 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$,

pro IV.kvadrant dostaneme $x_3 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$

Závěr: všechna řešení dané rovnice jsou $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$,

$$x_3 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Příklad 3.7.4. Řešte rovnici $\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{cotg} x$.

Řešení: Protože $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, rovnici napíšeme ve tvaru

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{\operatorname{tg} x} \quad | \cdot \operatorname{tg} x, \quad \text{podmínky řešitelnosti: } x \neq k\pi, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 3$$

$$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3},$$

$$\text{pro } \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad \text{je } x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\text{pro } \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \quad \text{je } x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{2}{3}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Příklad 3.7.5. Řešte rovnici $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$.

Řešení: Pomocí vztahu $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ odstraníme v rovnici různé argumenty

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x + 1 = 0, \quad \text{dosadíme za } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x = 0, \text{ vytkneme } \cos x, \\ \cos x(2\cos x + 1) = 0.$$

Pro $\cos x = 0$ je $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$,

pro $(2\cos x + 1) = 0$ je $\cos x = -\frac{1}{2}$ (II. a III.kvadrant).

Nejprve si opět uvědomíme řešení rovnice $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$, pak

pro II. kvadrant dostaneme řešení $x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$,

pro III. kvadrant máme řešení $x_3 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$.

Všechna řešení dané rovnice jsou $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $x_3 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

3.8. Nerovnice



Výklad



Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ funkce definované v $\mathbf{R}$ s oborem hodnot v $\mathbf{R}$ nazýváme **nerovnicí** vztah $f(x) > g(x)$ [*resp.* $f(x) \geq g(x)$] a $f(x) < g(x)$ [*resp.* $f(x) \leq g(x)$].

Úloha nalézt všechna x , která vyhovují dané nerovnici, se opírá o znalosti a dovednosti získané v kapitolách o řešení rovnic.

I zde užíváme ekvivalentních úprav, jak byly zavedeny u lineárních rovnic s tím, že při násobení nebo dělení záporným číslem se mění znaménko nerovnice.



Řešené úlohy



Příklad 3.8.1. Řešte nerovnici $2(2x + 3) - 10 < 6(x - 2)$.

Řešení: Zjednodušíme vynásobením $4x + 6 - 10 < 6x - 12$ $|(-6x + 4)$,
členy s neznámou budou na jedné straně $-2x < -8$ $| : (-2)$,
vydělíme koeficientem u x $x > 4$,
řešením nerovnice jsou všechna $x \in (4, \infty)$.

Příklad 3.8.2. Řešte nerovnici $\frac{4-7x}{6-x} \leq 2$.

Řešení: Nerovnice má smysl pro $x \neq 6$ a nelze ji vynásobit výrazem $(6-x)$, protože nevíme, je-li výraz kladný nebo záporný. Podíl porovnáváme vždy s nulou, proto volíme následující postup:

$$\frac{4-7x}{6-x} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{4-7x-12+2x}{6-x} \leq 0 \Rightarrow \frac{-8-5x}{6-x} \leq 0.$$

Nulové body, v nichž se mění znaménko čitatele a jmenovatele jsou $x = -\frac{8}{5}$ a $x = 6$.

Rozdělí nám číselnou osu na tři disjunktní intervaly. Do zlomku dosadíme libovolné číslo, např. -3, které se nachází v levém intervalu a zjistíme, že zlomek je kladné hodnoty. V dalších intervalech zlomek střídá své znaménkové hodnoty a to vyznačíme pod číselnou osou jako +, -, +. Nulový bod jmenovatele nesmíme do intervalu zařadit.



Řešením nerovnice jsou $x \in (-\infty; -\frac{8}{5}) \cup (6; \infty)$.

Příklad 3.8.3. Řešte nerovnici $3 + 2x - 8x^2 \leq 0$.

Řešení: Kvadratické nerovnice řešíme opět pomocí nulových bodů, takže je nejprve anulujeme a pak vždy rozložíme levou stranu na součin kořenových činitelů (viz.kap.3.2.). Danou nerovnici vynásobíme (-1) , tím se změní znak nerovnice a levou stranu pak upravíme na součin, takže $8x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow 8\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 0$,

nulové body: $x = -\frac{1}{2}$ a $x = \frac{3}{4}$.

Na číselné ose, rozdělené nulovými body na 3 disjunktní intervaly, vyznačíme kladnost nebo zápornost kvadratického trojčlenu v jednotlivých intervalech. Nulové body do intervalu patří.



Řešením nerovnice jsou $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{4}; \infty)$.

Příklad 3.8.4. Řešte nerovnici $|2y + 1| - |3 - y| < y$.

Řešení: Při řešení nerovnic s absolutními hodnotami postupujeme podobně jako při řešení rovnic s absolutními hodnotami (viz kap.3.3.). Zde však zjišťujeme průnik řešení s jednotlivými intervaly. Řešení nerovnice se opět opírá o metodu nulových bodů, které rozdělí číselnou osu na intervaly, v našem příkladě na tři intervaly.

V dané nerovnici jsou nulové body $-\frac{1}{2}$ a 3. V následující tabulce je nejprve

uvedeno, jaký je dvojčlen v absolutní hodnotě v jednotlivých intervalech, zda je hodnoty kladné či záporné, a pak následuje řešení nerovnice.

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}, 3)$	$[3, \infty)$
$ 2y + 1 $	$-2y - 1$	$2y + 1$	$2y + 1$
$ 3 - y $	$3 - y$	$3 - y$	$-3 + y$
řešení nerovnice	$-2y - 1 - (3 - y) < y$ $-2y < 4$ $y > -2$	$2y + 1 - (3 - y) < y$ $2y < 2$ $y < 1$	$2y + 1 - (-3 + y) < y$ $2y + 1 + 3 - y < y$ $4 < 0$
průnik s předpokladem	$y \in (-2, -\frac{1}{2})$	$y \in (-\frac{1}{2}, 1)$	prázdná množina

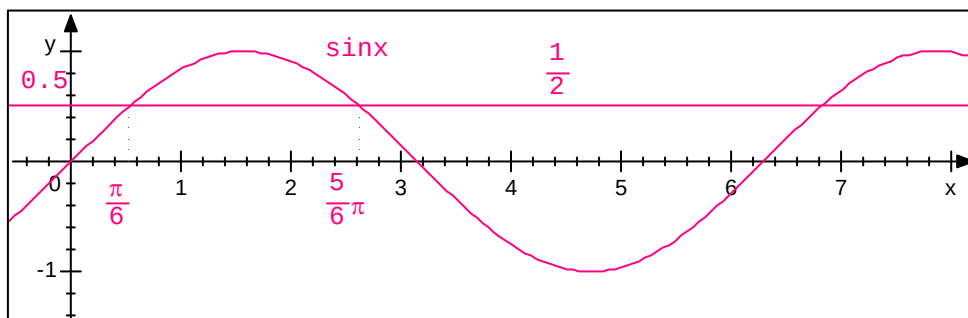
Řešením nerovnice jsou $y \in (-2, 1)$.

Příklad 3.8.5. Řešte nerovnici $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$.

Řešení:

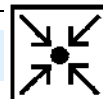
$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{pro} \quad x = \frac{\pi}{6} \quad \text{nebo} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi \quad \text{v základním intervalu}$$

$$\sin x \geq 1/2 \quad \text{pro} \quad x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right]$$





Úlohy k samostatnému řešení



1. Řešte lineární rovnice:

a) $x - 3[x - 5(x - 4)] = 10(x - 3),$

b) $\frac{5x+1}{6} - \frac{7x-3}{8} = 1 - \frac{3x-1}{4},$

c) $x - 4[x - 2(x + 6)] = 5x + 3,$

d) $\frac{6+25x}{15} - (x-1) = \frac{2x}{3} + \frac{7}{5},$

e) $v + \frac{3-7v}{5} = \frac{v+3}{5} - \frac{2v-1}{3}.$

2. Rozložte na součin kořenových činitelů

a) $x^2 + 5x,$

b) $x^2 + 2x - 3,$

c) $2x^2 + 4x + 2,$

d) $-\frac{x^2}{2} + 1,$

e) $3x^2 + 2x - 1.$

3. Řešte kvadratické rovnice:

a) $3x^2 + 6x - 9 = 0,$

b) $5x^2 - 20x = 5,$

c) $x^2 - 0,8x = 15,84;$

d) $4x^2 + x - 3 = 0,$

e) $x^2 + x + 1 = 0.$

4. Normovaný kvadratický trojčlen rozložte na součin kořenových činitelů:

a) $x^2 - 4x + 3,$

b) $x^2 - 2x - 35,$

c) $x^2 - 10x + 9,$

d) $x^2 - 4x - 60.$

5. Sestavte kvadratickou rovnici jejíž kořeny jsou :

a) 2 a 3,

b) -5 a 2.

6. Řešte rovnice (pomocí Viětových vzorců $x_1 \cdot x_2 = q$, $x_1 + x_2 = -p$)

a) $x^2 - 7x + 6 = 0,$

b) $x^2 + 4x - 12 = 0,$

c) $x^2 - 19x - 20 = 0.$

7. Řešte rovnice:

a) $|x - 7| + 4x = |2x - 5|$, b) $|x - 2| = \frac{x}{2}$, c) $|2x + 1| + |2 - x| = 3$,
d) $|1 - x| + |x| = -1$, e) $|x + 1| + 3|x - 1| = 2|x| + x$, f) $|7 - x| = |1 - x| + 3|x|$.

8. Řešte rovnice:

a) $21 + \sqrt{2x - 7} = x$, b) $\sqrt{x + 2} = -3$, c) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 9} = 9$,
d) $\sqrt{9 + x} - \sqrt{x - 7} = 2$, e) $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1) = x + 1$, f) $\sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 5} = 3$,
g) $\sqrt{2x + 7} - \sqrt{x - 5} = \sqrt{3x + 2}$.

9. Řešte exponenciální rovnice v základním tvaru:

a) $10^x = 0,01$, b) $2^{-x} = \frac{1}{8}$, c) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^8$,
d) $0,25\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = 1$, e) $2^x = 100$, f) $2^{-x} = 1,8$.

10. Řešte v oboru reálných čísel rovnice:

a) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$, b) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} + 3^{2x-4} = 333$,
c) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$, d) $\frac{3^{x+2}}{3^{2x-4}} = \frac{\log 64}{\log 4}$,
e) $5^{2-x} = 6^{2x-4}$, f) $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$,
g) $2 \cdot 5^{2x} + 2 \cdot 5^x - 12 = 0$.

11. Užijte definice logaritmu k řešení jednoduchých rovnic:

a) $\log_3 x = 2$, b) $\log_2 x = \frac{1}{2}$, c) $\log_4 x = -1$,
d) $\log_x 4 = 2$, e) $\log_x 0,1 = -1$, f) $\log_x 100 = 2$,
g) $\log_2 \frac{1}{8} = x$, h) $\log_2 \sqrt[3]{4} = x$, i) $\log_3 3 = x$.

12. Určete všechna řešení daných rovnic v oboru reálných čísel:

a) $\log(x+2) - \log(x-1) = 2 - \log 4,$

b) $3 \log_3 x - 2 \log_3 x^3 + \log_3 x^2 = 2,$

c) $\frac{\log 2x}{\log(4x-15)} = 2,$

d) $3 \cdot 16^{\log x} - 5 \cdot 4^{\log x} - 2 = 0,$

e) $\log_3(x-1) - 2 \log_3(x-3) = 0,$

f) $\frac{\log_2(x-1)}{\log_2(3-x)} = \log_2 4.$

13. Řešte goniometrické rovnice:

a) $\sin x = -0,5,$

b) $\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2},$

c) $\cotg \frac{x}{2} = 1,$

d) $4 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 1,$

e) $\sin 2x = \sin x,$

f) $\sin^2 x + \frac{1}{4} = \sin x,$

g) $3 \cos^2 2x = \sin^2 2x,$

h) $\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x = 0,$

i) $\tg x = \cotg x,$

j) $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1.$

14. Řešte v oboru reálných čísel nerovnice:

a) $\frac{2+27x}{6} < \frac{5}{2} + \frac{12x+1}{3},$

b) $\frac{4x}{3} \leq \frac{2}{3} + x,$

c) $(3x-5)^2 + (4x-3)^2 > (5x-4)^2,$

d) $\frac{3-2x}{2x-5} < 0,$

e) $\frac{3x-7}{3-2x} \geq 2,$

f) $3x^2 - 3x + 4 \geq 2x^2 + 2x - 2,$

g) $3x^2 - 19x + 6 < 0,$

h) $1 + 2x - 3x^2 < 0.$

15. Řešte nerovnice s absolutní hodnotou:

a) $|x| + |x-1| > 2,$

b) $|2x-3| \geq |3x-2|,$ c)

$|7-x| > |1-x| + 3|x|,$ d) $\frac{|3-5x|}{x-1} > 5.$

16. Řešte goniometrické nerovnice:

a) $\sin x < -0,5$; b) $\cotg \frac{x}{2} < 1$, c) $\tg 2x \geq -1$.



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $x = 10$, b) $x = 1$, c) rovnice nemá řešení,
 d) rovnice má nekonečně mnoho řešení, e) $v = 5$.
2. a) $x^2 + 5x = x(x + 5)$, b) $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$,
 c) $2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)^2$, d) $-\frac{x^2}{2} + 1 = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$,
 e) $3x^2 + 2x - 1 = 3(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (3x - 1)(x + 1)$.
3. a) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, b) $x_1 = 2 + \sqrt{5}$, $x_2 = 2 - \sqrt{5}$,
 c) $x_1 = -3,6$; $x_2 = 4,4$, d) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{4}$,
 e) rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel.
4. a) $(x - 1)(x - 3)$, b) $(x - 7)(x + 5)$,
 c) $(x - 1)(x - 9)$, d) $(x - 10)(x + 6)$.
5. a) $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$, $x^2 - 5x + 6 = 0$,
 b) $(x + 5)(x - 2) = x^2 + 3x - 10$, $x^2 + 3x - 10 = 0$.
6. a) $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, b) $x_1 = 2$, $x_2 = -6$,
 c) $x_1 = 20$, $x_2 = -1$.
7. a) $x = -\frac{2}{5}$, b) $x = \frac{4}{3}$ a $x = 4$,
 c) $x = -\frac{2}{3}$ a $x = 0$, d) nemá řešení,
 e) $x = \frac{4}{5}$, $x = 2$, f) $x = -2$, $x = \frac{8}{5}$.

8. a) $x = 28$, b) nemá řešení, c) $x = 16$, d) $x = 16$,
 e) $x = 9$, f) nemá řešení, g) $x = 5$.
9. a) $x = -2$, b) $x = 3$, c) $x = -4$, d) $x = -\frac{1}{2}$,
 e) $x = \log_2 100$ nebo $x = \frac{2}{\log 2} \doteq 6,644$, f) $x = -\frac{\log 1,8}{\log 2} \doteq -0,845$.
10. a) $x = 9$, b) $x = 3$, c) $x = \frac{\log 31 - \log 13}{\log 3 - \log 5} \doteq -1,701$;
 d) $x = 5$, e) $x = 2$, f) $x = 0$,
 g) $x = \log_5 2$ nebo $x = \frac{\log 2}{\log 5} \doteq -0,431$.
11. a) $x = 9$, b) $x = \sqrt{2}$, c) $x = \frac{1}{4}$,
 d) $x = 2$, e) $x = 10$, f) $x = 10$,
 g) $x = -3$, h) $x = \frac{2}{3}$, i) $x = 1$.
12. a) $x = \frac{9}{8}$, b) $x = \frac{1}{9}$, c) $x = \frac{9}{2}$,
 d) $x = \sqrt{10}$, e) $x = 5$, f) nemá řešení.
13. a) $x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \pm \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,
 c) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,
 e) $x_1 = k\pi$, $x_{2,3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$,
 g) $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, h) $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
 i) $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
 j) $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + 4k\pi$, $x_3 = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

14.a) $x \in (-\infty, 5)$, b) $x \in (-\infty, 2 >$, c) $x \in (-\infty, \frac{9}{7})$, d) $x \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$,

e) $x \in (\frac{3}{2}, \frac{13}{7} >$, f) $x \in (-\infty, 2 > \cup < 3, \infty)$, g) $x \in (\frac{1}{3}, 6)$, h) $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$.

15.a) $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$, b) $x \in < -1, 1 >$, c) $x \in (-2, \frac{8}{5})$, d) $x \in (1, \infty)$.

16.a) $x \in (\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi)$, b) $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, c) $x \in < -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.



Shrnutí lekce



První informace o úspěšném zvládnutí této kapitoly Vám dají příklady k procvičení. Pokud nevycházejí uvedené výsledky, vraťte se k teorii a řešeným příkladům. Důvodem neúspěchu by mohly být i numerické chyby. Pokud máte pocit, že většinu příkladů k procvičení zvládáte, přistupte k následujícímu testu. Pokud se vám však zdají některé příklady těžké, nahlédněte do klíče na konci kapitoly, kde najdete postup nebo návod k řešení.



Kontrolní test



1. Pro která x je trojčlen $4x^2 + 4x + 1$ roven nule?

a) $x = 0$,

b) $x = \pm \frac{1}{2}$,

c) $x = -\frac{1}{2}$.

2. Pro která x je trojčlen $4x^2 + 4x + 1$ roven čtyřem?

a) $x_1 = 2, x_2 = -3$,

b) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$,

c) $x_1 = 0, x_2 = 4$.

3. Řešte rovnici $x - \sqrt{x^2 - 12} = 2$.

a) $x_{1,2} = \pm 2$,

b) $x = 4$

c) $x = 0$.

4. Určete řešení rovnice s absolutními hodnotami: $|x - 2| = 3|x - 4|$.

a) $x_1 = 3,5; x_2 = 5$,

b) $x \in (0,1)$

c) $x = -4$.

5. V oboru reálných čísel řešte rovnici $\log \sqrt{3x - 5} + \log \sqrt{7x - 3} = 1 + \log \frac{\sqrt{11}}{10}$.

a) $x = -1$,

b) $x = 2$,

c) $x = \frac{-2}{11}$.

6. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $5 \cdot 2^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+2} = 3^{x+3} + 2 \cdot 2^{x+1}$.

a) $x = 0$,

b) $x_{1,2} = \pm 2$,

c) $x = -4$.

7. Najděte všechna řešení rovnice $2 \sin^2 x + 7 \cos x - 5 = 0$.

a) $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,

b) $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$,

c) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$.

8. V oboru reálných čísel řešte nerovnici $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x} < 0$.

a) $x_1 = 3, x_2 = 4$,

b) $x \in \langle 0; 1 \rangle$,

c) $x \in (-2; 0) \cup (1; 4)$.

9. V oboru reálných čísel řešte nerovnici $|1 - 2x| + |2 + 3x| < 11$.

a) $x \in \left(-\frac{12}{5}; 2\right)$,

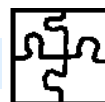
b) $x \in (-\infty; 2)$,

c) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; 3)$.



Výsledky testu

1.c); 2. b); 3.b); 4.a); 5.b); 6.c); 7.a); 8.c); 9.a).



Klíč k řešení úloh

- a) Nejprve roznásobíme výraz v kulaté závorce, pak v hranaté a po úpravě dostaneme $3x = 30 \Rightarrow x = 10$.

b) Vynásobením společným jmenovatelem (24) odstraníme zlomky, upravíme na tvar $17x = 17 \Rightarrow x = 1$.

c) stejný postup jako v úloze a), po úpravě se x vyruší a zůstane, že $45 = 0$, a proto rovnice nemá řešení.
- viz zápis řešení ve výsledku.
- Všechny kvadratické rovnice musí být v základním tvaru, tzn. na pravé straně je 0. Je vhodné před použitím vzorce pro kořeny kvadratické rovnice (kap.3.2.) vytknout společný násobek koeficientů.
- Hledáme takovou dvojici čísel, že jejich součin je 3 a součet -4, součin je -35 a součet -2, součin je 9 a součet -10, součin je -60 a součet -4. Která to jsou?(viz příklad 3.2.2.).



5. viz příklad 3.2.3.
6. viz příklad 3.2.2.
7. Volte stejný postup jako v příkladu 3.3.1. nebo 3.3.2.
- a) nulové body $x = 7$ a $x = \frac{5}{2}$ rozdělí číselnou osu na 3 intervaly. Pro každý interval zjistíme jakých hodnot nabývá v absolutní hodnotě a rovnici přepíšeme bez absolutních hodnot, vyřešíme ji a výsledek porovnáme s předpokladem.
- b) nulový bod je $x = 2$. Nejprve rovnici řešíme pro $x \in (-\infty; 2)$ a pak pro $x \in [2; +\infty)$.
- c) nulové body $x = -\frac{1}{2}$ a $x = 2$ rozdělí číselnou osu na 3 intervaly.
- d) nulové body $x = 0$ a $x = 1$ rozdělí číselnou osu na 3 intervaly.
- e) nulové body $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ rozdělí číselnou osu na 4 intervaly.
- f) nulové body jsou $x = 0$, $x = 1$, $x = 7$.
8. a) návod na řešení najdete v řešeném příkladu 3.4.1. Umocněním a úpravou dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - 44x + 448 = 0 \Rightarrow (x - 28)(x - 16) = 0$. Zkouškou si ověříte, že rovnici vyhovuje pouze kořen $x = 28$.
- b) stejný postup jako za a).
- c) rovnici si upravíme takto: $\sqrt{x+9} = 9 - \sqrt{x}$ a dále postupujeme stejně jako u př. 3.4.2.
- d) obdobně jako v úloze 3.4.2.
- e) po roznásobení závorek a úpravě dostaneme $\sqrt{x} = 3$.
- f) rovnice nemá řešení, protože platí podmínka $x \geq 5$.
- g) rovnici umocníme, upravíme a dostaneme $4(2x + 7)(x - 5) = 0$. Zkouškou zjistíme, že vyhovuje pouze $x = 5$.
9. Všechny rovnice a) až c) se řeší podle příkladu 3.5.1. krok b). Stačí si uvědomit, že potřebujeme na pravé straně mocninu o stejném základu:
- a) $10^x = 10^{-2}$, b) $2^{-x} = 2^{-3}$, c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-8}$.
- d) Uvědomíme si, že $0,25 = \frac{1}{4}$ a rovnici přepíšeme do tvaru $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = 1 \Rightarrow$
- $$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$
- e), f) řešíme zlogaritmováním.
10. a), b) viz řešení příkladu 3.5.1
- c) viz příklad 3.5.3.

- d) stačí si uvědomit, že mocninu ze jmenovatele můžeme napsat do čitatele s opačným exponentem takto: $3^{x+2} \cdot 3^{-2x+4} = 3$, protože $\log 64 = \log 4^3 = 3 \log 4$.
- f) substituce $3^x = y$, pak máme rovnici $y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (y+3)(y-1) = 0$ a pokračujeme jako v příkladu 3.5.2.
- g) substituce $5^x = y$, pak dostaneme rovnici $2y^2 + 2y - 12 = 0 \Rightarrow y^2 + y - 6 = 0$, tu vyřešíme a dále jako v předchozím příkladu.

11. Všechny rovnice se řeší stejným postupem jako v příkladu 3.6.1.

- a) $x = 3^2$, b) $x = 2^{\frac{1}{2}}$, c) $x = 4^{-1}$
d) $4 = x^2$, e) $0,1 = x^{-1}$, f) $100 = x^2$,
g) $\frac{1}{8} = 2^x$, h) $\sqrt[3]{4} = 2^x$, i) $3 = 3^x$.

12. Při řešení rovnic a), b), c) využijeme vlastností logaritmu (kap.3.6.).

a) $\log \frac{x+2}{x-1} = \log \frac{100}{4}$, typ rovnice b)2. kap.3.6.

b) Zlogaritmujeme mocniny a sečteme: $3 \log_3 x - 6 \log_3 x + 2 \log_3 x = 2 \Rightarrow \log_3 x = -2$.

c) Upravíme na $\log 2x = 2 \log(4x-15) \Rightarrow 2x = (4x-15)^2$.

Po umocnění a úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $16x^2 - 122x + 225 = 0$,

která má kořeny $x_1 = \frac{9}{2}$ a $x_2 = \frac{50}{16} = 3,125$. Druhý kořen nevyhovuje podmínce

řešitelnosti rovnice: $x \in (3,75; 4) \cup (4, \infty)$.

d) Uvědomíme si, že $16^{\log x} = 4^{2 \log x} = (4^{\log x})^2$, volíme substituci $4^{\log x} = y$, dostaneme

kvadratickou rovnici $3y^2 - 5y - 2 = 0$. Ta má kořeny $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{1}{3}$. Druhý kořen nevyhovuje, protože substituční rovnice je exponenciální. Vráťme se k substituci, pak

$$4^{\log x} = 2 \Rightarrow \log x \cdot \log 4 = \log 2 \Rightarrow \log x = \frac{\log 2}{2 \log 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}.$$

e) Rovnici přepíšeme do tvaru $\log_3(x-1) = \log_3(x-3)^2 \Rightarrow x-1 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow$

po úpravě $x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 5$, $x = 2$ nevyhovuje, protože podmínka řešitelnosti rovnice je $x > 3$.

f) Nejprve stanovíme podmínky řešitelnosti rovnice (viz př. 3.6.8.) a uvědomíme si, že na pravé straně rovnice máme $\log_2 4 = 2$, pak po vynásobení dostaneme rovnici

$$\log_2(x-1) = 2 \log_2(3-x) \Rightarrow x-1 = (3-x)^2 = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Kořeny kvadratické rovnice $x = 2$ a $x = 5$ nevyhovují podmínce řešitelnosti:

$x \in (1, 2) \cup (2, 3)$, proto daná rovnice nemá řešení.

13. a) viz příklad 3.7.3., druhý kořen dosazený do substituční rovnice.

b) $\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (I.a IV.kvadrant), $4x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cot g \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

d) použijeme vzorec $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$

$$2 \sin 2x \cos 2x = 1 \Rightarrow \sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

e) $\sin 2x = \sin x \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow$

$$\sin x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2}, \text{ dále viz tab. v kapitole 2.10.2.}$$

f) nejprve rovnici upravíme na tvar $4 \sin^2 x - 4 \sin x + 1 = 0$, substituce $\sin x = y$,

$$4y^2 - 4y + 1 = 0 \Rightarrow (2y - 1)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}, \text{ takže } \sin x = \frac{1}{2}, \text{ viz příklad 3.7.1.a).}$$

g) Platí $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \Rightarrow \sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ a toto dosadíme do rovnice a

$$\text{po úpravě dostaneme } 4 \cos^2 2x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x = \pm \frac{1}{2},$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi,$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \text{ (II. a III.kvadrant)}, \text{ pro II.kvadrant: } 2x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,$$

$$\text{pro III.kvadrant } 2x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2}{3}\pi + k\pi.$$

Výsledky $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{2}{3}\pi + k\pi$ lze zapsat jediným zápisem

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

h) po vytknutí: $\sin x(\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0$, buď $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$, nebo

$$\sin x = \sqrt{3} \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

i) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

j) Použijeme vzorec $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ a nahradíme v dané rovnici

$$\cos x = \cos(2 \frac{x}{2}) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}, \text{ dále platí, že } \cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2}, \text{ tímto}$$

postupným nahrazováním a následnou úpravou se dostaneme k rovnici

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \sin \frac{x}{2} (2 \sin \frac{x}{2} - 1) = 0 \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = 0 \vee \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \text{ (I. a II.kv.)}$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ platí pro I. kvadrant,}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5}{3}\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ platí pro II.kvadrant.}$$

14. a) po vynásobení číslem 6 a úpravě získáme nerovnici $3x < 15 \Rightarrow x < 5 \Rightarrow x \in (-\infty, 5)$.

b) $4x \leq 2 + 3x \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x \in (-\infty, 2]$.

c) umocníme a upravíme na tvar $-14x > -18 \Rightarrow x < \frac{18}{14} = \frac{9}{7} \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{9}{7})$.

d) nulové body $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{5}{2}$ rozdělí číselnou osu na 3 intervaly a dále podle př.3.8.2.

e) zvolte stejný postup jako u příkladu 3.8.2. Úpravou dostaneme $\frac{7x-13}{3-2x} \geq 0$,

nulové body $x = \frac{13}{7}$ a $x = \frac{3}{2}$ rozdělí číselnou osu na 3 intervaly.

f) po úpravě dostaneme kvadratickou nerovnici $x^2 + 5x + 6 \geq 0 \Rightarrow (x+2)(x+3) \geq 0$,

nulové body $x = -2$, $x = -3$ rozdělí číselnou osu na 3 intervaly a dále podle př.3.8.3.

g) rozklad $3(x - \frac{1}{3})(x - 6) < 0$, viz úloha 14.f).

h) $1 + 2x - 3x^2 < 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 > 0 \Rightarrow 3(x-1)(x+\frac{1}{3}) > 0$,

dále metodou nulových bodů.

15. Nerovnice s absolutní hodnotou a),b) řešíme metodou nulových bodů, viz příklad 3.8.4.

c) nulové body $x = 7$, $x = 1$, $x = 0$ rozdělí číselnou osu na disjunktní intervaly

$(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 7)$, $(7, \infty)$.

d) za předpokladu, že $x \in (-\infty, \frac{3}{5})$ nerovnice $\frac{3-5x}{x-1} > 5$ nemá řešení,

pro $x \in (\frac{3}{5}, \infty)$ nerovnici $\frac{5x-3}{x-1} > 5$ upravíme na $\frac{2}{x-1} > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x \in (1, \infty)$.

16. a) vycházíme z grafu funkce $y = \sin x$, ten protne přímkou $y = -0,5$, průsečíky vymezí intervaly, viz příklad 3.8.5.

b) z grafu funkce $y = \cotg x$ (kap.2.10.2.) vyčteme, že pro $x \in (\frac{\pi}{4}, \pi)$ je $\cotg x < 1$,

takže náš argument $\frac{x}{2} \in (\frac{\pi}{4} + k\pi, \pi + k\pi) \Rightarrow x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

c) z grafu funkce $y = \tg x$ vyčteme, že pro $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ je $\tg x \geq -1$, takže argument

$2x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \Rightarrow x \in (-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$.

4. KOMPLEXNÍ ČÍSLA	116
4.1. Definice komplexních čísel	117
4.2. Geometrické znázornění komplexních čísel	118
4.3. Klasifikace komplexních čísel	120
4.4. Algebraický tvar komplexního čísla	122
4.4.1. Sčítání a násobení komplexních čísel v algebraickém tvaru	123
4.4.2. Odčítání a dělení komplexních čísel v algebraickém tvaru	124
4.5. Goniometrický tvar komplexního čísla	126
4.5.1. Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru	127
4.5.2. Definice a výpočet n-té mocniny komplexního čísla	129
4.5.3. Definice a výpočet n-té odmocniny komplexního čísla	131
4.5.4. Řešení kvadratických rovnic v oboru komplexních čísel	134
Shrnutí kapitoly	136
Kontrolní otázky	137
Úlohy k samostatnému řešení	137
Výsledky úloh k samostatnému řešení	139
Kontrolní test	142
Výsledky testu	143
Kompletní řešení úloh k samostatnému řešení	143

4. KOMPLEXNÍ ČÍSLA



Průvodce studiem



Kapitola Komplexní čísla navazuje na kapitolu 1. Číselné obory, kde byl obor přirozených čísel postupně rozšiřován až na obor reálných čísel.

Kapitola je rozdělena do pěti podkapitol, z nichž některé jsou ještě dále rozčleněny na menší oddíly. V každém oddíle jsou nejprve zavedeny nové pojmy a vzorce. Pak většinou následují *Řešené úlohy*, sloužící jako ukázka praktického použití právě zvládnuté látky a napomáhající jejímu osvojení. Mezi nimi je zařazeno i několik zajímavých úloh k ověření platných vztahů, které jsou přínosem k výkladu. Na závěr je umístěno přehledné *Shrnutí kapitoly* a *Kontrolní otázky*. Dále jsou zadány *Úlohy k samostatnému řešení*, k nimž jsou dodány *Výsledky úloh k samostatnému řešení* a pro ty, kteří by si s některou úlohou neuměli poradit, je úplně na konci dodáno i *Kompletní řešení úloh k samostatnému řešení*. *Kontrolní test* vám poslouží k tomu, abyste si ověřili, jak jste tuto kapitolu zvládli.



Cíle



Cílem této kapitoly je vysvětlit pojem komplexní číslo, seznámit s možnými způsoby zápisu komplexních čísel a prováděním operací s nimi. Po zvládnutí této kapitoly byste měli být schopni bez problému pracovat s komplexními čísly, tj. provádět s nimi běžné početní operace, stejně zručně jako dosud s reálnými čísly.



Předpokládané znalosti



Předpokládá se, že ovládáte úpravu algebraických výrazů, početní operace s dvojčleny, binomickou větu, goniometrické funkce, základní trigonometrické vzorce, že umíte řešit lineární a kvadratické rovnice, soustavy dvou lineárních rovnic dosazovací nebo sčítací metodou.



Výklad



Zavedení komplexních čísel v matematice nám umožňuje řešit problémy, které jsou v oboru reálných čísel neřešitelné. Např. odmocnina ze záporného čísla v oboru reálných čísel není definována. V důsledku toho např. v oboru reálných čísel nelze určit kořeny kvadratické rovnice se záporným diskriminantem, ani kořeny některých algebraických rovnic vyšších stupňů.

Obor komplexních čísel $\mathbf{C}$ je rozšíření oboru reálných čísel $\mathbf{R}$ – to znamená, že obor reálných čísel je součástí oboru komplexních čísel $\mathbf{C}$ ($\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$).

V oboru komplexních čísel je definována odmocnina každého komplexního čísla (jak uvidíme dále), tedy i odmocnina reálného záporného čísla.

Komplexní čísla mají své praktické uplatnění i v jiných vědních oborech opírajících se o matematiku, hlavně ve fyzice a elektrotechnice.

4.1. Definice komplexních čísel

Komplexními čísly (prvky oboru $\mathbf{C}$) nazýváme uspořádané dvojice reálných čísel, pro něž je definována rovnost, operace sčítání a násobení.

Značíme $z = [x, y]$, $x, y \in \mathbf{R}$.

Číslu $x \in \mathbf{R}$ se říká reálná část (reálná složka) komplexního čísla z ,

číslu $y \in \mathbf{R}$ se říká imaginární část (imaginární složka) komplexního čísla z .

Symbolicky se píše:

$$\operatorname{Re} z = x,$$

$$\operatorname{Im} z = y.$$

Pro dvě komplexní čísla $z_1 = [x_1, y_1]$, $z_2 = [x_2, y_2]$ definujeme:

Rovnost: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2)$.

Dvě komplexní čísla z_1 , z_2 jsou si rovna právě tehdy, když jsou si rovny jejich reálné části ($x_1 = x_2$) a jejich imaginární části ($y_1 = y_2$).

Součet: $z_1 + z_2 = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$.

Součet dvou komplexních čísel je komplexní číslo, jehož reálná část je rovna součtu reálných složek těchto dvou komplexních čísel a imaginární část je rovna součtu imaginárních složek těchto dvou komplexních čísel.

Součin: $z_1 \cdot z_2 = [x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = [x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1]$.

Pozn.: Vhodnost této definice součinu dvou komplexních čísel poznáme po jeho vyjádření v algebraickém tvaru.

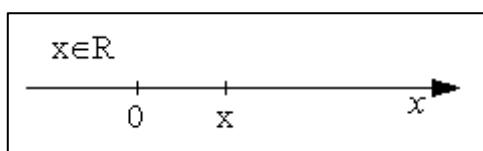
**Poznámka**

Název **komplexní** je z latiny a znamená souborný, úplný, složený. Podle definice (viz výše) je komplexní číslo tvořeno dvěma složkami (reálnou a imaginární), je to tedy číslo složené.

Název **imaginární** (neskutečný, pomyslný) se užívá z důvodů tradičních. Původně se jako imaginární (neskutečná) čísla nazývaly číselné výrazy, k nimž se někdy při formálně správném počítání došlo a v nichž se vyskytovaly druhé odmocniny ze záporných čísel.

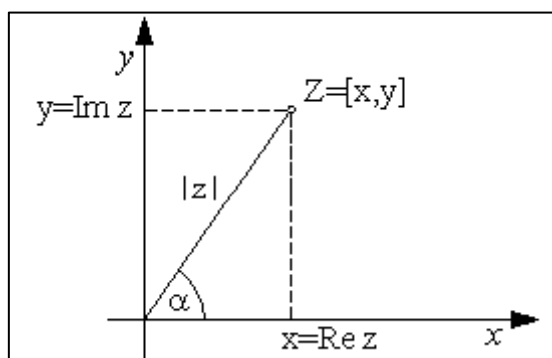
**4.2. Geometrické znázornění komplexních čísel**

Zopakujeme: každé reálné číslo x z oboru reálných čísel $\mathbf{R}$ lze zobrazit jako bod na přímce (reálné číselné ose). Zobrazení množiny reálných čísel na množinu bodů reálné číselné osy je vzájemně jednoznačné.



Každé komplexní číslo $z = [x, y]$ z oboru komplexních čísel $\mathbf{C}$ lze zobrazit jako bod Z roviny komplexních čísel, nazývané též **Gaussova rovina**. Je to bod, jehož x -ová souřadnice je rovna x , tj. reálné složce komplexního čísla z , a y -ová souřadnice je rovna y , tj. imaginární složce komplexního čísla z . Zobrazení množiny komplexních čísel na množinu bodů Gaussovy roviny je vzájemně jednoznačné.

Gaussova rovina je rovina, ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic (tj. souřadnicové osy na sebe kolmé, jejich průsečík je počátek $[0;0]$, přičemž jednotky na obou osách jsou shodné). Vodorovná osa x se nazývá reálná osa, svislá osa y se nazývá imaginární osa.



Na obrázku názorně vidíme, že obor komplexních čísel $\mathbf{C}$ je rozšířením oboru reálných čísel $\mathbf{R}$ (reálná osa x je součástí roviny komplexních čísel).

Pro $z = [x, y]$ je:

α - **argument** nebo také **amplituda komplexního čísla** z . Píšeme $\arg z = \alpha$ (α je orientovaný úhel, který svírá spojnice obrazu komplexního čísla z a počátku s kladným směrem osy x).

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - **absolutní hodnota** nebo také **velikost** či **modul komplexního čísla** z (vzdálenost obrazu komplexního čísla z v Gaussově rovině od počátku).



Poznámka

Tyto dva pojmy (argument a absolutní hodnota komplexního čísla) najdou své uplatnění při vyjádření komplexního čísla v goniometrickém tvaru. S tím se seznámíte v podkapitole 4.5.



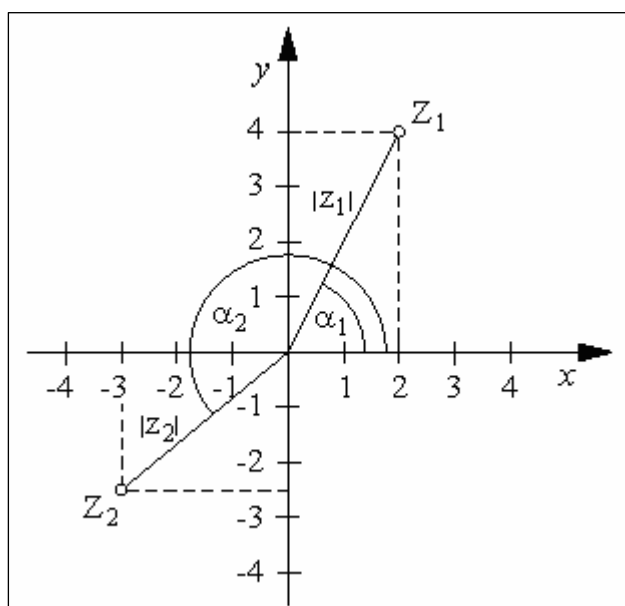
Řešená úloha

Příklad 4.2.1. Zobrazte komplexní čísla $z_1 = [2; 4]$, $z_2 = [-3; -2,5]$ jako body Gaussovy roviny, vypočtěte jejich absolutní hodnoty, označte jejich absolutní hodnoty a argumenty.



