3. ROVNICE A NEROVNICE

Průvodce studiem

V kapitolách 3.1.-3.7. se naučíte poznávat jednotlivé typy rovnic a na řešených příkladech se seznámíte s výpočtem jejich kořenů. Získané vědomosti pak použijete při řešení nerovnic v kapitole 3.8., která se zcela opírá o získané znalosti z předchozích kapitol. Na závěr jsou zařazeny úlohy k procvičení a k upevnění získaných vědomostí, které si ověříte na kontrolním testu.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni řešit lineární, kvadratické rovnice, rovnice s absolutní hodnotou, iracionální, exponenciální, logaritmické a goniometrické rovnice a na závěr se seznámíte s řešením nerovnic.

Úlohy budete řešit v oboru přirozených, celých, racionálních a reálných čísel.

Předpokládané znalosti

Předpokladem pro studium této kapitoly je alespoň zvládnutí počítání se zlomky a úprav algebraických výrazů.

3.1. Lineární rovnice

Výklad

Lineární rovnice jsou rovnice, jež je možné upravit na tvar $ax + b = 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$.

Jejich řešením je jediné číslo $x = -\dfrac{b}{a}$.

Tvar $ax + b = 0$, stejně jako řešení $x = -\dfrac{b}{a}$, získáváme ze složitějšího zadání ekvivalentními úpravami o nichž víme, že nezmění řešení rovnice. Patří k nim:

- přičítání (odčítání) téhož výrazu k oběma stranám rovnice
- násobení (dělení) obou stran rovnice týmž výrazem $(\neq 0)$

Řešená úloha

Příklad 3.1.1. Řešte rovnici $\frac{3x}{2}-\frac{2-x}{10}=\frac{5+x}{4}+\frac{4}{5}$.

Řešení: Obě strany vynásobíme společným jmenovatelem (20) a dostaneme:

$$30x-4+2x=25+5x+16 \quad \text{/ k oběma stranám přičteme } (4-5x)$$
$$27x=45 \quad \text{/ vydělíme } 27$$
$$x=\frac{5}{3}$$

Zkouška: $L\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{2}-\frac{1}{30}=\frac{75-1}{30}=\frac{74}{30}=\frac{37}{15}$,

$P\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{20}{12}+\frac{4}{5}=\frac{100+48}{60}=\frac{148}{60}=\frac{37}{15}$.

Číslo $\frac{5}{3}$ je řešením rovnice.

3.2. Kvadratické rovnice

Výklad

Kvadratická rovnice je rovnice, kterou je možno upravit na tvar $ax^2+bx+c=0$, kde $a,b,c\in R$, $a\neq 0$. Jejím řešením je dvojice čísel, kterou můžeme získat např. ze vzorce:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Výraz $D=b^2-4ac$ nazýváme **diskriminantem** kvadratické rovnice. Je-li $D>0$, pak má rovnice dva různé reálné kořeny, je-li $D=0$, pak má jeden dvojnásobný reálný kořen, je-li $D<0$, pak rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel, ale má dva komplexně sdružené kořeny.

Je-li $b=0$ nebo $c=0$, jedná se o **neúplnou kvadratickou rovnici**, kterou řešíme následovně:

a) $ax^2+c=0$

$$x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

b) $ax^2+bx=0$

$$x(ax+b)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=\frac{-b}{a}$$

Je-li x_1 kořen kvadratické rovnice, pak výraz $(x-x_1)$ se nazývá **kořenový činitel** a $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ je **rozklad kvadratického trojčlenu** na součin kořenových činitelů.

Řešené úlohy

Příklad 3.2.1. Určete kořeny kvadratické rovnice:

a) $x^2+2x-3=0$,

b) $x^2-2x+1=0$,

c) $x^2-4x+13=0$,

d) $9x^2-4=0$,

e) $x^2+5x=0$.

Řešení: a) $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot(-3)}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\dfrac{-2\pm4}{2}=\left\langle\begin{matrix}-3\\1\end{matrix}\right.$ kořeny reálné, různé,

b) $(x-1)^2=0\Rightarrow$ rovnice má jeden dvojnásobný kořen $x_1=x_2=1$,

c) $x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4\cdot13}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\dfrac{4\pm6i}{2}=\left\langle\begin{matrix}2+3i\\2-3i\end{matrix}\right.$ kořeny komplexní,

d) $9x^2=4,\ x^2=\dfrac{4}{9},\ |x|=\sqrt{\dfrac{4}{9}},\ x=\pm\dfrac{2}{3}$,

e) $x(x+5)=0,\ x=0\vee x=-5$.

Výklad

Jsou-li x_1,x_2 kořeny kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$, resp. $x^2+px+q=0$ (rovnice v normovaném tvaru), pak pro kořeny platí **Viètovy vzorce**:

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\quad\text{a}\quad x_1+x_2=-\frac{b}{a},$$

$$\text{resp. }\ x_1\cdot x_2=q\quad\text{a}\quad x_1+x_2=-p.$$

Řešené úlohy

Příklad 3.2.2. Určete kořeny kvadratické rovnice $x^2+4x-45=0$ pomocí výše uvedených vztahů.

Řešení: $x_1\cdot x_2=-45\Rightarrow-45=(-1)45\vee-45=1\cdot(-45)\vee-45=(-5)9\vee-45=5(-9)$,

$x_1+x_2=-4$,

zvolené dvojice dosadíme do 2. rovnice:

$$\left.\begin{aligned} -1+45&=44\\ 1-45&=-44\\ -5+9&=4 \end{aligned}\right\}\quad \text{nevyhovují}$$

$5-9=-4$, proto vyhovuje dvojice $x_1=5$, $x_2=-9$.

Příklad 3.2.3. Pomocí vztahů mezi kořeny a koeficienty sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou: a) $x_1=-3\sqrt{3}$, $x_2=2\sqrt{3}$,

b) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=3$.

Řešení: a) $x_1\cdot x_2=-3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}=-18=q$, $x_1+x_2=-3\sqrt{3}+2\sqrt{3}=-\sqrt{3}=-p$.

