6. KOMBINATORIKA

Průvodce studiem

V úvodu 6.1. připomeneme význam termínů používaných v celé kapitole a počítání s faktoriály a kombinačními čísly. Následující část 6.2. – 6.4. seznamuje se základními způsoby výběru ze základní množiny. Teorie je přiblížena na příkladech zadaných na závěr této kapitoly včetně nápovědy a výsledků řešení.

Cíle

Po zvládnutí kapitoly budete připraveni na řešení úloh z pravděpodobnosti a na studium statistiky.

Předpokládané znalosti

Kapitola požaduje jen standardně rozvinuté logické myšlení a respektování skutečnosti, že výběry skupin ze základní množiny se musí řídit určitými pravidly.

6.1. Základní pojmy

Výklad

Základní množina M	-je každá konečná množina o n různých prvcích, z níž budeme vybírat prvky do skupin,
skupina	-je tvořena prvky, vybranými ze základní množiny M, v níž nezáleží na pořadí prvků: zápisy (a,b) a (b,a) zastupují tutéž skupinu,
skupina *k*-té třídy	-je skupina, která má k prvků,
uspořádaná skupina	-je skupina, v níž záleží na pořadí prvků: (a,b) a (b,a) jsou dvě různé skupiny
skupiny bez opakování	-jsou skupiny, v nichž každý prvek z dané základní množiny M o n různých prvcích je vybrán jen jednou (a pak je z dalšího výběru vyřazen),
skupiny s opakováním	-jsou skupiny, v nichž je možné každý prvek z množiny M vybrat vícekrát (jako bychom ho po výběru vrátili zpět do množiny M),

6.1.1. Počítání s faktoriály a kombinačními čísly

Výklad

Zápis ***n!*** čteme n-faktoriál nebo také faktoriál čísla *n*, označuje součin všech přirozených čísel menších nebo rovných *n*.

Výpočet faktoriálu: $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$,

$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)!$, $\quad 0! = 1$.

Řešená úloha

Příklad 6.1.1. Vypočtěte 6!

Řešení: $6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720.$

Výpočet faktoriálu je možno na vhodném místě „zastavit“.

$$6! = 6\cdot 5! = 6\cdot 5\cdot 4! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3! = \cdots$$

Výklad

Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ čteme „ n nad k “,

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, kde *n*, *k* jsou přirozená čísla nebo nula a platí $0 \le k \le n$.

Výpočet kombinačního čísla:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n.$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \text{ kde } k < n.$$

Řešené úlohy

Příklad 6.1.2. Vypočtěte $\binom{10}{3}$.

Řešení: $\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$.

Kombinační číslo jednoduše vypočteme, jestliže v čitateli rozepisujeme faktoriál čísla *n*, ale napíšeme jen tolik činitelů, kolik udává *k*. Ve jmenovateli rozepíšeme jen $k!$.

Příklad 6.1.3. Vypočtěte $\binom{19}{2}, \binom{19}{16}$.

Řešení: $\binom{19}{2} = \frac{19 \cdot 18}{2 \cdot 1} = 171$, $\binom{19}{16} = \binom{19}{3} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 969.$

Příklad 6.1.4. Které přirozené číslo x vyhovuje rovnici $\binom{x+1}{2} + \binom{x}{2} = 4\binom{5}{5}$?

Řešení: Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ existuje pro $0 \le k \le n$, v našem případě je

$x + 1 \ge 2$, takže $x \ge 1$, $\wedge$ $x \ge 2$, proto rovnice je řešitelná pro $x \ge 2$.

Nyní vypočteme kombinační čísla a řešíme následovně:

$$\frac{(x+1)x}{2 \cdot 1} + \frac{x(x-1)}{2 \cdot 1} = 4 \cdot 1 \qquad | \cdot 2$$

$$x^2 + x + x^2 - x = 8$$

$$2x^2 = 8 \qquad \Rightarrow x^2 = 4 \qquad \Rightarrow x = \pm 2$$

Podmínce vyhovuje jen $x = 2$.

Příklad 6.1.5. Upravte výraz $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n-1)!} - 2\frac{(n+2)!}{n!}$.

Řešení: $\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} + \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} - 2\frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} =$

$$= (n+3)(n+2) + (n+1)n - 2(n+2)(n+1) = n^2 + 5n + 6 + n^2 + n - 2(n^2 + 3n + 2) = 2.$$

6.2. Variace

Výklad

Variací bez opakování k-té třídy z n prvků nazýváme každou uspořádanou k-prvkovou podmnožinu n prvkové základní množiny M.