Řešení:

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \doteq 4,47; \quad |z_2| = \sqrt{(-3)^2 + (-2,5)^2} = \sqrt{9 + 6,25} = \sqrt{15,25} \doteq 3,90.$$



4.3. Klasifikace komplexních čísel



Výklad



Rozlišujeme tyto dva druhy komplexních čísel $z = [x, y]$:

Je-li $y = 0$, pak $z = [x, 0] = x$ je **reálné číslo** - uspořádaná dvojice $[x, 0]$ je tedy jen formou vyjádření reálného čísla x v oboru komplexních čísel $\mathbb{C}$. V Gaussově rovině leží obrazy reálných čísel na reálné ose. Např. $[3; 0] = 3$, $[0; 0] = 0$, $[-5, 3; 0] = -5, 3$.

Je-li $y \neq 0$, pak $z = [x, y]$ se nazývá **imaginární číslo**, jeho obraz v Gaussově rovině leží mimo reálnou osu. Např. $[3; 4]$, $[2, 5; -3, 2]$. Je-li speciálně $x = 0$, pak $z = [0, y]$ se nazývá **ryze imaginární číslo**, jeho obraz v Gaussově rovině leží na imaginární ose. Obecně má tvar $[0; c]$, kde $c \in \mathbb{R}$. Např. $[0; 3]$, $[0; -5, 27]$.

Další pojmy

Komplexní číslo $i = [0; 1]$ se nazývá **imaginární jednotka**. Pro imaginární jednotku i platí důležitý vztah: $i^2 = -1$ (lze odvodit z definice násobení komplexních čísel: $i^2 = i \cdot i = [0; 1] \cdot [0; 1] = [0 - 1; 0 + 0] = [-1; 0] = -1$).



Poznámka

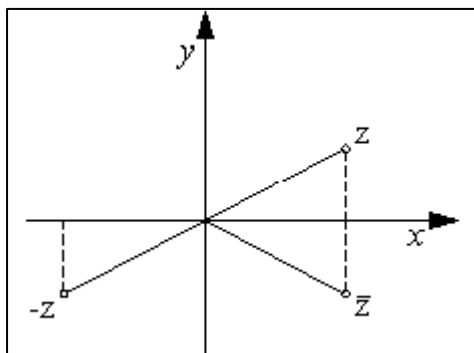
Někdy, zejména v elektrotechnice, se imaginární jednotka označuje písmenem j .



Komplexní číslo $-z = [-x, -y]$ se nazývá **opačné** k číslu $z = [x, y]$, jeho obraz v Gaussově rovině je středově souměrný s obrazem čísla z podle počátku soustavy souřadnic.

Komplexní číslo $\bar{z} = [x, -y]$ se nazývá **komplexně sdružené** k číslu $z = [x, y]$, jeho obraz v Gaussově rovině je osově souměrný s obrazem čísla z podle osy x .

(Pro jednoduchost se obraz komplexního čísla v Gaussově rovině označuje stejně jako dané komplexní číslo.)



**Poznámka**

Je zjevné, že platí: $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.



Komplexní čísla z , pro která platí $|z| = 1$, se nazývají **komplexní jednotky**. Komplexní jednotky jsou všechna komplexní čísla, jejichž obrazy v Gaussově rovině leží na kružnici se středem v počátku a poloměrem jedna. Patří k nim např. čísla

$$\left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}i\right], \left[\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}i\right], \left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}i\right], \text{ čísla } [1; 0], [-1; 0] - \text{ tj. reálná čísla } 1, -1 \text{ a čísla } [0; 1],$$

$[0; -1]$ - tj. imaginární jednotka i a $-i$.

Komplexní číslo $\frac{1}{z}$ se nazývá **převrácené (reciproké)** k číslu z ($z \neq 0$).

**Řešené úlohy**

Příklad 4.3.1. Určete, je-li dané komplexní číslo imaginární, ryze imaginární nebo reálné:

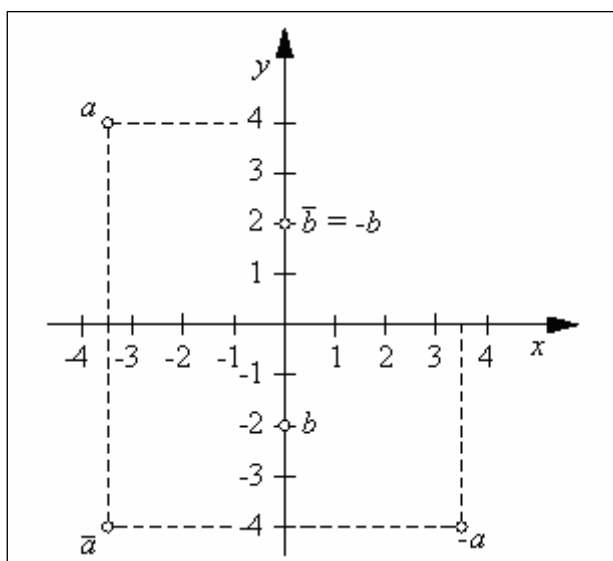
$$a = [0; -2], \quad b = [-3, 25; 0], \quad c = [-3, 72; -11, 23], \quad d = 5.$$

Řešení: a – ryze imaginární číslo, b – reálné číslo, c – imaginární číslo, d – reálné číslo.

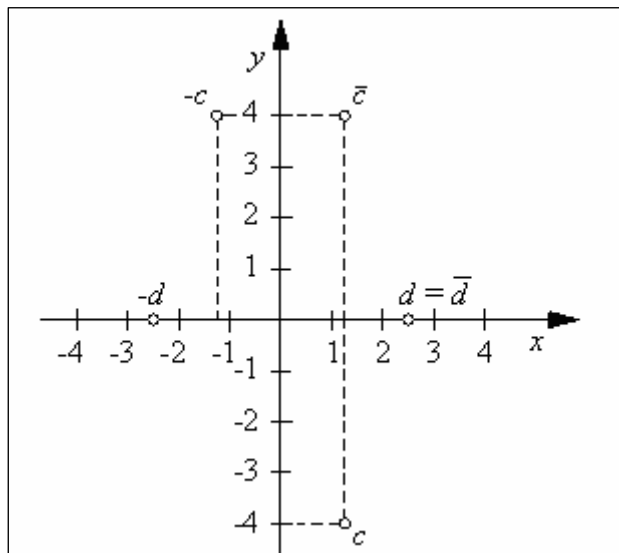
Příklad 4.3.2. Jsou dána komplexní čísla $a = [-3, 5; 4]$, $b = [0; -2i]$, $c = [1, 25; -4]$,

$d = [2, 5; 0]$. Ke každému z nich určete číslo komplexně sdružené a číslo opačné a znázorněte je geometricky v Gaussově rovině.

Řešení: pro $a = [-3, 5; 4]$ je $\bar{a} = [-3, 5; -4]$, $-a = [3, 5; -4]$,
pro $b = [0; -2i]$ je $\bar{b} = [0; 2i]$, $-b = [0; 2i]$.



Pro $c = [1, 25; -4]$ je $\bar{c} = [1, 25; 4]$, $-c = [-1, 25; 4]$,
 pro $d = [2, 5; 0]$ je $\bar{d} = [2, 5; 0]$, $-d = [-2, 5; 0]$.



Příklad 4.3.3. Určete absolutní hodnoty komplexních čísel $a = [0, 9; -0, 25]$, $b = [-0, 6; 0, 8]$,
 $c = [0, 3; 0, 7]$, $d = [0; -1]$, $e = [-5, 2; 0]$. Je-li některé z nich komplexní jednotka, uveďte to.

Řešení: $|a| = \sqrt{0,9^2 + (-0,25)^2} = \sqrt{0,81 + 0,0625} = \sqrt{0,8725} \doteq 0,934,$

$$|b| = \sqrt{(-0,6)^2 + 0,8^2} = \sqrt{0,36 + 0,64} = \sqrt{1} = 1 \text{ (} b \text{ je komplexní jednotka),}$$

$$|c| = \sqrt{0,3^2 + 0,7^2} = \sqrt{0,09 + 0,49} = \sqrt{0,58} \doteq 0,76,$$

$$|d| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \text{ (} d \text{ je komplexní jednotka; } d = -i \text{),}$$

$$|e| = \sqrt{(-5,2)^2 + 0^2} = 5,2.$$

4.4. Algebraický tvar komplexního čísla

Výklad

Algebraickým tvarem komplexního čísla $z = [x, y]$ nazýváme zápis $z = x + yi$, kde číslo $i = [0; 1]$ je imaginární jednotka.

Obdržíme ho postupnou úpravou zápisu komplexního čísla z :

$$z = [x, y] = [x, 0] + [0, y] = [x, 0] + y \cdot [0, 1] = x + yi.$$

Algebraický tvar čísla **opačného** k číslu z : $-z = -x - yi$.

Algebraický tvar čísla **komplexně sdruženého** k číslu z : $\bar{z} = x - yi$.

Algebraický tvar čísla **převráceného** k číslu z dostaneme rozšířením zlomku $\frac{1}{z}$ číslem

$$\bar{z} = x - yi :$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$



Řešená úloha



Příklad 4.4.1. Převed'te na algebraický tvar a určete číslo opačné, komplexně sdružené a převrácené ke komplexnímu číslu $z = [-1; 4]$.

Řešení:

$$z = -1 + 4i,$$

$$-z = 1 - 4i,$$

$$\bar{z} = -1 - 4i,$$

$$\frac{1}{z} = \frac{(-1 - 4i)}{(-1 + 4i)(-1 - 4i)} = \frac{-1 - 4i}{1 - 16i^2} = \frac{-1 - 4i}{17} = -\frac{1}{17} - \frac{4}{17}i.$$

4.4.1. Sčítání a násobení komplexních čísel v algebraickém tvaru



Výklad



Dána dvě komplexní čísla $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = (x_1x_2 + x_1y_2i + y_1x_2i + y_1y_2i^2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$



Komplexní čísla v algebraickém tvaru sčítáme a násobíme podobně jako reálné dvojčleny, sloučíme členy bez „ i “ a s „ i “, využijeme vztahu $i^2 = -1$.



4.4.2 Odčítání a dělení komplexních čísel v algebraickém tvaru

Stejně jako v oboru reálných čísel $\mathbf{R}$, i v oboru komplexních čísel $\mathbf{C}$ jsou operace odčítání a dělení inverzní operace k operacím sčítání a násobení, tedy:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \text{ pro každé } z_1, z_2 \in \mathbf{C},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \text{ pro každé } z_1, z_2 \in \mathbf{C}, z_2 \neq 0.$$

Pro dvě komplexní čísla $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ platí:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$$



Při dělení komplexního čísla z_1 komplexním číslem $z_2 \neq 0$ v algebraickém tvaru rozšíříme zlomek $\frac{z_1}{z_2}$ číslem $\bar{z}_2$ komplexně sdruženým ke jmenovateli z_2 (tím zajistíme, že jmenovatel je reálné číslo).



Řešené úlohy



Příklad 4.4.2. Převed'te na algebraický tvar a určete součet, rozdíl, součin a podíl komplexních čísel $[1;-2]$, $[2;3]$.

Řešení:

$$[1;-2] = 1 - 2i, [2;3] = 2 + 3i,$$

$$(1 - 2i) + (2 + 3i) = 3 + i,$$

$$(1 - 2i) - (2 + 3i) = -1 - 5i,$$

$$(1 - 2i)(2 + 3i) = 2 + 3i - 4i - 6i^2 = 8 - i,$$

$$\frac{1 - 2i}{2 + 3i} = \frac{1 - 2i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} = \frac{2 - 3i - 4i + 6i^2}{4 + 9} = \frac{-4 - 7i}{13} = -\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i.$$

Příklad 4.4.3. Převed'te komplexní číslo $a = [a_1, a_2]$ na algebraický tvar a vypočítejte

a) $a + \bar{a}$, b) $a - \bar{a}$.

Řešení:

$$a = a_1 + a_2 i$$

a) $a + \bar{a} = (a_1 + a_2 i) + (a_1 - a_2 i) = 2a_1$ (tj. součet dvou komplexně sdružených čísel je reálné číslo, rovné dvojnásobku jejich shodné reálné složky).

b) $a - \bar{a} = (a_1 + a_2 i) - (a_1 - a_2 i) = 2a_2 i$ (tj. rozdíl dvou komplexně sdružených čísel je ryze imaginární číslo, rovné dvojnásobku imaginární složky prvního z nich).

Příklad 4.4.4. Dokažte, že pro komplexní číslo $z = [x, y]$ platí: $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbf{R}$, tedy

absolutní hodnotu komplexního čísla z je možno vyjádřit rovněž jako $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Řešení:

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2 = x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2.$$

Příklad 4.4.5. Najděte reálná čísla x, y , která jsou řešením rovnice $\frac{3-2i}{1+i} = 2x + yi$.

Řešení:

$$\frac{3-2i}{1+i} = \frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-2i-3i-2}{2} = \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i,$$

$$2x + yi = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i;$$

komplexní čísla jsou si rovna, rovnají-li se jejich reálné a imaginární složky, proto

$$2x = \frac{1}{2}, \text{ odtud } x = \frac{1}{4} \text{ a } y = -\frac{5}{2}.$$

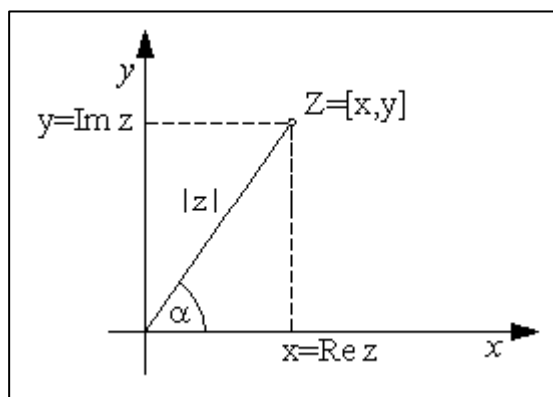
4.5. Goniometrický tvar komplexního čísla



Výklad



Je dáno komplexní číslo $z = [x, y]$, $z \neq 0$, jehož obraz v Gaussově rovině je bod Z o souřadnicích $[x, y]$.



Z obrázku plyne: $\cos \alpha = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{x}{|z|}$, $\sin \alpha = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{y}{|z|}$, kde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - odtud jednoznačně určíme úhel $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Reálnou složku komplexního čísla z , $x = \operatorname{Re} z$ můžeme tedy vyjádřit jako $x = |z| \cos \alpha$, analogicky jeho imaginární složku $y = \operatorname{Im} z$ možno vyjádřit jako $y = |z| \sin \alpha$.

Dosazením do algebraického tvaru komplexního čísla z za složky x, y a po vytknutí $|z|$ dostaneme: $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ - tzv. **goniometrický tvar komplexního čísla** $z = [x, y]$.

Připomeňme si:



α je **argument** nebo také amplituda komplexního čísla z , ($\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$), píšeme $\arg z = \alpha$, je možno uvádět v radiánech nebo ve stupních;



$|z|$ je **absolutní hodnota** nebo také velikost či modul komplexního čísla z .

Každé komplexní číslo je těmito dvěma údaji jednoznačně určeno.



Protože funkce sinus a kosinus jsou periodické s periodou 2π , lze vzít za argument komplexního čísla $z \neq 0$ také každé reálné číslo tvaru $\alpha' = \alpha + 2k\pi$, kde k je libovolné celé číslo. Číslu $\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$ se říká **hlavní (základní) hodnota argumentu** komplexního čísla z .





Řešené úlohy



Příklad 4.5.1. Převed'te na goniometrický tvar komplexní čísla $a = \sqrt{3} + i$, $b = -8$.

Řešení: $\operatorname{Re} a = \sqrt{3}$, $\operatorname{Im} a = 1$, $|a| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$,

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \alpha = \frac{1}{2}, \text{ odtud } \alpha = \frac{\pi}{6}, \text{ resp. } \alpha = 30^\circ,$$

$$a = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right), \text{ resp. } a = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ).$$

$$\operatorname{Re} b = -8, \operatorname{Im} b = 0, |b| = 8,$$

$$\cos \beta = -1, \sin \beta = 0, \text{ odtud } \beta = \pi, \text{ resp. } \beta = 180^\circ,$$

$$b = 8(\cos \pi + i \sin \pi), \text{ resp. } b = 8(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ).$$

Příklad 4.5.2. Převed'te na algebraický tvar komplexní čísla $c = 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$,

$$d = 6\left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right).$$

Řešení: $c = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $d = 6\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 - 3\sqrt{3}i$.

4.5.1. Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru



Výklad



Nechť jsou dána dvě libovolná nenulová komplexní čísla v goniometrickém tvaru:

$$z_1 = |z_1|(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1), \quad z_2 = |z_2|(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2),$$

pak jejich součin

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

a jejich podíl

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2)).$$



Při násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru se jejich absolutní hodnoty násobí a argumenty sčítají.



Při dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru se jejich absolutní hodnoty dělí a argumenty odčítají.



Tyto vzorce lze snadno odvodit užitím součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus.

Odvození:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) = \\ &= |z_1| |z_2| (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + i \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + i \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) = \\ &= |z_1| |z_2| (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + i(\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2)) = \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{|z_1| (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) |z_2| (\cos \alpha_2 - i \sin \alpha_2)}{|z_2| (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) |z_2| (\cos \alpha_2 - i \sin \alpha_2)} = \\ &= \frac{|z_1| (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - i \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + i \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2)}{|z_2| (\cos^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_2)} = \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + i(\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2)) = \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2)). \end{aligned}$$



Řešené úlohy



Příklad 4.5.3. Určete součin a podíl komplexních čísel $c = 3(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$,

$$d = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}).$$

Řešení:

$$c \cdot d = 3 \cdot 2(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})) = 3 \cdot 2(\cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6}) =$$

$$= 6(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}),$$

$$\frac{c}{d} = \frac{3}{2}(\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})) = \frac{3}{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}).$$



Výklad



Výpočet součinu a podílu dvou komplexních čísel tedy zvládneme jak v algebraickém tvaru, tak i v goniometrickém tvaru.

Goniometrický tvar komplexního čísla se uplatní hlavně při výpočtu n -té mocniny a n -té odmocniny komplexního čísla.

4.5.2 Definice a výpočet n -té mocniny komplexního čísla

n -tá mocnina komplexního čísla z pro $n \in \mathbf{N}$ se definuje stejně jako n -tá mocnina reálného čísla v oboru $\mathbf{R}$:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n\text{-krát}}, \text{ pro každé komplexní číslo } z \text{ a } n \in \mathbf{N}$$

$$z^0 = 1, \text{ pro každé komplexní číslo } z \neq 0$$

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}, \text{ pro každé komplexní číslo } z \neq 0 \text{ a } n \in \mathbf{N}$$

V oboru $\mathbf{C}$ tudíž platí pro výpočet mocnin s celočíselnými mocniteli stejná pravidla jako v oboru $\mathbf{R}$.

Výpočet mocniny komplexního čísla je možný i v algebraickém tvaru:

$(a + bi)^n$ počítáme jako mocninu dvojčlenu pomocí binomické věty, výsledkem je komplexní číslo, jehož reálná část je tvořena součtem členů bez „ i “, imaginární část je tvořena součtem členů s „ i “.

$$\text{Např.: } (2 + 3i)^3 = 8 + 36i + 54i^2 + 27i^3 = 8 - 54 + 36i - 27i = -46 + 9i.$$

Pro výpočet vyšších mocnin už se nám vyplatí převést komplexní číslo z tvaru algebraického na goniometrický a vypočítat mocninu komplexního čísla v goniometrickém tvaru, což je jednodušší.

Výpočet mocniny komplexního čísla z v goniometrickém tvaru odvodíme ze vzorce pro součin komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)).$$

Pro $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ je

$$z^2 = z \cdot z = |z| \cdot |z| (\cos(\alpha + \alpha) + i \sin(\alpha + \alpha)) = |z|^2 (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha).$$

Výsledek lze zobecnit:

$$z^n = (|z|(\cos \alpha + i \sin \alpha))^n = |z|^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

$$\text{nebo } z^n = |z|^n (\cos n(\alpha + 2k\pi) + i \sin n(\alpha + 2k\pi)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$



n -tá mocnina komplexního čísla z je komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna n -té mocnině absolutní hodnoty čísla z a argument je roven (popřípadě až na celý násobek čísla 2π) n -násobku argumentu čísla z .



Poznámka

Je-li z komplexní jednotka, dostaneme ze vzorce: $z^n = |z|^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$ důležitý vztah, tzv. **Moivreovu větu**: $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$.

Moivreovu větu můžeme použít, chceme-li vyjádřit $\cos n\alpha$, $\sin n\alpha$, kde $n \in \mathbb{N}$, pomocí $\cos \alpha$ a $\sin \alpha$.



Řešené úlohy

Příklad 4.5.4. Určete $(1+i)^3$ a) v algebraickém tvaru,

b) v goniometrickém tvaru.



Řešení:

$$\text{a) } (1+i)^3 = 1 + 3 \cdot 1 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 + i^3 = -2 + 3i - i = -2 + 2i,$$

b) číslo $(1+i)$ nejprve převedeme na goniometrický tvar:

$$(1+i) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

pak určíme jeho třetí mocninu (v goniometrickém tvaru, tu pak převedeme na algebraický tvar):

$$(1+i)^3 = (\sqrt{2})^3 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2 + 2i.$$

Výsledky řešení a), b) jsou shodné.

Příklad 4.5.5. Odvoďte pravidlo pro výpočet mocniny i^n , kde i je imaginární jednotka, $n \in \mathbb{N}$.

Řešení: $i^2 = -1$, odtud plyne:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i, \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1,$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i, \quad i^8 = i^{4 \cdot 2} = 1^2 = 1, \quad i^9 = i^{4 \cdot 2 + 1} = i, \text{ atd.}$$

Obecně: n -tou mocninu čísla i vypočítáme, když mocnitele n dělíme čtyřmi a číslo i umocníme na zbytek. Např. $i^{18} = i^{4 \cdot 4 + 2} = i^2 = -1$.

Příklad 4.5.6. Vyjádřete $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$ pomocí $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$.

Řešení: Podle Moivreovy věty: $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^4 = \cos 4\alpha + i \sin 4\alpha$.

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^4 = \cos^4 \alpha + 4 \cos^3 \alpha \cdot i \sin \alpha + 6 \cos^2 \alpha \cdot i^2 \cdot \sin^2 \alpha + 4 \cos \alpha \cdot i^3 \cdot \sin^3 \alpha + \sin^4 \alpha = \\ = \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha + i(4 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha), \text{ odtud}$$

$$\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha,$$

$$\sin 4\alpha = 4 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha.$$

4.5.3 Definice a výpočet n -té odmocniny komplexního čísla



Výklad



n -tá odmocnina komplexního čísla z ($z \neq 0$, $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $n \in \mathbb{N}$) je každé komplexní číslo s , pro které platí: $s^n = z$.

Ze vzorce $z^n = |z|^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$ plyne, že číslo $z_0 = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n} \right)$ je n -tou odmocninou čísla z , neboť umocníme-li ho na n -tou, dostaneme právě číslo z .

Avšak také číslo $z_1 = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 2\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi}{n} \right)$ resp. (uvádíme-li velikost úhlu ve stupních) $z_1 = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 360^\circ}{n} + i \sin \frac{\alpha + 360^\circ}{n} \right)$ je n -tou odmocninou čísla z , neboť

$$z_1^n = |z| (\cos(\alpha + 2\pi) + i \sin(\alpha + 2\pi)) = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha) = z.$$

Zřejmě tedy každé číslo

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), \text{ kde } k \text{ je celé číslo, je } n\text{-tou odmocninou čísla } z.$$

Zvolíme-li ve vzorci $z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right)$ postupně $k = 0, 1, \dots, n-1$,

dostaneme n odmocnin $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, které jsou navzájem různé, neboť úhly

$\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}, \frac{\alpha}{n} + \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{\alpha}{n} + \frac{(n-1)2\pi}{n}$ jsou navzájem různé a žádné dva z nich se neliší o celý násobek čísla 2π .

Ze vzorce $z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right)$ snadno vidíme, že zvolíme-li za k jiné celé číslo, než některé z čísel $k = 0, 1, \dots, n-1$, nedostaneme (až na celé násobky čísla 2π) již žádné jiné úhly.

Pro $k = n+1$:

$$\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n+1)\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{(2n+2)\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} + 2\pi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} \quad (\text{stejný úhel jako pro } k=1),$$

pro $k = -1$:

$$\frac{\alpha}{n} + \frac{2(-1)\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} - \frac{2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} - \frac{2\pi}{n} + 2\pi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n} \quad (\text{stejný úhel jako pro } k=n-1).$$



Každé komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ má v $\mathbb{C}$ právě n různých n -tých odmocnin $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$,



jejichž výpočet je dán vzorcem $z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Tedy všechny n -té odmocniny komplexního čísla z mají tutéž absolutní hodnotu rovnou

$\sqrt[n]{|z|}$ a jejich argumenty jsou rovny $\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, kde $k = 0, 1, \dots, n-1$, tj. liší se o celočíselné

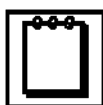
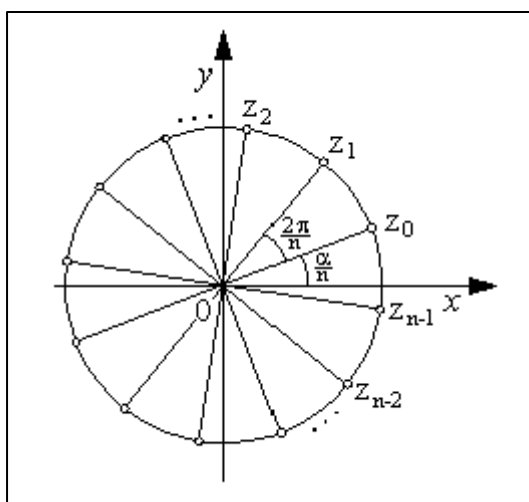
násobky čísla $\frac{2\pi}{n}$.

Pro obrazy $\sqrt[n]{z}$ v Gaussově rovině platí:

Je-li $n = 2$, pak odmocninami komplexního čísla z jsou dvě opačná komplexní čísla, jejichž obrazy v Gaussově rovině jsou body souměrně sdružené podle počátku, ležící na kružnici se středem v počátku a poloměrem rovným číslu $\sqrt{|z|}$.

Je-li $n > 2$, pak obrazy n -tých odmocnin komplexního čísla z , tj. čísel $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ v Gaussově rovině tvoří vrcholy pravidelného n -úhelníka vepsaného kružnici se středem v počátku a poloměrem rovným číslu $\sqrt[n]{|z|}$.

Graficky sestrojíme v Gaussově rovině obrazy všech n n -tých odmocnin čísla z tak, že na kružnici se středem v počátku a poloměrem $r = \sqrt[n]{|z|}$ sestrojíme nejprve vrchol, odpovídající odmocnině z_0 (jeho spojnice se středem svírá s kladným směrem osy x úhel $\frac{\alpha}{n}$), další vrcholy dostaneme tak, že k úhlu $\frac{\alpha}{n}$ postupně přičítáme (přidáváme) úhel $\frac{2\pi}{n}$ (resp. $\frac{360^\circ}{n}$).



Poznámka

Tedy i každé reálné číslo r (jako speciální případ komplexního čísla $r = [r; 0]$) má v $\mathbb{C}$ n n -tých odmocnin, zatímco v $\mathbb{R}$ je jen pro $r \geq 0$ definováno jediné číslo $s = \sqrt[n]{r}$, $s \geq 0$.



Řešená úloha

Příklad 4.5.7. Řešte rovnici $z^4 + 1 = 0$.



Řešení: Máme najít všechna komplexní čísla z , jejichž čtvrtá mocnina je rovna -1 , což znamená najít všechny čtvrté odmocniny čísla -1 .

Víme, že budou čtyři: z_0, z_1, z_2, z_3 .

Číslo -1 má absolutní hodnotu 1 a argument π (resp. 180°).

Podle vzorce $z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right)$ dostaneme:

$$z_0 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

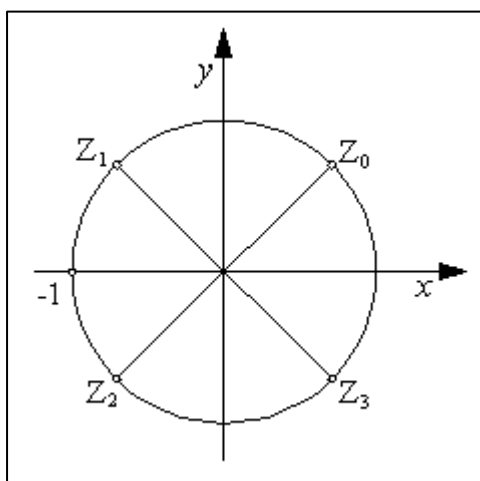
z_1 dostaneme tak, že k argumentu čísla z_0 přičteme $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (resp. 90°):

$$z_1 = 1 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

obdobně

$$z_2 = 1 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_3 = 1 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Obrazy čtvrtých odmocnin čísla -1 tvoří vrcholy pravidelného čtyřúhelníka (čtverce).



4.5.4. Řešení kvadratických rovnic v oboru komplexních čísel

Výklad

V podkapitole 3.2. Kvadratické rovnice bylo konstatováno, že je-li diskriminant $D < 0$, pak kvadratická rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení. Ukážeme, že v oboru komplexních čísel má kvadratická rovnice vždy řešení.

V oboru $\mathbb{C}$ si můžeme záporné číslo, např. -25 vyjádřit jako $25i^2$, tedy

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25i^2} = i\sqrt{25} = 5i.$$

Vzorec pro určení kořenů kvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \text{ tedy pro } D < 0 \text{ vypadá následovně:}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a} \text{ (dostaneme dva imaginární komplexně sdružené kořeny).}$$



Řešené úlohy



Příklad 4.5.8. Řešte v oboru $\mathbf{C}$ kvadratickou rovnici $9x^2 - 6x + 10 = 0$.

Řešení: $D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 9 \cdot 10 = 36 - 360 = -324,$

$$D < 0, \sqrt{D} = i\sqrt{|D|} = i\sqrt{324} = 18i,$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 18i}{18} = \frac{1 \pm 3i}{3}.$$

Kvadratická rovnice má dva imaginární komplexně sdružené kořeny:

$$x_1 = \frac{1}{3} + i, \quad x_2 = \frac{1}{3} - i.$$

Příklad 4.5.9. Určete, pro které hodnoty reálného parametru m bude mít kvadratická rovnice $(m+5)x^2 - 2mx + (m-1) = 0$ imaginární kořeny.

Řešení: $D = 4m^2 - 4(m+5)(m-1) = 4(m^2 - m^2 + m - 5m + 5) = 4(5 - 4m).$

Kvadratická rovnice má imaginární (komplexně sdružené) kořeny, právě když $D < 0$,

$$\text{tedy } 4(5 - 4m) < 0. \text{ Odtud } 5 - 4m < 0 \Rightarrow m > \frac{5}{4}.$$

Pro $m \in \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$ má daná kvadratická rovnice imaginární kořeny.



Poznámka

Podobně lze zobecnit rozklad kvadratického trojčlenu v $\mathbf{R}$ na rozklad kvadratického trojčlenu v $\mathbf{C}$.



Příklad 4.5.10. Rozložte v $\mathbf{C}$ kvadratický trojčlen $V = x^2 - 10x + 26$.

Řešení: Vyřešíme nejdříve kvadratickou rovnici

$$x^2 - 10x + 26 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{10 \pm 2i}{2} = 5 \pm i \quad \Rightarrow \quad V = (x - 5 - i)(x - 5 + i).$$

Příklad 4.5.11. Rozložte v $\mathbb{C}$ kvadratický dvojčlen $V = x^2 + 1$.

Řešení: $x^2 + 1 = x^2 - (-1) = x^2 - i^2$, $V = (x + i)(x - i)$.



Poznámka

Exponenciální tvar komplexního čísla

V aplikacích se zpravidla pracuje s tzv. exponenciálním tvarem komplexního čísla: $z = re^{i\varphi}$, který dostaneme z goniometrického tvaru $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, položíme-li $r = |z|$, a $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$, kde e je Eulerovo číslo. Výhoda exponenciálního tvaru komplexních čísel spočívá v tom, že jejich násobení, dělení a umocnění přirozeným číslem se provádí podle analogických pravidel jako pro mocniny v oboru $\mathbb{R}$:

pro komplexní čísla $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ je

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

pro komplexní číslo $z = re^{i\varphi}$ je $z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$.



Shrnutí kapitoly

Obor komplexních čísel $\mathbb{C}$ je rozšířením oboru reálných čísel $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Komplexní číslo z je definované jako uspořádaná dvojice reálných čísel ($z = [x, y]$, x je reálná složka, y je imaginární složka komplexního čísla z) a lze ho zobrazit jako bod Gaussovy roviny.

Nejčastěji je používán algebraický tvar komplexního čísla ($z = x + yi$), který umožňuje počítat s komplexními čísly jako s reálnými dvojčleny, přičemž je využíván vztah $i^2 = -1$.

Komplexní čísla v algebraickém tvaru lze sčítat, odčítat, násobit, dělit i umocnit.



Goniometrický tvar komplexního čísla $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ umožňuje jeho vyjádření pomocí absolutní hodnoty $|z|$ a argumentu α . V tomto tvaru lze komplexní čísla pohodlně násobit, dělit, umocnit.

Výpočet n -tých odmocnin komplexního čísla z je možný jen v goniometrickém tvaru.

Podle potřeby lze komplexní číslo $z = [x, y]$ zapsat v algebraickém nebo goniometrickém tvaru, či převést ho z jednoho tvaru do druhého.

Pozn.: V aplikacích se zpravidla pracuje s tzv. exponenciálním tvarem komplexního čísla: $z = re^{i\varphi}$, který dostaneme z goniometrického tvaru $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, položíme-li $r = |z|$, $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$, kde e je Eulerovo číslo.



Kontrolní otázky



1. Je-li $\mathbf{R}$ obor reálných čísel, $\mathbf{C}$ obor komplexních čísel, který z následujících vztahů je správný: $\mathbf{C} \subset \mathbf{R}$ nebo $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$?
2. Jak můžeme geometricky znázornit každé komplexní číslo?
3. Jaké druhy komplexních čísel rozlišujeme?
4. Co je imaginární jednotka, co je komplexní jednotka?
5. Které tvary zápisu komplexního čísla používáme?
6. Kterou operaci nelze provést s komplexními čísly zapsanými v algebraickém tvaru?
7. Které dvě operace nelze provést s komplexními čísly zapsanými v goniometrickém tvaru?
8. K čemu lze použít Moivreovu větu?
9. Kolik n -tých odmocnin má každé komplexní číslo z v oboru komplexních čísel $\mathbf{C}$?
10. Kolik je druhých odmocnin ze záporného reálného čísla v oboru komplexních čísel $\mathbf{C}$?

Odpovědi najdete v textu.



Úlohy k samostatnému řešení



1. Převed'te komplexní čísla $c = [2; 4]$, $d = [3; -2, 5]$, $e = [0, 5; 0]$, $f = [0; -3, 5]$, $g = [-1, 5; 3]$ do algebraického tvaru a znázorněte je v Gaussově rovině.
2. Určete, je-li dané komplexní číslo imaginární, ryze imaginární nebo reálné: $a = 3 - 4,5i$, $b = -3i$, $c = -1,5 + 2i$, $d = 5$.

3. Ke komplexnímu číslu $a = 2 + 1,5i$, $b = 3i$, $c = -2,5 - 3i$, $d = 4,2$ určete číslo komplexně sdružené a číslo opačné a znázorněte je v Gaussově rovině.
4. Pro která komplexní čísla platí vztah $\bar{a} = ia$, jsou-li čísla a , $\bar{a}$ komplexně sdružená?
5. Určete absolutní hodnoty (velikosti) komplexních čísel $a = 3 + 4i$, $b = -2 + i$, $c = -4i$, $d = -5$, $e = 0,6 - 0,8i$. Je-li některé z nich komplexní jednotka, uveďte to.
6. Pro která reálná čísla x jsou čísla a) $\frac{3}{4} - xi$, b) $3x + 4xi$ komplexními jednotkami?
7. Určete a) součet, b) rozdíl, c) součin, d) podíl komplexních čísel $x = 1 + 2i$ a $y = 3 - 5i$.
8. Vypočtěte $\frac{i}{3-i}$.
9. Určete absolutní hodnotu čísla $\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$.
10. Určete kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejíž jeden kořen je $2 + 3i$.
11. Pro která reálná čísla x , y platí: $(2 + 3i)x + (4 - 3i)y = 33i - 8$?
12. V oboru komplexních čísel $\mathbb{C}$ řešte rovnici $(5 - \frac{1}{i})\bar{z} = z(1 - i) + 12$.
13. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla $a = \frac{1 - ix}{1 + ix}$ a stanovte, pro které hodnoty čísla x by komplexní číslo a bylo reálné a pro které ryze imaginární.
14. Určete goniometrický tvar komplexních čísel $a = 1 + i$, $b = -1 + \sqrt{3}i$, $c = -3$, $d = 5i$.
15. Určete algebraický tvar těchto komplexních čísel:
- $$a = 5(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ), \quad b = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3},$$
- $$c = 7(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ), \quad d = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}).$$
16. Určete součin a podíl komplexních čísel $c = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$, $d = 8(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi)$.
17. Vyjádřete $\cos 3\alpha$ a $\sin 3\alpha$ pomocí $\cos \alpha$ a $\sin \alpha$.
18. Vypočtěte $(1 - i)^8$ a) jako mocninu komplexního čísla v algebraickém tvaru,
b) jako mocninu komplexního čísla v goniometrickém tvaru.
19. Určete $(1 - \sqrt{3}i)^{12}$.
20. Určete a) $\sqrt{i}$, b) $\sqrt[3]{-1}$ a výsledky znázorněte graficky.
21. Vypočtěte $\sqrt[4]{-5 + 5\sqrt{3}i}$.

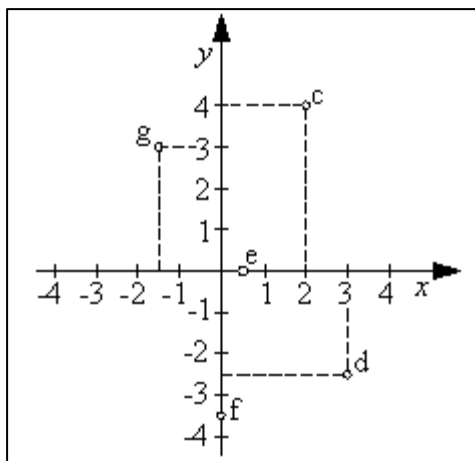


Výsledky úloh k samostatnému řešení



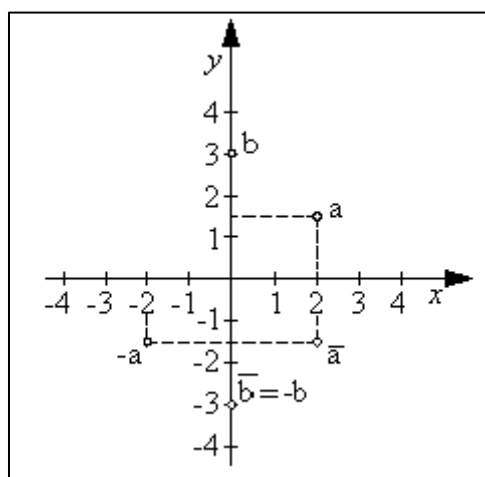
1. $c = 2 + 4i$, $d = 3 - 2,5i$, $e = 0,5 + 0i = 0,5$, $f = 0 - 3,5i = -3,5i$, $g = -1,5 + 3i$.

Jejich obrazy v Gaussově rovině:

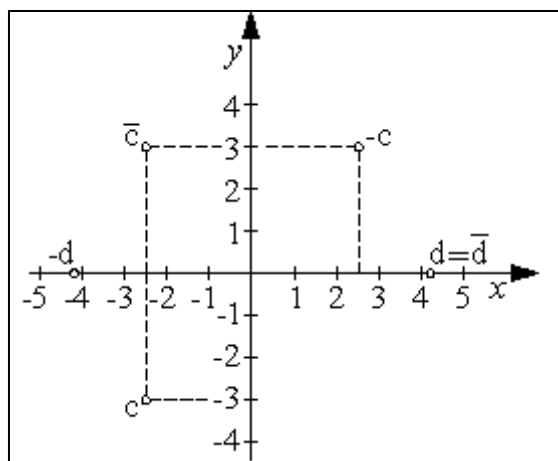


2. a je imaginární číslo, b je ryze imaginární číslo, c je imaginární číslo, d je reálné číslo.