Hledaná rovnice má tvar $x^2+\sqrt{3}x-18=0$.

b) $x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}=q$, $x_1+x_2=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}=-p$.

Hledaná rovnice má tvar $x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$ nebo $2x^2-7x+3=0$.

3.3. Rovnice s absolutní hodnotou

Výklad

Rovnice s absolutní hodnotou jsou rovnice, v nichž se vyskytuje neznámá alespoň jednou v absolutní hodnotě. Řešit je, znamená upravit je na rovnice, v nichž absolutní hodnota není.

$$|a|=\left\langle \begin{array}{lll} a & pro & a\ge 0\\ -a & pro & a<0 \end{array}\right.$$

Řešené úlohy

Příklad 3.3.1. Řešte rovnici $|x+3|-|x-2|=-5$.

Řešení:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{pro } x+3 \geq 0\text{, t.j. pro } x \in <-3,\infty) \\ -x-3 & \text{pro } x+3 < 0\text{, t.j. pro } x \in (-\infty,-3) \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{pro } x-2 \geq 0\text{, t.j. pro } x \in <2,\infty) \\ -x+2 & \text{pro } x-2 < 0\text{, t.j. pro } x \in (-\infty,2) \end{cases}$$

	$(-\infty,-3)$	$<-3,2)$	$<2,\infty)$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
	$-x-3+x-2=-5$ $-5=-5$ pravdivý výrok vyhovují všechna čísla intervalu $(-\infty,-3)$, $x \in (-\infty,-3)$	$x+3-(-x+2)=-5$ $2x+1=-5$ $x=-3$ $x=-3$ vyhovuje, patří do intervalu < - 3,2), $x=-3$	$x+3-(x-2)=-5$ $x+3-x+2=-5$ $5=-5$ nepravdivý výrok nevyhovuje žádné $x \in <2,\infty)$

Řešením rovnice jsou všechna $x \in (-\infty,-3>$.

Příklad 3.3.2. Řešte rovnici $|2y+1|-|3-y|=y$.

Řešení:

$$|2y+1| = \begin{cases} 2y+1 & \text{pro } 2y+1 \geq 0\text{, tj. pro } y \in <-\frac{1}{2},\infty) \\ -2y-1 & \text{pro } 2y+1 < 0\text{, tj. pro } y \in (-\infty,-\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$|3-y| = \begin{cases} 3-y & \text{pro } 3-y \geq 0\text{, tj. pro } y \in \left(-\infty,3\right\rangle \\ -3+y & \text{pro } 3-y < 0\text{, tj. pro } y \in (3,\infty) \end{cases}$$

	$(-\infty,-\frac{1}{2})$	$<-\frac{1}{2},3)$	$<3,\infty)$
$\lvert 2y+1\rvert$	$-2y-1$	$2y+1$	$2y+1$
$\lvert 3-y\rvert$	$3-y$	$3-y$	$-3+y$

	$-2y-1-(3-y)=y$ $-2y-1-3+y=y$ $-2y=4$ $y=-2$ $y=-2$ patří do $(-\infty,-\frac{1}{2})$	$2y+1-(3-y)=y$ $2y+1-3+y=y$ $2y=2$ $y=1$ $y=1$ patří do $<-\frac{1}{2},3)$	$2y+1-(-3+y)=y$ $2y+1+3-y=y$ $4=0$ nepravdivý výrok nevyhovuje žádné $x\in<3,\infty)$

Řešením rovnice jsou čísla $y=-2$ a $y=1$.

3.4. Iracionální rovnice

Výklad

Iracionální rovnice jsou rovnice, v nichž se vyskytuje neznámá alespoň jednou pod odmocninou.

Řešit iracionální rovnici znamená, upravit ji na rovnici, v níž odmocniny nejsou. Toho dosáhneme **umocňováním**.

Protože umocňování není ekvivalentní úprava, můžeme zajistit platnost kořenů dvojím způsobem:

a) řešíme rovnici a platnost kořenů ověříme **zkouškou**,

b) při každém umocňování stanovíme podmínky pro to, aby rovnice daná a umocněná byly ekvivalentní. Tento způsob užíváme jen u jednoduchých iracionálních rovnic.

Poznámka

Rychlejší je způsob řešení a).

Řešené úlohy

Příklad 3.4.1. Řešte rovnici $3+\sqrt{x-1}=x$ oběma způsoby.

Řešení: **1. způsob**: $3+\sqrt{x-1}=x \qquad |-3$ osamostatníme odmocninu

$$\sqrt{x-1} = x-3 \qquad \Big|^{2} \qquad \text{umocníme}$$

$$x-1 = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

Zkouška: $\left.\begin{matrix} L(5) = 3 + \sqrt{5-1} = 5 \\ P(5) = 5 \end{matrix}\right\} \quad L(5) = P(5)$ - kořen 5 vyhovuje

$\left.\begin{matrix} L(2) = 3 + \sqrt{2-1} = 4 \\ P(2) = 2 \end{matrix}\right\} \quad L(2) \neq P(2)$ - kořen 2 nevyhovuje

2. způsob: $3 + \sqrt{x-1} = x$

$\sqrt{x-1} = x-3 \qquad \Big|^{2}$ podmínka: $x-1 \geq 0 \;\wedge\; x-3 \geq 0$

$x-1 = x^2 - 6x + 9 \qquad x \geq 1 \;\wedge\; x \geq 3$

$x^2 - 7x + 10 = 0$ rovnici dále řešíme pro $x \geq 3$

$$x_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} 5 & \text{vyhovuje podmínce.} \\ 2 & \text{nevyhovuje podmínce.} \end{matrix} \right.$$

Závěr: Řešením zadané rovnice je $x = 5$.

Výklad

Je-li v rovnici více odmocnin, opět jednu osamostatníme a ostatní členy rovnice převedeme (před umocňováním) na druhou stranu. Je zřejmé, že bude třeba postup a umocňování opakovat.