Počet variací bez opakování : $V_k(n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, $0 \le k \le n$, $(k, n \in \mathbf{N})$

Řešené úlohy

Příklad 6.2.1. Zapište variace bez opakování 2.třídy a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1,2,3\}$.

Řešení: $V_2(3):$ $(1,2),(1,3),(2,3),(2,1),(3,1),(3,2)$,

$$V_2(3) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6.$$

Příklad 6.2.2. Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4, 5. Kolik trojciferných čísel lze z nich sestavit, jestliže se cifry neopakují ?

Řešení:

urči n (počet prvků základní množiny)	$n = 5$
urči k (počet prvků, které vybíráme)	$k = 3$
rozhodni, zda záleží na pořadí prvků	záleží na pořadí
rozhodni, mohou-li se prvky opakovat	čísla se nemohou opakovat
urči typ výběru: variace k-té třídy z n prvků	$V_k(n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

$$V_3(5) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Výklad

Variací s opakováním k-té třídy z n prvků nazýváme každou k prvkovou uspořádanou skupinu prvků, vybraných z n prvkové základní množiny M, v níž se každý prvek může opakovat až k krát.

Počet variací s opakováním : $V_k'(n) = n^k$, k může být větší než n, $(k, n \in \mathbf{N})$.

Řešené úlohy

Příklad 6.2.3. Zapište variace s opakováním 2.třídy a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1,2,3\}$.

Řešení: $V_2'(3)$: (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3),

$V_2'(3) = 3^2 = 9$.

Příklad 6.2.4. Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4, 5. Kolik trojciferných čísel lze z nich sestavit, jestliže se cifry opakují ?

Řešení:

urči n (počet prvků základní množiny)	$n = 5$
urči k (počet prvků, které vybíráme)	$k = 3$
rozhodni, zda záleží na pořadí prvků	záleží na pořadí
rozhodni, mohou-li se prvky opakovat	čísla se mohou opakovat
urči typ výběru: variace k-té třídy z n prvků s opakováním	$V_k'(n) = n^k$

$$V_3'(5) = 5^3 = 125.$$

6.3. Permutace

Výklad

Permutací bez opakování z n prvků nazýváme každé uspořádání n prvkové základní množiny M.

Počet permutací bez opakování : $P(n) = n!$.

Řešené úlohy

Příklad 6.3.1. Zapište permutace bez opakování a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1, 2, 3\}$.

Řešení: P(3): (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)

$P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Příklad 6.3.2. Kolik přesmyček lze vytvořit použitím všech písmen slova fyzika?

Řešení: $M = \{f, y, z, i, k, a\}$

urči n (počet prvků základní množiny)	$n = 6$
urči k (počet prvků, které vybíráme)	$k = 6$
rozhodni, zda záleží na pořadí prvků	záleží na pořadí
rozhodni, mohou-li se prvky opakovat	písmena se neopakují
urči typ výběru: permutace z n prvků	$P(n) = n!$

$$P(6) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720\,.$$

Výklad

Permutací k prvků **s opakováním** nazýváme každé uspořádání, v němž je všech n prvků základní množiny M a prvek a_i se opakuje právě k_i krát ($i = 1, 2, \ldots n$).

Platí $n \le k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$.

Počet permutací s opakováním: $P'_{k_1, k_2, \ldots k_n}(k) = \dfrac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}$.

Řešené úlohy

Příklad 6.3.3. Zapište permutace s opakováním a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1, 2, 3\}$ a první prvek se opakuje jednou, druhý se opakuje jednou a třetí dvakrát.

Řešení: $P_{1,1,2}(4)$: (1,2,3,3), (1,3,2,3), (1,3,3,2), (2,1,3,3), (2,3,1,3), (2,3,3,1), (3,1,3,2), (3,3,1,2), (3,1,2,3), (3,2,3,1), (3,3,2,1), (3,2,1,3),

$$P'_{1,1,2}(4) = \frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 12\,.$$

Příklad 6.3.4. Kolik přesmyček lze vytvořit použitím všech písmen slova matematika?