3. $\bar{a} = 2 - 1,5i$, $-a = -2 - 1,5i$; $\bar{b} = -b = -3i$. Jejich obrazy v Gaussově rovině:



- $\bar{c} = -2,5 + 3i$, $-c = 2,5 + 3i$; $\bar{d} = 4,2$, $-d = -4,2$. Jejich obrazy v Gaussově rovině:



4. Vztah platí pro všechna komplexní čísla a , jejichž reálná a imaginární složka jsou čísla opačná, tj. $a = a_1 - a_1 i$, kde a_1 je libovolné reálné číslo.

5. $|a| = 5$, $|b| = \sqrt{5}$, $|c| = 4$, $|d| = 5$, $|e| = 1$ (e je komplexní jednotka).

6. a) pro $x = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$; b) pro $x = \pm \frac{1}{5}$.

7. a) $4 - 3i$; b) $-2 + 7i$; c) $13 + i$; d) $-\frac{7}{34} + \frac{11}{34}i$.

8. $-\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$.

9. $|z| = 1$, jde o komplexní jednotku.

10. $x^2 - 4x + 13 = 0$. 11. pro $x = 6$, $y = -5$. 12. $z = 3 + i$.

13. $\operatorname{Re} a = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $\operatorname{Im} a = -\frac{2x}{1+x^2}i$, a bude reálné pro $x = 0$, ryze imaginární pro $x = \pm 1$.

14. $a = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$, $b = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$, $c = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$,

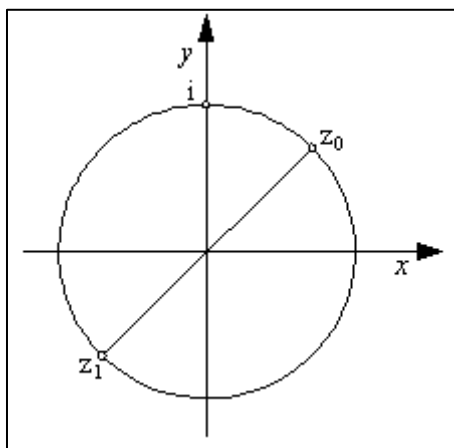
$$d = 5(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}).$$

15. $a = 5\frac{\sqrt{2}}{2} - 5\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $c = -7$ (reálné číslo), $d = 3i$ (ryze imaginární číslo).

16. $cd = 24(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)$, $\frac{c}{d} = \frac{3}{8}(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi)$.

17. $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$, $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$. 18. 16. 19. 2^{12} .

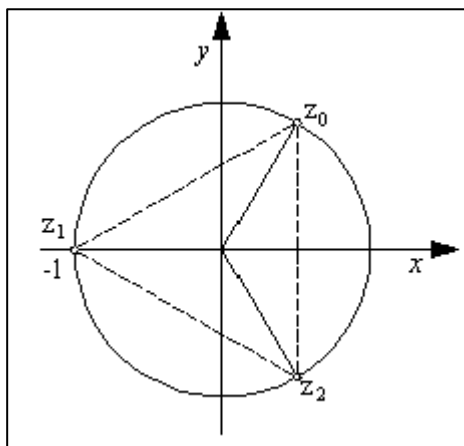
20. a) $\sqrt{i}$: $z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_1 = \cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.



$$\text{b) } \sqrt[3]{-1}: z_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

$$z_2 = \cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$



$$\text{21. } \sqrt[4]{-5+5\sqrt{3}i}: z_0 = \sqrt[4]{10}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = \sqrt[4]{10}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}(\sqrt{3} + i),$$

$$z_1 = \sqrt[4]{10}(\cos \frac{4}{6}\pi + i \sin \frac{4}{6}\pi) = \sqrt[4]{10}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}(-1 + \sqrt{3}i),$$

$$z_2 = \sqrt[4]{10}(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi) = \sqrt[4]{10}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}(-\sqrt{3} - i),$$

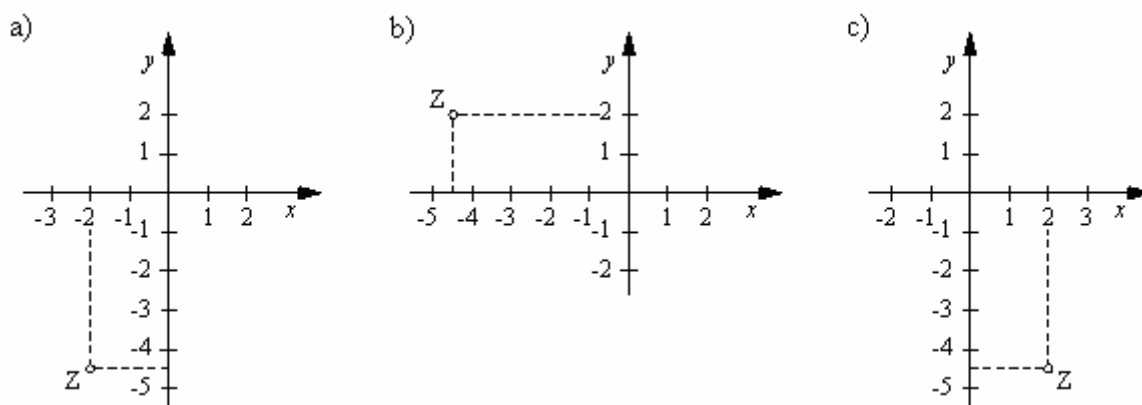
$$z_3 = \sqrt[4]{10}(\cos \frac{10}{6}\pi + i \sin \frac{10}{6}\pi) = \sqrt[4]{10}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}(1 - \sqrt{3}i).$$



Kontrolní test



1. Zobrazte komplexní číslo $z = [2; -4,5]$ jako bod Gaussovy roviny.



2. Které z následujících komplexních čísel je ryze imaginární?

a) $[5,5;-2]$, b) $[0;-1,5]$, c) $[-3;0]$, d) $[1;1]$.

3. Je-li komplexní číslo $z_1 = 3 + 4i$, pak $z_2 = 3 - 4i$ je k z_1

a) opačné, b) převrácené, c) komplexně sdružené.

4. Absolutní hodnotu komplexního čísla $z = [x, y]$ je možno vyjádřit jako

a) $\sqrt{z \cdot \bar{z}}$, b) $x^2 + y^2$, c) $\sqrt{x^2 + y^2}$, d) $(z - \bar{z})^2$.

5. Uveďte, které komplexní číslo je komplexní jednotkou:

a) $\left[\frac{4}{5}; -\frac{1}{4}\right]$, b) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right]$, c) $\left[\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right]$, d) $\left[\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right]$.

6. Vypočítejte součin komplexních čísel $u = 6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$, $v = \frac{1}{3}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$.

Výsledek vyjádřete v algebraickém tvaru.

a) $-1 + \sqrt{3}i$, b) $-\sqrt{3} + i$, c) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

7. Vyjádřete v goniometrickém tvaru komplexní číslo $\frac{i-3}{2+i}$.

a) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right)$, b) $1,5\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$, c) $2\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)$.

8. Vypočtete $(1-i)^6$.

a) $8-8i$, b) $0+8i$, c) $3-4i$.

9. Vypočítejte $\sqrt[3]{-2+2i}$.

$$a) \quad z_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{1}{4} \pi + i \sin \frac{1}{4} \pi \right),$$

$$b) \quad z_0 = 2 \left(\cos \frac{1}{3} \pi + i \sin \frac{1}{3} \pi \right),$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11}{12} \pi + i \sin \frac{11}{12} \pi \right),$$

$$z_1 = 2 (\cos \pi + i \sin \pi),$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{19}{12} \pi + i \sin \frac{19}{12} \pi \right),$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{5}{3} \pi + i \sin \frac{5}{3} \pi \right),$$

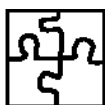
$$c) \quad \sqrt[3]{-2} + \sqrt[3]{2i}.$$

10. Řešte v oboru $\mathbb{C}$ kvadratickou rovnici $x^2 - 6x + 25 = 0$.

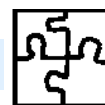
$$a) \quad x_1 = 7; x_2 = -1,$$

$$b) \quad x_1 = 2 + 1,5i; x_2 = 2 - 1,5i,$$

$$c) \quad x_1 = 3 + 4i; x_2 = 3 - 4i.$$



Výsledky testu



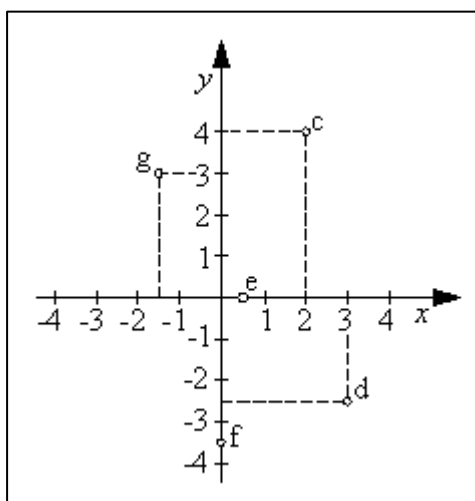
1. c); 2. b); 3. c); 4. a), c); 5. b), d); 6. a); 7. a); 8. b); 9. a); 10. c).



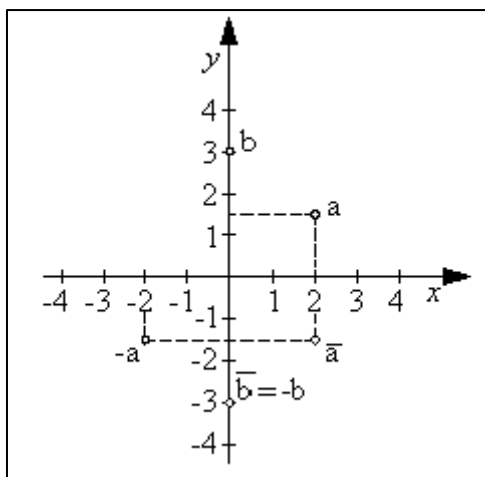
Kompletní řešení úloh k samostatnému řešení



1. Algebraický tvar komplexního čísla $z = [x, y]$ je $z = x + yi$. Komplexní číslo $z = [x, y]$ se zobrazí v Gaussově rovině jako bod o souřadnicích $[x, y]$. Tedy $c = 2 + 4i$, $d = 3 - 2,5i$, $e = 0,5 + 0i = 0,5$, $f = 0 - 3,5i = -3,5i$, $g = -1,5 + 3i$.

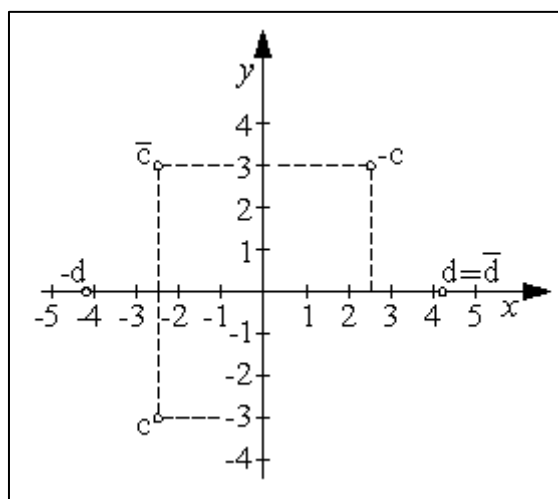


2. Komplexní číslo $z = [x, y] = x + yi$ je imaginární číslo, je-li $x \neq 0$ a $y \neq 0$, ryze imaginární číslo, je-li $x = 0$ a $y \neq 0$, reálné číslo, je-li $y = 0$. Takže: a je imaginární číslo, b ryze imaginární číslo, c imaginární číslo; d reálné číslo.
3. Ke komplexnímu číslu $z = [x, y] = x + yi$ je $\bar{z} = x - yi$ číslo komplexně sdružené, $-z = -x - yi$ číslo opačné; tedy pro $a = 2 + 1,5i$ je $\bar{a} = 2 - 1,5i$, $-a = -2 - 1,5i$; pro $b = 3i$ je $\bar{b} = -3i$, $-b = -3i$. Jejich obrazy v Gaussově rovině:



pro $c = -2,5 - 3i$ je $\bar{c} = -2,5 + 3i$, $-c = 2,5 + 3i$; pro $d = 4,2$ je $\bar{d} = 4,2$, $-d = -4,2$.

Jejich obrazy v Gaussově rovině:



4. Necht' $a = a_1 + a_2i$, $\bar{a} = a_1 - a_2i$.

Položíme $\bar{a} = ia$, tj. $a_1 - a_2i = i(a_1 + a_2i) = -a_2 + a_1i$.

Z rovnosti komplexních čísel plyne: $a_1 = -a_2$. To znamená, že vztah platí pro všechna

komplexní čísla a , jejichž reálná a imaginární složka jsou čísla opačná, tj. $a = a_1 - a_1 i$,
kde a_1 je libovolné reálné číslo.

Ověření: např. pro $a = 3 - 3i$ je $ia = i(3 - 3i) = 3i - 3i^2 = 3 + 3i = \bar{a}$.

5. Absolutní hodnota (velikost) komplexního čísla $a = a_1 + a_2 i$ je $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, tedy:

$$|a| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \quad |b| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad |c| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4,$$

$$|d| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5, \quad |e| = \sqrt{0,6^2 + 0,8^2} = \sqrt{0,36 + 0,64} = \sqrt{1} = 1,$$

e je komplexní jednotka.

6. a) Necht' $a = \frac{3}{4} - xi$; $|a| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + x^2}$; má-li číslo a být komplexní jednotka, musí

platit: $|a| = 1$. Dostaneme tedy rovnici:

$$\sqrt{\frac{9}{16} + x^2} = 1, \text{ odtud}$$

$$9 + 16x^2 = 16 \Rightarrow 16x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Pro $x = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$ je číslo $a = \frac{3}{4} - xi$ komplexní jednotkou.

- b) Necht' $b = 3x + 4xi$, $|b| = \sqrt{9x^2 + 16x^2}$; má-li číslo b být komplexní jednotka, musí

platit: $|b| = 1$. Dostaneme tedy rovnici:

$$\sqrt{9x^2 + 16x^2} = 1, \text{ odtud}$$

$$25x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{5}.$$

Pro $x = \pm \frac{1}{5}$ je číslo $b = 3x + 4xi$ komplexní jednotkou.

7. $x + y = 1 + 2i + 3 - 5i = 4 - 3i$,

$$x - y = 1 + 2i - (3 - 5i) = 1 + 2i - 3 + 5i = -2 + 7i,$$

$$x \cdot y = (1 + 2i)(3 - 5i) = 3 - 5i + 6i - 10i^2 = 13 + i,$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x\bar{y}}{y\bar{y}} = \frac{(1+2i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)} = \frac{3+5i+6i+10i^2}{9+25} = \frac{-7+11i}{34} = -\frac{7}{34} + \frac{11}{34}i.$$

8. $\frac{i}{3-i} = \frac{i(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{-1+3i}{9+1} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i.$

9. Nejprve určíme výsledek podílu:

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{1 - 3i^2} = \frac{1 + 2\sqrt{3}i + 3i^2}{4} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2},$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \text{ jde o komplexní jednotku.}$$

10. Má-li kvadratická rovnice s reálnými koeficienty imaginární kořen, pak je i druhý kořen imaginární, komplexně sdružený. Naše rovnice má tedy kořeny $2+3i$, $2-3i$. Úpravou součinu kořenových činitelů obdržíme:

$$(x - (2 + 3i))(x - (2 - 3i)) = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) = (x - 2)^2 - (3i)^2 = x^2 - 4x + 4 + 9,$$

hledaná kvadratická rovnice: $x^2 - 4x + 13 = 0$.

11. Rovnici $(2 + 3i)x + (4 - 3i)y = 33i - 8$ upravíme:

$2x + 3xi + 4y - 3yi = -8 + 33i$ - komplexní čísla vlevo a vpravo od rovnítka jsou si rovna, rovnají-li se jejich reálné i imaginární složky:

$$2x + 4y = -8$$

$$3x - 3y = 33$$

první rovnici vydělíme dvěma, druhou rovnici vydělíme třemi, dostaneme:

$$x + 2y = -4$$

$$x - y = 11$$

z druhé rovnice vyjádříme x : $x = y + 11$ a dosadíme do první rovnice:

$$y + 11 + 2y = -4, \text{ odtud, } 3y = -15 \Rightarrow y = -5, \quad x = y + 11 = 6.$$

Řešením rovnice je $x = 6$, $y = -5$.

12. Neznámá $z = x + yi$, pak $\bar{z} = x - yi$; komplexní číslo $-\frac{1}{i} = -\frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-i}{(-1)} = i$,

řešíme tedy rovnici:

$$(5 + i)(x - yi) = (x + yi)(1 - i) + 12$$

$$5x - 5yi + xi + y = x - xi + yi + y + 12$$

$$5x + y + (x - 5y)i = x + y + 12 + (y - x)i$$

$$4x - 12 + (x - 5y)i = (y - x)i$$

rovnost komplexních čísel na levé a pravé straně rovnice vyjádříme soustavou rovnic:

$$4x - 12 = 0$$

$$x - 5y = y - x$$

po úpravě obdržíme:

$$4x - 12 = 0$$

$$2x - 6y = 0$$

z první rovnice vyjádříme x : $x = \frac{12}{4} = 3$ a dosadíme do druhé rovnice: $2 \cdot 3 - 6y = 0$,

tedy $y = 1$. Řešením dané rovnice je komplexní číslo $z = 3 + i$.

$$13. \quad a = \frac{1-ix}{1+ix} = \frac{(1-ix)^2}{(1+ix) \cdot (1-ix)} = \frac{1-2ix+i^2x^2}{1-i^2x^2} = \frac{1-x^2-2ix}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2}i.$$

Číslo a bude reálné, pokud jeho imaginární složka $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Číslo a bude ryze imaginární, pokud jeho reálná složka $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

$$14. \quad a = 1 + i: \operatorname{Re} a = a_1 = 1, \operatorname{Im} a = a_2 = 1, \text{ tedy}$$

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \cos \alpha = \frac{a_1}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{a_2}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

odtud $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Goniometrický tvar komplexního čísla $a = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

$$b = -1 + \sqrt{3}i: \operatorname{Re} b = b_1 = -1, \operatorname{Im} b = b_2 = \sqrt{3}, \text{ tedy}$$

$$|b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2, \quad \cos \alpha = \frac{b_1}{|b|} = \frac{-1}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{b_2}{|b|} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

odtud $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Goniometrický tvar komplexního čísla $b = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$.

$$c = -3: \operatorname{Re} c = c_1 = -3, \operatorname{Im} c = c_2 = 0, \text{ tedy } |c| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3,$$

jde o reálné číslo, jehož obraz v Gaussově rovině je bod na reálné ose x se souřadnicí -3 ,

odtud $\alpha = \pi$. (Potvrdilo by se i výpočtem: $\cos \alpha = \frac{-3}{3} = -1$, $\sin \alpha = \frac{0}{3} = 0$).

Goniometrický tvar komplexního čísla $c = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$.

$$d = 5i: \operatorname{Re} d = d_1 = 0, \operatorname{Im} d = d_2 = 5, \text{ tedy } |d| = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \sqrt{(0)^2 + 5^2} = 5,$$

jde o ryze imaginární číslo, jehož obraz v Gaussově rovině je bod na imaginární ose y

se souřadnicí 5, tedy jeho argument $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Goniometrický tvar komplexního čísla $d = 5(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$.

$$15. a = 5(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) = 5(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi) = 5(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}) = 5\frac{\sqrt{2}}{2} - 5\frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$b = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = 1(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 1(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$c = 7(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 7(\cos \pi + i \sin \pi) = 7(-1 + i \cdot 0) = -7 \text{ (reálné číslo),}$$

$$d = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 3(0 + i \cdot 1) = 3i \text{ (ryze imaginární číslo)}$$

$$16. c \cdot d = 3 \cdot 8 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{5}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{5}{4}\pi \right) \right) = 24 \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} &= \frac{3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)}{8 \left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \right)} = \frac{3}{8} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi \right) \right) = \\ &= \frac{3}{8} \left(\cos \left(-\frac{3}{4}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{3}{4}\pi \right) \right) = \frac{3}{8} \left(\cos \left(-\frac{3}{4}\pi + 2\pi \right) + i \sin \left(-\frac{3}{4}\pi + 2\pi \right) \right) = \\ &= \frac{3}{8} \left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \right). \end{aligned}$$

17. Podle Moivreovy věty:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha,$$

rovněž platí (užitím binomické věty):

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos^3 \alpha + 3i \cos^2 \alpha \sin \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha - i \sin^3 \alpha.$$

Z rovnosti pravých stran obou vztahů plyne:

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

a dále (pro členy s „i“):

$$\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 3(1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

18. a) Užitím binomické věty:

$$\begin{aligned} (1-i)^8 &= \binom{8}{0} 1^8 (-i)^0 + \binom{8}{1} 1^7 (-i)^1 + \binom{8}{2} 1^6 (-i)^2 + \binom{8}{3} 1^5 (-i)^3 + \binom{8}{4} 1^4 (-i)^4 + \\ &\quad + \binom{8}{5} 1^3 (-i)^5 + \binom{8}{6} 1^2 (-i)^6 + \binom{8}{7} 1^1 (-i)^7 + \binom{8}{8} 1^0 (-i)^8 = \end{aligned}$$

$$= 1 + 8(-i) + 28(-i)^2 + 56(-i)^3 + 70(-i)^4 + 56(-i)^5 + 28(-i)^6 + 8(-i)^7 + (-i)^8 = \\ = 1 - 8i - 28 + 56i + 70 - 56i - 28 + 8i + 1 = 16.$$

Úpravou výrazu lze výpočet zjednodušit:

$$(1-i)^8 = ((1-i)^2)^4 = (1-2i+i^2)^4 = (1-2i-1)^4 = (-2i)^4 = 16i^4 = 16 \cdot 1 = 16.$$

b) určíme goniometrický tvar komplexního čísla $z = (1-i)$:

$$\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z = -1, |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \text{tedy } \alpha = \frac{7}{4}\pi,$$

$$(1-i) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right),$$

$$(1-i)^8 = \sqrt{2}^8 \left(\cos \left(8 \cdot \frac{7}{4}\pi \right) + i \sin \left(8 \cdot \frac{7}{4}\pi \right) \right) = 2^4 (\cos 14\pi + i \sin 14\pi) = 16(\cos 0 + i \sin 0) = 16.$$

19. Komplexní číslo $z = 1 - \sqrt{3}i$ převedeme na goniometrický tvar: $|z| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$,

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{3}\pi, \text{tedy } z = 2 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right).$$

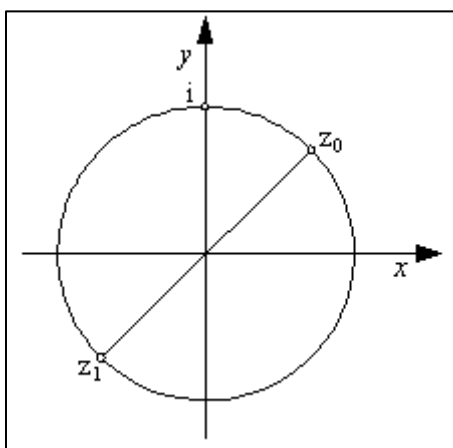
$$z^{12} = 2^{12} \left(\cos \left(12 \cdot \frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(12 \cdot \frac{5\pi}{3} \right) \right) = 2^{12} \left(\cos \frac{60\pi}{3} + i \sin \frac{60\pi}{3} \right) = \\ = 2^{12} (\cos 20\pi + i \sin 20\pi) = 2^{12} (\cos 0 + i \sin 0) = 2^{12}.$$

20. Odmocňovaná komplexní čísla vyjádříme v goniometrickém tvaru a výpočet odmocnin

provedeme podle vzorce $z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right)$, $k = 0, \dots, n-1$:

$$\text{a) } i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right), \sqrt{i} = z_k = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2} \right), \text{ kde } k = 0, 1$$

$$\text{neboli } z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_1 = \cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i:$$

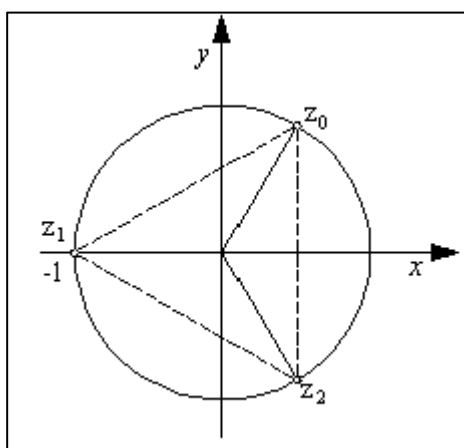


$$b) -1 = \cos \pi + i \sin \pi,$$

$$\sqrt[3]{-1} = z_k = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right), \text{ kde } k = 0, 1, 2,$$

$$\text{neboli } z_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1, \quad z_2 = \cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i:$$



21. Odmocňované komplexní číslo vyjádříme v goniometrickém tvaru a výpočet odmocnin

provedeme podle vzorce $z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$:

Označíme $z = -5 + 5\sqrt{3}i$, $|z| = \sqrt{25 + 75} = 10$,

$$\cos \alpha = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}; \quad \text{tedy } z = 10 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

$$\sqrt[4]{z} = z_k = \sqrt[4]{10} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4} \right) \right) = \sqrt[4]{10} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2} \right) \right),$$

kde $k = 0, 1, 2, 3$,

$$\text{neboli } z_0 = \sqrt[4]{10} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{10} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2} (\sqrt{3} + i),$$

$$z_1 = \sqrt[4]{10} \left(\cos \frac{4}{6}\pi + i \sin \frac{4}{6}\pi \right) = \sqrt[4]{10} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2} (-1 + \sqrt{3}i),$$

$$z_2 = \sqrt[4]{10} \left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi \right) = \sqrt[4]{10} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2} (-\sqrt{3} - i),$$

$$z_3 = \sqrt[4]{10} \left(\cos \frac{10}{6}\pi + i \sin \frac{10}{6}\pi \right) = \sqrt[4]{10} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{\sqrt[4]{10}}{2} (1 - \sqrt{3}i).$$

5. POSLOUPNOSTI A ŘADY	152
5.1. Pojem posloupnosti čísel	152
5.1.1. Grafické znázornění posloupnosti	154
5.1.2. Některé vlastnosti posloupností	155
Kontrolní otázky	157
5.2. Aritmetická posloupnost	158
5.2.1. Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti	159
Kontrolní otázky	163
5.3. Geometrická posloupnost	163
5.3.1. Součet prvních n členů geometrické posloupnosti	165
Kontrolní otázky	168
5.4. Užití geometrické posloupnosti	169
5.5. Limita posloupnosti	170
Kontrolní otázky	172
5.6. Nekonečná geometrická řada	172
Úlohy k samostatnému řešení	175
Výsledky úloh k samostatnému řešení	176
Klíč k řešení úloh	176
Kontrolní test	178
Výsledky testu	179
Shrnutí lekce	179

5. POSLOUPNOSTI A ŘADY



Průvodce studiem



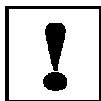
Seznámili jste se už s pojmem reálné funkce jedné reálné proměnné. Nyní tento pojem rozšíříme a seznámíme se s funkcemi, jejichž definičním oborem jsou jen přirozená čísla. Ukážeme si, jak je užitečné se těmito speciálními funkcemi zabývat. Nové vědomosti pomohou vyřešit mnoho praktických úloh.



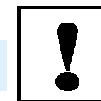
Cíle



Objasnit pojem posloupnosti obecně, dále pojem posloupnosti aritmetické a geometrické, limity posloupnosti a nekonečné geometrické řady a na příkladech ukázat možnosti využití.



Předpokládané znalosti



Pojem reálné funkce jedné reálné proměnné, který jste si zopakovali v kapitole 2.

5.1. Pojem posloupnosti čísel



Výklad



Mějme za úkol sledovat u nemocného pacienta teplotu. Důležitá je nejen naměřená hodnota ale i denní doba a pořadí, ve kterém byla naměřena. Měření budeme provádět v každou celou hodinu a výsledek naší péče o pacienta zapíšeme do tabulky.

Pořadí měření:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
denní doba:	7 ⁰⁰	8 ⁰⁰	9 ⁰⁰	10 ⁰⁰	11 ⁰⁰	12 ⁰⁰	13 ⁰⁰
teplota:	36,6°C	36,5°C	37°C	37°C	37,2°C	37,9°C	38°C

Sledujeme-li v tomto přehledu pouze uspořádané dvojice $[1;36,6]$, $[2;36,5]$, $[3;37]$,... atd., vidíme v nich, že přirozeným číslům 1, 2, 3, 4, ... jsou přiřazována reálná čísla 36,6; 36,5; 37; 37; 37,2; ...atd.

Toto přiřazení je funkcí, jejíž argument je vždy přirozené číslo, a je tedy posloupností.

O naměřených hodnotách mluvíme jako o členech posloupnosti. Jiný, než tabulka či uspořádané dvojice, je používaný zápis: $a_1 = 36,6$; $a_2 = 36,5$; $a_3 = 37$, ...

Funkce, jejímž definičním oborem je množina $\mathbf{N}$ všech přirozených čísel, se nazývá **posloupnost (nekonečná číselná posloupnost)**.

U funkcí tohoto druhu zapisujeme argument jako index hodnoty funkce. Tedy:

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots, f(n) = a_n, \dots$$

Posloupnost, která každému $n \in \mathbf{N}$ přiřazuje číslo $a_n \in \mathbf{R}$, se zapisuje některým

z následujících způsobů:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots,$$

$$(a_n),$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty},$$

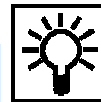
$$\text{nebo stručně } \{a_n\}.$$

Příklady posloupností:

1. Čísla 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... jsou prvními členy posloupnosti sudých kladných čísel. Tato posloupnost vznikne tak, že každému přirozenému číslu n přiřadíme jeho dvojnásobek $2n$. Libovolný člen $a_n = 2n$. Zapisujeme ji $\{2n\}$.
2. Čísla $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ jsou prvními členy posloupnosti převrácených čísel k přirozeným číslům. Dostaneme ji přiřazováním převrácené hodnoty $\frac{1}{n}$ ke každému přirozenému číslu, takže její libovolný člen $a_n = \frac{1}{n}$.
3. Čísla 4, 7, 10, 13, 16, ... jsou prvními členy posloupnosti, ve které je každému přirozenému číslu n přiřazeno číslo $1 + 3n$ a zapisujeme ji $\{1 + 3n\}$.



Řešená úloha



Příklad 5.1.1 Jaký je rozdíl mezi symboly

- a) $\{a_n\}$,
- b) $\{a_n, n \in \mathbf{N}\}$,
- c) a_n .

Řešení:

- a) Tento symbol označuje posloupnost.
- b) Takto označujeme množinu všech členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- c) Toto je n -tý člen posloupnosti $\{a_n\}$.

5.1.1. Grafické znázornění posloupnosti



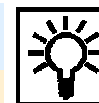
Výklad



Posloupnosti znázorňujeme v pravoúhlé soustavě souřadnic v rovině. **Grafem posloupnosti** je vždy množina izolovaných bodů $\{[n, a_n] \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}\}$. Člen a_n posloupnosti reálných čísel znázorňujeme v pravoúhlé soustavě souřadnic bodem $A_n = [n, a_n]$.

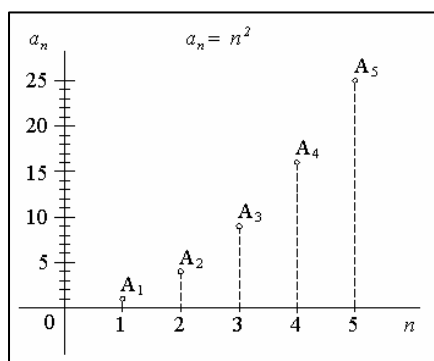


Řešené úlohy



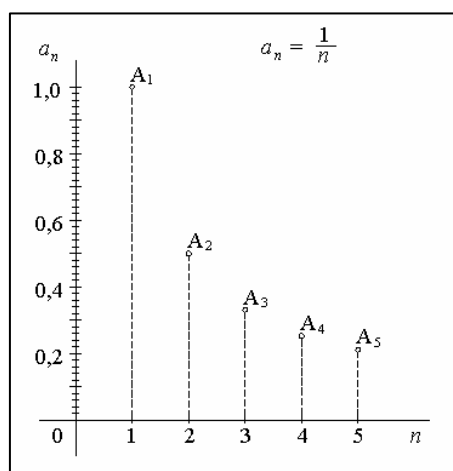
Příklad 5.1.2. Graficky znázorněte prvních pět členů posloupnosti $\{n^2\}$.

Řešení:



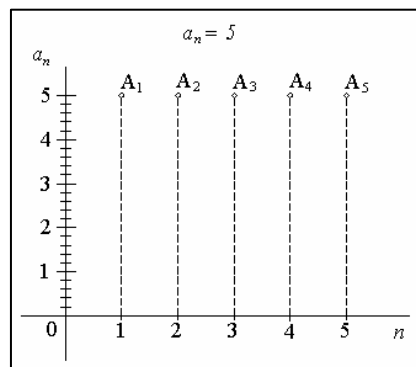
Příklad 5.1.3. Graficky znázorněte prvních pět členů posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Řešení:



Příklad 5.1.4. Graficky znázorněte prvních pět členů posloupnosti $\{5\}$.

Řešení:



5.1.2. Některé vlastnosti posloupností



Výklad



Posloupnost s reálnými členy je zvláštním případem reálné funkce reálné proměnné, proto můžeme také u ní zkoumat obdobné vlastnosti, např. ohraničenost a monotónnost.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

shora ohraničená, existuje-li takové číslo $h \in \mathbf{R}$, že $a_n \leq h, \forall n \in \mathbf{N}$,

zdola ohraničená, existuje-li takové číslo $d \in \mathbf{R}$, že $a_n \geq d, \forall n \in \mathbf{N}$,

ohraničená, je-li ohraničená shora i zdola.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

rostoucí $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}$ platí, že $a_{n+1} > a_n$,

klesající $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}$ platí, že $a_{n+1} < a_n$,

neklesající $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}$ platí, že $a_{n+1} \geq a_n$,

nerostoucí $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}$ platí, že $a_{n+1} \leq a_n$.

Má-li posloupnost některou ze čtyř výše uvedených vlastností, nazývá se **monotónní**, přičemž posloupnosti rostoucí a klesající se nazývají **ryze monotónní**.



Řešené úlohy



Příklad 5.1.5. Zjistěte, zda posloupnost, ve které pro libovolný člen platí $a_n = \frac{n(n-1)}{n+1}$, je ryze monotónní.

Řešení: Předpokládejme, že tato posloupnost je rostoucí a je tedy $a_n < a_{n+1}$. Člen

$$a_n = \frac{n(n-1)}{n+1} \text{ a člen } a_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)-1)}{(n+1)+1} = \frac{(n+1)n}{n+2} \text{ dosadíme do předpokladu}$$

$$a_n < a_{n+1} \text{ a dostaneme nerovnici } \frac{n(n-1)}{n+1} < \frac{(n+1)n}{n+2}, \text{ u které potřebujeme zjistit, zda}$$

platí pro všechna přirozená čísla. Po jejím vynásobením kladným číslem $\frac{(n+1)(n+2)}{n}$

dostaneme $n^2 + n - 2 < n^2 + 2n + 1$. Odtud pak po úpravě $n > -3$, což platí $\forall n \in \mathbf{N}$.

Náš předpoklad byl správný a zjistili jsme, že posloupnost je rostoucí a tedy ryze monotónní.

Příklad 5.1.6. Zjistěte, zda je posloupnost $\left\{ \frac{2n}{n+1} \right\}$ ohraničená.

Řešení: První členy posloupnosti jsou: $1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, \dots, \frac{200}{101}, \dots$

Lze usuzovat, že je rostoucí, což ověříme platností vztahu $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbf{N}$. Po

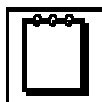
dosazení dostáváme $\frac{2(n+1)}{n+2} > \frac{2n}{n+1}$, po úpravě $2(n^2 + 2n + 1) > 2(n^2 + 2n)$, tedy

$2 > 0$. Víme nyní, že posloupnost roste, a chceme zjistit, zda je ohraničená. Člen

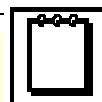
$a_1 = 1$ této rostoucí posloupnosti má nejmenší hodnotu. Zadání pro n -tý člen

$$\text{upravíme takto: } \frac{2n}{n+1} = 2n : (n+1) = 2 - \frac{2}{n+1}.$$

Z toho vyplývá, že všechny členy posloupnosti jsou menší než 2. Zjevně pro všechna přirozená čísla n je $1 \leq a_n \leq 2$, tedy $d \leq |a_n| \leq h$, kde $d = 1, h = 2$. Posloupnost je tedy ohraničená.

**Poznámka**

Na předchozích příkladech vidíme, že je možné některé posloupnosti určit vzorcem pro n -tý člen. Jsou však i jiné velmi důležité posloupnosti, u kterých takový vzorec udat neumíme. (Například u rostoucí posloupnosti všech prvočísel: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...) Velmi častý a důležitý je případ, kdy je dán první člen nebo několik prvních členů posloupnosti a pro následující členy je dán předpis, jak se má určit člen a_{n+1} na základě znalosti předchozích členů $a_1, a_2, \dots, a_n$. V takovém případě říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je definována **rekurentně** (latinsky *recurrere* = běžeti zpět).

**Řešené úlohy**

Příklad 5.1.7. Napište prvních pět členů posloupnosti, která je dána rekurentně:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n - a_{n-1}.$$

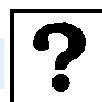
Řešení: $a_3 = a_2 - a_1 \Rightarrow a_3 = 1$; $a_4 = a_3 - a_2 \Rightarrow a_4 = -1$; $a_5 = a_4 - a_3 \Rightarrow a_5 = -2$.



Příklad 5.1.8. Napište prvních deset členů posloupnosti dané rekurentně:

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Řešení: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. Tato posloupnost se nazývá Fibonacciova.

**Kontrolní otázky**

1. Tvoří množina N všech přirozených čísel uspořádaných podle velikosti posloupnost?
2. Je posloupnost $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ monotónní?
3. Může být grafem posloupnosti přímka nebo polopřímka?

5.2. Aritmetická posloupnost



Výklad



Aritmetické posloupnosti jsou speciální typy posloupností, které mají velký teoretický i praktický význam.

Aritmetická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně vztahy:

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d, \forall n \in \mathbf{N},$$

kde a, d jsou daná reálná čísla.

Číslo d nazýváme **diference** (diference = rozdíl), protože se rovná rozdílu $a_{n+1} - a_n$ kterýchkoliv dvou sousedních členů posloupnosti, tj. $d = a_{n+1} - a_n$.

Uvedeme si nyní jednu vlastnost každé aritmetické posloupnosti, která je pro ni charakteristická. Podle definice je rozdíl každých dvou jejích sousedních členů konstantní.

Platí tedy :

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$$

pro každé $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Odtud dostáváme rovnici, z níž plyne pro člen a_n :

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Tento vztah vyjadřuje, že počínaje druhým členem, je každý člen aritmetické posloupnosti **aritmetickým průměrem členů sousedních**. Obráceně, je-li v posloupnosti každý člen $a_n, n \geq 2$ aritmetickým průměrem členů sousedních, jedná se o aritmetickou posloupnost.