Příklad 3.4.2. Řešte rovnici $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = 7$

Řešení: $\sqrt{x+5} = 7 - \sqrt{x-2} \qquad /^{2}$

$$x + 5 = 49 - 14\sqrt{x-2} + x - 2$$

$$14\sqrt{x-2} = 42 \qquad / :14$$

$$\sqrt{x-2} = 3 \qquad /^{2}$$

$$x - 2 = 9 \qquad \Rightarrow \qquad x = 11$$

Zkouška: $L(11) = \sqrt{11+5} + \sqrt{11-2} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7 = P$.

Závěr: Řešením dané rovnice je $x = 11$.

3.5. Exponenciální rovnice

Výklad

Exponenciální rovnice jsou rovnice, které mají neznámou v exponentu mocniny.

Jejich řešení probíhá ve dvou krocích:

1) rovnici převedeme na základní tvar $a^x = b$, kde $a > 0$, $a \neq 1$

2) základní tvar řešíme.

V převodu na základní tvar užíváme především znalostí o počítání s mocninami, ojediněle pak substituce $a^x = y$

Při řešení základního tvaru $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$ platí:

pro $b < 0$ nemá rovnice řešení

$b > 0$ řešení má a rozlišujeme dvě možnosti:

1. a a b z rovnice $a^x = b$ lze převést na **mocniny o stejném základu**. Pak použijeme vlastnost $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
2. a a b nelze převést na mocniny o stejném základu. Pak použijeme definice logaritmu nebo obě strany rovnice zlogaritmujeme.

Poznámka

Obecně lze exponenciální rovnice řešit graficky nebo přibližnými numerickými metodami.

Řešené úlohy

Příklad 3.5.1. Řešte rovnici $2^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+2} = 240$.

Řešení:

a) převod na základní tvar (užijeme znalostí o počítání s mocninami):

$$2^x - 3 \cdot 2^x \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^x \cdot 2^2 = 240$$

$$2^x [1 - 6 + 20] = 240$$

$$2^x \cdot 15 = 240 \qquad / :15$$

$$2^x = 16,$$

b) řešení základního tvaru $2^x = 16$

$2^x = 2^4$, protože platí: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$,

$x = 4$.

Příklad 3.5.2. Řešte rovnici $3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 4 = 0$.

Řešení: a) převod na základní tvar substitucí

$$(3^x)^2 + 3(3^x) - 4 = 0 \qquad 3^x = a \text{ je vhodná substituce}$$

$$a^2 + 3a - 4 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = < \begin{matrix} 1 \\ -4 \end{matrix}$$

b) řešení základního tvaru: po dosazení do substituční rovnice dostaneme

$3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$ je řešením dané rovnice.

Rovnice $3^x = -4$ nemá řešení, neboť vždy platí $3^x > 0$.

Příklad 3.5.3. Řešte rovnici $4^x + 3^{x+3} = 4^{x+3} - 3^{x+2}$.

Řešení: a) převod na základní tvar:

$$3^{x+3} + 3^{x+2} = 4^{x+3} - 4^x$$

$$3^x \cdot 3^3 + 3^x \cdot 3^2 = 4^x \cdot 4^3 - 4^x$$

$$3^x \cdot (27 + 9) = 4^x \cdot (64 - 1)$$

$$\frac{3^x}{4^x} = \frac{63}{36} = \frac{7}{4}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{7}{4},$$

b) základní tvar řešíme zlogaritmováním obou stran rovnice:

$$\log\left(\frac{3}{4}\right)^x = \log\frac{7}{4}$$

$$x \log\frac{3}{4} = \log\frac{7}{4} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{\log\frac{7}{4}}{\log\frac{3}{4}} \doteq -1{,}94526.$$

3.6. Logaritmické rovnice

Výklad

Logaritmické rovnice jsou rovnice, které mají neznámou v argumentu logaritmu.

Při řešení logaritmických rovnic používáme nejčastěji:

a) definici logaritmu: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

b) vlastnosti logaritmů: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

$$\log_a a = 1, \qquad \log_a 1 = 0.$$

Při řešení logaritmických rovnic se často setkáme s těmito typickými situacemi:

a) obdržíme logaritmickou rovnici v základním tvaru $\log_a x = b$, $(a > 0, a \neq 1)$ a pro libovolné b má tato rovnice jediné řešení $x = a^b$ (příklad 3.6.1.)

b) zadání je složitější a pomocí vlastností logaritmů převedeme na:
   1. základní tvar $\log_a x = b$, (příklad 3.6.2.)
   2. základní tvar $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, což platí tehdy a jen tehdy, když $f(x) = g(x)$, (příklad 3.6.3.)

c) zadání naznačuje, že by zjednodušení pomocí substituce $\log_a x = y$ nebo $a^{\log x} = y$ převedlo rovnici logaritmickou na rovnici algebraickou, jež by byla snáze řešitelná, (příklad 3.6.4. a 3.6.5).

Poznámka

Obecně se logaritmické rovnice řeší graficky nebo přibližnými numerickými metodami.

Řešené úlohy

Příklad 3.6.1. Řešte rovnici $\log_2 x = 4$.

Řešení: Rovnice je definována pro $x > 0$. Pak podle definice logaritmu platí:

$$x = 2^4$$

$$x = 16\,, \qquad \text{což vyhovuje podmínce.}$$

Příklad 3.6.2. Řešte logaritmickou rovnici $\log x + 3\log x^2 + 5\log x^3 = 11$.

Řešení: Rovnice je definována pro $x > 0$.

$$\log x + 3\cdot 2\log x + 5\cdot 3\log x = 11$$

$$(1+6+15)\log x = 11$$

$$\log x = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$$

$$x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}\,, \text{ což vyhovuje podmínce.}$$

Příklad 3.6.3. Řešte logaritmickou rovnici $\log(x+3)^2 - \log\left[4(x+1)^2\right] = 0$.

Řešení: Podmínka: $(x+3)^2 > 0 \wedge 4(x+1)^2 > 0$, $\quad x \neq -3 \wedge x \neq -1$.