Řešení: $M = \{m, a, t, e, i, k\}$,

urči n (počet prvků základní množiny), $n = 6$

urči k (počet prvků, které vybíráme), $k_1 = 2$ (písmeno m se opakuje $2\times$),

$k_2 = 3$ (písmeno a se opakuje $3\times$), $k_3 = 2$ (písmeno t se opakuje $2\times$),

$k_4 = 1$ (písmeno e se opakuje $1\times$), $k_5 = 1$ (písmeno i se opakuje $1\times$),

$k_6 = 1$ (písmeno k se opakuje $1\times$), $k = 2+3+2+1+1+1 = 10$,

rozhodni, zda záleží na pořadí prvků záleží na pořadí,

rozhodni, mohou-li se prvky opakovat písmena se opakují,

urči typ výběru: permutace 10 prvků s opakováním

$$P'_{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6}(k) = \frac{k!}{k_1!.k_2!.k_3!.k_4!.k_5!.k_6!}, \qquad P'_{2,3,2,1,1,1}(10) = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 151200\,.$$

6.4. Kombinace

Výklad

Kombinací bez opakování k-té třídy z *n* prvků nazýváme každou *k* prvkovou podmnožinu základní množiny *M*, v níž nezáleží na pořadí prvků.

Počet kombinací bez opakování: $C_k(n) = \binom{n}{k}$, $\quad 0 \le k \le n$, $(k, n \in \mathbf{N})$.

Řešené úlohy

Příklad 6.4.1. Zapište kombinace 2. třídy bez opakováním a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1,2,3\}$.

Řešení: $C_2(3)$: $(1,2), (1,3), (2,3)$,

$$C_2(3) = \binom{3}{2} = \frac{3\cdot 2}{2\cdot 1} = 3\,.$$

Příklad 6.4.2. Kolik různých třítónových akordů je možné zahrát ze sedmi tónů ?

Řešení: urči n (počet prvků základní množiny) $n = 7$

urči k (počet prvků, které vybíráme) $k = 3$

rozhodni, zda záleží na pořadí prvků nezáleží na pořadí

rozhodni, mohou-li se prvky opakovat tóny se nemohou opakovat urči typ výběru: kombinace k-té třídy z n prvků $C_k(n) = \binom{n}{k}$

$$C_3(7) = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

Výklad

Kombinací s opakováním k-té třídy z n prvků nazýváme každou k prvkovou skupinu prvků vybraných z n prvků základní množiny M, v níž se každý prvek může opakovat až k krát a v níž nezáleží na pořadí prvků.

Počet kombinací s opakováním: $C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$, k může být větší než , $k, n \in \mathbf{N}$.

Řešené úlohy

Příklad 6.4.3. Zapište kombinace 2. třídy s opakováním a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1,2,3\}$.

Řešení: $C'_2(3)$: $(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)$,

$$C'_2(3) = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6.$$

Příklad 6.4.4. Ve stánku mají 3 druhy bonbónů, každý druh v sáčcích po 10 dkg. Kolika různými způsoby může zákazník koupit půl kila bonbónů?

Řešení: urči n (počet prvků základní množiny) $n = 3$

urči k (počet prvků, které vybíráme) $k = 5$

rozhodni, zda záleží na pořadí prvků nezáleží na pořadí

rozhodni, mohou-li se prvky opakovat druhy se mohou opakovat

urči typ výběru: kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

$$C'_5(3) = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21.$$

6.5. Binomická věta

Výklad

Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ bývá označováno termínem **binomický koeficient**, je-li užíváno ve vztahu pro n-tou mocninu dvojčlenu (binomu).

Jsou-li a,b libovolná čísla a n číslo přirozené, platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n .$$

Řešené úlohy

Příklad 6.5.1. Rozveďte pomocí binomické věty a zjednodušte $(1+\sqrt{2})^4$.

Řešení:

$$(1+\sqrt{2})^4 = \binom{4}{0}1^4(\sqrt{2})^0 + \binom{4}{1}1^3(\sqrt{2})^1 + \binom{4}{2}1^2(\sqrt{2})^2 + \binom{4}{3}1^1(\sqrt{2})^3 + \binom{4}{4}1^0(\sqrt{2})^4 =$$

$$1\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot 1\cdot \sqrt{2} + 6\cdot 1\cdot 2 + 4\cdot 1\cdot 2\cdot \sqrt{2} + 1\cdot 1\cdot 4 = 1 + 4\sqrt{2} + 12 + 8\sqrt{2} + 4 = 17 + 12\sqrt{2}.$$

Příklad 6.5.2. Který člen rozvoje výrazu $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^6$, $x \neq 0$, neobsahuje x?