Řešená úloha



Příklad 5.2.1. Určete prvních pět členů aritmetické posloupnosti, je-li dán sedmý člen

$$a_7 = 10 \text{ a šestý člen } a_6 = 8.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} a_7 &= a_6 + d \Rightarrow 10 = 8 + d \Rightarrow d = 2 \\ a_6 &= a_5 + d \Rightarrow 8 = a_5 + 2 \Rightarrow a_5 = 6 \\ a_5 &= a_4 + d \Rightarrow 6 = a_4 + 2 \Rightarrow a_4 = 4 \\ a_4 &= a_3 + d \Rightarrow 4 = a_3 + 2 \Rightarrow a_3 = 2 \\ a_3 &= a_2 + d \Rightarrow 2 = a_2 + 2 \Rightarrow a_2 = 0 \\ a_2 &= a_1 + d \Rightarrow 0 = a_1 + 2 \Rightarrow a_1 = -2. \end{aligned}$$

**Výklad**

Snadno vidíme, že n -tý člen aritmetické posloupnosti lze vyjádřit pomocí prvního členu a potřebného násobku difference:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Pro libovolné dva členy a_r, a_s aritmetické posloupnosti platí vztah:

$$a_s = a_r + (s-r)d.$$

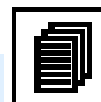
**Řešené úlohy**

Příklad 5.2.2. V aritmetické posloupnosti je dáno $a_4 = 18$, $a_7 = 16$, určete a_1, d, a_{10} .

Řešení: Podle $a_s = a_r + (s-r)d$ je $a_7 = a_4 + 3d \Rightarrow 3d = a_7 - a_4 \Rightarrow d = -\frac{2}{3}$.

Podle $a_n = a_1 + (n-1)d$ pak je $a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow a_1 = a_4 - 3d \Rightarrow a_1 = 20$.

Podle $a_n = a_1 + (n-1)d$ je také $a_{10} = a_1 + 9d = 20 + 9(-\frac{2}{3}) = 14$.

5.2.1. Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti**Výklad**

Mějme za úkol sečíst všechna přirozená čísla od jedné do padesáti. Můžeme si počínat tak, že napíšeme sčítance vzestupně a sestupně a pak je sečteme :

$$1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50 = s$$

$$50 + 49 + \dots + 3 + 2 + 1 = s$$

Součtem těchto rovnic dostáváme :

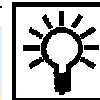
$$(1+50) + (2+49) + \dots + (50+1) = 2s \Rightarrow 50 \cdot 51 = 2s \Rightarrow s = \frac{50 \cdot 51}{2} = 1275.$$

Z takto řešené úlohy vidíme, že lze odvodit pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ vzorec:

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$



Řešené úlohy



Příklad 5.2.3. Vypočítejte součet prvních n přirozených lichých čísel.

Řešení: Lichá přirozená čísla tvoří aritmetickou posloupnost, ve které je $a_1 = 1, d = 2$

Podle $a_n = a_1 + (n-1)d$ je $a_n = 1 + (n-1)2 = 2n-1$;

proto podle $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ je $s_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{n(1 + 2n-1)}{2} = n^2$.

Součet prvních n lichých přirozených čísel má hodnotu n^2 .

Příklad 5.2.4. Trubky jsou srovnány v osmi řadách nad sebou tak, že vrchní má 13 trubek a každá další řada o jednu více. Kolik je všech trubek dohromady?

Řešení: Počty trubek v řadách jsou prvními osmi členy aritmetické posloupnosti, ve které je $a_1 = 13, d = 1$ a podle $a_n = a_1 + (n-1)d$ je $a_8 = 13 + 7 \cdot 1 = 20$. Máme-li určit počet všech trubek, určíme součet prvních osmi členů této posloupnosti.

Dosadíme do vzorce $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow s_8 = \frac{8 \cdot (13 + 20)}{2} = 4 \cdot 33 = 132$.

Trubek je tedy celkem 132.

Příklad 5.2.5. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku jsou prvními třemi členy aritmetické posloupnosti. Určete délky odvěsen víte-li, že přepona měří 30 cm.

Řešení: Označme odvěsny v trojúhelníku $a = a_1, b = a_2, c = a_3 = 30$.

$$a_1 = a_3 - 2d = 30 - 2d$$

$$a_2 = a_3 - d = 30 - d$$

Z Pythagorovy věty pro délky stran pravoúhlého trojúhelníku dostáváme

$$(30 - 2d)^2 + (30 - d)^2 = 30^2$$

$$900 - 120d + 4d^2 + 900 - 60d + d^2 = 900$$

$$5d^2 - 180d + 900 = 0$$

$$d^2 - 36d + 180 = 0$$

$$d_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot 180}}{2} = \frac{36 \pm 24}{2} \Rightarrow d_1 = 30, d_2 = 6$$

Kořen $d_1 = 30$ pro náš úkol nemá smysl.

Druhý kořen $d_2 = 6 = d \Rightarrow a_1 = 30 - 2 \cdot 6 = 18, a_2 = 30 - 1 \cdot 6 = 24$.

Strany pravoúhlého trojúhelníku měří 18, 24 a 30 cm.

Příklad 5.2.6. Mezi čísla $a = 2,6$; $b = 4,7$ vložte 9 čísel tak, aby s danými dvěma čísly tvořila prvních 11 členů aritmetické posloupnosti.

Řešení: V uvažované posloupnosti je zadán její první a jedenáctý člen.

$$a_1 = a = 2,6$$

$$a_{11} = b = 4,7 \Rightarrow 4,7 = 2,6 + 10d$$

$$d = \frac{4,7 - 2,6}{10} = 0,21$$

Prvních jedenáct členů posloupnosti jsou tedy čísla:

2,6; 2,81; 3,02; 3,23; 3,44; 3,65; 3,86; 4,07; 4,28; 4,49; 4,7.

Příklad 5.2.7. Aritmetická posloupnost má diferenci $d = -12$ a člen $a_n = 15$. Kolik prvních členů této posloupnosti má součet $s_n = 456$?

Řešení: $a_1 = a_n - (n-1)d = 15 - (n-1)(-12) = 15 + 12n - 12 = 3 + 12n$.

Pro součet dostaneme rovnici s neznámou $n \in \mathbf{N}$:

$$456 = \frac{n(3+12n+15)}{2} \quad / \cdot 2$$

$$912 = 18n + 12n^2 \quad / : 6$$

$$152 = 3n + 2n^2 \Rightarrow 2n^2 + 3n - 152 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-152)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 35}{4}$$

$$n_1 = 8, \quad n_2 = -\frac{19}{2} \notin \mathbf{N}.$$

Hledané n je $n_1 = 8$.

V dané posloupnosti má prvních osm členů předpokládaný součet.

Příklad 5.2.8. Za dobrý prospěch dal otec synovi počátkem školního roku první kapesné 100 Kč s tím, že mu bude v průběhu pěti měsíců toto kapesné zvyšovat buď po měsíci vždy o 4 Kč, nebo po půl měsících vždy o 1 Kč. Zkuste nejprve odhadnout, která nabídka je pro syna výhodnější, a pak se o tom výpočtem přesvědčte.

Řešení: Odhadli jste, že je výhodnější pro syna, když mu bude otec zvyšovat kapesné o 1 Kč za půl měsíce než o 4 Kč za měsíc? Přesvědčíme se o tom porovnáním součtů dvou aritmetických posloupností.

Posloupnost při měsíčním navyšování má $a_1 = 100, d = 4, n = 5$.

$$\text{Její součet je } s_5 = \frac{5(100 + 100 + (5-1)d)}{2} = 5 \cdot 108 = 540.$$

Při půlměsíčním navyšování kapesného jde o jinou posloupnost, která má

$$a_1 = 50, d = 1, n = 10.$$

$$\text{Její součet je } s_{10} = \frac{10(50 + 50 + (10-1)d)}{2} = 5 \cdot 109 = 545.$$

Porovnáním získaných součtů vidíme, že je druhá varianta pro syna o pět korun výhodnější.

Příklad 5.2.9. Určete aritmetickou posloupnost, u které platí:

$$a_2 + a_3 + a_5 = 64, a_7 - a_2 - a_3 = 16.$$

Řešení: Určit máme hodnotu prvního členu a difference. Použitím $a_n = a_1 + (n-1)d$

dostaneme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a_1, d , kterou

vyřešíme dosazovací metodou.

$$a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 4d = 64$$

$$a_1 + 6d - (a_1 + d) - (a_1 + 2d) = 16$$

$$3a_1 + 7d = 64$$

$$-a_1 + 3d = 16 \Rightarrow a_1 = 3d - 16$$

$$3(3d - 16) + 7d = 64 \Rightarrow 9d - 48 + 7d = 64 \Rightarrow 16d = 112 \Rightarrow d = 7$$

$$a_1 = 3 \cdot 7 - 16 = 21 - 16 = 5$$

Posloupnost je určena svým prvním členem $a_1 = 5$ a diferencí $d = 7$.

Příklad 5.2.10. Jak je hluboká studna, víme-li, že výkop každého následujícího metru byl o 500 Kč dražší než výkop metru předešlého. Za výkop posledního metru a třetího metru od konce bylo zapláceno dohromady tolik, kolik by stál výkop celé studny, pokud by každý metr výkopu stál stejně jako výkop prvního metru. Průměrná cena jednoho metru výkopu byla 2500 Kč.

Řešení: Ceny za výkopy po sobě jdoucích metrů studny jsou prvními členy aritmetické

posloupnosti, o které ze zadání víme, že $d = 500$, $\frac{s_n}{n} = 2500$ a $a_{n-2} + a_n = na_1$.

Hledaná hloubka studny je rovna počtu n členů naší posloupnosti a zjevně je možné předpokládat, že $n \geq 3$. Užitím vztahů platných v aritmetické posloupnosti získáváme ze zadání:

$$2500 = \frac{s_n}{n} = \frac{\frac{n(a_1 + a_n)}{2}}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2} \Rightarrow a_1 + a_n = 5000 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2a_1 + (n-1)d = 5000 \Rightarrow a_1 = \frac{5000 - dn + d}{2}.$$

$$\text{Pro } d = 500 \text{ je } a_1 = \frac{5000 - 500n}{2} \Rightarrow a_1 = 2750 - 250n$$

$$a_{n-2} + a_n = na_1 \Rightarrow a_1 + (n-3)d + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + 2nd - 4d = na_1 \Rightarrow \\ na_1 - 2a_1 = 2nd - 4d \Rightarrow a_1(n-2) = 1000(n-2)$$

$$\text{Pro } n \geq 3 \text{ je } a_1 = 1000.$$

$$\text{Dosazením dostáváme: } 1000 = 2750 - 250n \Rightarrow 250n = 1750 \Rightarrow n = 7.$$

Studna je hluboká sedm metrů.



Kontrolní otázky



1. Je aritmetická posloupnost rostoucí, je-li její difference $d < 0$?
2. Jak určíme součet prvních n členů aritmetické posloupnosti?
3. Co je to difference aritmetické posloupnosti?

5.3. Geometrická posloupnost



Výklad



Aritmetické posloupnosti vystihovaly změnu, kterou bychom mohli charakterizovat jako rovnoměrnou, neboť přírůstky od jednoho členu k následujícímu byly konstantní. Nyní sledujme míček volně spuštěný z výšky jednoho metru, který se po dopadu na vodorovnou rovinu odrazí vždy do výše rovné $\frac{1}{3}$ výšky, ze které dopadl. Čísla $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ jsou výšky, kterých míček po odrazech dosahuje. Tvoří posloupnost, kterou nazýváme geometrickou.

Geometrická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně vztahy

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n q, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ kde } a, q \text{ jsou daná čísla.}$$

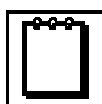
Číslo q se nazývá **kvocient geometrické posloupnosti**. Budeme předpokládat, že je

$a \neq 0 \wedge q \neq 0$. V takovém případě je každé $a_n \neq 0$ a z rekurentního vztahu plyne pro

kvocient (latinský název pro podíl), že $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Uveďme si na ukázkou prvních pět členů geometrické posloupnosti, je-li dán její první člen a a kvocient.

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| a) $a_1 = 1, q = 3$ | 1; 3; 9; 27; 81; ... |
| b) $a_1 = 2, q = 1,5$ | 2; 3; 4,5; 6,75; 10,125; ... |
| c) $a_1 = 10, q = \frac{1}{2}$ | 10; 5; 2,5; 1,25; 0,625; ... |
| d) $a_1 = 2, q = -3$ | 2; -6; 18; -54; 162; ... |



Poznámka

Je-li kvocient záporný ($q < 0$), pak členy geometrické posloupnosti reálných čísel jsou střídavě kladné a záporné a taková posloupnost není ani rostoucí, ani klesající; to vidíme na příkladu d).

Je-li kvocient kladný ($q > 0$), pak má geometrická posloupnost reálných čísel buď všechny členy kladné, nebo všechny členy záporné.

Je-li $q = 1$, není posloupnost ani klesající ani rostoucí, je konstantní.

Posloupnosti s kladnými členy, jsou pro $q > 1$ rostoucí a pro $0 < q < 1$ klesající.



Výklad

Také pro geometrické posloupnosti reálných čísel je možné odvodit charakteristickou vlastnost, která platí jen pro posloupnosti geometrické.

Z definice plyne, že podíl každých dvou sousedních členů je konstantní. Znamená to, že platí:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ a také } q = \frac{a_n}{a_{n-1}}. \text{ Můžeme tedy porovnat } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_{n+1} \cdot a_{n-1} = a_n^2.$$

Součin $a_{n+1} \cdot a_{n-1}$ je kladné číslo a tedy $|a_n| = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$.



Je-li $\{a_n\}$ geometrická posloupnost reálných čísel, pak absolutní hodnota každého jejího členu (kromě prvního) je rovna geometrickému průměru členů sousedních, tj.

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$

Obráceně, je-li v posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$ absolutní hodnota každého členu (kromě prvního) geometrickým průměrem členů sousedních, je to posloupnost geometrická.

Z definice geometrické posloupnosti víme, že je určena prvním členem a kvocientem a platí:

$$a_{n+1} = a_n q,$$

tj. $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_2 q = a_1 q^2$, $a_4 = a_3 q = a_1 q^3$, ...

Na základě toho vidíme, že pro výpočet n -tého členu geometrické posloupnosti dané prvním členem $a_1 \neq 0$ a kvocientem $q \neq 0$ platí vztah:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Pro libovolné dva členy a_r, a_s geometrické posloupnosti, v níž je $a_1 \neq 0, q \neq 0$, platí rovnost

$$a_s = a_r q^{s-r}.$$

5.3.1. Součet prvních n členů geometrické posloupnosti



Výklad



Pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ platí vztahy:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ pro } q \neq 1, \quad \text{nebo} \quad s_n = n a_1 \text{ pro } q = 1.$$



Řešené úlohy



Příklad 5.3.1. Napište prvních pět členů geometrické posloupnosti, je-li dáno:

a) $a_1 = 4, a_2 = \frac{4}{3},$

b) $a_5 = 2\sqrt{3}, a_3 = \sqrt{3}.$

Řešení: a) Nejprve určíme podíl dvou sousedních členů neboli kvocient naší geometrické posloupnosti

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3} \Rightarrow q = \frac{1}{3}.$$

Z definice je pak

$$a_3 = a_2 q = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \quad (\text{nebo podle } a_n = a_1 q^{n-1} \text{ je } a_3 = a_1 q^2 = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}),$$

$$a_4 = a_3 q = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27} \quad (\text{nebo } a_4 = a_1 q^3 = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}),$$

$$a_5 = a_4 q = \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{81} \quad (\text{nebo } a_5 = a_1 q^4 = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{4}{81}).$$

b) Jsou dány dva libovolné členy geometrické posloupnosti. Kvocient určíme podle

$$a_s = a_r q^{s-r}.$$

$$a_5 = a_3 q^{5-3} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \sqrt{3} q^2 \Rightarrow q^2 = 2 \Rightarrow |q| = \sqrt{2}.$$

Tato rovnice dává dvě možná řešení. Nejprve určíme zbývající členy posloupnosti pro $q = \sqrt{2}$:

$$a_4 = a_3 q = \sqrt{3} \sqrt{2} = \sqrt{6}, \quad a_2 = \frac{a_3}{q} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nyní druhé řešení pro $q = -\sqrt{2}$:

$$a_4 = \sqrt{3}(-\sqrt{2}) = -\sqrt{6}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}, \quad a_1 = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Příklad 5.3.2. Určete počet prvních n členů geometrické posloupnosti, znáte-li

$$a_1 = -27, a_n = -3 \text{ a součet } s_n = -(12\sqrt{3} + 39).$$

Řešení: Užitím $a_n = a_1 q^{n-1}$ dostaneme: $-3 = -27 \cdot q^{n-1} \Rightarrow q^{n-1} = \frac{1}{9} \Rightarrow q^n = \frac{q}{9}.$

Toto vyjádření spolu se zadáním dosadíme do vztahu $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

$$-(12\sqrt{3} + 39) = -27 \frac{\frac{q}{9} - 1}{q - 1} \quad / \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)(q - 1), \text{ pro } q \neq 1$$

$$4\sqrt{3}q + 13q - 4\sqrt{3} - 13 = q - 9,$$

$$\text{odkud je po úpravě } q = \frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Dosazením do vztahu $q^{n-1} = \frac{1}{9}$ získáme exponenciální rovnici $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} = \frac{1}{9}$,

kterou převedeme na tvar $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$, odtud je $n - 1 = 4$, tj. $n = 5$.

Příklad 5.3.3. Představme si, že dva přátelé zpozorovali dne 1.ledna v 0.00 hodin přistání vesmírné lodi s mimozemšťany. Během čtvrt hodiny věděly o přistání i jejich manželky. Během další čtvrt hodiny sdělil každý z nich tuto událost svému známému, takže o události vědělo půl hodiny po půlnoci již 8 lidí. Předpokládejme, že by se takto mohla zpráva šířit po čtvrt hodinách i na další obyvatele Země. Zjistíte, kdy by se o přistání vesmírné lodi dozvědělo lidstvo celého světa? Zkuste nejprve odhad.

Řešení: Počty informovaných lidí po čtvrt hodinách jsou členy geometrické posloupnosti 2, 4, 8, 16, 32, ..., kde $a_1 = 2$, $q = 2$.

Musíme zjistit, který její člen a_n přesáhne svou hodnotou počet obyvatel Země.

Víme, že je tento počet přibližně šest miliard a to zapisujeme jako číslo $6 \cdot 10^9$.

Chceme, aby $a_n \geq 6 \cdot 10^9$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

Řešíme tedy nerovnici $2^n \geq 6 \cdot 10^9$, pro $n \in \mathbb{N}$. Po zlogaritmování obou stran je

$$n \log 2 \geq \log 6 + 9 \log 10$$

$$n \log 2 \geq \log 6 + 9 \cdot 1$$

$$n \geq \frac{\log 6 + 9}{\log 2} \quad \left[\frac{\log 6 + 9}{\log 2} \cong \frac{0,7782 + 9}{0,3010} \cong 32 \right]$$

Takže téhož dne 1.ledna v 7hodin a 45 minut by o události vědělo

$2^{32} = 4\,294\,967\,296$ obyvatel a za další čtvrt hodiny už by počet přesáhl počet obyvatel naší planety, neboť další člen posloupnosti je $2^{33} = 8\,589\,934\,592$. Odhadli jste, že by k tomu stačilo přibližně osm hodin?

Příklad 5.3.4. Možná jste už někdy dostali nebo dostanete dopis, v němž jsou uvedena čtyři vám známá i neznámá jména s adresami a výzva ke hře, jejíž pravidla jsou stručně takováto – pošli pohlednici hráči, jehož adresa je z uvedených čtyř adres první v pořadí. Pokyny k této hře čtyřikrát opiš s tím rozdílem, že prvního hráče vynecháš a napíšeš sebe na čtvrté místo a dopisy pošli čtyřem novým spoluhráčům. Pak se můžeš těšit, že v krátké době dostaneš 256 pohlednic. Není to lákavé? Jistě ano, zvláště když se v jiné variantě této hry nabízí místo pohlednic peníze! Můžeme ale těch 256 pohlednic skutečně dostat?

Řešení: Rozešlete-li dopis se svou adresou na čtvrtém místě čtyřem známým, každý z nich opět čtyřem známým s vaší adresou na třetím místě atd., až se vaše adresa objeví na prvním místě a všech 256 účastníků vám zašle pohlednici, zdá se, že je vše v pořádku. Ale pozor, zatím jsme neuvažovali o tom, kolikrát v pořadí jste se do hry dostali. Představte si, že jste jedním z hráčů, který vstoupil do hry například v osmém kole hry. Počty hráčů v jednotlivých kolech vytvářejí geometrickou posloupnost $4, 16, 64, 256, \dots, 4^n, \dots$, ze které vidíme, že v osmém kole by se muselo hry zúčastnit $4^8 = 65\,536$ hráčů, abyste byli jistě úspěšní. Je ale docela možné, že se do hry dostanete až v kole dvanáctém. Aby se v tomto případě dostala vaše adresa na první místo, muselo by se už hry zúčastnit dokonce $4^{12} = 16\,777\,216$ hráčů, tedy víc hráčů, než má ČR obyvatel.

Odpověď na naši otázku tedy zní, že nejspíše ne.



Kontrolní otázky



1. Jaký je geometrický průměr čísel 2 a 8 ?
2. Co je to kvocient geometrické posloupnosti?
3. Jak určíme součet prvních n členů geometrické posloupnosti?

5.4. Užití geometrické posloupnosti



Výklad

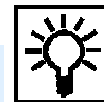


Často se setkáváme s růstem nebo poklesem číselných údajů, které jsou členy geometrické posloupnosti, a změna jednotlivých členů je zadaná v procentech. Vzdělání každého členu o p procent znamená vzrůst členu ze 100% jeho hodnoty na $(100+p)\%$ této hodnoty, takže členy se stále zvětšují v poměru $\frac{100+p}{100} = 1 + \frac{p}{100}$.

Takovými údaji jsou například počty obyvatel v určitém časovém období, rozpad radia, výpočet úroků od banky z uložených vkladů a podobně. V následujících příkladech se podíváme na možná využití.



Řešené úlohy



Příklad 5.4.1. Za kolik let vzroste vklad a Kč při stálém ročním přírůstku o $p\%$ na k -násobek ($k > 0$) své původní hodnoty?

Řešení: Označme velikost vkladu po n letech a_n . Stav po $(n+1)$ letech pak je

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_n p}{100} = a_n \left(1 + \frac{p}{100} \right).$$

Jedná se zde o geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 1 + \frac{p}{100}$ a prvním členem

$$a_1 = aq. \text{ To znamená, že } a_n = a_1 q^{n-1} = aq^n.$$

Podle zadání platí $a_n = ka$, takže $aq^n = ka$, odkud $q^n = k$.

Logaritmováním získáme rovnici $n \log q = \log k$, ze které $n = \frac{\log k}{\log q}$,

$$\text{tj. } n = \frac{\log k}{\log \left(1 + \frac{p}{100} \right)}.$$

Daný vklad vzroste na k -násobek své původní hodnoty za $\frac{\log k}{\log \left(1 + \frac{p}{100} \right)}$ let.

Příklad 5.4.2. Ve městě dnes žije 85 600 obyvatel. Jaký počet obyvatel tam můžeme očekávat za 6 let, předpokládáme-li každoroční přírůstek 1,7%?

Řešení: Po roce se zvětší počet obyvatel na 101,7% stavu, který byl počátkem roku.

Počty obyvatel po uplynutí jednotlivých roků tvoří geometrickou posloupnost

$$\text{s kvocientem } q = \frac{101,7}{100} = 1,017.$$

Označme si tedy počáteční stav $a_0 = 85\,600$. Počet po prvním roce bude $a_1 = a_0 q$ a

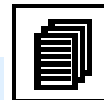
nás zajímá člen $a_6 = a_0 q^6 = 85\,600 \cdot 1,017^6 \cong 94\,710$.

Za šest let můžeme ve městě očekávat asi 94 710 obyvatel.

5.5. Limita posloupnosti



Výklad



Tento nový pojem budeme potřebovat v dalších úvahách a přitom se zaměříme jen na několik málo užití. Například pro odpověď na otázku, zda může existovat konečný součet nekonečně mnoha čísel. Po vysvětlení tohoto nového pojmu si ukážeme, že takový součet existovat může, byť sečíst nekonečně mnoho čísel nelze. Možná jste slyšeli o řeckém filozofovi Zenonovi z Eleje (asi 490 – 430 př.n.l.), který potrápil starověké matematiky škodolibým tvrzením, že rychlonohý Achilles nemůže nikdy dohonit želvu, má-li želva určitý náskok. Je to nesmysl, ale ukázat to není jednoduché. Limita posloupnosti nám k odpovědi pomůže.

Slovo **limita** je latinského původu a znamená **mez** nebo **hranici**.

Všimněme si posloupnosti $\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$. Její členy $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots$ klesají s rostoucím n ,

nikdy však nebudou menší než 1, neboť $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Členy této posloupnosti se zjevně blíží,

neboli konvergují, k jedné. Číslo 1 je limitou této posloupnosti. To znamená, že od určité

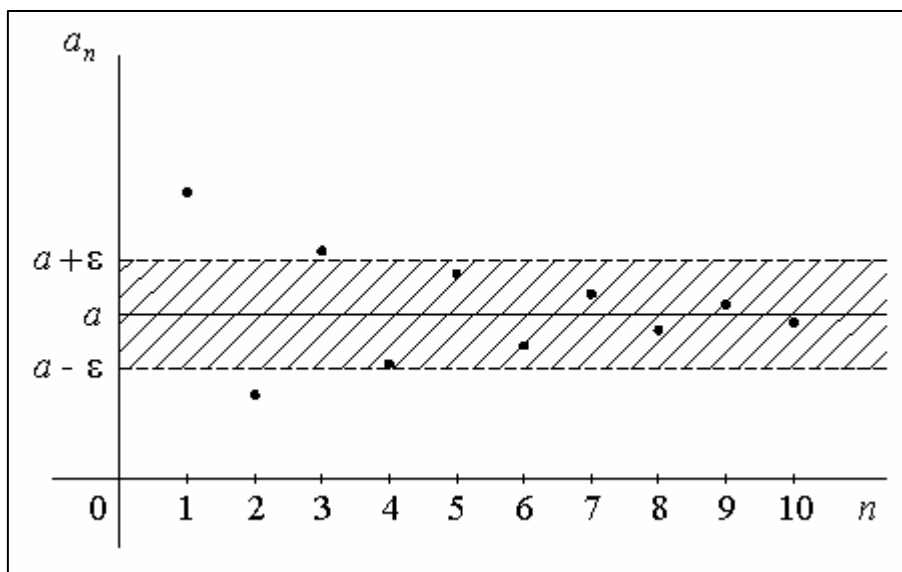
hodnoty n platí $\left| 1 - \frac{n+1}{n} \right| < \varepsilon$, kde ε je libovolně zvolené kladné číslo.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má **limitu** $a \in \mathbf{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $n_0 \in \mathbf{N}$, že je $|a - a_n| < \varepsilon$ pro všechna $n > n_0, n \in \mathbf{N}$. Píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Má-li posloupnost konečnou limitu, říkáme, že je **konvergentní** (sbíhavá).

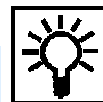
V opačném případě mluvíme o **divergentní** (rozbíhavé) posloupnosti.



Na obrázku je vidět, že pro všechna $n > 3$ patří body členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v soustavě souřadnic v rovině do vnitřku pásu s „hranicemi“ $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$.



Řešená úloha



Příklad 5.5.1. Zjistěte, zda je posloupnost $\left\{\frac{3n-7}{3n+7}\right\}$ konvergentní nebo divergentní.

Řešení: Daná posloupnost má n -tý člen $a_n = \frac{3n-7}{3n+7}$; (1)

$$\text{po úpravě } a_n = \frac{3n+7-14}{3n+7} = 1 - \frac{14}{3n+7} \Rightarrow 1 - a_n = \frac{14}{3n+7}. \quad (2)$$

Sledujme nyní posloupnost $\left\{\frac{14}{3n+7}\right\}$ a snažme se podle definice limity posloupnosti

$$\text{zjistit její limitu. Snadno vidíme, že je } \left|\frac{14}{3n+7}\right| = \frac{14}{3n+7}, \quad (3)$$

neboť $\forall n \in \mathbf{N}$ je $3n+7 > 0$. Proto můžeme předpokládat, že

$$\left|\frac{14}{3n+7}\right| < \varepsilon \quad (4)$$

$$\text{a odtud po úpravě } 14 < 3n\varepsilon + 7\varepsilon \Rightarrow n > \frac{14-7\varepsilon}{3\varepsilon} = n_0. \quad (5)$$

Obráceně, je-li $n > n_0$, tj. platí-li (5), platí i (4). Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje tedy takové číslo n_0 , že platí (4) pro všechna $n > n_0$.

Ze vztahů (2), (3), (4) plyne, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Protože ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $|1 - a_n| < \varepsilon$, $\forall n > n_0$.

Podle (1) můžeme tedy psát $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-7}{3n+7} = 1$.

Daná posloupnost je konvergentní, konverguje k $a = 1$.



Kontrolní otázky



1. Má každá posloupnost svou limitu?
2. Je konstantní posloupnost konvergentní?

5.6. Nekonečná geometrická řada



Výklad



Vložíme-li mezi každé dva členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ znaménko $+$, dostaneme schéma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots,$$

které zapisujeme znakově $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (čteme suma a_n od $n = 1$ do nekonečna).

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme nekonečná řada. Čísla $a_1, a_2, a_3, \dots$ nazýváme členy této řady.

Omezíme se jen na nekonečné geometrické řady a ukážeme si, jak v některých případech dospějeme k pojmu **součet nekonečné řady**.

Vytvoříme posloupnost:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

kterou nazveme **posloupností částečných součtů** dané nekonečné řady. Pro tuto posloupnost pak mohou nastat pouze tyto dva případy: - má limitu s ;

- nemá limitu.

V prvním případě říkáme, že daná nekonečná řada je **konvergentní**, a číslo s nazýváme jejím **součtem**. V druhém případě říkáme, že nekonečná řada je **divergentní**, tj. nemá součet.

Je-li nekonečná řada konvergentní se součtem s , pak symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ označujeme zápis

nejen této řady, ale také její součet. Píšeme $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

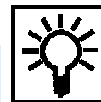
Lze dokázat, že nekonečná geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^n$ je konvergentní jenom v tom případě,

když je $|q| < 1$; její součet potom je $s = \frac{a_1}{1-q}$.

Pro $|q| \geq 1$ je řada divergentní.



Řešené úlohy



Příklad 5.6.1. Určete součet nekonečné geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}}$.

Řešení: Řadu si nejprve vyjádříme pomocí několika prvních členů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

Je zřejmé, že $a_1 = 1$ a $q = \frac{1}{4}$, ($|q| < 1$). Řada je konvergentní a pro její součet platí:

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Příklad 5.6.2. Najděte řešení dané rovnice: $\frac{8}{x+10} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + \dots$.

Řešení: Na pravé straně je v rovnici nekonečná geometrická řada s prvním členem

$a_1 = 1$ a kvocientem $q = -\frac{3}{x}$, kterou je nutno sečíst. To lze v případě, že je splněno:

$|q| < 1$, tedy $\left| -\frac{3}{x} \right| < 1$. Tato nerovnice je splněna pro všechna $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$.

Pro tuto x řada konverguje a je tedy podle $s = \frac{a_1}{1-q}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 \left(-\frac{3}{x} \right)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{3}{x} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{x}{x+3} \Rightarrow \frac{8}{x+10} = \frac{x}{x+3}.$$

Řešení takto upravené rovnice hledáme na množině

$$M = (-\infty, -10) \cup (-10, -3) \cup (3, \infty).$$

$$\frac{8}{x+10} = \frac{x}{x+3} \quad / \cdot (x+10) \cdot (x+3)$$

$$8x + 24 = x^2 + 10x$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 24}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2}$$

$$x_1 = -6, x_2 = 4.$$

Oba kořeny leží v množině M a jsou tedy hledaným řešením dané rovnice.

Příklad 5.6.3. Určete dané racionální periodické číslo $a = 0,23\overline{48}$ ve tvaru zlomku, jehož číselník i jmenovatel jsou celá čísla.

Řešení: Dané číslo (neryze periodické) je

$$a = 0,23484848... = 0,23 + 48 \cdot 10^{-4} + 48 \cdot 10^{-6} + 48 \cdot 10^{-8} + \dots$$

Za číslem 0,23 vidíme konvergentní nekonečnou geometrickou řadu o prvním členu

$a_1 = 48 \cdot 10^{-4}$ a kvocientu $q = 10^{-2}$. Je tedy $a = 0,23 + s$, kde s je součet té řady.

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{48 \cdot 10^{-4}}{1 - 10^{-2}} = \frac{48}{10^4 - 10^2} = \frac{48}{9900}$$

$$\text{Proto je } a = \frac{23}{100} + \frac{48}{9900} = \frac{23 \cdot 99 + 48}{9900} = \frac{2325}{9900}.$$

Poznámka

Vzpomínáte si na tvrzení filozofa Zenona, že Achilles nikdy nedohoní pomalou želvu? Přibližme si vysvětlení tohoto paradoxu na jednodušším tvrzení Zenona, že žádný běžec nemůže proběhnout úsek z místa A do místa B. Zenonova úvaha byla dlouho matematicky nevyvratitelná. Posuďte sami. Má-li běžec proběhnout vzdálenost $AB=1$, musí proběhnout

nejdříve polovinu této vzdálenosti, potom polovinu zbývajících vzdálenosti, potom opět polovinu zbývajících vzdálenosti atd. Musí tedy proběhnout vzdálenost, která se rovná součtu

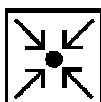
nekonečného počtu úseků o délkách $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$. A teď položil Zenon otázku.

Jak je možné, že může běžec překonat nekonečný počet úseků za konečný čas?

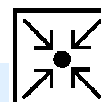
Vysvětlení jistě už sami vidíte. Je to možné, protože úseky tvoří nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{1}{2}$, tedy konvergentní nekonečnou řadu, která má konečný součet

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1. \text{ A tak je dokázáno, že tuto vzdálenost může běžec proběhnout}$$

v konečném čase. Podobně bychom dokázali, že Achilles dohoní želvu.



Úlohy k samostatnému řešení



1. Určete aritmetickou posloupnost, u které platí $a_1 + a_4 + a_6 = 71$, $a_5 - a_2 - a_3 = 2$.
2. Sečtěte prvních dvacet členů aritmetické posloupnosti, ve které je: $a_8 = -2$, $a_{10} = 0$.
3. V aritmetické posloupnosti určené členem $a_1 = 7$ a diferencí $d = -2$ je součet prvních n členů $s_n = -20$. Určete číslo n .
4. První člen geometrické posloupnosti je záporný. Která podmínka musí být splněna, aby posloupnost byla: a) rostoucí, b) klesající.
5. Určete kvocient geometrické posloupnosti, je-li: $a_3 = -3$, $a_6 = -192$.
6. Určete a_1 , n a q geometrické posloupnosti, u níž platí:
 $a_7 - a_5 = 48$, $a_6 + a_5 = 48$, $s_n = 1023$.
7. Teploty Země přibývá do hloubky přibližně o 1°C na 30 metrů. Jaká je teplota na dně dolu 1015 metrů hlubokého, je-li v hloubce 25 metrů teplota 9°C ?
8. Řešte rovnici: $\frac{5}{3} = x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + \dots$.
9. Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 26x + 25 = 0$ vložte čísla tak, aby spolu s kořeny tvořila aritmetickou posloupnost se součtem 117. Určete tato čísla a diferenci.

10. Určete s_4 v geometrické posloupnosti, kde platí:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 15, \\ a_3 - a_2 &= 60. \end{aligned}$$

**Výsledky úloh k samostatnému řešení**

1. $a_1 = 5, d = 7$; 2. $s_{20} = 10$; 3. $n = 10$; 4. a) $q \in (0;1)$; b) $q \in (1;\infty)$; 5. $q = 4$;
 6. $a_1 = 1, q = 2, n = 10$; 7. 42°C ; 8. $\frac{1}{2}; -\frac{5}{7}$; 9. 4,7,10,13,16,19,22; $d = 3$;
 10. $a_1 = 5, q = 4, s_4 = 425$.

**Klíč k řešení úloh**

1. Užitím vztahů $a_n = a_1 + (n-1)d$ a $a_s = a_r + (s-r)d$ získáte soustavu dvou rovnic o

dvou neznámých
$$\begin{array}{rcl} a_1 + a_1 + 3d + a_1 + 5d & = & 71 \\ a_1 + 4d - (a_1 + d) - (a_1 + 2d) & = & 2 \end{array}$$
 , upravíme ji
$$\begin{array}{rcl} 3a_1 + 8d & = & 71 \\ -3a_1 + 3d & = & 6 \end{array}$$

a dostaneme řešení $a_1 = 5$ a $d = 7$.

2. Užijeme postupně vztahy $a_n = a_1 + (n-1)d$, $a_s = a_r + (s-r)d$ a $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

Dostaneme soustavu
$$\begin{array}{rcl} a_1 + 7d & = & -2 \quad / \cdot (-1) \\ a_1 + 9d & = & 0 \end{array}$$
 a po vyřešení $d = 1$, $a_1 = -9$,

$$a_{20} = a_1 + 19d = -9 + 19 = 10$$

$$s_{20} = \frac{20 \cdot (a_1 + a_{20})}{2} = 10 \cdot (-9 + 10) = 10.$$

3. Užitím vztahů $a_n = a_1 + (n-1)d$ a $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ získáte kvadratickou rovnici o neznámé n .

Ze vztahu $-20 = \frac{n \cdot (7 + a_n)}{2}$; $n \in \mathbb{N}$ dosazením a úpravou dostaneme $n^2 - 8n - 20 = 0$,

kořeny jsou $n_1 = 10, n_2 = -2$. Ale -2 není přirozené číslo, řešení je tedy jediné $n = 10$.

4. Posloupnosti rostoucí stejně jako posloupnosti klesající jsou monotónní. K tomu je třeba, aby jejich členy neměly znaménka střídavě kladná a záporná, což by nastalo při násobení záporným číslem. Budeme tedy v obou případech požadovat, aby kvocient bylo číslo kladné.

Vyjděme z podmínky pro rostoucí posloupnost, ta je $a_{n+1} > a_n$. Když zde oba členy

nahradíme podle vztahu $a_n = a_1 q^{n-1}$ dostaneme k vyřešení

nerovnice: $a_1 \cdot q^n > a_1 q^{n-1} \wedge a_1 < 0$, které postupně upravujeme:

$$a_1 q^n - a_1 q^{n-1} > 0$$

$$a_1 (q^n - q^{n-1}) > 0 \wedge \frac{1}{a_1} < 0$$

$$q^n - q^{n-1} < 0,$$

$$q^{n-1} (q - 1) < 0.$$

To je splněno pro $q^{n-1} < 0 \wedge q - 1 > 0$ nebo pro $q^{n-1} > 0 \wedge q - 1 < 0$.

Z těchto podmínek je $q < 0 \wedge q > 1$ nebo $q > 0 \wedge q < 1$.

Na závěr dostáváme $q \in \emptyset$ nebo $q \in (0, 1)$.

Geometrická posloupnost se záporným prvním členem je tedy rostoucí, je-li její kvocient číslo z otevřeného intervalu $(0, 1)$.

Nyní vyjdeme z podmínky $a_{n+1} < a_n$. V předchozím postupu změníme znaménko

nerovnosti, geometrická posloupnost se záporným prvním členem je klesající, má-li její kvocient hodnotu větší než jedna, tzn. řešením bude interval $q \in (1, \infty)$.

5. Použijeme vztahy $a_n = a_1 q^{n-1}$ a $a_s = a_r q^{s-r}$.

6. Použijeme vztahy $a_n = a_1 q^{n-1}$, $a_s = a_r q^{s-r}$ a $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

7. Použijeme platné vztahy aritmetické posloupnosti.

8. Na pravé straně zadané rovnice jsou dvě nekonečné geometrické řady, u kterých je třeba podle $s = \frac{a_1}{1 - q}$ určit součty.