Levou stranu rovnice upravíme pomocí vlastností logaritmů a pravou stranu vyjádříme jako logaritmus:

$$\log\frac{(x+3)^2}{4(x+1)^2} = \log 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{4(x+1)^2} = 1 \qquad \Big|\cdot 4(x+1)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 = 4x^2 + 8x + 4$$

$$3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4\cdot 35}}{2\cdot 3} = \frac{-2\pm\sqrt{64}}{6} = \frac{-2\pm 8}{6} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \end{matrix}\right.$$

Závěr: $x = 1$ i $x = -\frac{5}{3}$ vyhovují podmínce a jsou řešením dané rovnice.

Příklad 3.6.4. Řešte logaritmickou rovnici $\log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 = 0$.

Řešení: Zvolíme substituci $\log x = y$ a dostaneme kvadratickou rovnici

$$y^2 + 2y - 3 = 0 \;\Rightarrow\; (y+3)(y-1) = 0 \;\Rightarrow\; y_1 = -3,\; y_2 = 1.$$

Dosadíme zpět do substituční rovnice:

$$\log_2 x = -3 \;\Rightarrow\; x = 2^{-3} = \frac{1}{8},$$

$$\log_2 x = 1 \;\Rightarrow\; x = 2.$$

Závěr: $x = \frac{1}{8}$, $x = 2$ vyhovují podmínce $x > 0$ a jsou řešením dané rovnice.

Poznámka

Pozor na psaní mocniny: $\log^2 x \neq \log x^2$.

Příklad 3.6.5. Určete všechna přirozená čísla x splňující rovnici $4^{\log x} - 7\cdot 2^{\log x} - 8 = 0$.

Řešení: Nejprve si převedeme zápis $4^{\log x} = (2^2)^{\log x} = 2^{2\log x} = (2^{\log x})^2$ a pomocí substituce $2^{\log x} = y$ danou rovnici převedeme na rovnici kvadratickou

$$y^2 - 7y - 8 = 0 \;\Rightarrow\; (y+1)(y-8) = 0 \Rightarrow y = -1,\; y = 8.$$

Vrátíme se k substituci a dosadíme za y jen hodnotu 8, protože -1 nevyhovuje podmínce $x > 0$, takže $2^{\log x} = 8 = 2^3 \Rightarrow \log x = 3 \Rightarrow x = 10^3$

.

Příklad 3.6.6. Řešte rovnici: $2^{\log x} + 3^{\log x - 1} = 2^{\log x + 1} - 3^{\log x - 2}$.

Řešení: Nejprve upravíme rovnici tak, abychom měli na levé straně rovnice mocniny o základu 2, na pravé straně mocniny o základu 3 a zároveň využijeme znalostí o počítání s mocninami. $2^{\log x} - 2^{\log 2}\cdot 2 = -3^{\log x}\cdot 3^{-2} - 3^{\log x}\cdot 3^{-1}$,

vytkneme mocninu $2^{\log x}(1-2) = 3^{\log x}\left(-\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right)$.

Upravíme na tvar $\dfrac{2^{\log x}}{3^{\log x}} = \dfrac{4}{9} \;\Rightarrow\; \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$.

Získali jsme exponenciální rovnici o stejném základu, takže platí

$$\log x = 2 \;\Rightarrow\; x = 10^2 = 100.$$

Příklad 3.6.7. Řešte logaritmickou rovnici $\log(x+1)^2 \cdot \log\sqrt{x+1} = 2 + \log\frac{1}{x+1}$.

Řešení: Podmínka: $x+1>0 \Rightarrow x>-1$

Pomocí vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar:

$$2\log(x+1)\cdot\frac{1}{2}\log(x+1) = 2+\log 1-\log(x+1) \qquad \mid \ \log 1 = 0$$

$$[\log(x+1)]^2+\log(x+1)-2=0 \qquad \mid \ \log(x+1)=y \text{ (substituce)}$$

$$y^2+y-2=0$$

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\langle\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}$$

Vrátíme se k substituční rovnici:

$$\log(x+1)=-2 \qquad \text{a} \qquad \log(x+1)=1,$$

základní tvar logaritmické rovnice je pak

$$\log(x+1)=\log 10^{-2}, \qquad \log(x+1)=\log 10,$$

$$x+1=10^{-2} \qquad x+1=10^1$$

$$x=\frac{1}{100}-1 \qquad x=9$$

$$x=-\frac{99}{100}=\text{-0,99}$$

Závěr: $x=-0.99$ a $x=9$ vyhovují podmínce a jsou řešením dané rovnice.

Příklad 3.6.8. Vyřešte rovnici $\dfrac{\log(x^2+9)}{\log\sqrt{x+3}}=4$ a stanovte podmínky řešitelnosti.

Řešení: Protože existují jen logaritmy kladných čísel, musí být $x+3>0 \Rightarrow x>-3$,

dále musí platit: $\log\sqrt{x+3}\neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+3}\neq 1 \Rightarrow x\neq -2$,

takže rovnice je řešitelná pro $x\in(-3;-2)\cup(-2;\infty)$.

Po vynásobení jmenovatelem máme $\log(x^2+9)=4\log\sqrt{x+3}$,

převedeme úpravou na základní tvar $\log(x^2+9)=\log(x+3)^2$,

odtud po odlogaritmování dostaneme $x^2+9=x^2+6x+9 \Rightarrow x=0$.

Závěr: $x=0$ vyhovuje podmínce a je řešením dané rovnice.

3.7. Goniometrické rovnice

Výklad

Goniometrické rovnice jsou rovnice, které mají neznámou v argumentu goniometrické funkce.

Základní typy goniometrických rovnic a jejich řešení

a) Typ $\sin x = a$, $\cos x = a$, kde $a \in <-1, 1>$, $\operatorname{tg} x = b$, $\operatorname{cotg} x = \mathrm{b}$.