Řešení: Označme si k-tý člen jako A_k, pak

$$A_k = \binom{6}{k-1}\cdot\left(2x^2\right)^{6-(k-1)}\cdot\left(\frac{-3}{x}\right)^{k-1} = \binom{6}{k-1}\cdot 2^{7-k}\cdot x^{2(7-k)}\cdot(-3)^{k-1}\cdot x^{-(k-1)} =$$

$$= \binom{6}{k-1}\cdot 2^{7-k}\cdot(-3)^{k-1}\cdot x^{15-3k}$$

$$x^{15-3k} = 1 = x^0 \Rightarrow 15 - 3k = 0 \Rightarrow k = 5.$$

Pátý člen rozvoje neobsahuje x.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte kombinační čísla

a) $\binom{24}{0}$, b) $\binom{12}{12}$, c) $\binom{15}{1}$, d) $\binom{9}{2}+\binom{9}{3}$.

2. Které přirozené číslo vyhovuje rovnici :

a) $\binom{x-1}{2}-\binom{x}{0}=\frac{1}{2}\binom{x}{2}$, jaká je podmínka pro x?

b) $\binom{4}{3}\binom{x+1}{x-1}-\binom{5}{3}\binom{x+1}{x}+\binom{3}{2}\binom{4}{2}=0$, jaká je podmínka pro x?

3. Ve třídě je 25 žáků, z nichž 4 mají být vyzkoušeni. Kolik různých čtveřic může být vyzkoušeno?

4. Jistý muž má 5 kabátů, 4 vesty a 6 kalhot. Kolika různými způsoby se může obléct?

5. V lavici mohou sedět čtyři žáci. Kolikerým způsobem je možno lavici obsadit, máme-li pět žáků a záleží na pořadí míst?

6. Kolik různých hodů lze provést třemi kostkami?

7. Aranžér má ve výloze umístit vedle sebe 4 stejné svetry z nichž 2 jsou bílé, 1 červený a 1 zelený. Kolika způsoby to může učinit?

8. Kolik různých šesticiferných čísel můžeme napsat z číslic 1,2,3,4,5,6 má-li se každá vyskytnout v čísle jen jednou?

9. Užitím binomické věty vypočtěte

a) $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^6$, b) $(1{,}01)^7$ s přesností na tři desetinná místa.

10. Vypočtěte: a) $\binom{7}{2}$, b) $\binom{15}{12}$, c) $\binom{x}{3}$.

11. Kterým kombinačním číslem je možno vyjádřit součty:

a) $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}$, b) $\binom{14}{3}+\binom{14}{10}$, c) $\binom{n}{4}+\binom{n}{5}$.

12. Zjednodušte :

a) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$, b) $\dfrac{(n-2)!}{(n-1)!}$, c) $\dfrac{(n+1)!}{n!}-\dfrac{n!}{(n-1)!}$.

13. Z kolika prvků je možné utvořit 42 variací 2. třídy bez opakování?

14. Zvětší-li se počet prvků o 2, zvětší se počet permutací bez opakování dvanáctkrát. Jaký byl původní počet prvků?

15. Zvětší-li se počet prvků o jeden, zvětší se počet kombinací třetí třídy o 28. Kolik je prvků?

16. Jsou dány cifry 1,2,3,4,5. Kolik pěticiferných čísel, v nichž se žádná z cifer nebude opakovat, lze z těchto cifer sestavit, chceme-li získat

a) všechna taková čísla,

b) čísla končící cifrou 4,

c) čísla sudá,

d) čísla lichá.

17. Kolik trojciferných čísel lze zapsat z cifer 2,4,6,8, mohou-li se cifry opakovat?

18. Kolik různých „slov“ lze vytvořit použitím všech písmen slova automatizace?

19. Kolik různých třítónových nebo čtyřtónových akordů lze zahrát ze sedmi tónů?

20. Fotbalový trenér má k dispozici 3 brankáře, 5 obránců, 4 záložníky a 10 útočníků. Kolik různých fotbalových mužstev z nich může sestavit, tvoří-li jedno mužstvo 1 brankář, 2 obránci, 3 záložníci a 5 útočníků?

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 1; b) 1; c)15; d) 120. **2.** a) $x \geq 3; x=5$; b) $x \geq 1; x=2$. **3.** 12650. **4.** 120. **5.** 120.