9. Kořeny rovnice označit jako první a n -tý člen aritmetické posloupnosti a užít vztah

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

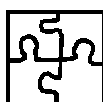
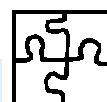
10. Nejprve určit první člen a kvocient užitím vztahů $a_n = a_1 q^{n-1}$, $a_s = a_r q^{s-r}$ a pak použít

$$\text{vztah } s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

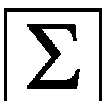
**Kontrolní test**

1. V aritmetické posloupnosti znáte $a_{10} = 25, a_{20} = -15$. Určete člen a_{50} .
a) 1, b) -135, c) 0, d) -25.
2. Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 + x - 12 = 0$ vložte 6 čísel tak, aby spolu s kořeny tvořila členy aritmetické posloupnosti. Jaký je součet vložených čísel?
a) součet $s = 6$, b) součet $s = 0$, c) součet $s = 4$, d) součet $s = -3$.
3. Obvod pravoúhlého trojúhelníku měří 24 cm. Velikosti jeho stran tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Určete délku přepony.
a) 12, b) 10, c) 8, d) 6.
4. Aritmetická posloupnost má diferenci $d = 4$ a sedmý člen $a_7 = 27$. Vypočítejte kolik členů této posloupnosti má součet $s_n = 210$?
a) -8, b) 8, c) 7, d) 10.
5. Vypočtete osmý člen aritmetické posloupnosti, ve které platí $a_7 - a_2 = 20$,
 $a_8 + a_2 + a_5 = 57$.
a) $a_8 = 31$, b) $a_8 = 30$, c) $a_8 = 28$, d) $a_8 = 37$.
6. Kolik čísel je třeba vložit mezi čísla 5 a 640 tak, aby součet vložených čísel byl 630 a aby vložená čísla tvořila s danými čísly po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti?
a) 10, b) 6, c) 8, d) 9.
7. Kvádr, jehož velikosti hran tvoří geometrickou posloupnost, má povrch $S = 78m^2$. Součet délek hran procházejících jedním jeho vrcholem je $13m$. Vypočtete hodnotu objemu takového kvádru v cm^3 .
a) 27, b) 24, c) 30, d) 21.
8. Součet čtyř po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti je 80. Určete její kvocient a první člen, víte-li, že druhý člen je devětkrát menší než čtvrtý člen.
a) $|q| = 2, a_1 = 5$, b) $q = 5, a_1 = 1$, c) $q = 5, a_1 = 7$, d) $|q| = 3, a_1 = 2 \vee a_1 = -4$.

9. Určete součet s_3 geometrické posloupnosti, ve které je $a_2 - a_1 = 18$ a $a_4 - a_3 = 882$.
- a) 200, b) 123, c) 410, d) 171.
10. Určete první člen a součet s_5 geometrické posloupnosti, ve které je $a_5 = 1280$ a $a_2 = 20$.
- a) $a_1 = 4, s_3 = 58$, b) $a_1 = 5, s_3 = 105$,
c) $a_1 = -1, s_3 = 100$, d) $a_1 = 6, s_3 = 110$.

**Výsledky testu**

1. b); 2. d); 3. b); 4. d); 5. a); 6. b); 7. a); 8. d); 9. d); 10. b).

**Shrnutí lekce**

Smyslem této kapitoly bylo především docílit pochopení pojmu posloupnosti tak, jak je v matematice používán. Na příkladech posloupností aritmetických a geometrických pak po nutném procvičení ukázat i možná použití při řešení praktických úloh. Pojem limity posloupnosti je zde uveden jen stručně bez uvedení všech jejích vlastností, ale dostatečně jasné, abychom mohli pochopit i pojem nekonečné geometrické řady.

Dodejme, abyste se měli na co těšit, že matematika pracuje i s jinými řadami, například mocninnými, harmonickými, alternujícími nebo Fourierovými, které jsou součástí matematické analýzy a lze s jejich pomocí řešit řadu zajímavých úloh.

6. KOMBINATORIKA	181
6.1. Základní pojmy	181
6.1.1. Počítání s faktoriály a kombinačními čísly	182
6.2. Variace	184
6.3. Permutace	185
6.4. Kombinace	187
6.5. Binomická věta	189
Úlohy k samostatnému řešení	190
Výsledky úloh k samostatnému řešení	191
Klíč k řešení úloh	192
Kontrolní test	195
Výsledky testu	195

6. KOMBINATORIKA



Průvodce studiem



V úvodu 6.1. připomeneme význam termínů používaných v celé kapitole a počítání s faktoriály a kombinačními čísly. Následující část 6.2. – 6.4. seznamuje se základními způsoby výběru ze základní množiny. Teorie je přiblížena na příkladech zadaných na závěr této kapitoly včetně nápovědy a výsledků řešení.



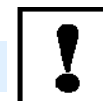
Cíle



Po zvládnutí kapitoly budete připraveni na řešení úloh z pravděpodobnosti a na studium statistiky.



Předpokládané znalosti



Kapitola požaduje jen standardně rozvinuté logické myšlení a respektování skutečnosti, že výběry skupin ze základní množiny se musí řídit určitými pravidly.

6.1. Základní pojmy



Výklad



Základní množina M	-je každá konečná množina o n různých prvcích, z níž budeme vybírat prvky do skupin,
skupina	-je tvořena prvky, vybranými ze základní množiny M , v níž nezáleží na pořadí prvků: zápisy (a, b) a (b, a) zastupují tutéž skupinu,
skupina k-té třídy	-je skupina, která má k prvků,
uspořádaná skupina	-je skupina, v níž záleží na pořadí prvků: (a, b) a (b, a) jsou dvě různé skupiny
skupiny bez opakování	-jsou skupiny, v nichž každý prvek z dané základní množiny M o n různých prvcích je vybrán jen jednou (a pak je z dalšího výběru vyřazen),
skupiny s opakováním	-jsou skupiny, v nichž je možné každý prvek z množiny M vybrat vícekrát (jako bychom ho po výběru vrátili zpět do množiny M),

6.1.1. Počítání s faktoriály a kombinačními čísly



Výklad



Zápis $n!$ čteme n -faktoriál nebo také faktoriál čísla n , označuje součin všech přirozených čísel menších nebo rovných n .

Výpočet faktoriálu: $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$,

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k)!, \quad 0! = 1.$$



Řešená úloha



Příklad 6.1.1. Vypočítejte $6!$

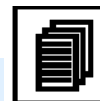
Řešení: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Výpočet faktoriálu je možno na vhodném místě „zastavit“.

$$6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 5 \cdot 4! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3! = \dots$$



Výklad



Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ čteme „ n nad k “,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \text{ kde } n, k \text{ jsou přirozená čísla nebo nula a platí } 0 \leq k \leq n.$$

Výpočet kombinačního čísla:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!},$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n.$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \text{ kde } k < n.$$



Řešené úlohy



Příklad 6.1.2. Vypočítejte $\binom{10}{3}$.

Řešení: $\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$

Kombinační číslo jednoduše vypočteme, jestliže v čitateli rozepíšeme faktoriál čísla n , ale napíšeme jen tolik činitelů, kolik udává k . Ve jmenovateli rozepíšeme jen $k!$.

Příklad 6.1.3. Vypočítejte $\binom{19}{2}, \binom{19}{16}$.

Řešení: $\binom{19}{2} = \frac{19 \cdot 18}{2 \cdot 1} = 171,$ $\binom{19}{16} = \binom{19}{3} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 969.$

Příklad 6.1.4. Které přirozené číslo x vyhovuje rovnici $\binom{x+1}{2} + \binom{x}{2} = 4 \binom{5}{5}$?

Řešení: Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ existuje pro $0 \leq k \leq n$, v našem případě je

$$x+1 \geq 2, \text{ takže } x \geq 1, \quad \wedge \quad x \geq 2, \text{ proto rovnice je řešitelná pro } x \geq 2.$$

Nyní vypočteme kombinační čísla a řešíme následovně:

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)x}{2 \cdot 1} + \frac{x(x-1)}{2 \cdot 1} &= 4 \cdot 1 & | \cdot 2 \\ x^2 + x + x^2 - x &= 8 \\ 2x^2 &= 8 & \Rightarrow x^2 = 4 & \Rightarrow x = \pm 2 \end{aligned}$$

Podmínce vyhovuje jen $x = 2$.

Příklad 6.1.5. Upravte výraz $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n-1)!} - 2 \frac{(n+2)!}{n!}$.

Řešení: $\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} + \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} - 2 \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} =$

$$= (n+3)(n+2) + (n+1)n - 2(n+2)(n+1) = n^2 + 5n + 6 + n^2 + n - 2(n^2 + 3n + 2) = 2.$$

6.2. Variace

Výklad

Variací bez opakování k -té třídy z n prvků nazýváme každou uspořádanou k -prvkovou podmnožinu n prvkové základní množiny M .

Počet variací bez opakování : $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n, (k, n \in \mathbb{N})$

Řešené úlohy

Příklad 6.2.1. Zapište variace bez opakování 2.třídy a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1, 2, 3\}$.

Řešení: $V_2(3): (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2),$

$$V_2(3) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6.$$

Příklad 6.2.2. Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4, 5. Kolik trojčiferných čísel lze z nich sestavit, jestliže se cifry neopakují ?

Řešení: urči n (počet prvků základní množiny)	$n = 5$
urči k (počet prvků, které vybíráme)	$k = 3$
rozhodni, zda záleží na pořadí prvků	záleží na pořadí
rozhodni, mohou-li se prvky opakovat	čísla se nemohou opakovat
urči typ výběru: variace k -té třídy z n prvků	$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$

$$V_3(5) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Výklad

Variací s opakováním k -té třídy z n prvků nazýváme každou k prvkovou uspořádanou skupinu prvků, vybraných z n prvkové základní množiny M , v níž se každý prvek může opakovat až k krát.

Počet variací s opakováním : $V'_k(n) = n^k, \quad k \text{ může být větší než } n, (k, n \in \mathbb{N}).$

**Řešené úlohy**

Příklad 6.2.3. Zapište variace s opakováním 2.třídy a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1, 2, 3\}$.

Řešení: $V'_2(3):$ (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3),

$$V'_2(3) = 3^2 = 9.$$

Příklad 6.2.4. Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4, 5. Kolik trojčiferných čísel lze z nich sestavit, jestliže se cifry opakují ?

Řešení: urči n (počet prvků základní množiny) $n = 5$
 urči k (počet prvků, které vybíráme) $k = 3$
 rozhodni, zda záleží na pořadí prvků záleží na pořadí
 rozhodni, mohou-li se prvky opakovat čísla se mohou opakovat
 urči typ výběru: variace k -té třídy z n prvků s opakováním $V'_k(n) = n^k$

$$V'_3(5) = 5^3 = 125.$$

6.3. Permutace**Výklad**

Permutací bez opakování z n prvků nazýváme každé uspořádání n prvkové základní množiny M .

Počet permutací bez opakování : $P(n) = n!$.

**Řešené úlohy**

Příklad 6.3.1. Zapište permutace bez opakování a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1, 2, 3\}$.

Řešení: $P(3):$ (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)

$$P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Příklad 6.3.2. Kolik přesmyček lze vytvořit použitím všech písmen slova fyzika?

Řešení: $M = \{f, y, z, i, k, a\}$

urči n (počet prvků základní množiny) $n = 6$

urči k (počet prvků, které vybíráme) $k = 6$

rozhodni, zda záleží na pořadí prvků záleží na pořadí

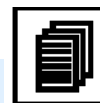
rozhodni, mohou-li se prvky opakovat písmena se neopakují

urči typ výběru: permutace z n prvků $P(n) = n!$

$$P(6) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$



Výklad



Permutací k prvků s opakováním nazýváme každé uspořádání, v němž je všech n prvků základní množiny M a prvek a_i se opakuje právě k_i krát ($i = 1, 2, \dots, n$).

Platí $n \leq k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

Počet permutací s opakováním: $P'_{k_1, k_2, \dots, k_n}(k) = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$.



Řešené úlohy



Příklad 6.3.3. Zapište permutace s opakováním a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1, 2, 3\}$ a první prvek se opakuje jednou, druhý se opakuje jednou a třetí dvakrát.

Řešení: $P_{1,1,2}(4) : (1,2,3,3), (1,3,2,3), (1,3,3,2), (2,1,3,3), (2,3,1,3), (2,3,3,1), (3,1,3,2),$

$(3,3,1,2), (3,1,2,3), (3,2,3,1), (3,3,2,1), (3,2,1,3),$

$$P'_{1,1,2}(4) = \frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 12.$$

Příklad 6.3.4. Kolik přesmyček lze vytvořit použitím všech písmen slova matematika?

Řešení: $M = \{m, a, t, e, i, k\},$

urči n (počet prvků základní množiny), $n = 6$

urči k (počet prvků, které vybíráme), $k_1 = 2$ (písmeno m se opakuje $2 \times$),
 $k_2 = 3$ (písmeno a se opakuje $3 \times$), $k_3 = 2$ (písmeno t se opakuje $2 \times$),
 $k_4 = 1$ (písmeno e se opakuje $1 \times$), $k_5 = 1$ (písmeno i se opakuje $1 \times$),
 $k_6 = 1$ (písmeno k se opakuje $1 \times$), $k = 2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10$,
 rozhodni, zda záleží na pořadí prvků záleží na pořadí,
 rozhodni, mohou-li se prvky opakovat písmena se opakují,
 urči typ výběru: permutace 10 prvků s opakováním

$$P'_{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6}(k) = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot k_4! \cdot k_5! \cdot k_6!}, \quad P'_{2, 3, 2, 1, 1, 1}(10) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200.$$

6.4. Kombinace



Výklad



Kombinací bez opakování k -té třídy z n prvků nazýváme každou k prvkovou podmnožinu základní množiny M , v níž nezáleží na pořadí prvků.

Počet kombinací bez opakování: $C_k(n) = \binom{n}{k}, \quad 0 \leq k \leq n, (k, n \in \mathbb{N}).$



Řešené úlohy



Příklad 6.4.1. Zapište kombinace 2. třídy bez opakováním a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1, 2, 3\}$.

Řešení: $C_2(3): (1, 2), (1, 3), (2, 3),$

$$C_2(3) = \binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3.$$

Příklad 6.4.2. Kolik různých třítónových akordů je možné zahrát ze sedmi tónů ?

Řešení: urči n (počet prvků základní množiny)	$n = 7$
urči k (počet prvků, které vybíráme)	$k = 3$
rozhodni, zda záleží na pořadí prvků	nezáleží na pořadí
rozhodni, mohou-li se prvky opakovat	tóny se nemohou opakovat

urči typ výběru: kombinace k -té třídy z n prvků $C_k(n) = \binom{n}{k}$

$$C_3(7) = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$



Výklad



Kombinací s opakováním k -té třídy z n prvků nazýváme každou k prvkovou skupinu prvků vybraných z n prvků základní množiny M , v níž se každý prvek může opakovat až k krát a v níž nezáleží na pořadí prvků.

Počet kombinací s opakováním: $C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$, k může být větší než n , $k, n \in \mathbb{N}$.



Řešené úlohy



Příklad 6.4.3. Zapište kombinace 2. třídy s opakováním a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1, 2, 3\}$.

Řešení: $C'_2(3)$: $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)$,

$$C'_2(3) = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6.$$

Příklad 6.4.4. Ve stánku mají 3 druhy bonbónů, každý druh v sáčcích po 10 dkg. Kolika různými způsoby může zákazník koupit půl kila bonbónů?

Řešení: urči n (počet prvků základní množiny)

$$n = 3$$

urči k (počet prvků, které vybíráme)

$$k = 5$$

rozhodni, zda záleží na pořadí prvků

nezáleží na pořadí

rozhodni, mohou-li se prvky opakovat

druhy se mohou opakovat

urči typ výběru: kombinace k -té třídy z n prvků s opakováním

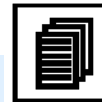
$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

$$C'_5(3) = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21.$$

6.5. Binomická věta



Výklad



Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ bývá označováno termínem **binomický koeficient**, je-li užíváno ve vztahu pro n -tou mocninu dvojčlenu (binomu).

Jsou-li a, b libovolná čísla a n číslo přirozené, platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n.$$



Řešené úlohy



Příklad 6.5.1. Rozved'te pomocí binomické věty a zjednodušte $(1 + \sqrt{2})^4$.

Řešení:

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^4 &= \binom{4}{0}1^4(\sqrt{2})^0 + \binom{4}{1}1^3(\sqrt{2})^1 + \binom{4}{2}1^2(\sqrt{2})^2 + \binom{4}{3}1^1(\sqrt{2})^3 + \binom{4}{4}1^0(\sqrt{2})^4 = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot 1 \cdot 4 = 1 + 4\sqrt{2} + 12 + 8\sqrt{2} + 4 = 17 + 12\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Příklad 6.5.2. Který člen rozvoje výrazu $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^6$, $x \neq 0$, neobsahuje x ?

Řešení: Označme si k -tý člen jako A_k , pak

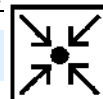
$$\begin{aligned} A_k &= \binom{6}{k-1} \cdot (2x^2)^{6-(k-1)} \cdot \left(-\frac{3}{x}\right)^{k-1} = \binom{6}{k-1} \cdot 2^{7-k} \cdot x^{2(7-k)} \cdot (-3)^{k-1} \cdot x^{-(k-1)} = \\ &= \binom{6}{k-1} \cdot 2^{7-k} \cdot (-3)^{k-1} \cdot x^{15-3k} \end{aligned}$$

$$x^{15-3k} = 1 = x^0 \Rightarrow 15 - 3k = 0 \Rightarrow k = 5.$$

Pátý člen rozvoje neobsahuje x .



Úlohy k samostatnému řešení



1. Vypočtěte kombinační čísla

a) $\binom{24}{0}$, b) $\binom{12}{12}$, c) $\binom{15}{1}$, d) $\binom{9}{2} + \binom{9}{3}$.

2. Které přirozené číslo vyhovuje rovnici :

a) $\binom{x-1}{2} - \binom{x}{0} = \frac{1}{2}\binom{x}{2}$, jaká je podmínka pro x?

b) $\binom{4}{3}\binom{x+1}{x-1} - \binom{5}{3}\binom{x+1}{x} + \binom{3}{2}\binom{4}{2} = 0$, jaká je podmínka pro x?

3. Ve třídě je 25 žáků, z nichž 4 mají být vyzkoušeni. Kolik různých čtveřic může být vyzkoušeno?

4. Jistý muž má 5 kabátů, 4 vesty a 6 kalhot. Kolika různými způsoby se může obléct?

5. V lavici mohou sedět čtyři žáci. Kolikovým způsobem je možno lavici obsadit, máme-li pět žáků a záleží na pořadí míst?

6. Kolik různých hodů lze provést třemi kostkami?

7. Aranžér má ve výloze umístit vedle sebe 4 stejné svetry z nichž 2 jsou bílé, 1 červený a 1 zelený. Kolika způsoby to může učinit?

8. Kolik různých šesticiferných čísel můžeme napsat z číslic 1,2,3,4,5,6 má-li se každá vyskytnout v čísle jen jednou?

9. Užitím binomické věty vypočtěte

a) $\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)^6$, b) $(1,01)^7$ s přesností na tři desetinná místa.

10. Vypočtěte: a) $\binom{7}{2}$, b) $\binom{15}{12}$, c) $\binom{x}{3}$.

11. Kterým kombinačním číslem je možno vyjádřit součty:

a) $\binom{5}{2} + \binom{5}{3}$, b) $\binom{14}{3} + \binom{14}{10}$, c) $\binom{n}{4} + \binom{n}{5}$.

12. Zjednodušte :

a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$,

b) $\frac{(n-2)!}{(n-1)!}$,

c) $\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!}$.

- 13.** Z kolika prvků je možné utvořit 42 variací 2. třídy bez opakování?
- 14.** Zvětší-li se počet prvků o 2, zvětší se počet permutací bez opakování dvanáctkrát. Jaký byl původní počet prvků?
- 15.** Zvětší-li se počet prvků o jeden, zvětší se počet kombinací třetí třídy o 28. Kolik je prvků?
- 16.** Jsou dány cifry 1,2,3,4,5. Kolik pěticiferných čísel, v nichž se žádná z cifer nebude opakovat, lze z těchto cifer sestavit, chceme-li získat
- a) všechna taková čísla,
 - b) čísla končící cifrou 4,
 - c) čísla sudá,
 - d) čísla lichá.
- 17.** Kolik trojiciferných čísel lze zapsat z cifer 2,4,6,8, mohou-li se cifry opakovat?
- 18.** Kolik různých „slov“ lze vytvořit použitím všech písmen slova automatizace?
- 19.** Kolik různých třítónových nebo čtyřtónových akordů lze zahrát ze sedmi tónů?
- 20.** Fotbalový trenér má k dispozici 3 brankáře, 5 obránců, 4 záložníky a 10 útočníků. Kolik různých fotbalových mužstev z nich může sestavit, tvoří-li jedno mužstvo 1 brankář, 2 obránci, 3 záložníci a 5 útočníků?



Výsledky úloh k samostatnému řešení



- 1.** a) 1; b) 1; c) 15; d) 120. **2.** a) $x \geq 3$; $x = 5$; b) $x \geq 1$; $x = 2$. **3.** 12650. **4.** 120. **5.** 120.
- 6.** 216. **7.** 12. **8.** 720. **9.** a) $\frac{a^6}{64} - \frac{a^5b}{16} + \frac{5a^4b^2}{48} - \frac{5a^3b^3}{54} + \frac{5a^2b^4}{108} - \frac{ab^5}{81} + \frac{b^6}{729}$; b) 1,072.
- 10.** a) 21; b) 455; c) $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6}$. **11.** a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{15}{4}$; c) $\binom{n+1}{5}$. **12.** a) $(n+1)n$;
b) $\frac{1}{n-1}$; c) 1. **13.** $n = 7$. **14.** $n = 2$. **15.** $n = 8$. **16.** a) 120; b) 24; c) 48; d) 72.
- 17.** 64. **18.** 39916800. **19.** 70. **20.** 30240.



Klíč k řešení úloh



1. Řešíme dosazením do vzorce pro výpočet kombinačního čísla.

2. a) Rovnici upravíme na tvar $\frac{(x-1)(x-2)}{2} - 1 = \frac{x(x-1)}{4}$, vynásobíme a dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - 5x = 0$, její kořeny jsou $x_1 = 0, x_2 = 5$. Protože musí být $x \geq 3$ (jistě jsme nezapomněli vypočítat podmínku pro kombinační číslo), má rovnice jediné řešení $x = 5$.

 b) Rovnici upravíme na tvar $2x(x+1) - 10(x+1) + 18 = 0$, vynásobíme a dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - 4x + 4 = 0$, ta má jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 2$. Protože $x \geq 1$, má rovnice řešení $x = 2$.

3. Jedná se o kombinace 4. třídy z 25, nezáleží totiž na pořadí zkoušených žáků, bez opakování, nikdo nebude zkoušen vícekrát. $C_4(25) = \frac{25!}{4!21!} = 12650$.

4. Muž si oblékne 1 kabát, vybírá ho z pěti různých, 1 vestu ze čtyř a 1 kalhoty z šesti.
 pro kabát: $n = 5, k = 1$ $C_1(5)$
 pro vestu: $n = 4, k = 1$ $C_1(4)$
 pro kalhoty: $n = 6, k = 1$ $C_1(6)$

$$C_1(5) \cdot C_1(4) \cdot C_1(6) = \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{6}{1} = 120.$$

5. Záleží na pořadí žáků, jedná se tedy o variace, žáci se neopakují, nikdo nesedí na dvou židlích, jsou tedy bez opakování. $V_4(5) = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$.

6. U hodu kostkou záleží na pořadí a prvky se mohou opakovat. $V_3'(6) = 6^3 = 216$.

7. Záleží na pořadí svetrů, umístí se všechny a bílý se 2x opakuje, jedná se tedy o permutace s opakováním. $P'_{2,1,1}(4) = \frac{4!}{2!} = 12$.

8. Z šesti číslic tvoříme šestciferné číslo, žádná cifra se neopakuje, jsou to tedy permutace šesti prvků. $P(6) = 6! = 720$.

9. a) $\frac{a^6}{64} - \frac{a^5b}{16} + \frac{5a^4b^2}{48} - \frac{5a^3b^3}{54} + \frac{5a^2b^4}{108} - \frac{ab^5}{81} + \frac{b^6}{729},$

b) $(1 + 0,01)^7 = \binom{7}{0} \cdot 1^7 \cdot 0,01^0 + \binom{7}{1} \cdot 1^6 \cdot 0,01^1 + \dots + \binom{7}{7} \cdot 1^0 \cdot 0,01^7 = 1,072$

10. a) $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21,$ b) $\binom{15}{12} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} = 455,$

c) $\binom{x}{3} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{3!} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6}.$

11. a) $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3},$

b) $\binom{14}{3} + \binom{14}{10} = \binom{14}{3} + \binom{14}{4} = \binom{15}{4},$

c) $\binom{n}{4} + \binom{n}{5} = \binom{n+1}{5}.$

12. a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = n^2 + n,$

b) $\frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{(n-2)!}{(n-1)(n-2)!} = \frac{1}{n-1},$

c) $\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n!}{n!} - \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n+1 - n = 1.$

13. $V_2(n) = 42 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 42 \Rightarrow n \cdot (n-1) = 42 \Rightarrow n_1 = 7, n_2 = -6$ Je potřeba 7 prvků.

14. $P(n) = n!, P(n+2) = (n+2)!, P(n+2) = 12 \cdot P(n) \Rightarrow (n+2)! = 12 \cdot n!,$ upravíme faktoriál na levé straně rovnice, vykrátíme a dostaneme kvadratickou rovnici $n^2 + 3n - 10 = 0$.
Její kořeny jsou $n_1 = 2, n_2 = -5$. Řešení úlohy vyhovuje $n = 2$.

15. $C_3(n) = \binom{n}{3}$, $C_3(n+1) = \binom{n+1}{3}$, $\binom{n+1}{3} = \binom{n}{3} + 28$, upravíme kombinační čísla a po

úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $n^2 - n - 56 = 0$. Její kořeny jsou $n_1 = 8, n_2 = -7$.

Řešení úlohy vyhovuje $n = 8$.

16. a) Záleží na pořadí, prvky se neopakují, $n = k = 5$. $P(5) = 5! = 120$.

b) Na konci je pevně dané číslo, u zbytku záleží na pořadí a neopakují se, $n = k = 4$

$$P(4) = 4! = 24.$$

c) Na konci může být dvojka nebo čtyřka. Jedná se o dva případy z příkladu b).

$$2 \cdot P(4) = 48.$$

d) $3 \cdot P(4) = 72$.

17. Tvoříme trojčiferná čísla, u nich záleží na pořadí, vybíráme ze čtyř cifer, ty se opakují.

Jedná se tedy o variace třetí třídy ze čtyř prvků s opakováním. $V_3'(4) = 4^3 = 64$.

18. Budeme postupovat podobně jako v řešeném příkladu o „matematice“. Jde o permutace s opakováním.

$$M = \{a, u, t, o, m, i, z, c, e\},$$

$$n = 9, k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = 2, k_4 = k_5 = k_6 = k_7 = k_8 = k_9 = 1 \Rightarrow k = 12$$

$$P'_{3,1,2,1,1,1,1,1,1}(12) = \frac{12!}{3!2!} = 11! = 39\,916\,800.$$

19. Nezáleží na pořadí, tón se nesmí opakovat, vypočítáme zvlášť počet třítónových akordů a zvlášť počet čtyřtónových akordů. Ty pak sečteme. $n = 7, k = 3 \vee k = 4$,

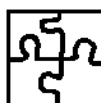
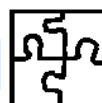
$$C_3(7) + C_4(7) = 35 + 35 = 70.$$

20. Trenér vybírá jednoho brankáře ze tří, dva obránce z pěti, tři záložníky ze čtyř a pět útočníků z deseti. Můžeme také říci, že je kombinuje. Lidé se samozřejmě neopakují.

$$\text{Tedy } C_1(3) \cdot C_2(5) \cdot C_3(4) \cdot C_5(10) = \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{10}{5} = 30240.$$

**Kontrolní test**

1. V množině přirozených čísel řešte: $\binom{6}{5}\binom{y+1}{y-1} - \binom{6}{4}\binom{y+2}{y+1} = \binom{4}{2}$
- a) $y = -5$; b) $y = 6$ c) $y = 2$ a $y = 3$.
2. Ze 6 mužů a 4 žen se má vybrat sedmičlenná skupina. Kolika způsoby je to možné?
- a) 120; b) 240; c) 6.
3. Ze 6 mužů a 4 žen se má vybrat sedmičlenná skupina. Kolika způsoby je to možné, mají-li být ve vybrané skupině právě 2 ženy.
- a) 0; b) 36; c) 11.
4. Ze 6 mužů a 4 žen se má vybrat sedmičlenná skupina. Kolika způsoby je to možné, mají-li být ve vybrané skupině alespoň 2 ženy.
- a) -10; b) 520; c) 116.
5. Určete počet prvků konečné množiny, z nichž lze vytvořit pětikrát více uspořádaných trojic než uspořádaných dvojic. Žádný prvek se neopakuje.
- a) $n = 7$; b) $n = -4$; c) $n = 10$.
6. Kolika způsoby lze ubytovat 10 hostů, máme-li k dispozici jeden čtyřlůžkový a dva třílůžkové pokoje?
- a) 520; b) 4200; c) nelze zjistit.
7. Zvětší-li se počet prvků o 2, zvětší se počet permutací třicetkrát. Kolik je prvků?
- a) 4; b) 6; c) 8.
8. Z kolika prvků vznikne 729 variací třetí třídy s opakováním?
- a) 8; b) 9; c) 10.

**Výsledky testu**

1. b); 2. a); 3. b); 4. c); 5. a); 6. b); 7. a); 8. b).

7. ANALYTICKÁ GEOMETRIE V ROVINĚ	197
7.1. Vektory	198
7.1.1. Operace s vektory	198
7.2. Přímka v rovině	200
7.2.1. Obecná rovnice přímky v rovině	200
7.2.2. Parametrické vyjádření přímky v rovině	204
Úlohy k samostatnému řešení	206
7.2.3. Vzájemná poloha dvou přímek	206
Úlohy k samostatnému řešení	208
7.2.4. Odchylka dvou přímek	209
Úlohy k samostatnému řešení	209
7.2.5. Kolmost dvou přímek	210
Úlohy k samostatnému řešení	211
7.2.6. Vzdálenost bodu od přímky	211
Úlohy k samostatnému řešení	212
7.3. Kružnice	213
7.3.1. Definice kružnice	213
Úlohy k samostatnému řešení	213
7.3.2. Vzájemná poloha kružnice a přímky	214
Úlohy k samostatnému řešení	220
7.3.3. Kružnice z daných prvků	221
Úlohy k samostatnému řešení	222
7.4. Elipsa	223
7.4.1. Definice elipsy	223
Úlohy k samostatnému řešení	225
7.4.2. Vzájemná poloha elipsy a přímky	226
Úlohy k samostatnému řešení	228
7.5. Hyperbola	229
7.5.1. Definice hyperboly	229
Úlohy k samostatnému řešení	231
7.5.2. Vzájemná poloha hyperboly a přímky	232
Úlohy k samostatnému řešení	235
7.6. Parabola	236
7.6.1. Definice paraboly	236
Úlohy k samostatnému řešení	237
7.6.2. Vzájemná poloha paraboly a přímky	238
Úlohy k samostatnému řešení	240
Výsledky úloh k samostatnému řešení	240
Klíč k řešení úloh	242
Kontrolní otázky	251
Kontrolní test	252
Výsledky testu	252

7. ANALYTICKÁ GEOMETRIE V ROVINĚ



Průvodce studiem



Kapitola *Analytická geometrie v rovině* je rozdělena do šesti menších celků a ty jsou ještě dále rozděleny na menší oddíly. V každém oddíle je nejdříve vysvětlena teorie, jsou zavedeny nové pojmy a vzorce. Pak následují *Řešené úlohy* a po nich *Úlohy k samostatnému řešení*. K těmto úlohám jsou na konci kapitoly uvedeny výsledky a pro ty, kteří by si s úlohami nevěděli rady, také nápověda. Na samý závěr si otestujete, jak jste zvládli tuto kapitolu.

Ve výkladu soustava souřadnic znamená kartézskou soustavu souřadnic, tzn. pravoúhlou soustavu souřadnic se stejně velkými jednotkami na osách x , y .

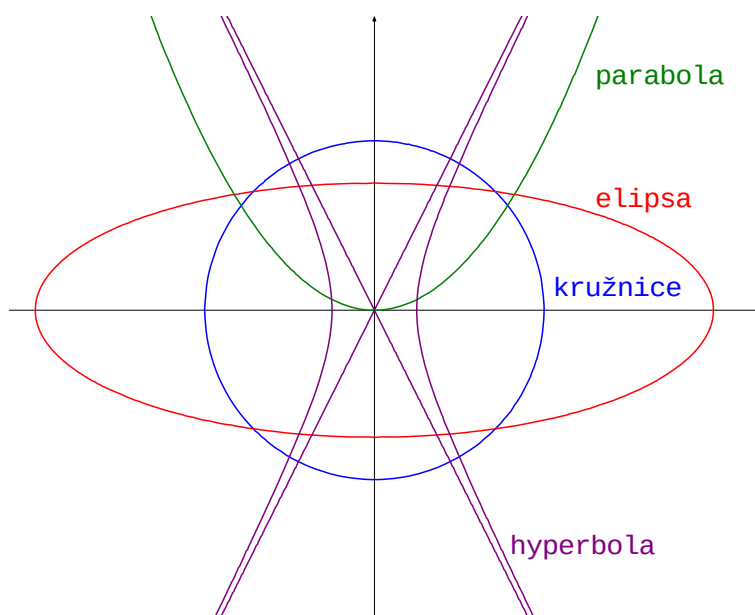
Obrázky v textu byly vytvořeny pomocí programu Matematika. Hodně zdarů při studiu.



Cíle



Seznámíte se s pojmy orientovaná úsečka, vektor, přímka, kružnice, elipsa, hyperbola a parabola (viz obrázek). Poznáte jejich zápisy a rovnice. Naučíte se řešit některé planimetrické úlohy početně.



Předpokládané znalosti



Předpokládá se, že chápete pojmy bod, přímka a rovina. Měli byste umět řešit jednoduché planimetrické úlohy, lineární a kvadratické rovnice a soustavy rovnic dosazovací nebo sčítací metodou.

7.1. Vektory

Výklad

Orientovanou úsečkou rozumíme úsečku $\overline{AB}$, kde A je její **počáteční bod** a B je **koncový bod**. Krajní body orientované úsečky tvoří uspořádanou dvojici $[A, B]$.

Volným vektorem $\vec{v}$ nazveme množinu všech rovnoběžných souhlasně orientovaných úseček téže velikosti.

Každou orientovanou úsečku, která znázorňuje vektor $\vec{v}$, budeme nazývat **umístěním vektoru** $\vec{v}$.

Jsou-li body určeny svými souřadnicemi $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, pak souřadnice vektoru $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ jsou $\vec{v} = (v_1, v_2)$, kde $v_1 = b_1 - a_1$, $v_2 = b_2 - a_2$. Pro $A = B$ se vektor $\vec{v} = \vec{o}$ nazývá **nulový**.

Souřadnice bodů zapisujeme pro rozlišení do hranatých závorek, souřadnice vektorů do okrouhlých.

7.1.1. Operace s vektory

Pro vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ platí:

Vzdálenost dvou bodů:	$ AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$
Velikost vektoru:	$ \vec{u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$
Součet vektorů:	$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
Rozdíl vektorů:	$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$
k-násobek vektoru:	$k\vec{u} = (ku_1, ku_2)$
Opačný vektor k $\vec{u}$:	$-\vec{u} = (-u_1, -u_2)$
Skalární součin dvou vektorů:	$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$
Odchylka dvou vektorů:	$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{u} \vec{v} }$, vektory jsou nenulové $\vec{u} \neq \vec{o}$, $\vec{v} \neq \vec{o}$.

Nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou k sobě **kolmé**, právě když $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Vektor $\vec{u}$, pro který platí $|\vec{u}| = 1$, se nazývá **jednotkový**.

Nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$ nazveme **kolineární**, právě když $\vec{v} = k\vec{u}, k \in \mathbb{R} - \{0\}$, tj. libovolná jejich umístění jsou navzájem rovnoběžná.



Řešené úlohy



Příklad 7.1.1. Jsou dány body $A[2, 5], B[-3, 7], C[3, -1]$. Určete souřadnice vektorů

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{CB}, \vec{c} = \overrightarrow{AC}. \text{ Vypočítejte obvod trojúhelníku } ABC.$$

Řešení:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-3 - 2, 7 - 5) = (-5, 2),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = B - C = (-3 - 3, 7 - (-1)) = (-6, 8),$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AC} = C - A = (3 - 2, -1 - 5) = (1, -6).$$

Obvod trojúhelníku je roven součtu délek jednotlivých stran: $o = |AB| + |AC| + |BC|$.

$$|AB| = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (7 - 5)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29},$$

$$|AC| = \sqrt{(3 - 2)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37},$$

$$|BC| = \sqrt{(3 - (-3))^2 + (-1 - 7)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10,$$

$$o = \sqrt{29} + \sqrt{37} + 10 \doteq 21,5.$$

Příklad 7.1.2. Vypočítejte skalární součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, jestliže $|\vec{u}| = 5, |\vec{v}| = 2, \varphi = 30^\circ$.

Řešení: $\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \varphi \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ = 5\sqrt{3}.$

Příklad 7.1.3. Určete odchylku vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, je-li $\vec{u} = (-2, -1), \vec{v} = (1, 3)$.

Řešení: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5},$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = -5,$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 135^\circ.$$



Úlohy k samostatnému řešení



1. Vypočítejte skalární součin vektorů, znáte-li:
a) $|\vec{u}| = 2\sqrt{2}, |\vec{v}| = 6, \varphi = 45^\circ$, b) $\vec{a} = (4, -2), \vec{b} = (0, -4)$.
2. Vypočítejte velikost úsečky AB : $A[3, 1], B[-4, 5]$.
3. Vypočítejte velikost vektorů a jejich odchylku: $\vec{a} = (4, -2), \vec{b} = (0, -4)$.

7.2. Přímka v rovině



Výklad



Přímka p je zadána dvěma různými body A, B .

Směrovým vektorem přímky p rozumíme takový nenulový vektor $\vec{u}$, který lze umístit na přímku p .

Normálovým vektorem přímky p rozumíme nenulový vektor $\vec{n}$, který je kolmý ke každému směrovému vektoru přímky p .

Všechny vektory kolinéární s vektorem $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ jsou směrovými vektory přímky p . Podobně všechny vektory kolinéární s vektorem $\vec{n}$ ($\vec{n} \perp \vec{u}$) jsou normálovými vektory přímky p .

7.2.1. Obecná rovnice přímky v rovině

Uvažujme nyní přímku p , nechť $\vec{n} = (a, b)$ je její normálový vektor a nechť $A = [a_1, a_2]$ je libovolný pevný bod přímky p , potom libovolný bod $X = [x, y]$ leží na přímce p právě tehdy, když vektor $X - A = (x - a_1, y - a_2)$ je kolmý k vektoru $\vec{n} = (a, b)$, což je splněno právě tehdy, když platí:

$$\vec{n}(X - A) = 0 \Leftrightarrow a(x - a_1) + b(y - a_2) = 0 \Leftrightarrow ax + by + (-aa_1 - ba_2) = 0.$$

Dvojčlen $(-aa_1 - ba_2)$ je konstanta, označíme ji $(-aa_1 - ba_2) = c$, dostaneme rovnici

$$ax + by + c = 0.$$

Každá přímka v rovině se dá analyticky vyjádřit lineární rovnicí ve tvaru

$$ax + by + c = 0,$$

kde a, b, c jsou konstanty, přičemž alespoň jedno z čísel a, b je nenulové. Rovnice se nazývá **obecná rovnice přímky**, a, b, c jsou **koeficienty** této rovnice.