Tyto rovnice mají nekonečně mnoho řešení, a proto určíme nejdříve kořeny ležící v základním intervalu. Ten je u sinu a kosinu $\langle 0, 2\pi \rangle$ a pak všechna řešení zapíšeme přidáním celého násobku periody $\mathrm{T} = 2\pi$, u tangens a kotangens určíme kořeny ležící v základním intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nebo $(0, \pi)$ a opět všechna řešení zapíšeme přičtením celého násobku periody $T = \pi$,(viz řešené příklady 3.7.1.).

b) Typ $\sin A(x) = a$, $\cos A(x) = a$, $a \in <-1, 1>$, $\operatorname{tg} A(x) = b$, $\operatorname{cotg} A(x) = b$, kde $A(x)$ je algebraický výraz v proměnné x, řešíme substitucí $A(x) = \alpha$,(příklad 3.7.2.).

c) Typ obsahující různé mocniny goniometrické funkce stejného argumentu převedeme na algebraickou rovnici,(příklad 3.7.3.).

d) Typ obsahující více goniometrických funkcí stejného argumentu, řešíme převedením všech funkcí na jedinou funkci téhož argumentu, (příklad 3.7.4.).

e) Typ rovnice anulované, jejíž levou stranu lze rozložit na součin, řešíme tak, že jednotlivé činitele položíme rovny nule a řešíme,(příklad 3.7.5.).

Řešené úlohy

Příklad 3.7.1. Řešte rovnice: a) $\sin x = 0{,}5$,

b) $\operatorname{tg} x = -1$.

Řešení: a) $\sin x = 0{,}5$

Kladných hodnot v základním intervalu nabývá sinus v I. a II. kvadrantu.

Proto: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ je řešení v I. kvadrantu,

$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ je řešení v II. kvadrantu.

Všechna řešení dané rovnice jsou: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, kde $k \in Z$.

b) $\operatorname{tg} x = -1$

$\operatorname{tg} x = 1$ pro $x = \frac{\pi}{4}$, záporných hodnot nabývá funkce tangens ve II. kvadrantu, tedy

kořen $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Všechna řešení dané rovnice jsou $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, kde k je celé číslo.

Příklad 3.7.2. Řešte rovnici $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = -1$.

Řešení: Zvolíme substituci $2x + \frac{\pi}{6} = \alpha$, pak rovnice bude ve tvaru $\cos\alpha = -1$,

$\alpha = \pi$ je pak řešení v základním intervalu $< 0, 2\pi >$.

$$2x + \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ , } k \in Z \text{ , jsou všechna řešení.}$$

Příklad 3.7.3. Řešte goniometrickou rovnici $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Řešení: Substitucí $\sin x = y$ se změní daná rovnice na $2y^2 - y - 1 = 0$,

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Pro $\sin x = 1$ je $x_1 = \frac{\pi}{2}$ řešení v základním intervalu,

pro $\sin x = -\frac{1}{2}$ je řešení ve III. a IV. kvadrantu. Opět je vhodné vyjít z řešení rovnice

$\sin x' = \frac{1}{2}$ v intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, pak $x' = \frac{\pi}{6}$ a pro III.kvadrant je $x_2 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$,

pro IV.kvadrant dostaneme $x_3 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$

Závěr: všechna řešení dané rovnice jsou $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$,
$x_3 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in Z$.

Příklad 3.7.4. Řešte rovnici $\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{cotg} x$.

Řešení: Protože $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, rovnici napíšeme ve tvaru

$\operatorname{tg} x = \frac{3}{\operatorname{tg} x} \quad \Big| \cdot \operatorname{tg} x$, podmínky řešitelnosti: $x \neq k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\operatorname{tg}^2 x = 3$

$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$,

pro $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ je $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi$

pro $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ je $x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{2}{3}\pi + k\pi$, $k \in Z$.

Příklad 3.7.5. Řešte rovnici $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$.

Řešení: Pomocí vztahu $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ odstraníme v rovnici různé argumenty

$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x + 1 = 0$, dosadíme za $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \; 2\cos^2 x + \cos x = 0$, vytkneme $\cos x$,

$\cos x(2\cos x + 1) = 0$.

Pro $\cos x = 0$ je $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$,

pro $(2\cos x + 1) = 0$ je $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ (II. a III.kvadrant).

Nejprve si opět uvědomíme řešení rovnice $\cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$, pak

pro II. kvadrant dostaneme řešení $x_2 = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2}{3}\pi$,

pro III. kvadrant máme řešení $x_3 = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4}{3}\pi$.

Všechna řešení dané rovnice jsou $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = \dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $x_3 = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$, kde $k \in Z$.

3.8. Nerovnice

Výklad

Jsou-li *f(x)* a *g(x)* funkce definované v **R** s oborem hodnot v **R** nazýváme **nerovnicí** vztah

$f(x) > g(x)$ $[resp. f(x) \geq g(x)]$ a $f(x) < g(x)$ $[resp.\ f(x) \leq g(x)]$.

Úloha nalézt všechna *x*, která vyhovují dané nerovnici, se opírá o znalosti a dovednosti získané v kapitolách o řešení rovnic.

I zde užíváme ekvivalentních úprav, jak byly zavedeny u lineárních rovnic s tím, že při násobení nebo dělení záporným číslem se mění znaménko nerovnice.

Řešené úlohy

Příklad 3.8.1. Řešte nerovnici $2(2x+3) - 10 < 6(x-2)$.

Řešení: Zjednodušíme vynásobením $4x + 6 - 10 < 6x - 12 \quad |(-6x+4)$,

členy s neznámou budou na jedné straně $-2x < -8 \quad | : (-2)$,

vydělíme koeficientem u x $\quad x > 4$,

řešením nerovnice jsou všechna $x \in (4, \infty)$.

Příklad 3.8.2. Řešte nerovnici $\frac{4-7x}{6-x} \leq 2$.

Řešení: Nerovnice má smysl pro $x \neq 6$ a nelze ji vynásobit výrazem (6-x), protože nevíme, je-li výraz kladný nebo záporný. Podíl porovnáváme vždy s nulou, proto volíme následující postup:

$$\frac{4-7x}{6-x} - 2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4-7x-12+2x}{6-x} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-8-5x}{6-x} \leq 0.$$

Nulové body, v nichž se mění znaménko čitatele a jmenovatele jsou $x = -\frac{8}{5}$ a $x = 6$.