6. 216. **7.** 12. **8.** 720. **9.** a) $\dfrac{a^6}{64}-\dfrac{a^5b}{16}+\dfrac{5a^4b^2}{48}-\dfrac{5a^3b^3}{54}+\dfrac{5a^2b^4}{108}-\dfrac{ab^5}{81}+\dfrac{b^6}{729}$; b) 1,072.

10. a) 21; b) 455; c) $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{6}$. **11.** a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{15}{4}$; c) $\binom{n+1}{5}$. **12.** a) $(n+1)n$;

b) $\dfrac{1}{n-1}$; c) 1. **13.** $n=7$. **14.** $n=2$. **15.** $n=8$. **16.** a) 120; b) 24; c) 48; d) 72.

17. 64. **18.** 39916800. **19.** 70. **20.** 30240.

Klíč k řešení úloh

1. Řešíme dosazením do vzorce pro výpočet kombinačního čísla.

2. a) Rovnici upravíme na tvar $\frac{(x-1)(x-2)}{2}-1=\frac{x(x-1)}{4}$, vynásobíme a dostaneme kvadratickou rovnici $x^2-5x=0$, její kořeny jsou $x_1=0, x_2=5$. Protože musí být $x \geq 3$ (jistě jsme nezapomněli vypočítat podmínku pro kombinační číslo), má rovnice jediné řešení $x=5$.

b) Rovnici upravíme na tvar $2x(x+1)-10(x+1)+18=0$, vynásobíme a dostaneme kvadratickou rovnici $x^2-4x+4=0$, ta má jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2}=2$. Protože $x \geq 1$, má rovnice řešení $x=2$.

3. Jedná se o kombinace 4. třídy z 25, nezáleží totiž na pořadí zkoušených žáků, bez opakování, nikdo nebude zkoušen vícekrát. $C_4(25)=\frac{25!}{4!\cdot 21!}=12650$.

4. Muž si oblékne 1 kabát, vybírá ho z pěti různých, 1 vestu ze čtyř a 1 kalhoty z šesti.

pro kabát: $n=5, k=1$ $C_1(5)$

pro vestu: $n=4, k=1$ $C_1(4)$

pro kalhoty: $n=6, k=1$ $C_1(6)$

$$C_1(5)\cdot C_1(4)\cdot C_1(6)=\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{1}=120.$$

5. Záleží na pořadí žáků, jedná se tedy o variace, žáci se neopakují, nikdo nesedí na dvou židlích, jsou tedy bez opakování. $V_4(5)=\frac{5!}{(5-4)!}=120$.

6. U hodu kostkou záleží na pořadí a prvky se mohou opakovat. $V_3'(6)=6^3=216$.

7. Záleží na pořadí svetrů, umístí se všechny a bílý se 2x opakuje, jedná se tedy o permutace s opakováním. $P'_{2,1,1}(4)=\frac{4!}{2!}=12$.

8. Z šesti číslic tvoříme šesticiferné číslo, žádná cifra se neopakuje, jsou to tedy permutace šesti prvků. $P(6) = 6! = 720$.

9. a) $\frac{a^6}{64} - \frac{a^5 b}{16} + \frac{5a^4 b^2}{48} - \frac{5a^3 b^3}{54} + \frac{5a^2 b^4}{108} - \frac{ab^5}{81} + \frac{b^6}{729}$,

b) $(1+0{,}01)^7 = \binom{7}{0} \cdot 1^7 \cdot 0{,}01^0 + \binom{7}{1} \cdot 1^6 \cdot 0{,}01^1 + \cdots + \binom{7}{7} \cdot 1^0 \cdot 0{,}01^7 = 1{,}072$

10. a) $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$, b) $\binom{15}{12} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} = 455$,

c) $\binom{x}{3} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{3!} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6}$.

11. a) $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$,

b) $\binom{14}{3} + \binom{14}{10} = \binom{14}{3} + \binom{14}{4} = \binom{15}{4}$,

c) $\binom{n}{4} + \binom{n}{5} = \binom{n+1}{5}$.

12. a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = n^2 + n$,

b) $\frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{(n-2)!}{(n-1)(n-2)!} = \frac{1}{n-1}$,

c) $\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n!}{n!} - \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n + 1 - n = 1$.

13. $V_2(n) = 42 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 42 \Rightarrow n \cdot (n-1) = 42 \Rightarrow n_1 = 7, n_2 = -6$ Je potřeba 7 prvků.