Jestliže má přímka p rovnici $ax + by + c = 0$, kde $(a, b) \neq \vec{0}$, je $\vec{n} = (a, b)$ jejím normálovým vektorem, pak vektor $\vec{u} = (-b, a)$ je jejím směrovým vektorem, protože musí platit $\vec{u} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (a, b) \cdot (-b, a) = 0$



Poznámka

*S rovnicí přímky jste se již setkali u lineárních funkcí (kapitola 2.), ale tam se používal tvar $y = kx + q$, kterému se říká **směrnice tvar rovnice přímky**.*



Řešené úlohy

Příklad 7.2.1. Určete obecnou rovnici přímky p , která prochází bodem $A[4, -2]$ a má normálový vektor $\vec{n} = (5, 8)$



Řešení:

V rovnici $ax + by + c = 0$ je $a = 5, b = 8$, tedy $5x + 8y + c = 0$.

Přímka prochází bodem $A[4, -2]$, proto jeho souřadnice musí splňovat tuto rovnici a po dosazení platí:

$$5 \cdot 4 + 8(-2) + c = 0 \Rightarrow c = -4.$$

Obecná rovnice je tedy $5x + 8y - 4 = 0$.

Příklad 7.2.2. Určete r, s tak, aby rovnice $(r-1)x + 12y + s - 3 = 0$ byla rovnicí přímky $3x + 4y + 7 = 0$.

Řešení:

Jsou-li $ax + by + c = 0$ a $a'x + b'y + c' = 0$ rovnice téže přímky, pak platí:

$$a' = ka, b' = kb, c' = kc, \text{ kde } k \in \mathbf{R} - \{0\}.$$

$$\text{Odtud je } r-1 = 3k; \quad 12 = 4k; \quad s-3 = 7k \quad \Rightarrow \quad k = 3; \quad r = 10; \quad s = 24.$$

Rovnice přímky je $9x + 12y + 21 = 0$.

Příklad 7.2.3. Určete obecnou rovnici přímky p , která prochází body $A[-4, 2]$ a $B[3, 5]$.

Řešení:

Body A, B leží na přímce p , proto jejich souřadnice musí splňovat rovnici $ax + by + c = 0$.

$$\begin{aligned} -4a + 2b + c &= 0 \\ 3a + 5b + c &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{26}c, \quad b = -\frac{7}{26}c,$$

vhodně zvolíme c , např. $c = 26$, pak $a = 3$, $b = -7$.

Tedy $p: 3x - 7y + 26 = 0$ je hledaná obecná rovnice.

Příklad 7.2.4. Napište obecnou rovnici přímky p procházející bodem $M[1, -3]$, která je rovnoběžná s přímkou $q: 2x - 3y + 7 = 0$.

Řešení:

Normálový vektor přímky q je zároveň normálovým vektorem přímky p . Obecná rovnice přímky p je tedy $2x - 3y + c = 0$. Konstantu c určíme dosazením souřadnic bodu M .

$$2 \cdot 1 - 3(-3) + c = 0 \Rightarrow c = -11$$

Obecná rovnice přímky je $p: 2x - 3y - 11 = 0$.

Příklad 7.2.5. Napište obecnou rovnici přímky p procházející bodem $M[4, -3]$, která je kolmá k přímce $q : 2x - 3y + 5 = 0$.

Řešení:

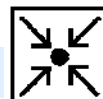
Normálovým vektorem přímky q je vektor $\vec{n}_q = (2, -3)$. Aby přímka p byla kolmá k přímce q , musí být její normálový vektor $\vec{n}_p$ kolmý k normálovému vektoru přímky q . Normálovým vektorem přímky p je např. $\vec{n}_p = (3, 2)$, platí $\vec{n}_q \cdot \vec{n}_p = 0$.

Dále můžeme pokračovat třeba takto: $\vec{n}_p(X - M) = 0$, po dosazení souřadnic získáme obecnou rovnici přímky p :

$$3(x - 4) + 2(y + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 2y - 6 = 0.$$



Úlohy k samostatnému řešení



4. Napište obecnou rovnici přímky AB , $A[0, 2]$, $B[3, 0]$.
5. Napište obecné rovnice težnic trojúhelníku ABC , je-li $A[0, 5]$, $B[6, 7]$, $C[1, 4]$.

(Souřadnice středu S úsečky AB jsou $s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, $s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$).

6. Zjistěte, zda bod $C[-1, 8]$ leží na přímce $x - y + 2 = 0$.
7. Určete obecnou rovnici přímky p , která prochází bodem $A[1, -3]$ a má normálový vektor $\vec{n} = (-2, 3)$.
8. Napište obecnou rovnici přímky p procházející bodem $K[6, -7]$, která je rovnoběžná s přímkou $q : 3x + 5y - 3 = 0$.
9. Napište obecnou rovnici přímky p procházející bodem $R[1, 0]$, která je kolmá k přímce $q : x - 4y + 9 = 0$.

7.2.2. Parametrické vyjádření přímky v rovině



Výklad



Symbolem $p(A, \vec{u})$ budeme označovat přímku p , která je dána bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$. Libovolný bod X roviny leží na přímce p právě tehdy, když vektor $\overrightarrow{AX}$ je násobkem vektoru $\vec{u}$. Pro $X = A$ je $\overrightarrow{AX} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$ a pro $X \neq A$ je $X \in p$ právě když vektor $\overrightarrow{AX}$ je směrovým vektorem přímky p , a jako takový násobkem jejího směrového vektoru $\vec{u}$.

Platí tedy: $\overrightarrow{AX} = t\vec{u} \Rightarrow X - A = t\vec{u} \Rightarrow X = A + t\vec{u}$, kde $t \in \mathbf{R}$. Rovnice se nazývá **vektorová (parametrická)** rovnice přímky $p(A, \vec{u})$, kde $t \in \mathbf{R}$ je **parametr**.

Bod $X[x, y]$ leží na přímce $p(A, \vec{u})$ dané bodem $A[a_1, a_2]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (u_1, u_2)$ právě tehdy, když platí

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2 \end{aligned}, \text{ kde } t \in \mathbf{R}.$$

Tyto rovnice se nazývají **parametrické vyjádření** přímky $p(A, \vec{u})$ v souřadnicích.

Je-li přímka p určena dvěma body A, B , její směrový vektor je $\vec{u} = B - A$.



Řešené úlohy



Příklad 7.2.6. Napište vektorovou rovnici a parametrické vyjádření přímky, která prochází body $A[-5, 7]$, $B[6, -1]$.

Řešení:

Platí $\vec{u} = B - A = (11, -8)$.

Vektorová rovnice je $X = [-5, 7] + t(11, -8)$, $t \in \mathbf{R}$.

Parametrické vyjádření přímky:

$$\begin{aligned} x &= -5 + 11t \\ y &= 7 - 8t, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Příklad 7.2.7. Zjistěte, zda body $K[0, -4]$, $L[1, 2]$ leží na přímce $p: X = [1, -2] + t(1, 2)$.

Řešení: Vektorovou rovnici rozepíšeme pro jednotlivé souřadnice:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$$

Za x, y dosadíme souřadnice bodu K .

Bod $K[0, -4]$ leží na přímce p právě tehdy, když existuje takové číslo $t \in \mathbf{R}$, že

platí:
$$\begin{aligned} 0 &= 1 + t \Rightarrow t = -1 \\ -4 &= -2 + 2t \Rightarrow t = -1 \end{aligned}$$
, to znamená, že $K \in p$.

Bod $L[1, 2]$ musí splňovat stejnou podmínku:
$$\begin{aligned} 1 &= 1 + t \Rightarrow t = 0 \\ 2 &= -2 + 2t \Rightarrow t = 2 \end{aligned}$$
, takže $L \notin p$.

Příklad 7.2.8. Určete obecnou rovnici přímky $p: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$.

Řešení: Jsou dvě možnosti řešení.

Vyloučením parametru (první rovnici vynásobíme dvěma, druhou vynásobíme třemi a pak je sečteme) dostaneme obecnou rovnici $2x + 3y - 1 = 0$.

Nebo použijeme bod $A[2, -1]$ a směrový vektor $\vec{u} = (-3, 2)$ přímky p . Normálový vektor přímky p je ke směrovému vektoru kolmý a má tedy souřadnice $\vec{n} = (2, 3)$, platí $\vec{n}(X - A) = 0$.

Po dosazení souřadnic dostaneme rovnici $2(x - 2) + 3(y + 1) = 0$, upravíme ji na obecnou rovnici přímky $p: 2x + 3y - 1 = 0$.

Příklad 7.2.9. Napište parametrické vyjádření přímky $a: 5x + y - 4 = 0$.

Řešení: K parametrickému vyjádření je třeba mít libovolný bod A a směrový vektor $\vec{u}$.

Normálový a směrový vektor přímky jsou k sobě kolmé: $\vec{n} = (5, 1) \Rightarrow \vec{u} = (1, -5)$.

Souřadnice bodu A vypočítáme z obecné rovnice tak, že jednu zvolíme, např. $x_A = 0$, a druhou vypočítáme; vyjde $y = 4$, $A[0, 4]$. Zvolíme-li za x_A jiné číslo, dostaneme jiný bod přímky. Zvolit samozřejmě můžeme i y_A a vypočítat x_A .

Pro bod $A[0, 4]$ je parametrické vyjádření přímky $a: \begin{cases} x = t \\ y = 4 - 5t \end{cases}$.

Příklad 7.2.10. Napište obecnou rovnici přímky p , která je kolmá k přímce $q: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$ a prochází bodem $M[-1, 1]$. ✖

Řešení: Normálový vektor přímky p je kolineární se směrovým vektorem přímky q .

Může tedy být $\vec{n}_p = \vec{u}_q = (-1, 2)$.

Obecná rovnice bude mít tvar: $-x + 2y + c = 0$.

Dosadíme bod $M[-1, 1]$ a vypočítáme $c: 1 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -3$.

Hledaná obecná rovnice přímky je $p: -x + 2y - 3 = 0$.



Úlohy k samostatnému řešení

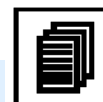


10. Napište vektorovou rovnici a parametrické vyjádření přímky, která prochází body $A[5, 1], B[3, 4]$.
11. Rozhodněte, zda bod $U[-4, 2]$ leží na přímce $p: X = [1, -13] + t(-1, 3)$.
12. Určete obecnou rovnici přímky $p: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - 5t \end{cases}$.
13. Napište parametrické vyjádření přímky $p: -2x + 7y - 14 = 0$.
14. Napište parametrické vyjádření přímky p , která je kolmá k přímce $q: 2x - y - 7 = 0$ a prochází bodem $Q[-4, 2]$. ✖

7.2.3. Vzájemná poloha dvou přímek



Výklad



Dvě přímky v rovině se nazývají:

rovnoběžné, nemají-li společný bod,

různoběžné, mají-li právě jeden společný bod (průsečík),

totožné, mají-li všechny body společné.

Úlohy typu – rozhodněte o vzájemné poloze přímek – řešíme pomocí soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a podle počtu řešení rozhodneme o výsledku.

Jedná se o **polohové úlohy**, kde nic neměříme. (Vzdálenosti, odchylky ani kolmost nás přitom nezajímají.)



Řešené úlohy



Příklad 7.2.11. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) $p : 2x - y - 1 = 0, \quad q : 5x - 4y + 2 = 0,$

b) $p : x - y + 5 = 0, \quad q : 2x - 2y + 10 = 0,$

c) $p : 2x - 5y + 2 = 0, \quad q : 4x - 10y + 2 = 0.$

Řešení: Ve všech případech řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

a)
$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 5x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 3 \text{ soustava má jediné řešení,}$$

přímky jsou různoběžné a protínají se v bodě $R[2, 3]$.

b)
$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ 2x - 2y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \Rightarrow \text{soustava má nekonečně mnoho řešení,}$$

přímky jsou tedy totožné. Zadané rovnice jsou ekvivalentní.

c)
$$\begin{cases} 2x - 5y + 2 = 0 \\ 4x - 10y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y - 2 = 0 \Rightarrow \text{soustava nemá řešení,}$$

přímky jsou rovnoběžné. Normálové vektory daných přímek jsou kolineární.

Příklad 7.2.12. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) $p : 5x - 2y + 4 = 0; q : x = 4 - 3t, y = -3 - \frac{15}{14}t,$

b) $p : 6x - 3y + 5 = 0; q : x = 5 + t, y = -3 + 2t,$

c) $p : x + 2y - 7 = 0; q : x = 1 - 4t, y = 3 + 2t.$

Řešení: Dosadíme parametrické vyjádření přímky q do obecné rovnice přímky p :

a)
$$5(4 - 3t) - 2\left(-3 - \frac{15}{14}t\right) + 4 = 0, \text{ z rovnice vypočítáme, že } t = \frac{7}{3}.$$

Úloha má jediné řešení, jedná se o různoběžky. Dosazením $t = \frac{7}{3}$ do parametrického vyjádření přímky q dostaneme souřadnice průsečíku $A\left[-3, -\frac{11}{2}\right]$.

b)
$$6(5 + t) - 3(-3 + 2t) + 5 = 0 \Rightarrow 30 + 6t + 9 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow 0 \cdot t = 44,$$

což nenastane pro žádné $t \in \mathbb{R}$, proto úloha nemá řešení a jedná se o rovnoběžky.

c)
$$(1 - 4t) + 2(3 + 2t) - 7 = 0 \Rightarrow 1 - 4t + 6 + 4t - 7 = 0 \Rightarrow 0 \cdot t = 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},$$

proto má úloha nekonečně mnoho řešení a jedná se o totožné přímky.

Příklad 7.2.13. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

$$\text{a) } p : x = 5 + 4t, y = -2 - 2t; \quad q : x = 1 - 2s, y = 7 + s,$$

$$\text{b) } p : x = 3 + t, y = 2 - t; \quad q : x = 3s, y = -2s,$$

$$\text{c) } p : x = 6 + 5t, y = 3 - 9t; \quad q : x = 11 - 10s, y = -6 + 18s.$$

Řešení: Z výrazů, kterými je vyjádřena stejná souřadnice, utvoříme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{array}{l} 5 + 4t = 1 - 2s \\ -2 - 2t = 7 + s \end{array} \cdot 2 \Rightarrow \begin{array}{l} 5 + 4t = 1 - 2s \\ -4 - 4t = 14 + 2s \end{array} \Rightarrow 1 + 0 \cdot t = 15 + 0 \cdot s \Rightarrow \text{soustava nemá} \end{array}$$

řešení, jedná se tedy o rovnoběžky.

Jiná možnost řešení je porovnat směrové vektory a ověřit existenci společného bodu.

$$\text{b) } \begin{array}{l} 3 + t = 3s \\ 2 - t = -2s \end{array} \Rightarrow 5 = s \text{ a } t = 12, \text{ což je jediné řešení.}$$

Přímky jsou různoběžné a protínají se v bodě $A[15, -10]$.

$$\text{c) } \begin{array}{l} 6 + 5t = 11 - 10s \\ 3 - 9t = -6 + 18s \end{array} \cdot \begin{array}{l} 9 \\ 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 54 + 45t = 99 - 90s \\ 15 - 45t = -30 + 90s \end{array} \Rightarrow 69 = 69 \Rightarrow \text{soustava má}$$

nekonečně mnoho řešení, přímky jsou totožné.



Úlohy k samostatnému řešení



15. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

$$\text{a) } p : 2x - 3y + 5 = 0, \quad q : 4x - 6y + 10 = 0,$$

$$\text{b) } p : 3x - y + 4 = 0, \quad q : 6x - 2y + 13 = 0,$$

$$\text{c) } p : 6x + y - 7 = 0, \quad q : 4x - 5y + 1 = 0.$$

16. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

$$\text{a) } a : x - y - 4 = 0, \quad b : x = 2 + t, y = -2 + t,$$

$$\text{b) } a : 4x - 3y + 7 = 0, \quad b : x = 3 + 3t, y = 3 + 4t,$$

$$\text{c) } a : 3x + 2y - 5 = 0, \quad b : x = 5 + 2t, y = -1 + t.$$

17. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

$$\text{a) } k : x = 4 - t, y = 3 + 2t; \quad l : x = 1 - 2s, y = 9 + 4s,$$

$$\text{b) } k : x = 6 - 7t, y = 8 + 3t; \quad l : x = 2 + 7s, y = 6 - 3s,$$

$$\text{c) } k : x = 2 + t, y = 3 + 3t; \quad l : x = 5 - 4s, y = 7 - 7s.$$

7.2.4. Odchylka dvou přímek

Výklad

Pokud se v zadání příkladu objeví výpočet velikosti úhlu, odchylka, kolmost nebo měření vzdálenosti, jedná se o **metrickou** úlohu.

Odchylkou dvou přímek p, q v rovině rozumíme velikost ostrého nebo pravého úhlu, který svírají.

Máme dvě přímky p, q v rovině, $\vec{u}, \vec{v}$ resp. $\vec{n}_p, \vec{n}_q$ jsou po řadě jejich směrové resp. normálové vektory. Pro odchylku přímek p, q platí:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u}\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} \quad \text{resp.} \quad \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_p\vec{n}_q|}{|\vec{n}_p||\vec{n}_q|}.$$

Řešené úlohy

Příklad 7.2.14. Přímka p prochází body $A[3, 1], B[4, 0]$, přímka q prochází body $K[2, 5], L[2, 7]$. Vypočítejte odchylku těchto přímek.

Řešení:

Pro přímku p je směrový vektor $\vec{u} = B - A = (1, -1)$ a normálový vektor $\vec{n}_p = (1, 1)$.

Pro přímku q je její směrový vektor $\vec{v} = L - K = (0, 2)$ a její normálový vektor $\vec{n}_q = (2, 0)$. Odchylku lze vypočítat dvěma způsoby

a) jako odchylku směrových vektorů:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u}\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} \quad \cos \alpha = \frac{|1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2|}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ,$$

b) jako odchylku normálových vektorů:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_p\vec{n}_q|}{|\vec{n}_p||\vec{n}_q|} \quad \cos \alpha = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Úlohy k samostatnému řešení

18. Určete odchylku přímek $p: 3x - 4y + 7 = 0$ a $q: x + 2y - 1 = 0$.

19. Přímka p prochází body $A[-2, 4], B[0, 1]$, přímka q prochází body $K[-2, 3], L[2, 2]$.

Vypočítejte odchylku těchto přímek.

20. Určete odchylku přímek $m: x = 2 + t, y = 3 + 3t; n: x = 5 - 4s, y = 7 - 7s$.

7.2.5. Kolmost dvou přímek



Výklad



Přímky, jejichž odchylka je 90° , jsou **kolmé**.

Máme dvě přímky p, q v rovině, $\vec{u}, \vec{v}$ jsou jejich směrové a $\vec{n}_p, \vec{n}_q$ jejich normálové vektory.

Potom následující výroky jsou ekvivalentní:

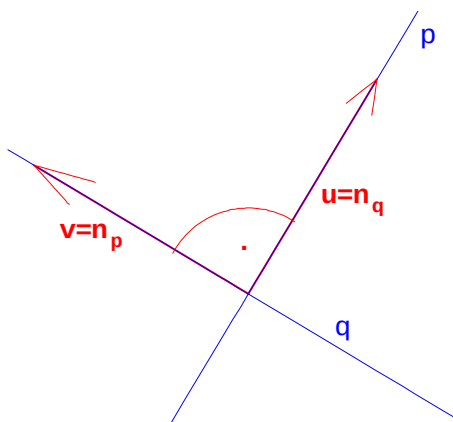
Přímky p, q jsou kolmé.

Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou kolmé, což platí právě, když $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Vektory $\vec{n}_p, \vec{n}_q$ jsou kolmé, což platí právě, když $\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q = 0$.

Vektory $\vec{u}, \vec{n}_q$ jsou kolineární (vektor $\vec{n}_q$ je směrovým vektorem přímky p a vektor $\vec{u}$ je normálovým vektorem přímky q).

Vektory $\vec{v}, \vec{n}_p$ jsou kolineární (vektor $\vec{n}_p$ je směrovým vektorem přímky q a vektor $\vec{v}$ je normálovým vektorem přímky p).



Řešené úlohy



Příklad 7.2.15. Napište obecnou rovnici přímky p , která prochází bodem $A[1, 1]$ a je kolmá k přímce $q: 5x + 4y - 7 = 0$.

Řešení:

Normálový vektor přímky q , $\vec{n}_q = (5, 4)$, je směrovým vektorem přímky p .

Její normálový vektor je pak $\vec{n}_p = (4, -5)$ a obecná rovnice přímky má tvar

$$p: 4x - 5y + c = 0.$$

Konstantu c vypočítáme dosazením souřadnic bodu $A[1, 1]$ do rovnice přímky:

$$4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 1.$$

Obecná rovnice přímky p je $p: 4x - 5y + 1 = 0$.

Příklad 7.2.16. Určete souřadnice bodu M , který je patou kolmice k sestrojené v bodě

$$P[5, -5] \text{ k přímce } p: 2x - 5y - 6 = 0.$$

Řešení:

Hledaný bod M je průsečík přímky p a kolmice k .

Normálový vektor přímky p je směrovým vektorem přímky k : $\vec{n}_p = \vec{s}_k = (2, -5)$.

Normálový vektor přímky k je $\vec{n}_k = (5, 2)$.

Přímka k má obecnou rovnici $5x + 2y + c = 0$, c vypočítáme dosazením souřadnic bodu $P[5, -5]$ do rovnice: $5 \cdot 5 + 2(-5) + c = 0 \Rightarrow c = -15$.

Vyřešíme soustavu
$$\begin{cases} 5x + 2y - 15 = 0 \\ 2x - 5y - 6 = 0 \end{cases}$$
, dostaneme $x = 3$, $y = 0$, $M[3, 0]$ je hledaný bod.



Úlohy k samostatnému řešení



21. Bodem $A[1, 1]$ veďte kolmici k přímce $p: 2x - 5y + 1 = 0$.
22. Určete m tak, aby přímky a , b byly kolmé. $a: 3x + y - 5 = 0$, $b: mx + 6y - 7 = 0$.
23. Určete souřadnice bodu M' , který je patou kolmice k sestrojené v bodě $M[1, -2]$ k přímce $p: 3x - 2y + 19 = 0$.

7.2.6. Vzdálenost bodu od přímky



Výklad



Pro vzdálenost $d(A, p)$ bodu $A[a_1, a_2]$ od přímky $p: ax + by + c = 0$ platí vzorec:

$$d(A, p) = \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Poznámka



Jmenovatel zlomku $\sqrt{a^2 + b^2}$ je velikost normálového vektoru přímky p .

Pro vzdálenost rovnoběžek $a(A, \vec{u})$ a $b(B, \vec{v})$ platí: $d(a, b) = d(A, b) = d(B, a)$.



Řešené úlohy



Příklad 7.2.17. Určete vzdálenost bodu $M[1, -3]$ od přímky $p: 3x - 4y + 5 = 0$.

Řešení: Dosadíme do vzorce

$$d(M, p) = \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d(M, p) = \frac{|3 \cdot 1 - 4(-3) + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{20}{5} = 4.$$

Příklad 7.2.18. Napište rovnici přímky, která má od přímky $m: 3x - y + 7 = 0$ vzdálenost

$$d = \sqrt{10}.$$

Řešení: Bude se jednat o dvě rovnoběžky a, a' , stačí nám najít jeden bod na každé

z nich, normálové vektory jsou stejné jako normálový vektor přímky m .

Hledaný bod bude $A[a_1, a_2]$.

$$d(A, m) = \frac{|3a_1 - a_2 + 7|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{|3a_1 - a_2 + 7|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Rightarrow |3a_1 - a_2 + 7| = 10.$$

Z vlastnosti absolutní hodnoty dostaneme dvě rovnice, z každé vypočítáme jeden bod, bude to hledaný bod rovnoběžky:

$$1. \quad 3a_1 - a_2 + 7 = 10 \Rightarrow a_2 = 3a_1 - 3, \text{ zvolíme si } a_1 = 1, \text{ vypočítáme } a_2 = 0 \Rightarrow A[1, 0],$$

$$2. \quad -(3a_1 - a_2 + 7) = 10 \Rightarrow a_2 = 3a_1 + 17, \text{ zvolíme si } a_1 = 1, \text{ vypočítáme } a_2 = 20,$$

$$A'[1, 20].$$

Bod $A[1, 0]$ leží na přímce $a: 3x - y + c = 0$, vypočítáme c dosazením jeho souřadnic, $c = -3$. Obecná rovnice přímky $a: 3x - y - 3 = 0$.

Bod $A'[1, 20]$ leží na přímce $a': 3x - y + c' = 0$, vypočítáme c' dosazením souřadnic bodu A' , $c' = 17$. Obecná rovnice přímky $a': 3x - y + 17 = 0$.



Úlohy k samostatnému řešení



24. Vypočítejte vzdálenost bodu $H[2, 6]$ od přímky $b: x = 2 + 4t, y = -3 + 3t$.

25. Napište rovnici přímky, která je rovnoběžná s přímkou $x - y + 1 = 0$ a má od ní vzdálenost $d = 2\sqrt{2}$.

26. Určete vzdálenost rovnoběžných přímek $p: x - 2y + 4 = 0, q: x - 2y + 9 = 0$.

7.3. Kružnice

7.3.1. Definice kružnice



Výklad



Množina všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu konstantní vzdálenost, se nazývá **kružnice**.

Je-li $S[m, n]$ střed kružnice, $X[x, y]$ libovolný bod kružnice a číslo r poloměr kružnice, pak vzdálenost bodů S, X je dle definice kružnice rovna poloměru

$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r.$$

Po umocnění dostaneme středový tvar rovnice kružnice:

$$k: (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2.$$

Je-li $S[0, 0]$, pak rovnice kružnice je $k: x^2 + y^2 = r^2$.



Řešené úlohy



Příklad 7.3.1. Upravte na středový tvar obecnou rovnici kružnice $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$.

Řešení:

Rovnici přepíšeme $(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) - 3 = 0$ a výrazy v závorkách upravíme na druhé mocniny dvojčlenu.

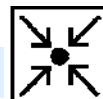
$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) - 3 = 9 + 4,$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16.$$

Střed kružnice je $S[3, 2]$, poloměr $r = 4$.



Úlohy k samostatnému řešení



27. Upravte na středový tvar obecnou rovnici kružnice:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 119 = 0$,

b) $x^2 + y^2 + 14x - 2y - 31 = 0$,

c) $2x^2 + 2y^2 - 16x - 12y = 0$.

7.3.2. Vzájemná poloha kružnice a přímky



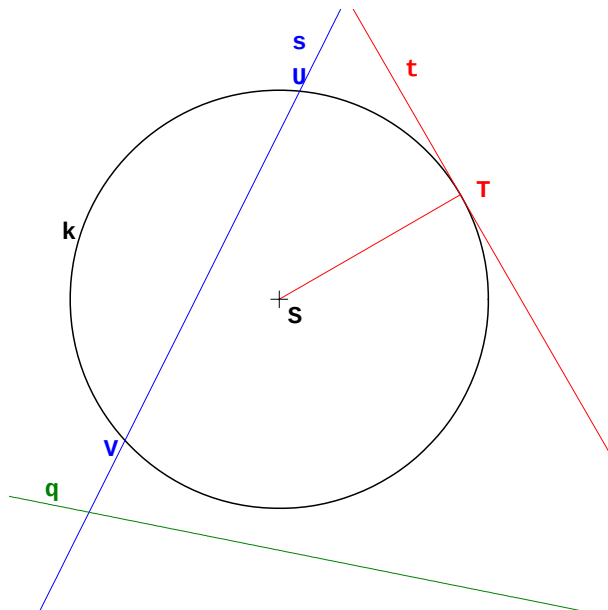
Výklad



Přímka, která má s kružnicí společný právě jeden bod, se nazývá **tečna** kružnice.

Přímka, která má s kružnicí společné právě dva body, se nazývá **sečna** kružnice.

Přímka, která nemá s kružnicí společný žádný bod, se nazývá **vnější přímka** kružnice.



t tečna kružnice, T bod dotyku, $ST \perp t$, $|ST| = r$,

s sečna, U, V průsečíky sečny s kružnicí, úsečka $|UV|$ je tětiva,

q vnější přímka

Je-li $k: (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ středová rovnice kružnice a bod $T[t_1, t_2]$ její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar:

$$t: (x-m)(t_1-m) + (y-n)(t_2-n) = r^2.$$



Řešené úlohy



Příklad 7.3.2. Určete rovnici tečny t kružnice $k: (x-3)^2 + (y+12)^2 = 100$ v bodě $L[9, -4]$.

Řešení: Musíme ověřit, jestli bod $L[9, -4]$ leží na kružnici $k: (x-3)^2 + (y+12)^2 = 100$:

$$(9-3)^2 + (-4+12)^2 = 100 \Rightarrow 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow 36 + 64 = 100 \Rightarrow 100 = 100 \Rightarrow L \in k.$$

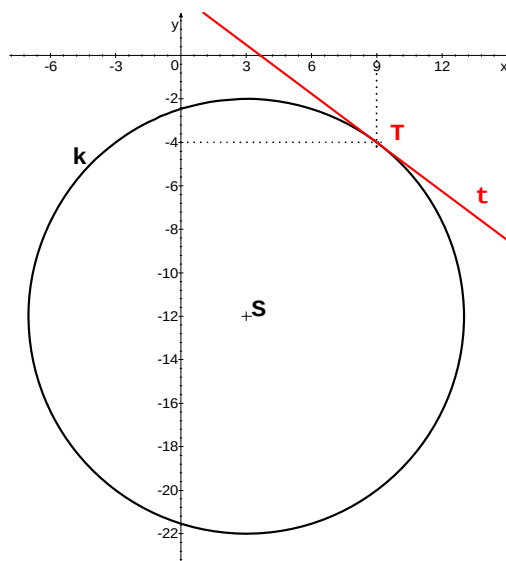
Nyní dosadíme do vzorce pro rovnici tečny $t: (x-m)(t_1-m) + (y-n)(t_2-n) = r^2$ a upravíme:

$$t: (x-3)(9-3) + (y+12)(-4+12) = 100,$$

$$t: 6(x-3) + 8(y+12) - 100 = 0,$$

$$t: 6x + 8y - 22 = 0,$$

$$t: 3x + 4y - 11 = 0.$$



Příklad 7.3.3. Rozhodněte o vzájemné poloze (zda jde o tečnu, sečnu či vnější přímku) přímky $m: -3x + 4y + 7 = 0$ a kružnice $k: (x-3)^2 + (y+12)^2 = 100$, určete společné body, pokud existují.

Řešení:

Máme vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jedna z rovnic je kvadratická, řešíme dosazovací metodou.

$$-3x + 4y + 7 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+12)^2 = 100$$

Řešíme dosazovací metodou. Z první rovnice vyjádříme jednu proměnnou, např.

$$x = \frac{4y+7}{3}, \text{ a dosadíme do druhé rovnice: } \left(\frac{4y+7}{3} - 3 \right)^2 + (y+12)^2 = 100,$$

$$\text{upravíme ji} \quad \left(\frac{4y-2}{3} \right)^2 + (y+12)^2 = 100,$$

$$\left(\frac{16y^2 - 16y + 4}{9}\right) + (y^2 + 24y + 144) = 100$$

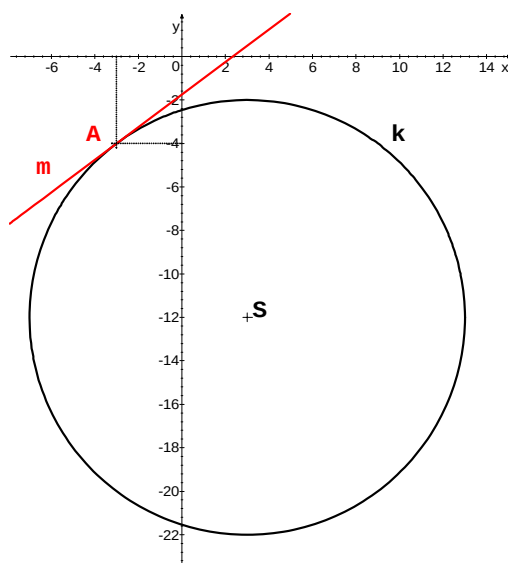
$$16y^2 - 16y + 4 + 9y^2 + 216y + 1296 - 900 = 0 \quad ,$$

$$25y^2 + 200y + 400 = 0$$

$$y^2 + 8y + 16 = 0$$

$$(y + 4)^2 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = -4, \text{ (diskriminant } D = 0 \text{)}.$$

Dosadíme do $x = \frac{4y+7}{3}$ a dostaneme $x = -3$. Je to jediné řešení, jedná se tedy o tečnu, bod $A[-3, -4]$ je bodem dotyku.



Příklad 7.3.4. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky $p: x - 2y + 5 = 0$ a kružnice $k: x^2 + y^2 = 10$, určete společné body, pokud existují.

Řešení: Opět máme vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jedna rovnice je kvadratická, druhá lineární.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 10 \\ x - 2y + 5 &= 0 \end{aligned}$$

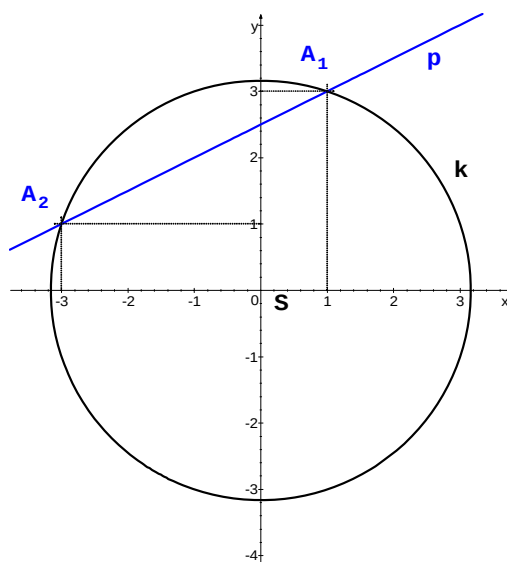
Z lineární rovnice vyjádříme $x = 2y - 5$, dosadíme do rovnice kvadratické

$(2y - 5)^2 + y^2 = 10$ a po úpravě získáme rovnici $y^2 - 4y + 3 = 0$, její diskriminant

$$D = 4, \text{ její kořeny jsou } y_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow y_1 = 3, y_2 = 1.$$

Dosadíme postupně do rovnice $x = 2y - 5$ a vypočítáme $x_1 = 1, x_2 = -3$.

Soustava má dvě řešení, jedná se tedy o sečnu s průsečíky $A_1[1, 3], A_2[-3, 1]$.



Poznámka

Z uvedených příkladů 7.3.3. a 7.3.4. můžeme shrnout poznatky o klasifikaci vzájemné polohy přímky a kružnice do několika bodů.

Při řešení soustavy 2 rovnic, lineární a kvadratické, volíme tento postup:

- z lineární rovnice vyjádříme jednu neznámou a dosadíme do rovnice kvadratické,
- kvadratickou rovnici upravíme a podle diskriminantu D rozhodneme takto:

je-li $D < 0$, přímka je vnější přímkou kružnice,

je-li $D = 0$, přímka je tečnou kružnice,

je-li $D > 0$, přímka je sečnou kružnice.

Příklad 7.3.5. Určete, pro které hodnoty parametru $c \in \mathbb{R}$ má přímka $p: y = x + c$ s kružnicí $x^2 + y^2 - 2 = 0$ právě jeden společný bod, dva společné body, žádný společný bod.

Řešení: Do rovnice kružnice dosadíme rovnici přímky a umocníme:

$$x^2 + x^2 + 2xc + c^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2xc + c^2 - 2 = 0.$$

$$D = 4c^2 - 4 \cdot 2(c^2 - 2) = -4c^2 + 16$$

$$-4c^2 + 16 = 0 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow |c| = 2$$

Závěr: $|c| < 2$: p je sečna, $|c| = 2$: p je tečna, $|c| > 2$: p je vnější přímka.

Příklad 7.3.6. Z bodu $M[5, 2]$ veďte tečny ke kružnici $k: (x-3)^2 + (y+12)^2 = 100$.

Řešení:

Bod $M[5, 2]$ je bodem tečny, ale ne bodem dotyku.

Ověříme, že bod M je vnějším bodem kružnice dosazením jeho souřadnic do rovnice kružnice:

$$(5-3)^2 + (2+12)^2 = 4 + 14^2 = 200 > 100.$$

Nyní jeho souřadnice dosadíme do rovnice tečny

$$t: (x-3)(t_1-3) + (y+12)(t_2+12) = 100$$

a tedy
$$(5-3)(t_1-3) + (2+12)(t_2+12) = 100.$$

Upravíme a dostaneme lineární rovnici $2t_1 + 14t_2 + 62 = 0 \Rightarrow t_1 + 7t_2 + 31 = 0$.

Souřadnice $[t_1, t_2]$ jsou souřadnicemi bodu dotyku, musí vyhovovat rovnici kružnice

$$k: (t_1-3)^2 + (t_2+12)^2 = 100.$$

Z lineární rovnice vyjádříme jednu souřadnici, např. $t_1 = -7t_2 - 31$ a dosadíme do

kvadratické rovnice
$$(-7t_2 - 31 - 3)^2 + (t_2 + 12)^2 = 100,$$

tu upravíme na tvar

$$t_2^2 + 10t_2 + 24 = 0,$$

$$t_2 = -4, \quad t'_2 = -6,$$

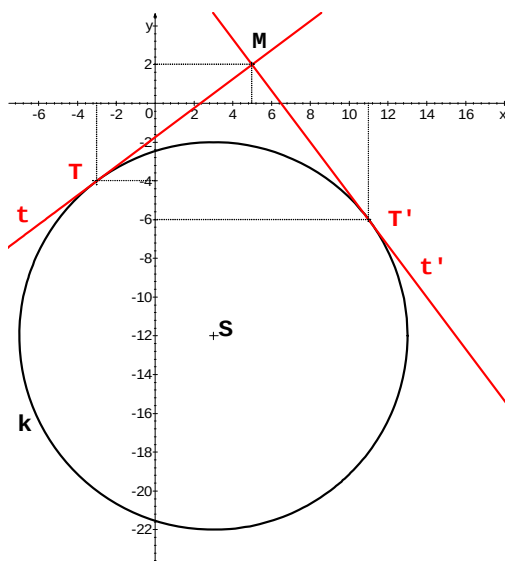
$$t_1 = -3, \quad t'_1 = 11.$$

Body dotyku hledaných tečen jsou $T[-3, -4]$ a $T'[11, -6]$.