Rozdělí nám číselnou osu na tři disjunktní intervaly. Do zlomku dosadíme libovolné číslo, např. -3, které se nachází v levém intervalu a zjistíme, že zlomek je kladné hodnoty. V dalších intervalech zlomek střídá své znaménkové hodnoty a to vyznačíme pod číselnou osou jako +, –, +. Nulový bod jmenovatele nesmíme do intervalu zařadit.

$-\infty$		$-\frac{8}{5}$		6		∞
	$+$		$-$		$+$	

Řešením nerovnice jsou $x \in < -\frac{8}{5}; 6)$.

Příklad 3.8.3. Řešte nerovnici $3 + 2x - 8x^2 \leq 0$.

Řešení: Kvadratické nerovnice řešíme opět pomocí nulových bodů, takže je nejprve anulujeme a pak vždy rozložíme levou stranu na součin kořenových činitelů (viz.kap.3.2.). Danou nerovnici vynásobíme (-1), tím se změní znak nerovnice a levou stranu pak upravíme na součin, takže $8x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow 8\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 0$,

nulové body: $x = -\frac{1}{2}$ a $x = \frac{3}{4}$.

Na číselné ose, rozdělené nulovými body na 3 disjunktní intervaly, vyznačíme kladnost nebo zápornost kvadratického trojčlenu v jednotlivých intervalech. Nulové body do intervalu patří.

$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		∞
	$+$		$-$		$+$	

Řešením nerovnice jsou $x \in (-\infty, -\frac{1}{2} > \cup < \frac{3}{4}, \infty)$.

Příklad 3.8.4. Řešte nerovnici $|2y+1|-|3-y|<y$.

Řešení: Při řešení nerovnic s absolutními hodnotami postupujeme podobně jako při řešení rovnic s absolutními hodnotami (viz kap.3.3.). Zde však zjišťujeme průnik řešení s jednotlivými intervaly. Řešení nerovnice se opět opírá o metodu nulových bodů, které rozdělí číselnou osu na intervaly, v našem příkladě na tři intervaly.

V dané nerovnici jsou nulové body $\frac{-1}{2}$ a 3. V následující tabulce je nejprve uvedeno, jaký je dvojčlen v absolutní hodnotě v jednotlivých intervalech, zda je hodnoty kladné či záporné, a pak následuje řešení nerovnice.

	$(-\infty,-\frac{1}{2})$	$<-\frac{1}{2},3)$	$<3,\infty)$
$\lvert 2y+1\rvert$ $\lvert 3-y\rvert$	$-2y-1$ $3-y$	$2y+1$ $3-y$	$2y+1$ $-3+y$
řešení nerovnice	$-2y-1-(3-y)<y$ $-2y<4$ $y>-2$	$2y+1-(3-y)<y$ $2y<2$ $y<1$	$2y+1-(-3+y)<y$ $2y+1+3-y<y$ $4<0$
průnik s předpokladem	$y\in(-2,-\frac{1}{2})$	$y\in<-\frac{1}{2},1)$	prázdná množina

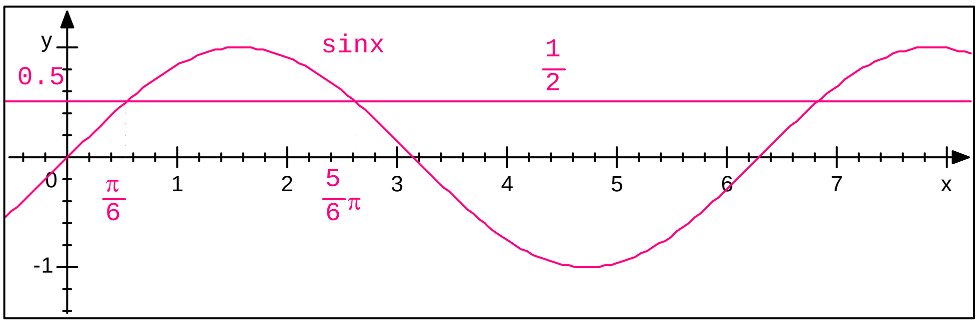
Řešením nerovnice jsou $y\in(-2,1)$.

Příklad 3.8.5. Řešte nerovnici $\sin(x)\geq\frac{1}{2}$.

Řešení:

$\sin x=\frac{1}{2}$ pro $x=\frac{\pi}{6}$ nebo $x=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$ v základním intervalu

$\sin x\geq 1/2$ pro $x\in<\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5}{6}\pi+2k\pi>$



Úlohy k samostatnému řešení

1. Řešte lineární rovnice:

a) $x-3[x-5(x-4)]=10(x-3)$,

b) $\frac{5x+1}{6}-\frac{7x-3}{8}=1-\frac{3x-1}{4}$,

c) $x-4[x-2(x+6)]=5x+3$,

d) $\frac{6+25x}{15}-(x-1)=\frac{2x}{3}+\frac{7}{5}$,

e) $v+\frac{3-7v}{5}=\frac{v+3}{5}-\frac{2v-1}{3}$.

2. Rozložte na součin kořenových činitelů

a) x^2+5x,

b) x^2+2x-3,

c) $2x^2+4x+2$,

d) $-\frac{x^2}{2}+1$,

e) $3x^2+2x-1$.

3. Řešte kvadratické rovnice:

a) $3x^2+6x-9=0$,

b) $5x^2-20x=5$,

c) $x^2-0{,}8x=15{,}84$;

d) $4x^2+x-3=0$,

e) $x^2+x+1=0$.

4. Normovaný kvadratický trojčlen rozložte na součin kořenových činitelů:

a) x^2-4x+3,

b) $x^2-2x-35$,

c) $x^2-10x+9$,

d) $x^2-4x-60$.

5. Sestavte kvadratickou rovnici jejíž kořeny jsou :

a) 2 a 3,

b) -5 a 2.

6. Řešte rovnice (pomocí Viètových vzorců $x_1\cdot x_2=q$, $x_1+x_2=-p$)

a) $x^2-7x+6=0$,

b) $x^2+4x-12=0$,

c) $x^2-19x-20=0$.