14. $P(n) = n!$, $P(n+2) = (n+2)!$, $P(n+2) = 12 \cdot P(n) \Rightarrow (n+2)! = 12 \cdot n!$, upravíme faktoriál na levé straně rovnice, vykrátíme a dostaneme kvadratickou rovnici $n^2 + 3n - 10 = 0$. Její kořeny jsou $n_1 = 2, n_2 = -5$. Řešení úlohy vyhovuje $n = 2$.

15. $C_3(n)=\binom{n}{3}$, $C_3(n+1)=\binom{n+1}{3}$, $\binom{n+1}{3}=\binom{n}{3}+28$, upravíme kombinační čísla a po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $n^2-n-56=0$. Její kořeny jsou $n_1=8, n_2=-7$. Řešení úlohy vyhovuje $n=8$.

16. a) Záleží na pořadí, prvky se neopakují, $n=k=5$. $P(5)=5!=120$.

b) Na konci je pevně dané číslo, u zbytku záleží na pořadí a neopakují se, $n=k=4$ $P(4)=4!=24$.

c) Na konci může být dvojka nebo čtyřka. Jedná se o dva případy z příkladu b). $2\cdot P(4)=48$.

d) $3\cdot P(4)=72$.

17. Tvoříme trojciferná čísla, u nich záleží na pořadí, vybíráme ze čtyř cifer, ty se opakují. Jedná se tedy o variace třetí třídy ze čtyř prvků s opakováním. $V_3'(4)=4^3=64$.

18. Budeme postupovat podobně jako v řešeném příkladu o „matematice". Jde o permutace s opakováním.

$M=\{a,u,t,o,m,i,z,c,e\}$,

$n=9$, $k_1=3$, $k_2=1$, $k_3=2$, $k_4=k_5=k_6=k_7=k_8=k_9=1 \Rightarrow k=12$

$P'_{3,1,2,1,1,1,1,1,1}(12)=\dfrac{12!}{3!\cdot 2!}=11!=39\ 916\ 800.$

19. Nezáleží na pořadí, tón se nesmí opakovat, vypočítáme zvlášť počet třítónových akordů a zvlášť počet čtyřtónových akordů. Ty pak sečteme. $n=7$, $k=3 \vee k=4$,

$C_3(7)+C_4(7)=35+35=70$.

20. Trenér vybírá jednoho brankáře ze tří, dva obránce z pěti, tři záložníky ze čtyř a pět útočníků z deseti. Můžeme také říci, že je kombinuje. Lidé se samozřejmě neopakují. Tedy $C_1(3)\cdot C_2(5)\cdot C_3(4)\cdot C_5(10)=\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{10}{5}=30240$.

Kontrolní test

1. V množině přirozených čísel řešte: $\binom{6}{5}\binom{y+1}{y-1}-\binom{6}{4}\binom{y+2}{y+1}=\binom{4}{2}$

   a) y =-5; b) y = 6 c) y = 2 a y = 3.

2. Ze 6 mužů a 4 žen se má vybrat sedmičlenná skupina. Kolika způsoby je to možné?

   a) 120; b) 240; c) 6.

3. Ze 6 mužů a 4 žen se má vybrat sedmičlenná skupina. Kolika způsoby je to možné, mají-li být ve vybrané skupině právě 2 ženy.

   a) 0; b) 36; c) 11.

4. Ze 6 mužů a 4 žen se má vybrat sedmičlenná skupina. Kolika způsoby je to možné, mají-li být ve vybrané skupině alespoň 2 ženy.

   a) -10; b) 520; c) 116.

5. Určete počet prvků konečné množiny, z nichž lze vytvořit pětkrát více uspořádaných trojic než uspořádaných dvojic. Žádný prvek se neopakuje.

   a) n = 7; b) n = -4; c) n = 10.

6. Kolika způsoby lze ubytovat 10 hostů, máme-li k dispozici jeden čtyřlůžkový a dva třílůžkové pokoje?

   a) 520; b) 4200; c) nelze zjistit.

7. Zvětší-li se počet prvků o 2, zvětší se počet permutací třicetkrát. Kolik je prvků?

   a) 4; b) 6; c) 8.

8. Z kolika prvků vznikne 729 variací třetí třídy s opakováním?

   a) 8; b) 9; c) 10.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. b); 4. c); 5. a); 6.b); 7.a); 8b).