Postupně dosadíme souřadnice bodů T, T' do rovnice tečny

$$t: (x-3)(t_1-3) + (y+12)(t_2+12) = 100,$$

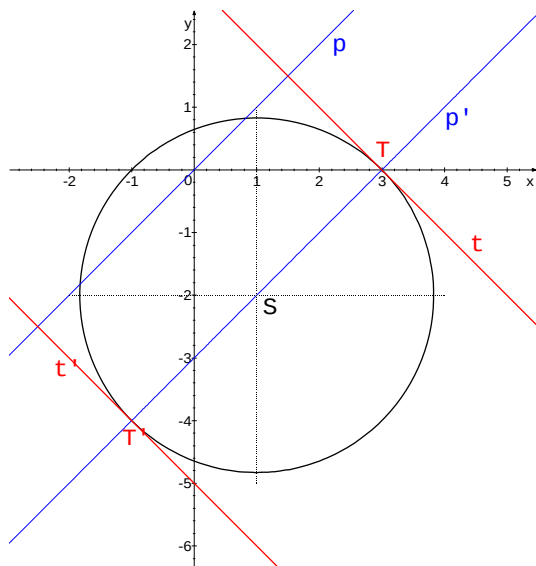
$$t: 3x - 4y - 7 = 0, \quad t': 4x + 3y - 26 = 0.$$



Příklad 7.3.7. Ved'te tečny ke kružnici $k: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$ kolmo k přímce

$$p: x = t, y = t.$$

Řešení:



Řešení se pokusíme vyčíst z obrázku. Hledané tečny jsou dvě, spojnice bodů dotyku TT' těchto tečen je rovnoběžná s danou přímkou p a prochází středem kružnice S . Povedeme tedy nejprve přímkou p' rovnoběžně s p středem kružnice.

$$p: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow p': \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t \end{cases}$$

Najdeme průsečíky přímky p' s danou kružnicí $k: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$. Do rovnice

kružnice dosadíme parametrické vyjádření přímky $p': \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t \end{cases}$.

$$(1+t-1)^2 + (-2+t+2)^2 = 8, \quad \text{závorky upravíme a mocniny sečteme:}$$

$$t^2 + t^2 = 8 \Rightarrow 2t^2 = 8 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2.$$

Parametr t dosadíme do parametrického vyjádření přímky $p': \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t \end{cases}$ a získáme

dva body dotyku hledaných tečen.

$$T = \begin{cases} x = 1+2 \\ y = -2+2 \end{cases} = [3, 0], \quad T' = \begin{cases} x = 1-2 \\ y = -2-2 \end{cases} = [-1, -4].$$

Body T, T' dosadíme do rovnice tečny kružnice

$$t: (x-m)(t_1-m) + (y-n)(t_2-n) = r^2$$

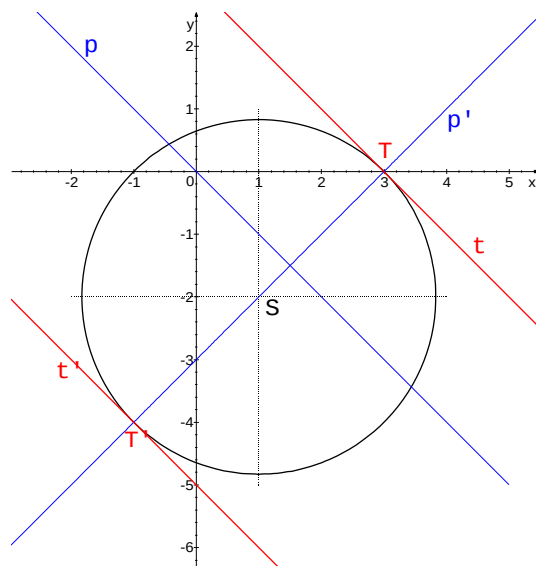
$$t: (x-1)(3-1) + (y+2)(0+2) = 8, \quad t': (x-1)(-1-1) + (y+2)(-4+2) = 8,$$

$$t: x + y - 3 = 0.$$

$$t': x + y + 5 = 0.$$

**Poznámka**

Podobně bychom řešili úlohu, ve které by tečny ke kružnici byly rovnoběžné s danou přímkou p , středem kružnice bychom vedli kolmici k dané přímce p , (viz následující obrázek). Následoval by stejný postup jako v příkladě 7.3.7.

**Úlohy k samostatnému řešení**

- 28.** Napište rovnici tečny kružnice $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$ v bodě $A[6, 1]$.
- 29.** Napište rovnice tečen kružnice $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 125$, které jsou kolmé k přímce $p: x = 2t, y = t$.
- 30.** Napište rovnice tečen kružnice $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 52$, které jsou rovnoběžné s přímkou $p: x = 2t, y = -3t$.
- 31.** Je dána kružnice k se středem $S[1, 2]$ a poloměrem $r = 5$. Dále jsou dány body $A[2, 0]$, $B[5, 9]$. Vyšetřete vzájemnou polohu kružnice k a přímky AB .
- 32.** Určete, pro které hodnoty parametru $k \in \mathbb{R}$ má daná přímka $p: y = k(x-1)$ s kružnicí $x^2 + y^2 + 2x = 0$ právě jeden společný bod, dva společné body, žádný společný bod.

7.3.3. Kružnice z daných prvků



Výklad



V této kapitole se podíváme na analytické vyjádření kružnice z daných prvků. V planimetrii jsem použili pravítko, tužku a kružítko, zde bude tužka stačit.



Řešené úlohy



Příklad 7.3.8. Určete středovou rovnici kružnice, která prochází body $A[4, 3]$, $B[-2, 3]$ a dotýká se souřadnicové osy x .

Řešení:

Abychom mohli zapsat rovnici kružnice, potřebujeme znát souřadnice středu $S[m, n]$ a poloměr kružnice r .

Nejdříve se zamyslíme nad poslední podmínkou. Jestliže se kružnice dotýká osy x , pak je poloměr kružnice roven druhé souřadnici středu kružnice, $r = n$.

Body $A[4, 3]$, $B[-2, 3]$ leží na kružnici, musí tedy jejich souřadnice splňovat rovnici kružnice $k: (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$. Protože je $r = n$, rovnice kružnice bude ve tvaru $k: (x - m)^2 + (y - n)^2 = n^2$. Dosadíme tedy souřadnice bodů A, B do této rovnice.

$$A \in k: (4 - m)^2 + (3 - n)^2 = n^2,$$

$$B \in k: (-2 - m)^2 + (3 - n)^2 = n^2.$$

Dostali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Tu nyní vyřešíme.

$$16 - 8m + m^2 + 9 - 6n + n^2 = n^2$$

$$4 + 4m + m^2 + 9 - 6n + n^2 = n^2$$

Rovnice od sebe odečteme a dostaneme

jednu rovnici o jedné neznámé:

$$12 - 12m = 0 \Rightarrow m = 1.$$

Dosadíme do jedné z rovnic a vypočítáme n :

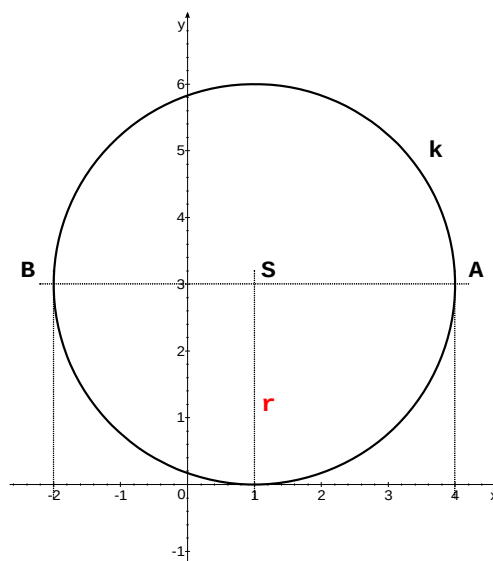
$$16 - 8 + 1 + 9 - 6n + n^2 = n^2,$$

$$18 - 6n = 0,$$

$$n = 3.$$

Kružnice má rovnici

$$k: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9.$$



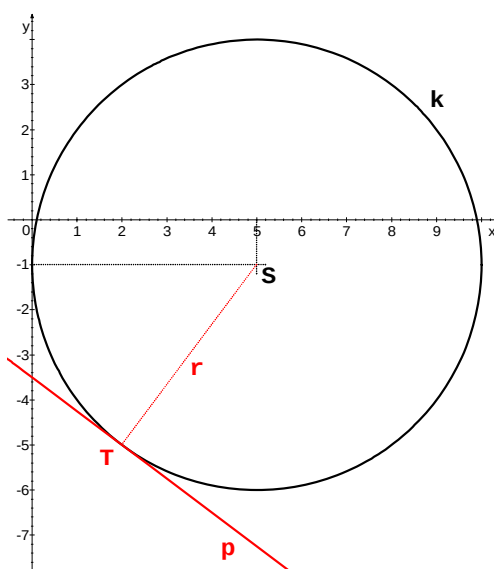
Příklad 7.3.9. Napište rovnici kružnice, která má střed $S[5, -1]$ a dotýká se přímky

$$p: 3x + 4y + 14 = 0.$$

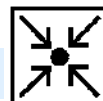
Řešení: Vzdálenost bodu S od přímky p je rovna poloměru kružnice.

$$r = d(S, p) = \frac{|3 \cdot 5 + 4(-1) + 14|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$$

Kružnice má rovnici $k: (x-5)^2 + (y+1)^2 = 25$.



Úlohy k samostatnému řešení



33. Napište rovnici kružnice, která prochází bodem $A[4, 4]$ a průsečíky kružnice

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0 \text{ s přímkou } p: x + y = 0.$$

34. Napište rovnici kružnice, která prochází body $A[12, 10]$, $B[6, 2]$ a střed leží na přímce

$$p: 3x - 4y - 3 = 0. \text{ ✖}$$

35. Napište rovnici kružnice, která má střed na ose prvního kvadrantu a dotýká se přímek

$$p: 3x + 4y + 6 = 0 \text{ a } q: -5x + 12y + 38 = 0. \text{ ✖}$$

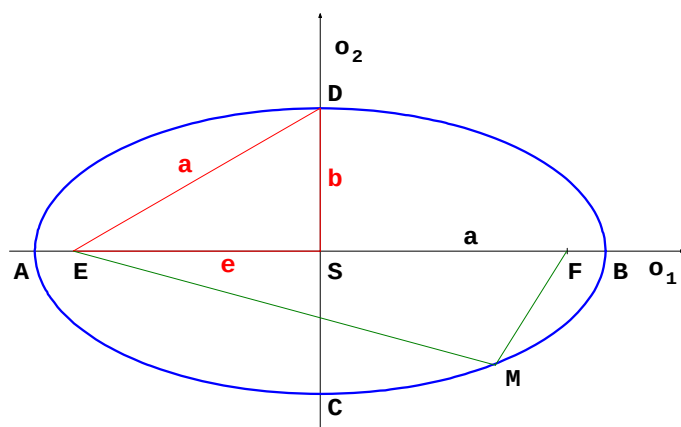
7.4. Elipsa

7.4.1. Definice elipsy

Výklad

Elipsa je množina všech bodů M v rovině, které mají od dvou různých pevně zvolených bodů (ohnisek E, F) konstantní součet vzdáleností ($2a$), který je větší než vzdálenost ohnisek.

$$|EM| + |FM| = 2a$$



A, B hlavní vrcholy elipsy

o_1 hlavní osa elipsy

E, F ohniska

o_2 vedlejší osa elipsy

C, D vedlejší vrcholy elipsy

S střed elipsy

$a = |AS| = |BS| = |EC| = |FC| = |ED| = |FD|$

hlavní poloosa elipsy

$b = |CS| = |DS|$ vedlejší poloosa elipsy,

$e = |FS| = |ES|$ excentricita elipsy

Pro a, b, e platí Pythagorova věta: $a^2 = e^2 + b^2$.

V soustavě souřadnic mějme danu elipsu o středu $S[m, n]$, a je hlavní poloosa, b vedlejší poloosa, $EF \parallel x$, pak středová rovnice elipsy má tvar:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Je-li střed elipsy v počátku soustavy souřadnic, $S[0, 0]$, pak má její rovnice tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Otočíme-li v soustavě souřadnic o pravý úhel danou elipsu o středu $S[m, n]$, hlavní poloosa a , vedlejší poloosa b , pak $EF \parallel y$ a středový tvar rovnice elipsy bude

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1.$$

Je-li střed elipsy v počátku Oxy , $S[0, 0]$, ohniska E, F leží na ose y , pak její středová rovnice je

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Řešené úlohy



Příklad 7.4.1. Obecnou rovnici elipsy převed'te na středový tvar a určete její charakteristické prvky: $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$.

Řešení:

Rovnici si přepíšeme $(4x^2 - 8x) + (9y^2 - 36y) + 4 = 0$,

ze závorek vytkneme $4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) + 4 = 0$,

výraz v závorce doplníme na druhou mocninu dvojčlenu

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) + 4 = 4 + 36,$$

přepíšeme na tvar $4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36$,

vydělíme 36 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

a máme středový tvar rovnice elipsy, $S[1, 2]$, $a = 3$, $b = 2$, $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$,
 $E[1 - \sqrt{5}, 2]$, $F[1 + \sqrt{5}, 2]$

Příklad 7.4.2. Napište rovnici elipsy, která má ohniska $E[-2, -2]$, $F[-2, 6]$ a jeden hlavní vrchol je $A[-2, 7]$.

Řešení:

Hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou y , střed $S = \frac{E+F}{2} = [-2, 2]$, $a = AS = 5$,

$e = ES = FS = 4$, $b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

Rovnice elipsy ve středovém tvaru je $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$.

Příklad 7.4.3. Napište rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami souřadnic, dotýká se osy x i y a její střed je v bodě $S[4, -2]$.

Řešení:

Elipsa se dotýká osy y , to znamená, že její hlavní vrchol je bodem dotyku a hlavní poloosa $a = 4$, zároveň se dotýká osy x , takže její vedlejší vrchol je na ose x a $b = 2$.

Rovnice elipsy ve středovém tvaru je $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

Příklad 7.4.4. Jakou rovnici má přímka, která prochází středem kuželosečky

$$4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 1 = 0 \text{ a je kolmá k přímce } 2x + 3y - 5 = 0 ?$$

Řešení:

Musíme nejdříve upravit rovnici na středový tvar, použijeme stejný postup jako v předchozím příkladě.

$$\begin{aligned}(4x^2 - 16x) + (y^2 + 2y) + 1 &= 0, \\ 4(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) &= 16, \\ \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{16} &= 1.\end{aligned}$$

Střed elipsy má souřadnice $S[2, -1]$. Hledaná přímka má být kolmá k $2x + 3y - 5 = 0$, proto její normálový vektor je $\vec{n} = (3, -2)$ a obecná rovnice je $3x - 2y + c = 0$.

Dosadíme souřadnice středu a dostaneme $3 \cdot 2 - 2(-1) + c = 0 \Rightarrow c = -8$.

Obecná rovnice hledané přímky je $3x - 2y - 8 = 0$.



Úlohy k samostatnému řešení



36. Obecnou rovnici převedte na středový tvar a určete její charakteristické prvky:

- a) $2x^2 + 3y^2 - 12x + 3y + 6,75 = 0$,
- b) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 18y - 23 = 0$,
- c) $x^2 + 16y^2 - 8x = 0$.

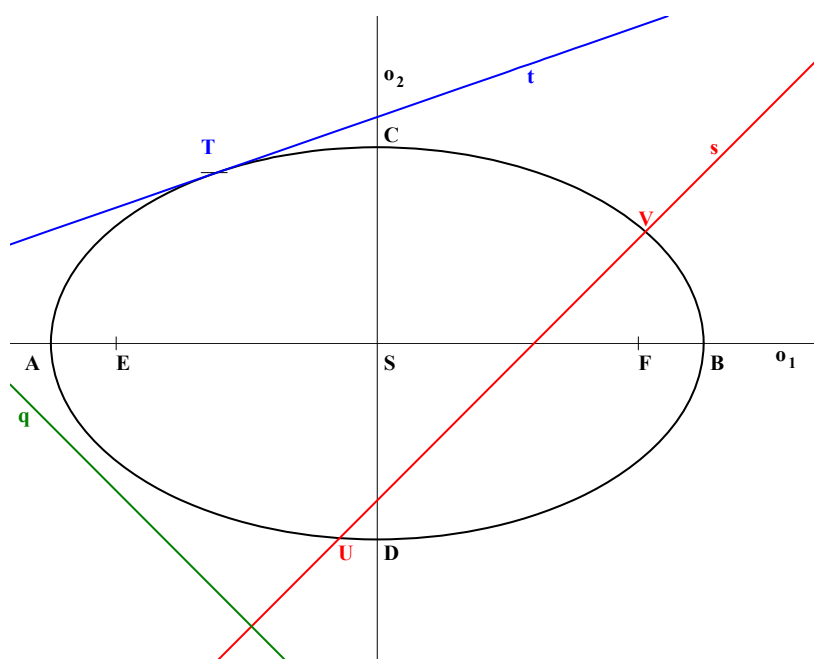
7.4.2. Vzájemná poloha elipsy a přímky

Výklad

Přímka, která má s elipsou společný právě jeden bod, se nazývá **tečna** elipsy.

Přímka, která má s elipsou společné právě dva body, se nazývá **sečna** elipsy.

Přímka, která nemá s elipsou společný žádný bod, se nazývá **vnější přímka** elipsy.



t tečna elipsy,
 T bod dotyku,
 s sečna,
 U, V průsečíky
 sečny s elipsou,
 q vnější přímka.

Je-li $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ středová rovnice elipsy a bod $T[t_1, t_2]$ její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar:

$$t: \frac{(x-m)(t_1-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(t_2-n)}{b^2} = 1.$$

Je-li $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rovnice elipsy a bod $T[t_1, t_2]$ její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar:

$$t: \frac{x t_1}{a^2} + \frac{y t_2}{b^2} = 1.$$

Poznámka

Pro klasifikaci vzájemné polohy přímky a elipsy platí stejné postupy jako u kružnice a přímky, popsané v poznámce.



Řešené úlohy



Příklad 7.4.5. Napište rovnice tečen elipsy $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ v průsečících s přímkou

$$p: 7x - 2y - 50 = 0.$$

Řešení: Nejdříve najdeme průsečíky přímky a elipsy.

Máme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, z druhé rovnice si vyjádříme jednu proměnnou a dosadíme do první rovnice:

$$7x - 2y - 50 = 0 \Rightarrow y = \frac{7x - 50}{2} \quad \text{dosadíme do rovnice elipsy} \quad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{\left(\frac{7x - 50}{2}\right)^2}{25} = 1, \quad \text{umocníme:} \quad \frac{x^2}{100} + \frac{49x^2 - 700x + 2500}{100} = 1,$$

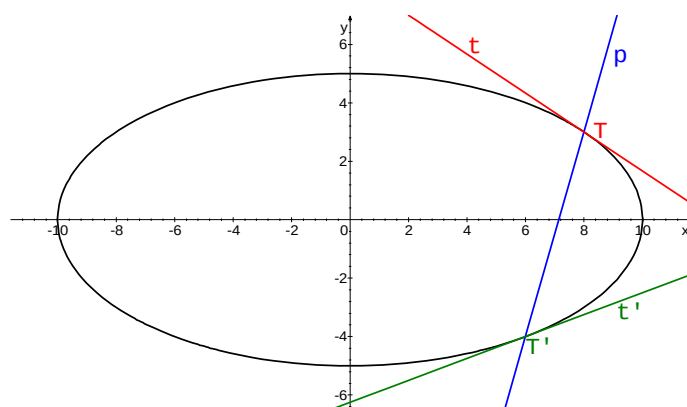
$$\text{po úpravě:} \quad \begin{aligned} x^2 + 49x^2 - 700x + 2500 &= 100, \\ x^2 - 14x + 48 &= 0. \end{aligned}$$

Kořeny rovnice jsou $x = 8, x' = 6$ a po dosazení do $y = \frac{7x - 50}{2}$ dostaneme $y = 3, y' = -4$.

Průsečíky jsou $T[8, 3], T'[6, -4]$.

Tečna v bodě $T[8, 3]$: $t: \frac{8x}{100} + \frac{3y}{25} = 1 \Rightarrow t: 2x + 3y - 25 = 0$.

Tečna v bodě $T'[6, -4]$: $t': \frac{6x}{100} - \frac{4y}{25} = 1 \Rightarrow t': 3x - 8y - 50 = 0$.



Příklad 7.4.6. Napište rovnici tečny k elipse $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ v jejím bodě $T[6, ?]$.

Řešení:

Nejdříve vypočítáme druhou souřadnici bodu dotyku.

$$\frac{(6-2)^2}{25} + \frac{(t_2-3)^2}{9} = 1 \Rightarrow 25t_2^2 - 150t_2 + 144 = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{24}{5}, t_2' = \frac{6}{5}.$$

Budeme mít tedy dva body dotyku

$$T\left[6, \frac{24}{5}\right]$$

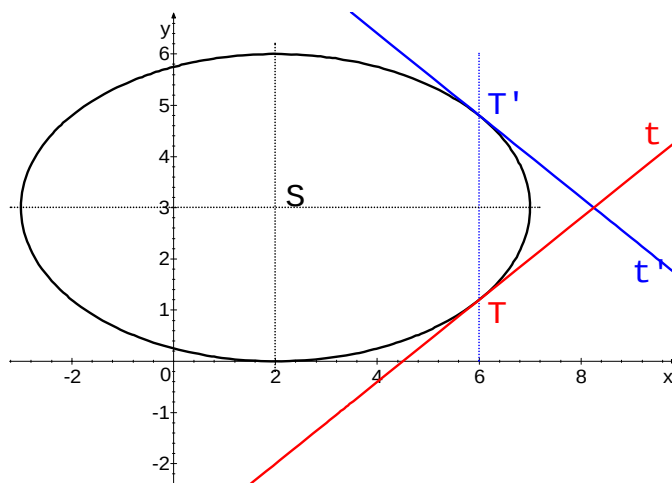
$$T'\left[6, \frac{6}{5}\right] \text{ a dvě tečny}$$

$$t: \frac{(x-2)(6-2)}{25} + \frac{(y-3)\left(\frac{24}{5}-3\right)}{9} = 1,$$

$$t': \frac{(x-2)(6-2)}{25} + \frac{(y-3)\left(\frac{6}{5}-3\right)}{9} = 1,$$

$$t: 4x + 5y - 48 = 0.$$

$$t': 4x - 5y - 18 = 0.$$



Úlohy k samostatnému řešení



37. Napište rovnici tečny elipsy $5(x+2)^2 + 25(y-1)^2 = 100$ v bodě $A[-2, 3]$.

38. Napište rovnici tečen elipsy $4x^2 + 9y^2 = 36$ z bodu $M[15, 10]$. ✖

39. Napište rovnice tečen k elipse $\frac{(x+1)^2}{4} + y^2 = 1$ v průsečících s přímkou

$$m: x = 1 + 2t, y = 2 + t.$$

40. Určete pro které hodnoty parametru $c \in \mathbb{R}$ má přímka $p: y = c$ s elipsou $x^2 + 4y^2 = 36$ právě jeden společný bod, dva společné body, žádný společný bod.

7.5. Hyperbola

7.5.1. Definice hyperboly



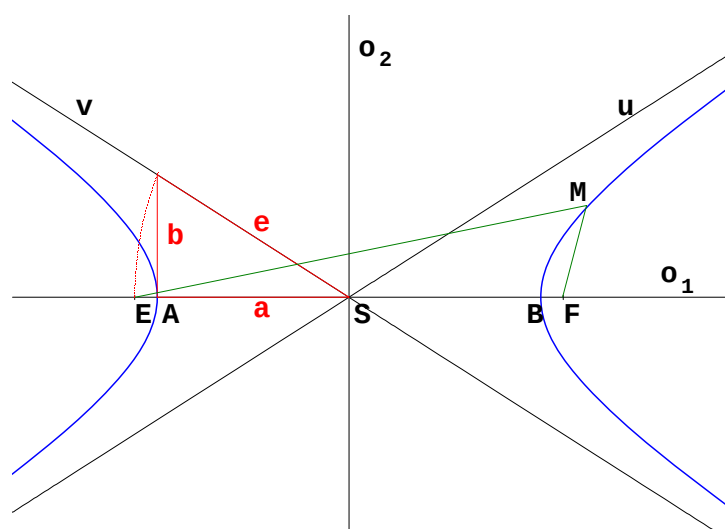
Výklad



Hyperbola je množina všech bodů M v rovině, které mají od dvou různých pevně zvolených bodů (ohnisek E, F) konstantní rozdíl vzdáleností ($2a$), který je menší než vzdálenost ohnisek.

$$||EM| - |FM|| = 2a$$

$$\left| EM \right| - \left| FM \right| = 2a$$



o_1 hlavní osa hyperboly,

A, B hlavní vrcholy hyperboly,

E, F ohniska,

S střed hyperboly,

 u, v asymptoty,
$$a = |AS| = |BS| \quad \text{hlavní poloosa hyperboly,}$$

o_2 vedlejší osa hyperboly,

b vedlejší poloosa hyperboly,

$$e = |FS| = |ES| \quad \text{excentricita (výstřednost) hyperboly}$$

Pro a, b, e platí Pythagorova věta: $a^2 + b^2 = e^2$.

V soustavě souřadnic mějme danu hyperbolu o středu $S[m,n]$, a je hlavní poloosa, b vedlejší poloosa, $EF \parallel x$, pak středový tvar rovnice hyperboly je:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Obecné rovnice asymptot jsou $u: bx - ay + c = 0, v: bx + ay + d = 0$, konstanty c, d se vypočítají dosazením souřadnic středu hyperboly do rovnic asymptot.

Ve směrnicovém tvaru mají asymptoty rovnici: $y - n = \pm \frac{b}{a}(x - m)$.

Je-li střed hyperboly v počátku soustavy souřadnic $S[0,0]$ a ohniska E, F leží na ose x , pak má její středová rovnice tvar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Obecné rovnice asymptot jsou $u: bx - ay = 0, v: bx + ay = 0$.

Ve směrnicovém tvaru mají asymptoty rovnici $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Otočíme-li v soustavě souřadnic o pravý úhel danou hyperbolu o středu $S[m,n]$, hlavní poloosa a , vedlejší poloosa b , pak $EF \parallel y$ a středový tvar rovnice hyperboly bude:

$$\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1.$$

Obecné rovnice asymptot pak jsou $u: ax - by + c = 0, v: ax + by + d = 0$, konstanty c, d se vypočítají dosazením souřadnic středu hyperboly do rovnic asymptot.

Ve směrnicovém tvaru mají asymptoty rovnici $y - n = \pm \frac{a}{b}(x - m)$

Je-li střed hyperboly v počátku soustavy souřadnic, $S[0,0]$, a ohniska E, F leží na ose y , pak má její středová rovnice tvar

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Obecné rovnice asymptot jsou $u: ax - by = 0, v: ax + by = 0$.

Ve směrnicovém tvaru mají asymptoty rovnici $y = \pm \frac{a}{b}x$



Řešené úlohy



Příklad 7.5.1. Obecnou rovnici hyperboly převed'te na středový tvar a určete její charakteristické prvky: $9x^2 - 4y^2 - 8y - 40 = 0$.

Řešení: Rovnici si přepíšeme

$$9x^2 - (4y^2 + 8y) - 40 = 0,$$

ze závorky vytkneme

$$9x^2 - 4(y^2 + 2y) - 40 = 0,$$

výraz v závorce doplníme na druhou mocninu dvojčlenu

$$9x^2 - 4(y^2 + 2y + 1) - 40 = -4,$$

přepíšeme na tvar

$$9x^2 - 4(y + 1)^2 = 36,$$

vydělíme 36 a máme středový tvar rovnice hyperboly $\frac{x^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

Charakteristické prvky hyperboly: $S[0, -1]$, $a = 2$, $b = 3$, $e = \sqrt{13}$, $o_1 // x$.

Rovnice asymptot:

$$u: 3x - 2y - 2 = 0, v: 3x + 2y + 2 = 0.$$

Příklad 7.5.2. Jakou rovnici má přímka, která prochází středy kuželoseček

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0 \text{ a } x^2 - y^2 + 2x + 4y - 12 = 0.$$

Řešení: Musíme nejdříve upravit rovnice na středový tvar, použijeme stejný postup

jako v předchozím příkladě: $(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) + 1 = 0$,

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) = 9 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9 \text{ - jedná se o kružnici.}$$

$$(x^2 + 2x) - (y^2 - 4y) - 12 = 0,$$

$$(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) = 9, \quad \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \text{ - jedná se o hyperbolu.}$$

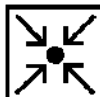
Středy kuželoseček mají souřadnice $S[3, -1]$, $S'[-1, 2]$.

Hledaná přímka má směrový vektor $\vec{s} = S' - S = (-4, 3)$, její normálový vektor

je $\vec{n}(3, 4)$ a obecná rovnice přímky p : $3x + 4y + c = 0$.

Dosadíme souřadnice středu S a dostaneme $3 \cdot 3 + 4(-1) + c = 0 \Rightarrow c = -5$.

Obecná rovnice hledané přímky je $3x + 4y - 5 = 0$.



Úlohy k samostatnému řešení



41. Obecnou rovnici hyperboly převed'te na středový tvar a určete její charakteristické prvky:

a) $9x^2 - 5y^2 + 54x - 10y + 121 = 0$,

b) $2x^2 - y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$,

c) $3x^2 - 2y^2 - 8y - 26 = 0$.

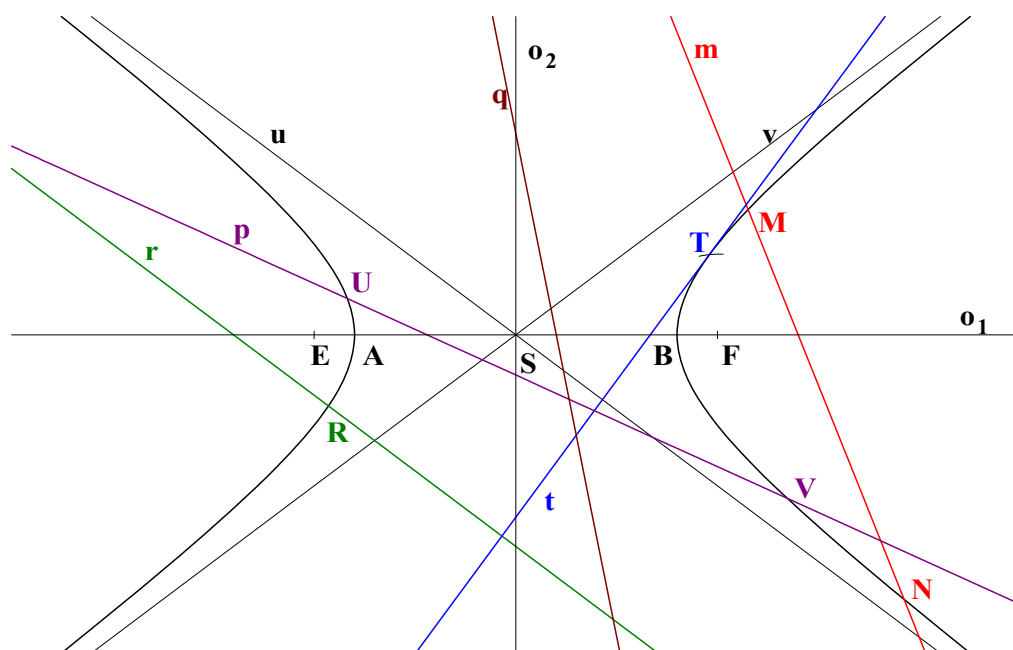
7.5.2. Vzájemná poloha hyperboly a přímky

Výklad

Přímku, která má s hyperbolou společný právě jeden bod a není rovnoběžná s asymptotou, nazveme **tečnou** hyperboly.

Přímku, která má s hyperbolou společné dva body, nebo je rovnoběžná s asymptotou hyperboly, nazveme **sečnou** hyperboly. Sečna rovnoběžná s asymptotou má s hyperbolou společný jeden bod.

Přímku, která nemá s hyperbolou společný žádný bod, nazveme **vnější přímkou** hyperboly.



u, v asymptoty hyperboly,

t tečna hyperboly,

p sečna,

m sečna,

r sečna rovnoběžná s asymptotou,

q vnější přímka.

T bod dotyku,

U, V průsečíky sečny p s hyperbolou,

M, N průsečíky sečny m s hyperbolou,

R průsečík sečny r s hyperbolou,

Je-li $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ rovnice hyperboly a bod $T[t_1, t_2]$ její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar:

$$t: \frac{(x-m)(t_1-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(t_2-n)}{b^2} = 1.$$

Je-li $\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$ rovnice hyperboly a bod $T[t_1, t_2]$ její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar:

$$t: \frac{(y-n)(t_2-n)}{a^2} - \frac{(x-m)(t_1-m)}{b^2} = 1.$$



Řešené úlohy



Příklad 7.5.3. Určete vzájemnou polohu přímky $p: x = 5 + 4t, y = 4 + 5t$ a hyperboly

$$x^2 - y^2 = 9.$$

Řešení:

Dosadíme do rovnice hyperboly parametrické vyjádření přímky, vyřešíme kvadratickou rovnici a podle počtu řešení rozhodneme o vzájemné poloze přímky a hyperboly.

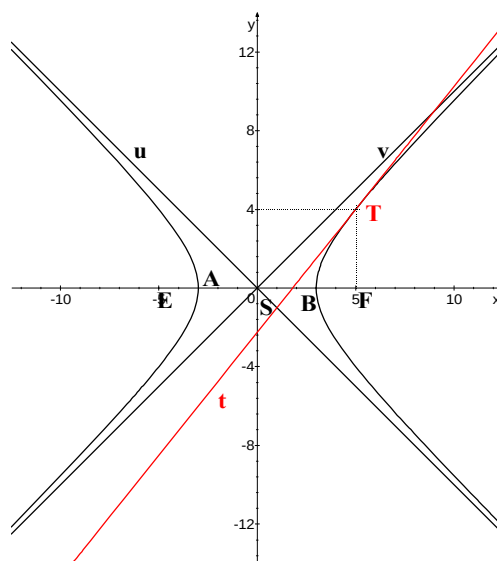
$$(5 + 4t)^2 - (4 + 5t)^2 = 9,$$

$$25 + 40t + 16t^2 - (16 + 40t + 25t^2) = 9,$$

$$9 - 9t^2 = 9,$$

$$t = 0.$$

Úloha má jediné řešení, jde tedy o tečnu, bod dotyku má souřadnice $T[5, 4]$, nebo o sečnu, která je rovnoběžná s jednou asymptotou. Tuto možnost nyní ověříme. Rovnice asymptot jsou $x + y = 0$ a $x - y = 0$, v parametrickém vyjádření $x = t, y = -t$ a $x = t, y = t$, přímka p je s asymptotami různoběžná a jedná se opravdu o tečnu.



Příklad 7.5.4. Napište rovnici tečny hyperboly $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{12} = 1$ v jejím bodě $T[2, ?]$.

Řešení:

Dosadíme danou souřadnici bodu dotyku do rovnice hyperboly a najdeme jeho druhousouřadnici:

$$\frac{(2+2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{12} = 1 \Rightarrow 4 - \frac{(y-3)^2}{12} = 1 \Rightarrow y^2 - 6y - 27 = 0 \Rightarrow y = -3, \quad y = 9.$$

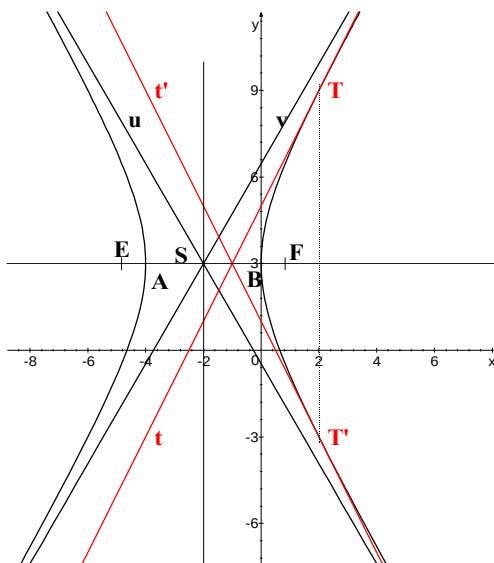
Body dotyku mají souřadnice: $T_1[2, -3]$, $T_2[2, 9]$.

Dosadíme $T_1[2, -3]$ do rovnice tečny t : $\frac{(x+2)(2+2)}{4} - \frac{(y-3)(-3-3)}{12} = 1$.

Po úpravě má tečna rovnici $t_1: 2x + y - 1 = 0$.

Dosadíme $T_2[2, 9]$ do rovnice tečny t : $\frac{(x+2)(2+2)}{4} - \frac{(y-3)(9-3)}{12} = 1$.

Po úpravě má tečna rovnici $t_2: 2x - y + 5 = 0$.



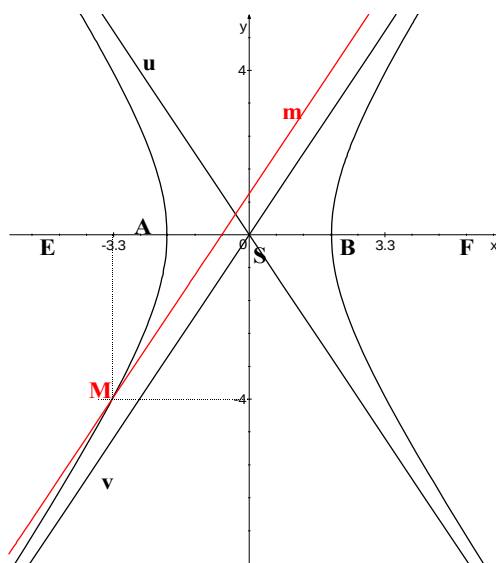
Příklad 7.5.5. Určete vzájemnou polohu přímky $3x - 2y + 2 = 0$ a hyperboly $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Řešení: Z rovnice přímky $3x - 2y + 2 = 0$ si vyjádříme $x = \frac{2y-2}{3}$,

dosadíme do rovnice hyperboly a dostaneme $\frac{\left(\frac{2y-2}{3}\right)^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$,

upravíme na tvar $y^2 - 2y + 1 - y^2 = 9 \Rightarrow 2y = -8 \Rightarrow y = -4$.

Dosadíme do $x = \frac{2y-2}{3}$ a vypočítáme $x = -\frac{10}{3}$. Přímka a hyperbola mají společný právě jeden bod. Mohlo by se jednat o tečnu, ale protože rovnice asymptoty naší hyperboly je $3x - 2y = 0$, pak přímka o rovnici $3x - 2y + 2 = 0$ je s asymptotou rovnoběžná, takže se jedná o sečnu.



Poznámka

V případě tečny vychází po úpravě kvadratická rovnice, která má jeden dvojnásobný kořen a ten je souřadnicí bodu dotyku. Pokud se jedná o sečnu rovnoběžnou s asymptotou, pak dostaneme lineární rovnici a jediné řešení, což je náš případ.



Úlohy k samostatnému řešení



42. Napište rovnici tečny hyperboly $(x+1)^2 - (y-3)^2 = 9$, která prochází bodem $A[-6, -1]$.

43. Určete vzdálenost průsečíků přímky $p: 4x - 3y - 12 = 0$ s hyperbolou $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

44. V průsečících přímky $p: x - y + 1 = 0$ s hyperbolou $(x-3)^2 - y^2 = 16$ sestrojte tečny hyperboly.

7.6. Parabola

7.6.1. Definice paraboly

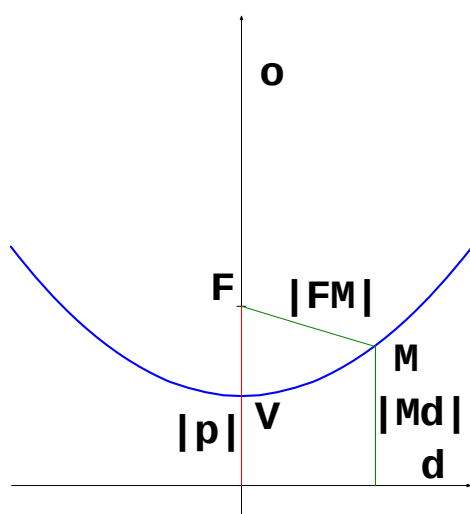


Výklad



Parabola je množina všech bodů M v rovině, které mají od daného pevného bodu (ohniska F) a od dané přímky (řídící přímky d) stejnou vzdálenost.

$$|MF| = d(M, d)$$



F ohnisko paraboly

V vrchol paraboly

d řídící přímka paraboly

p parametr, $|p| = |Fd| = 2|FV|$

V soustavě souřadnic mějme dānu parabolu s vrcholem $V[m, n]$ a parametrem p , $o \parallel y$, pak vrcholový tvar rovnice paraboly je:

$$(x - m)^2 = 2p(y - n).$$

Osa paraboly má rovnici $x - m = 0$. Řídící přímka má rovnici $y - n + \frac{p}{2} = 0$.

Je-li vrchol paraboly v počátku soustavy souřadnic, $V[0, 0]$, pak její vrcholová rovnice má tvar

$$x^2 = 2py.$$

Osa paraboly je totožná s osou y a řídící přímka má rovnici $y = -\frac{p}{2}$.

V soustavě souřadnic mějme dānu parabolu s vrcholem $V[m, n]$ a parametrem p , $o \parallel x$, pak vrcholový tvar rovnice paraboly je:

$$(y - n)^2 = 2p(x - m).$$

Osa paraboly má rovnici $y - n = 0$. Řídící přímka má rovnici $x - m + \frac{p}{2} = 0$.

Je-li vrchol paraboly v počátku soustavy Oxy , $V[0, 0]$, pak její rovnice má tvar $y^2 = 2px$.

Osa paraboly je totožná s osou x a řídící přímka má rovnici $x = -\frac{p}{2}$.

**Řešené úlohy**

Příklad 7.6.1. Určete vrchol, parametr a ohnisko paraboly $y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$.