7. Řešte rovnice:

a) $|x-7|+4x=|2x-5|$, b) $|x-2|=\frac{x}{2}$, c) $|2x+1|+|2-x|=3$,

d) $|1-x|+|x|=-1$, e) $|x+1|+3|x-1|=2|x|+x$, f) $|7-x|=|1-x|+3|x|$.

8. Řešte rovnice:

a) $21+\sqrt{2x-7}=x$, b) $\sqrt{x+2}=-3$, c) $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=9$,

d) $\sqrt{9+x}-\sqrt{x-7}=2$, e) $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)=x+1$, f) $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-5}=3$,

g) $\sqrt{2x+7}-\sqrt{x-5}=\sqrt{3x+2}$.

9. Řešte exponenciální rovnice v základním tvaru:

a) $10^x=0{,}01$, b) $2^{-x}=\frac{1}{8}$, c) $\left(\frac{4}{9}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^8$,

d) $0{,}25\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}=1$, e) $2^x=100$, f) $2^{-x}=1{,}8$.

10. Řešte v oboru reálných čísel rovnice:

a) $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448$, b) $3^{2x-1}+3^{2x-2}+3^{2x-4}=333$,

c) $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=5^x+5^{x+1}+5^{x+2}$, d) $\frac{3^{x+2}}{3^{2x-4}}=\frac{\log 64}{\log 4}$,

e) $5^{2-x}=6^{2x-4}$, f) $9^x+2\cdot 3^x-3=0$,

g) $2\cdot 5^{2x}+2\cdot 5^x-12=0$.

11. Užijte definice logaritmu k řešení jednoduchých rovnic:

a) $\log_3 x=2$, b) $\log_2 x=\frac{1}{2}$, c) $\log_4 x=-1$,

d) $\log_x 4=2$, e) $\log_x 0{,}1=-1$, f) $\log_x 100=2$,

g) $\log_2\frac{1}{8}=x$, h) $\log_2\sqrt[3]{4}=x$, i) $\log_3 3=x$.

12. Určete všechna řešení daných rovnic v oboru reálných čísel:

a) $\log(x+2)-\log(x-1)=2-\log 4$, b) $3\log_3 x-2\log_3 x^3+\log_3 x^2=2$,

c) $\dfrac{\log 2x}{\log(4x-15)}=2$, d) $3\cdot 16^{\log x}-5\cdot 4^{\log x}-2=0$,

e) $\log_3(x-1)-2\log_3(x-3)=0$, f) $\dfrac{\log_2(x-1)}{\log_2(3-x)}=\log_2 4$.

13. Řešte goniometrické rovnice:

a) $\sin x=-0{,}5$, b) $\cos 4x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

c) $\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}=1$, d) $4\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x=1$,

e) $\sin 2x=\sin x$, f) $\sin^2 x+\dfrac{1}{4}=\sin x$,

g) $3\cos^2 2x=\sin^2 2x$, h) $\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x=0$,

i) $\operatorname{tg} x=\operatorname{cotg} x$, j) $\sin\dfrac{x}{2}+\cos x=1$.

14. Řešte v oboru reálných čísel nerovnice:

a) $\dfrac{2+27x}{6}<\dfrac{5}{2}+\dfrac{12x+1}{3}$, b) $\dfrac{4x}{3}\le\dfrac{2}{3}+x$,

c) $(3x-5)^2+(4x-3)^2>(5x-4)^2$, d) $\dfrac{3-2x}{2x-5}<0$,

e) $\dfrac{3x-7}{3-2x}\ge 2$, f) $3x^2-3x+4\ge 2x^2+2x-2$,

g) $3x^2-19x+6<0$, h) $1+2x-3x^2<0$.

15. Řešte nerovnice s absolutní hodnotou:

a) $|x|+|x-1|>2$, b) $|2x-3|\ge|3x-2|$, c) $|7-x|>|1-x|+3|x|$, d) $\dfrac{|3-5x|}{x-1}>5$.

16. Řešte goniometrické nerovnice:

a) $\sin x < -0{,}5$; b) $\operatorname{cotg}\frac{x}{2} < 1$, c) $\operatorname{tg} 2x \geq -1$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $x = 10$, b) $x = 1$, c) rovnice nemá řešení,

d) rovnice má nekonečně mnoho řešení, e) $v = 5$.

2. a) $x^2 + 5x = x(x+5)$, b) $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$,

c) $2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2(x+1)^2$, d) $-\frac{x^2}{2} + 1 = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$,

e) $3x^2 + 2x - 1 = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (3x-1)(x+1)$.

3. a) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, b) $x_1 = 2 + \sqrt{5}$, $x_2 = 2 - \sqrt{5}$,

c) $x_1 = -3{,}6$; $x_2 = 4{,}4$, d) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{4}$,

e) rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel.

4. a) $(x-1)(x-3)$, b) $(x-7)(x+5)$,

c) $(x-1)(x-9)$, d) $(x-10)(x+6)$.

5. a) $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$, $x^2 - 5x + 6 = 0$,

b) $(x+5)(x-2) = x^2 + 3x - 10$, $x^2 + 3x - 10 = 0$.

6. a) $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, b) $x_1 = 2$, $x_2 = -6$,

c) $x_1 = 20$, $x_2 = -1$.

7. a) $x = -\frac{2}{5}$, b) $x = \frac{4}{3}$ a $x = 4$,

c) $x = -\frac{2}{3}$ a $x = 0$, d) nemá řešení,

e) $x = \frac{4}{5}$, $x = 2$, f) $x = -2$, $x = \frac{8}{5}$.

8. a) $x=28$, b) nemá řešení, c) $x=16$, d) $x=16$,

e) $x=9$, f) nemá řešení, g) $x=5$.

9. a) $x=-2$, b) $x=3$, c) $x=-4$, d) $x=-\frac{1}{2}$,

e) $x=\log_2 100$ nebo $x=\frac{2}{\log 2}\doteq 6{,}644$, f) $x=-\frac{\log 1{,}8}{\log 2}\doteq -0{,}845$.