Řešení:

Obecnou rovnici paraboly upravíme na tvar $y^2 + 6y = 8x + 7$,

výraz na levé straně rovnice upravíme doplněním 9 na druhou mocninu dvojčlenu

$$y^2 + 6y + 9 = 8x + 7 + 9,$$

přepíšeme na mocninu a z pravé strany vytkneme $(y + 3)^2 = 8(x + 2)$.

Vrchol paraboly je $V[-2, -3]$, parametr $p = 4$, osa $o//x$, ohnisko $F[0, -3]$, řídící přímka má rovnici $x = -4$.

Příklad 7.6.2. Určete vrchol, parametr a ohnisko paraboly $2x^2 - 8x + 12y - 16 = 0$.

Řešení:

Zápis rovnice si upravíme na tvar $2x^2 - 8x = -12y + 16$,

z levé strany vytkneme 2 a doplníme výraz v závorce na druhou mocninu dvojčlenu

$$2(x^2 - 4x + 4) = -12y + 16 + 8,$$

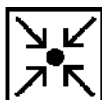
přepíšeme na mocninu a z pravé strany vytkneme $2(x - 2)^2 = -12(y - 2)$,

rovnici vydělíme 2 a máme vrcholovou rovnici $(x - 2)^2 = -6(y - 2)$.

Vrchol paraboly je $V[2, 2]$, $p = 3$, osa $o//y$, $F[2, \frac{7}{2}]$, rovnice řídící přímky $y = \frac{1}{2}$.

**Poznámka**

Parametr p určuje, jak moc je parabola „otevřená“ či „uzavřená“. Znaménko u parametru označí směr „otevření“ paraboly (vpravo, vlevo, nahoru, dolů).

**Úlohy k samostatnému řešení**

45. Obecnou rovnici paraboly převed'te na vrcholový tvar a určete její charakteristické prvky:

a) $3x^2 + 36x - y + 108 = 0$,

b) $x^2 + 10x - 4y + 37 = 0$,

c) $3y^2 - x - 12y + 18 = 0$.

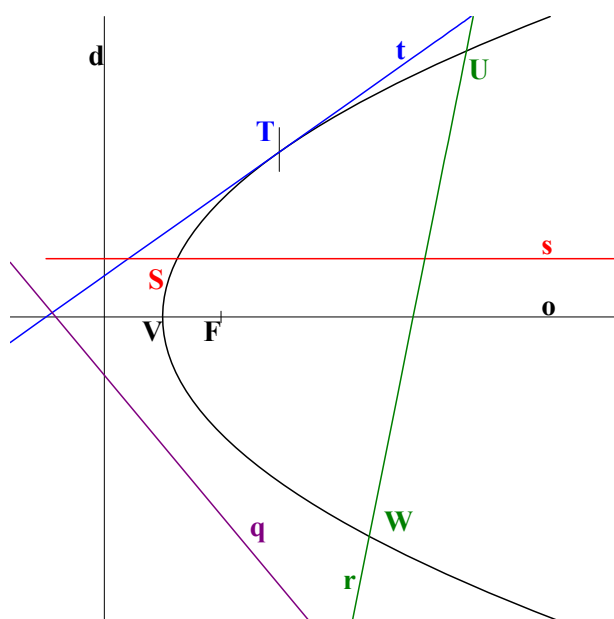
7.6.2. Vzájemná poloha paraboly a přímky

Výklad

Přímka, která má s parabolou společný právě jeden bod a není rovnoběžná s osou paraboly, se nazývá **tečna** paraboly.

Přímka, která má s parabolou společné právě dva body, nebo je rovnoběžná s osou paraboly, se nazývá **sečna** paraboly. Sečna rovnoběžná s osou paraboly má s parabolou společný jeden bod.

Přímka, která nemá s parabolou společný žádný bod, se nazývá **vnější přímka** paraboly.



t	tečna paraboly
T	bod dotyku
r	sečna
U, W	průsečíky sečny r s parabolou
s	sečna rovnoběžná s osou paraboly
S	průsečík sečny s s parabolou
q	vnější přímka paraboly

Je-li $(x-m)^2 = 2p(y-n)$ vrcholový tvar rovnice paraboly, $o \parallel y$, bod $T[t_1, t_2]$ je její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar

$$t: (x-m)(t_1-m) = p(y+t_2-2n).$$

Je-li vrcholová rovnice paraboly ve tvaru $x^2 = 2py$ a bod $T[t_1, t_2]$ její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar

$$t: xt_1 = p(y+t_2).$$

Je-li $(y-n)^2 = 2p(x-m)$ vrcholový tvar rovnice paraboly, $o \parallel x$, bod $T[t_1, t_2]$ je její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar

$$t: (y-n)(t_2-n) = p(x+t_1-2m).$$

Je-li vrcholová rovnice paraboly ve tvaru $y^2 = 2px$ a bod $T[t_1, t_2]$ její bod, pak rovnice tečny v bodě T má tvar

$$t: yt_2 = p(x+t_1).$$



Řešené úlohy



Příklad 7.6.3. Napište rovnici tečny paraboly $(x+1)^2 = 3(y-2)$ v bodě $T[2, 5]$.

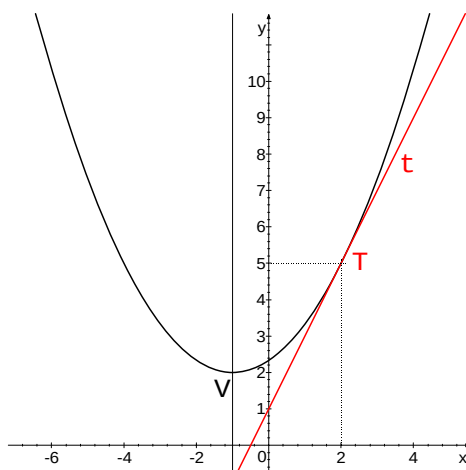
Řešení:

Nejprve si ověříme, že bod T je bodem paraboly: $(2+1)^2 = 3 \cdot 3 \Rightarrow 9 = 9$,

bod T je bodem paraboly, jeho souřadnice vyhovují rovnici paraboly.

Dosadíme do rovnice tečny $(x+1)(2+1) = \frac{3}{2}(y+5-4)$

a upravíme na tvar $t : 2x - y + 1 = 0$.



Příklad 7.6.4. Určete vzájemnou polohu paraboly $x^2 = 4y$ a přímky $x - 2y + 4 = 0$.

Řešení:

Z rovnice přímky si vyjádříme $x = 2y - 4$ a dosadíme do rovnice paraboly $x^2 = 4y$.

$$(2y - 4)^2 = 4y \Rightarrow 4y^2 - 16y + 16 = 4y,$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow D > 0.$$

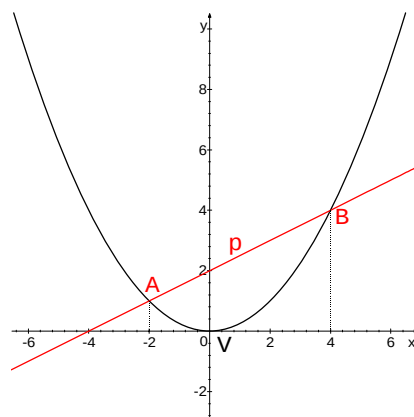
Kořeny jsou dva, $y = 1, y' = 4$,

dopočítáme x , $x = -2, x' = 4$.

Přímka parabolu protíná v bodech

$$A[-2, 1], B[4, 4].$$

Přímka je sečnou.





Úlohy k samostatnému řešení



- 46.** Napište rovnici tečny paraboly $(x-2)^2 = y+25$ v bodě $A[5;-16]$.
- 47.** Je dána parabola $y^2 = 4x$ a přímka $x - y - 3 = 0$, určete délku tětiny, kterou přímka vytíná na parabole.
- 48.** Napište rovnice tečen paraboly $(x+3)^2 = -2(y-4)$ v průsečících s přímkou $k: x - y + 7 = 0$.
- 49.** Určete hodnotu parametru $p \in \mathbb{R}$ tak, aby přímka $x + 2y - 1 = 0$ byla tečnou paraboly $y^2 = 2px$.
- 50.** Nejprve proveďte odhad, jakou kuželosečku může daná rovnice vyjadřovat. Potom úpravou na středový (vrcholový) tvar rozhodněte, zda odhad byl správný. Určete charakteristické prvky kuželosečky:
- $2x^2 + 3y^2 + 12x - 6y + 9 = 0$,
 - $y^2 - 4x + 4 = 0$,
 - $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$,
 - $x^2 - 2y^2 + 4x + 12y - 23 = 0$,
 - $x^2 - 2x - 5y + 2 = 0$,
 - $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$,
 - $7x^2 + 5y^2 - 14x - 10y + 18 = 0$.



Výsledky úloh k samostatnému řešení



- 1.** a) 12; b) 8. **2.** $\sqrt{65}$. **3.** $|\vec{a}| = \sqrt{20}, |\vec{b}| = 4, \varphi = 63^\circ 26'$.
- 4.** $p: 2x + 3y - 6 = 0$. **5.** $t_a: x - 7y + 35 = 0$, $t_b: 5x - 11y + 47 = 0$, $t_c: x - y + 3 = 0$.
- 6.** neleží. **7.** $-2x + 3y + 11 = 0$. **8.** $3x + 5y + 17 = 0$. **9.** $4x + y - 4 = 0$.
- 10.** $X = [5, 1] + t(-2, 3); x = 5 - 2t, y = 1 + 3t, t \in \mathbb{R}$. **11.** ano. **12.** $p: 5x + 4y - 23 = 0$.
- 13.** $x = 7t, y = 2 + 2t, t \in \mathbb{R}$. **14.** $x = -4 + 2t, y = 2 - t, t \in \mathbb{R}$.

15. a) $p \equiv q$; b) $p \parallel q$; c) $p \times q, R[1,1]$. **16.** a) $a \equiv b$; b) $a \parallel b$; c) $a \times b, R[3,-2]$.

17. a) $k \equiv l$; b) $k \parallel l$; c) $k \times l, K[1,0]$. **18.** $63^\circ 26'$. **19.** $42^\circ 16'$. **20.** $11^\circ 19'$.

21. $k: 5x + 2y - 7 = 0$. **22.** $m = -2$. **23.** $M'[-5,2]$. **24.** $\frac{36}{5}$

25. $x - y - 3 = 0, x - y + 5 = 0$. **26.** $\sqrt{5}$.

27. a) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 144, S[3,-4], r = 12$.

b) $(x+7)^2 + (y-1)^2 = 81, S[-7,1], r = 9$.

c) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25, S[4,3], r = 5$. **28.** $t: 4x - 3y - 21 = 0$.

29. $t: 2x + y - 26 = 0, t': 2x + y + 24 = 0$. **30.** $t: 3x + 2y - 28 = 0, t': 3x + 2y + 24 = 0$.

31. přímka je sečnou, průsečíky $P_1[4, 6], P_2[1, -3]$.

32. $|k| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ sečna, $|k| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ tečna, $|k| > \frac{\sqrt{3}}{3}$ vnější přímka.

33. $x^2 + (y-4)^2 = 16$. **34.** $(x-9)^2 + (y-6)^2 = 25$. **35.** $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$.

36. a) $\frac{(x-3)^2}{6} + \frac{(y+0,5)^2}{4} = 1, S[3;-0,5], a = \sqrt{6}, b = 2, e = \sqrt{2}$.

b) $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1, S[-1,1], a = 3, b = 2, e = \sqrt{5}$.

c) $\frac{(x-4)^2}{16} + y^2 = 1, S[4,0], a = 4, b = 1, e = \sqrt{15}$.

37. $y = 3$. **38.** $t_1: 8x - 9y - 30 = 0, t_2: x - 2y + 5 = 0$. **39.** $t_1: y = 1, t_2: x = -3$.

40. $|c| < 3$ sečna, $|c| = 3$ tečna, $|c| > 3$ vnější přímka elipsy.

41. a) $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{5} = 1, S[-3,-1], a = \sqrt{5}, b = 3, o_1 \parallel y,$

rovnice asymptot $u: 3x - \sqrt{5}y + 9 - \sqrt{5} = 0, v: 3x + \sqrt{5}y + 9 + \sqrt{5} = 0$.

b) $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{8} = 1, S[1,1], a = 2, b = 2\sqrt{2}, o_1 \parallel x, e = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{3},$

$$u: \sqrt{2}x - y - \sqrt{2} + 1 = 0, \quad v: \sqrt{2}x + y - \sqrt{2} - 1 = 0.$$

$$c) \frac{x^2}{6} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1, \quad S[0, -2], a = \sqrt{6}, b = 3, o_1 \parallel x, e = \sqrt{15},$$

$$u: 3x - \sqrt{6}y - 2\sqrt{6} = 0, \quad v: 3x + \sqrt{6}y + 2\sqrt{6} = 0.$$

$$42. \quad 5x - 4y + 26 = 0. \quad 43. \quad \frac{10}{3}. \quad 44. \quad t: x = -1.$$

$$45. \quad a) \quad (x+6)^2 = \frac{1}{3}y, \quad V[-6, 0], \quad p = \frac{1}{6}, \quad o \parallel y. \quad b) \quad (x+5)^2 = 4(y-3), \quad V[-5, 3], \quad p = 2,$$

$$c) \quad (y-2)^2 = \frac{1}{3}(x-6), \quad V[6, 2], \quad p = \frac{1}{6}, \quad o \parallel x.$$

$$46. \quad 6x - y - 46 = 0. \quad 47. \quad 8\sqrt{2}. \quad 48. \quad y = 4, 2x - y + 12 = 0. \quad 49. \quad p = -\frac{1}{2}.$$

$$50. \quad a) \quad \text{elipsa}, \quad S[-3, 1], \quad a = \sqrt{6}, \quad b = 2, \quad e = \sqrt{2},$$

$$b) \quad \text{parabola}, \quad V[1, 0], \quad p = 2, \quad F[2, 0], \quad d: x = 0, \quad o \parallel x,$$

$$c) \quad \text{bod } [-2, 3],$$

$$d) \quad \text{hyperbola}, \quad S[-2, 3], \quad a = 3, \quad b = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \quad e = \frac{3}{2}\sqrt{6},$$

$$e) \quad \text{parabola}, \quad V[1, \frac{1}{5}], \quad p = \frac{5}{2}, \quad d: y = -\frac{21}{20}, \quad o \parallel y$$

$$f) \quad \text{kružnice}, \quad S[0, 1], \quad r = 2$$

$$g) \quad \text{neexistuje bod, jehož souřadnice by splňovaly danou rovnici.}$$



Klíč k řešení úloh



1. Dosadíme do vzorce pro skalární součin: a) $\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi$, b) $\vec{u}\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$,
2. Dosadíme do vzorce pro vzdálenost dvou bodů: a) $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$,
3. Dosadíme do vzorce pro velikost vektoru: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ a pro odchylku $\cos\varphi = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.
4. Souřadnice bodů dosadíme do obecné rovnice přímky, dostaneme soustavu dvou rovnic o třech neznámých a, b, c .

$$2b + c = 0$$

$$3a + c = 0$$

Za jednu z nich si dosadíme nenulovou konstantu, např. $a = 2$, a zbylé dvě dopočítáme.

$$2b + c = 0 \Rightarrow b = 3$$

$$6 + c = 0 \Rightarrow c = -6$$

Nyní jen dosadíme do obecné rovnice přímky.

5. Nejdříve vypočítáme středy stran: $A' = \frac{B+C}{2} = \left[\frac{7}{2}, \frac{11}{2} \right]$, $B' = \frac{A+C}{2} = \left[\frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right]$,

$C' = \frac{B+A}{2} = [3, 6]$. Body A, A' určují těžnici t_a , B, B' určují t_b a C, C' určují t_c . Jejich rovnice určíme stejně jako obecnou rovnici přímky v úloze 4.

- 6.** Aby bod ležel na přímce, musí jeho souřadnice splňovat rovnici přímky, dosadíme tedy souřadnice bodu do rovnice přímky a vyjde-li $0 = 0$, je bod bodem přímky. V opačném případě na ní neleží.
- 7.** Souřadnice normálového vektoru dosadíme do obecné rovnice přímky $ax + by + c = 0$ tak, aby $a = -2, b = 3$. Po té dosadíme do rovnice bod A a vypočítáme c .
- 8.** Využijeme vlastnosti, že rovnoběžné přímky mají rovnoběžné (stejně) normálové vektory. $p: 3x + 5y + c = 0$, konstantu c vypočítáme dosazením bodu K do této rovnice.
- 9.** Využijeme vlastnosti, že normálový vektor kolmice je zároveň směrovým vektorem přímky p . $p: 4x + y + c = 0$, konstantu c vypočítáme dosazením bodu R do této rovnice.
- 10.** Vypočítáme souřadnice směrového vektoru $\vec{u} = B - A = (u_1, u_2)$ a dosadíme do obou rovnic.
- 11.** Leží-li bod na přímce, pak musí splňovat rovnici $[-4, 2] = [1, -13] + t(-1, 3)$. Tu rozepíšeme do soustavy a pokud vyjde jediné řešení, pak bod na přímce leží, v opačném případě na ní neleží.
- 12.** Z parametrických rovnic získáme souřadnice bodu $[3, 2]$ a směrového vektoru $(4, -5)$, z něj pak normálový vektor $(5, 4)$ a dosadíme do obecné rovnice přímky. Nebo vyloučíme ze soustavy parametr t .

13. Normálový vektor má souřadnice $\vec{n} = (-2, 7)$, z něj budeme mít směrový vektor $(7, 2)$.

Bod si na přímce vybereme, jednu jeho souřadnici zvolíme, např. $x = 0$, dosadíme do rovnice a vypočítáme y .

14. Využijeme vlastnosti, že normálový vektor přímky q je směrovým vektorem

přímky p , tzn. $\vec{n}_q = (2, -1) = \vec{u}_p$.

15.a) Porovnáme normálové vektory, jsou-li lineárně závislé, prověříme, zda není jedna rovnice násobkem druhé. Pokud je, jsou totožné.

b) Porovnáme normálové vektory, jsou-li lineárně závislé, prověříme, zda není jedna rovnice násobkem druhé. Pokud nejsou, jsou rovnoběžné.

c) Porovnáme normálové vektory, nejsou-li lineárně závislé, jsou přímky různoběžné a najdeme jejich průsečík vyřešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých.

16.a) Dosadíme za x a y přímky a rovnice přímky b . Budeme mít jednu rovnici o jedné neznámé, vyjde-li $0 = 0$, pak jsou přímky totožné.

b) Dosadíme za x a y přímky a rovnice přímky b . Budeme mít jednu rovnici o jedné neznámé, vyjde-li $10 = 0$ nebo jiný nesmysl, pak jsou přímky rovnoběžné.

c) Dosadíme za x a y přímky a rovnice přímky b . Budeme mít jednu rovnici o jedné neznámé, vyjde-li $t = k$ (k je nějaké reálné číslo), pak jsou přímky různoběžné a najdeme jejich průsečík.

17.a) Porovnáním proměnných x a y dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, má-li nekonečně mnoho řešení, jsou přímky totožné.

b) Porovnáním proměnných x a y dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, nemá-li žádné řešení, jsou přímky rovnoběžné.

c) Porovnáním proměnných x a y dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, má-li jediné řešení, jsou přímky různoběžné a najdeme jejich průsečík.

18. Z obecných rovnic získáme normálové vektory $\vec{n} = (3, -4)$, $\vec{n}' = (1, 2)$ a dosadíme do

$$\text{vzorce: } \cos \alpha = \frac{|\vec{n}\vec{n}'|}{|\vec{n}||\vec{n}'|}.$$

19. Body nám určí směrové vektory $\vec{u} = B - A = (2, -3)$, $\vec{v} = L - K = (4, -1)$ obou přímek,

dosadíme do vzorce: $\cos \alpha = \frac{|\vec{u}\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.

20. Najdeme souřadnice směrových vektorů $\vec{s} = (1, 3)$, $\vec{s}' = (-4, -7)$ a dosadíme do vzorce:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u}\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

21. Využijeme vztahu: kolmé přímky mají kolmé normálové vektory nebo normálový vektor jedné přímky je směrovým vektorem kolmice. $k: 5x + 2y + c = 0$, konstantu c vypočítáme dosazením bodu A do této rovnice.

22. Kolmé přímky mají kolmé normálové vektory a proto platí: $\vec{n}\vec{n}' = 0$.

23. Bodem M vedeme přímku kolmou k přímce p , normálový vektor přímky p je směrovým vektorem kolmice, $k: x = 1 + 3t, y = -2 - 2t$. Pak jen dopočítáme průsečík přímek p a k .

24. Parametrické rovnice přímky převedeme na obecnou rovnici a pak dosazením do vzorce

$$d(H, b) = \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ získáme hledanou vzdálenost.}$$

25. Nejlepším návodem bude dobře prostudovat **Příklad 7.2.18.**

26. Na jedné přímce si zvolíme bod, např. $A[-9, 0] \in q$ a vypočítáme jeho vzdálenost do

druhé přímky pomocí vzorce: $d(A, p) = \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

27. a) Rovnici $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 119 = 0$ upravíme na středový tvar tak, že výrazy $x^2 - 6x$ a $y^2 + 8y$ doplníme na druhou mocninu dvojčlenu.

Dostaneme $(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) - 9 - 16 - 119 = 0$ a odtud středový tvar rovnice kružnice je $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 144$, $S[3, -4]$ a $r = 12$.

27. b) a c) budeme postupovat jako v úloze **27. a)**.

28. Ověříme, zda je bod A bodem kružnice. Pak pouze dosadíme do rovnice tečny kružnice

$$t: (x-m)(t_1-m) + (y-n)(t_2-n) = r^2 \text{ a upravíme ji.}$$

$$t: (x-2)(6-2) + (y-4)(1-4) = 25 \Rightarrow t: 4x - 3y - 21 = 0.$$

29. Prostudujte si **Příklad 7.3.7.**. Body dotyku budou mít souřadnice $T_1[9, 8], T_2[-11, -2]$.

30. Prostudujte si **Příklad 7.3.7.** a poznámku, která za ním následuje. Body dotyku budou mít souřadnice $T_1[8, 2], T_2[-4, -6]$.

31. Rovnice kružnice $k: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$, $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 9)$, přímku si vyjádříme v parametrickém tvaru $p: x = 2 + 3t, y = 9t$ a dosadíme do rovnice kružnice. Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $9t^2 - 3t - 2 = 0$, která má dva reálné kořeny

$$t_1 = \frac{2}{3}, t_2 = -\frac{1}{3}. \text{ Dosadíme je postupně do parametrického vyjádření přímky a získáme}$$

tak souřadnice průsečíků $P_1[4, 6], P_2[1, -3]$. Přímka je sečnou.

32. Rovnici přímky dosadíme do rovnice kružnice a po úpravě získáme rovnici

$$x^2(1+k^2) - 2x(k^2-1) + k^2 = 0, \text{ která má diskriminant } D = 4(k^2-1)^2 - 4k^2(1+k^2).$$

Po úpravě položíme $D = 0$, to znamená: $-3k^2 + 1 = 0 \Rightarrow 3k^2 = 1 \Rightarrow |k| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$|k| < \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ sečna, } |k| = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ tečna, } |k| > \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ vnější přímka kružnice.}$$

33. Nejdříve vypočítáme průsečíky přímky a zadané kružnice (budeme řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jedna rovnice je kvadratická). $B[0, 0], C[-4, 4]$

Nyní vezmeme všechny tři body, které máme a postupně je dosadíme do rovnice kružnice. Dostaneme soustavu tří kvadratických rovnic o třech neznámých m, n, r .

$$m^2 + n^2 = r^2,$$

$$(-4-m)^2 + (4-n)^2 = r^2,$$

$$(4-m)^2 + (4-n)^2 = r^2.$$

Malou nápovědu získáte v **Příkladu 7.3.8.**, tam byly dány dva body.

34. Leží-li dva body na kružnici, dosazením souřadnic bodů do rovnice kružnice získáme dvě rovnice o třech neznámých, použijeme opět **Příklad 7.3.8.** jako nápovědu.

Střed leží na přímce p , musí pro jeho souřadnice platit $3m - 4n - 3 = 0$. To je třetí rovnice. Soustavu vyřešíme.

$$(12 - m)^2 + (10 - n)^2 = r^2,$$

$$(6 - m)^2 + (2 - n)^2 = r^2,$$

$$3m - 4n - 3 = 0.$$

35. Pro bod na ose prvního kvadrantu platí, že $y = x \wedge x \geq 0$, protože se jedná o střed kružnice, jsou jeho souřadnice $S[m, m]$. Tento bod musí mít stejnou vzdálenost od obou přímek.

$$\frac{|3m + 4m + 6|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-5m + 12m + 38|}{\sqrt{25 + 144}}, \text{ protože je } m \geq 0, \text{ odstraníme absolutní hodnotu a}$$

$$\text{rovnici vyřešíme, tzn. } \frac{7m + 6}{5} = \frac{7m + 38}{13} \Rightarrow 13(7m + 6) = 5(7m + 38) \Rightarrow 56m = 112 \Rightarrow$$

$$m = 2, \text{ pak } r = 4.$$

36. a) Rovnici $2x^2 + 3y^2 - 12x + 3y + 6,75 = 0$ upravíme na středový tvar tak, že výrazy $2x^2 - 12x$ a $3y^2 + 3y$ doplníme na druhé mocniny dvojčlenů.

$$\text{Dostaneme } 2\left(x^2 - 6x + 9\right) + 3\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) - 18 - \frac{3}{4} + 6,75 = 0 \text{ a odtud}$$

$$2(x - 3)^2 + 3\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = 12. \text{ Rovnici vydělíme 12 a dostaneme středový tvar rovnice}$$

$$\text{elipsy: } \frac{(x - 3)^2}{6} + \frac{(y + 0,5)^2}{4} = 1, \text{ střed } S[3; -0,5], \text{ hlavní poloosa } a = \sqrt{6}, b = 2,$$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2}.$$

36. b) a c) budeme postupovat jako v úloze **36 a)**.

37. Ověříme, že bod A leží na elipse, její rovnici převedeme na středový tvar

$$\frac{(x + 2)^2}{20} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1,$$

a pak dosadíme do rovnice tečny elipsy

$$t: \frac{(x - m)(t_1 - m)}{a^2} + \frac{(y - n)(t_2 - n)}{b^2} = 1.$$

38. Hledaná tečna má rovnici: $t: \frac{xt_1}{9} + \frac{yt_2}{4} = 1$.

Bod $M[15, 10]$ je bodem tečny. Dosadíme ho tedy a dostaneme rovnici: $\frac{15t_1}{9} + \frac{10t_2}{4} = 1$.

Toto je rovnice tečny a ta má s elipsou společný právě jeden bod. Tento bod dotyku budeme nyní hledat.

Z rovnice vyjádříme jednu neznámou: $t_1 = \frac{6-15t_2}{10}$ a dosadíme do rovnice elipsy

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \text{ za } x, \text{ za } y \text{ dosadíme } t_2,$$

$$4\left(\frac{6-15t_2}{10}\right)^2 + 9t_2^2 = 36.$$

Rovnici upravíme a dostaneme: $25t_2^2 - 10t_2 - 48 = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{8}{5}, t_2' = -\frac{6}{5}$.

$$t_1 = \frac{6-15t_2}{10} = -\frac{9}{5} \Rightarrow T\left[-\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right],$$

$$t_1' = \frac{6-15t_2}{10} = \frac{12}{5} \Rightarrow T'\left[\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\right]. \text{ Získali jsme body dotyku tečen.}$$

Nyní v těchto bodech zjistíme rovnice tečen a napíšeme jejich rovnice:

$$t_1: 8x - 9y - 30 = 0, t_2: -x + 2y - 5 = 0.$$

39. Najdeme průsečíky přímky s elipsou $T_1[-1, 1], T_2[-3, 0]$ a v nich hledané tečny.

40. Do rovnice elipsy dosadíme rovnici přímky a dostaneme $x^2 + 4c^2 - 36 = 0$.

$$\text{Diskriminant } D = -4(4c^2 - 36), D = 0 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow |c| = 3$$

$$|c| < 3 \text{ sečna, } |c| = 3 \text{ tečna, } |c| > 3 \text{ vnější přímka elipsy.}$$

41. a) Rovnici $9x^2 - 5y^2 + 54x - 10y + 121 = 0$ upravíme na středový tvar tak, že výrazy

$$9x^2 + 54x \text{ a } 5y^2 + 10y \text{ doplníme na druhé mocniny dvojčlenů.}$$

$$\text{Dostaneme } 9(x^2 + 6x + 9) - 5(y^2 + 2y + 1) - 81 + 5 + 121 = 0 \text{ a odtud}$$

$$9(x+3)^2 - 5(y+1)^2 = -45. \text{ Rovnici vydělíme } -45 \text{ a dostaneme středový tvar rovnice}$$

hyperboly: $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{5} = 1$ se středem $S[-3, -1]$, hlavní osa je rovnoběžná s osou y a vedlejší osa je rovnoběžná s osou x . Její poloosy mají proto velikost $a = 3, b = \sqrt{5}$.
 Rovnice asymptot jsou $u: 3x - \sqrt{5}y + 9 - \sqrt{5} = 0, v: 3x + \sqrt{5}y + 9 + \sqrt{5} = 0$.

41. b) a c) stejný postup jako v úloze a).

42. Ověříme, že bod A patří hyperbole a najdeme v něm tečnu dosazením do rovnice:

$$t: \frac{(y-n)(t_2-n)}{a^2} - \frac{(x-m)(t_1-m)}{b^2} = 1.$$

43. Najdeme průsečíky přímky s hyperbolou $A[3, 0], B\left[5, \frac{8}{3}\right]$, jejich vzdálenost spočítáme

$$\text{podle vzorce: } |AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

44. Průsečík přímky $y = x + 1$ s danou hyperbolou je jeden $R[-1, 0]$, ale to je zároveň hlavní vrchol hyperboly A , proto rovnice tečny je $x = -1$, je to vrcholová tečna.

45. a) Rovnici paraboly $3x^2 + 36x - y + 108 = 0$ upravíme na vrcholový tvar: $(x+6)^2 = \frac{1}{3}y$.

Vrchol má souřadnice $V[-6, 0]$, parametr $p = \frac{1}{6}$.

b) a c) postup podobný jako a).

46. Ověříme, že bod A leží na parabole a pak jeho souřadnice dosadíme do rovnice tečny:

$$t: (x-m)(t_1-m) = p(y+t_2-2n), \text{ tj. } (x-2)(5-2) = \frac{1}{2}(y-16+50).$$

47. Tětiva je část sečny, která leží uvnitř paraboly. Musíme najít průsečíky přímky s parabolou $A[1, -2], B[9, 6]$ a pak spočítat jejich vzdálenost podle vzorce:

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

48. Najdeme průsečíky přímky s parabolou, $A[-3, 4], B[-5, 2]$, a dosadíme do rovnice tečny.

$$t_A: y = 4, \quad t_B: 2x - y + 12 = 0.$$

- 49.** Obecnou rovnici přímky převedeme na směrnicový tvar $y = -\frac{1}{2}(x-1)$ a porovnáme se zápisem rovnice tečny paraboly $yt_2 = p(x+t_1)$, takže $t_2 = 1$, $p = -\frac{1}{2}$ a $t_1 = -1$.

Ověříme, že bod dotyku $T[-1, 1]$ je bodem tečny i paraboly.

- 50.** a) Rovnici upravíme na středový tvar tak, že výrazy $2x^2 + 12x$ a $3y^2 - 6y$

doplníme na druhé mocniny dvojčlenů.

Dostaneme $2(x^2 + 6x + 9) - 18 + 3(y^2 - 2y + 1) - 3 + 9 = 0$ a odtud

$$2(x+3)^2 + 3(y-1)^2 = 12.$$

Rovnici vydělíme 12 a dostaneme středový tvar rovnice elipsy $\frac{(x+3)^2}{6} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

Z rovnice určíme charakteristické prvky elipsy uvedené ve výsledku.

b) Vrcholová rovnice paraboly $y^2 = 4(x-1)$.

c) Rovnici upravíme následovně: $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = -13 + 4 + 9 \Rightarrow$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 0, \text{ této rovnici vyhovují pouze souřadnice bodu } [-2, 3].$$

d) Jedná se o rovnici hyperboly, protože kvadratické členy mají opačná znaménka a upravíme její rovnici takto: $x^2 + 4x + 4 - 2(y^2 - 6y + 9) = 23 + 4 - 18$,

$$(x+2)^2 - 2(y-3)^2 = 9 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{\frac{9}{2}} = 1, \text{ střed } S[-2, 3], a = 3, b = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

e) Rovnici si zapíšeme do tvaru $x^2 - 2x = 5y - 2$, výraz na levé straně doplníme na mocninu dvojčlenu $x^2 - 2x + 1 = 5y - 2 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 5y - 1$.

Jedná se o rovnici paraboly, její vrcholový tvar bude $(x-1)^2 = 5(y - \frac{1}{5})$.

Vrchol paraboly $V[1, \frac{1}{5}]$, $p = \frac{5}{2}$, $o \parallel y$, $d: y = n - \frac{p}{2} = \frac{1}{5} - \frac{5}{4} = -\frac{21}{20}$.

f) Po úpravě dostaneme středový tvar rovnice kružnice $x^2 + (y-1)^2 = 4$.

g) Po úpravě doplněním dvojčlenů na druhé mocniny dostaneme rovnici

$$7(x-1)^2 + 5(y-1)^2 = -6, \text{ součet druhých mocnin se nemůže rovnat zápornému číslu,}$$

proto neexistuje žádný bod, jehož souřadnice by splňovaly danou rovnici.

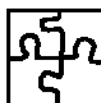
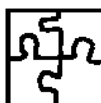
**Kontrolní otázky**

1. Co je orientovaná úsečka a volný vektor?
2. Jak vypočítáte velikost vektoru?
3. Jak vypočítáte skalární součin dvou vektorů?
4. Jak vypočítáte odchylku dvou vektorů?
5. Co platí pro skalární součin kolmých vektorů?
7. Jak poznáte kolineární vektory?
8. Jak zapíšete obecnou rovnici přímky?
9. Jak zapíšete parametrické rovnice přímky?
10. Co platí pro směrový a normálový vektor přímky?
11. Jaká je vzájemná poloha dvou přímek v rovině?
12. Jak vypočítáte odchylku dvou přímek?
13. Jak vypočítáte vzdálenost dvou bodů?
14. Jak vypočítáte vzdálenost bodu od přímky?
15. Jak vypočítáte vzdálenost dvou rovnoběžek?
16. Definujte kružnici, zapíšte středovou rovnici kružnice.
17. Co je to tečna kružnice? Zapište její rovnici.
18. Definujte elipsu, zapíšte středovou rovnici elipsy.
19. Co je to tečna elipsy? Zapište její rovnici.
20. Definujte hyperbolu, zapíšte středovou rovnici hyperboly.
21. Co je to tečna hyperboly? Zapište její rovnici.
22. Definujte parabolu, zapíšte vrcholovou rovnici paraboly.
23. Co je to tečna paraboly? Zapište její rovnici.

Odpovědi najdete v textu.

**Kontrolní test**

- Velikost vektoru $\vec{a} = (3, -4)$ je rovna:
a) 13, b) 5, c) $5\sqrt{3}$, d) 3.
- Skalární součin vektorů $\vec{a} = (1, 2)$ a $\vec{b} = (-4, 2)$ je roven:
a) 3, b) $5\sqrt{3}$, c) 0, d) -2.
- Vektory $\vec{a} = (-1, 1)$ a $\vec{b} = (-4, 4)$ jsou:
a) kolmé, b) kolineární, c) jednotkové, d) opačné.
- Která z uvedených rovnic je obecnou rovnicí přímky jdoucí body $K[1, 2], L[2, 1]$?
a) $x + y - 3 = 0$, b) $2x + y - 3 = 0$, c) $x - y - 3 = 0$, d) $y = x$.
- Normálový vektor přímky $3x - 2y + 5 = 0$ má souřadnice:
a) $(2, 3)$, b) $(3, 2)$, c) $(3, -2)$, d) $(-2, 5)$.
- Směrový vektor přímky $2x - 3y + 6 = 0$ má souřadnice:
a) $(2, 3)$, b) $(3, 2)$, c) $(3, -2)$, d) $(-2, 6)$.
- Přímky $x + y - 7 = 0$ a $2x - 2y + 13 = 0$ jsou:
a) totožné, b) rovnoběžné, c) různoběžné, d) kolmé.
- Odchylka přímek $4x - y + 3 = 0$ a $3x - 5y + 6 = 0$ je rovna:
a) $121^\circ 13'$, b) 45° , c) 90° , d) 30° .
- Vzdálenost bodů $K[1, 2], L[2, 1]$ je rovna:
a) $\sqrt{5}$, b) 2, c) $\sqrt{2}$, d) $\sqrt{10}$.
- Střed kružnice $x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$ má souřadnice:
a) $S[-1, 0]$, b) $S[0, -1]$, c) $S[-1, 1]$, d) $S[1, 0]$.
- Je dána elipsa $25x^2 + 3y^2 = 300$. Přímka $5x + y - 20 = 0$ je její:
a) vnější přímka, b) sečna, c) tečna.
- Je dána parabola $y^2 - 16x - 4y - 12 = 0$. Přímka $2x + 3y + 14 = 0$ je její:
a) vnější přímka, b) sečna, c) tečna.
- Hyperbola $x^2 - y^2 + 8x + 2y - 10 = 0$ má střed o souřadnicích:
a) $S[-4, 1]$, b) $S[4, -1]$, c) $S[-1, 4]$, d) $S[1, 4]$.

**Výsledky testu**

1. b), 2. c), 3. b), 4. a), 5. c), 6. b), 7. c) i d), 8. b), 9. c), 10. a), 11. c), 12. c), 13. a).



Literatura



BARTSCH Hans Jochen. *Matematické vzorce.* Praha: Mladá fronta, 1996.
ISBN 80-204-0607-7.

BENDA Petr; DAŇKOVÁ Berta; SKÁLA Josef. *Maturitné príklady z matematiky.*
Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1977.

BURDA Pavel; BOHÁČ Zdeněk; DOLEŽALOVÁ Jarmila. *Matematika pro přípravný kurz a přijímací zkoušku na VŠB-TU Ostrava.* Ostrava: 1995.

HOLUBÁŘ Josef; HRADECKÝ František; HRUŠA Karel; KASKOVÁ Ema, KOLIBIAR Milan; KRŇAN František. *Algebra pro 9.-11. postupný ročník.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1954.

JANEČEK František; CHARVÁT Jura. *Analytická geometrie pro střední školy.* Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1995. ISBN 80-7015-504-3.

KABELE Jiří; MIKULČÁK Jiří; BARTOŠ Pavel; DAŇKOVÁ Berta; KRŇAN František. *Matematika pro II. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1967.

KNICHAL Vladimír; BAŠTA Alfons; PIŠL Milan; REKTORYS Karel. *Matematika I.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965.

KUBÁT Josef. *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986

KUBÁT Josef; HRUBÝ Dag; PILGR Josef. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy. Maturitní minimum.* Praha: Prométheus, 1996.

ODVÁRKO Oldřich. *Matematika pro gymnázia – funkce.* Praha: Prométheus, 1994.
ISBN 80-85849-09-7.

OPAVA Zdeněk. *Matematika kolem nás.* Praha: Albatros, 1989.

PETÁKOVÁ Jindra. *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prométheus, 1998. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prométheus, 1995.
ISBN 80-85849-78-X

RIEČAN Beloslav; BERO Peter; SMIDA Jozef; ŠEDIVÝ Jaroslav. *Matematika pro IV. ročník gymnázií.* . Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987.

ROSICKÁ Marta; ELIÁŠOVÁ Lada. *Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE.* Praha. 2000.

ŠEDIVÝ Jaroslav; LUKÁTŠOVÁ Júlia; RICHTÁRIKOVÁ SOŇA; ŽIDEK Stanislav. *Matematika pro I. ročník gymnázia. Sešit 1*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1977.

ŠKRÁŠEK Josef, TICHÝ Zdeněk *Základy aplikované matematiky I*. Praha.SNTL, 1983.

VEJSADA František; TALAFOUS František. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1969.