10. a) $x=9$, b) $x=3$, c) $x=\frac{\log 31-\log 13}{\log 3-\log 5}\doteq -1{,}701$;

d) $x=5$, e) $x=2$, f) $x=0$,

g) $x=\log_5 2$ nebo $x=\frac{\log 2}{\log 5}\doteq -0.431$.

11. a) $x=9$, b) $x=\sqrt{2}$, c) $x=\frac{1}{4}$,

d) $x=2$, e) $x=10$, f) $x=10$,

g) $x=-3$, h) $x=\frac{2}{3}$, i) $x=1$.

12. a) $x=\frac{9}{8}$, b) $x=\frac{1}{9}$, c) $x=\frac{9}{2}$,

d) $x=\sqrt{10}$, e) $x=5$, f) nemá řešení.

13. a) $x_1=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$, $x_2=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$, $k\in Z$, b) $x=\pm\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$,

c) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$, d) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$,

e) $x_1=k\pi$, $x_{2,3}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$, f) $x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x_2=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$,

g) $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$, h) $x_1=k\pi$, $x_2=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in Z$,

i) $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in Z$,

j) $x_1=2k\pi$, $x_2=\frac{\pi}{3}+4k\pi$, $x_3=\frac{5\pi}{3}+4k\pi$, $k\in Z$.

14. a) $x \in (-\infty, 5)$, b) $x \in (-\infty, 2>$, c) $x \in (-\infty, \frac{9}{7})$, d) $x \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$,

e) $x \in (\frac{3}{2}, \frac{13}{7}>$, f) $x \in (-\infty, 2> \cup < 3, \infty)$, g) $x \in (\frac{1}{3}, 6)$, h) $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$.

15. a) $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$, b) $x \in < -1, 1 >$, c) $x \in (-2, \frac{8}{5})$, d) $x \in (1, \infty)$.

16. a) $x \in (\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi)$, b) $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, c) $x \in < -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})$.

Shrnutí lekce

První informace o úspěšném zvládnutí této kapitoly Vám dají příklady k procvičení. Pokud nevycházejí uvedené výsledky, vraťte se k teorii a řešeným příkladům. Důvodem neúspěchu by mohly být i numerické chyby. Pokud máte pocit, že většinu příkladů k procvičení zvládáte, přistupte k následujícímu testu. Pokud se vám však zdají některé příklady těžké, nahlédněte do klíče na konci kapitoly, kde najdete postup nebo návod k řešení.

Kontrolní test

1. Pro která x je trojčlen $4x^2 + 4x + 1$ roven nule?

   a) $x = 0$, b) $x = \pm\frac{1}{2}$, c) $x = -\frac{1}{2}$.

2. Pro která x je trojčlen $4x^2 + 4x + 1$ roven čtyřem?

   a) $x_1 = 2, x_2 = -3$, b) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$, c) $x_1 = 0, x_2 = 4$.

3. Řešte rovnici $x - \sqrt{x^2 - 12} = 2$.

   a) $x_{1,2} = \pm 2$, b) $x = 4$ c) $x = 0$.

4. Určete řešení rovnice s absolutními hodnotami: $|x-2| = 3\,|x-4|$.

   a) $x_1 = 3{,}5; x_2 = 5$, b) $x \in (0,1)$ c) $x = -4$.

5. V oboru reálných čísel řešte rovnici $\log\sqrt{3x-5} + \log\sqrt{7x-3} = 1 + \log\frac{\sqrt{11}}{10}$.

   a) $x = -1$, b) $x = 2$, c) $x = \frac{-2}{11}$.

6. Řešte v R rovnici $5.2^{x+2} - 6.3^{x+2} = 3^{x+3} + 2.2^{x+1}$.

a) $x = 0$, b) $x_{1,2} = \pm 2$, c) $x = -4$.

7. Najděte všechna řešení rovnice $2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0$.

a) $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, b) $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, c) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$.

8. V oboru reálných čísel řešte nerovnici $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x} < 0$.

a) $x_1 = 3, x_2 = 4$, b) $x \in \langle 0; 1\rangle$, c) $x \in (-2; 0) \cup (1; 4)$.

9. V oboru reálných čísel řešte nerovnici $|1 - 2x| + |2 + 3x| < 11$.

a) $x \in (-\frac{12}{5}; 2)$, b) $x \in < 2; \infty)$, c) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (1; 3)$.

Výsledky testu

1.c); 2. b); 3.b); 4.a); 5.b); 6.c); 7.a); 8.c); 9.a).

Klíč k řešení úloh

1. a) Nejprve roznásobíme výraz v kulaté závorce, pak v hranaté a po úpravě dostaneme $3x = 30 \Rightarrow x = 10$.

b) Vynásobením společným jmenovatelem (24) odstraníme zlomky, upravíme na tvar $17x = 17 \Rightarrow x = 1$.

c) stejný postup jako v úloze a), po úpravě se x vyruší a zůstane, že 45 = 0, a proto rovnice nemá řešení.

2. viz zápis řešení ve výsledku.

3. Všechny kvadratické rovnice musí být v základním tvaru, tzn. na pravé straně je 0. Je vhodné před použitím vzorce pro kořeny kvadratické rovnice (kap.3.2.) vytknout společný násobek koeficientů.

4. Hledáme takovou dvojici čísel, že jejich součin je 3 a součet -4, součin je -35 a součet -2, součin je 9 a součet -10, součin je -60 a součet -4. Která to jsou?(viz příklad 3.2.2.).

5. viz příklad 3.2.3.

6. viz příklad 3.2.2.

7. Volte stejný postup jako v příkladu 3.3.1. nebo 3.3.2.

a) nulové body $x = 7$ a $x = \frac{5}{2}$ rozdělí číselnou osu na 3 intervaly. Pro každý interval zjistíme jakých hodnot nabývá v absolutní hodnotě a rovnici přepíšeme bez absolutních hodnot, vyřešíme ji a výsledek porovnáme s předpokladem.

b) nulový bod je $x = 2$. Nejprve rovnici řešíme pro $x \in (-\infty; 2)$ a pak pro $x \in < 2; +\infty)$.

c) nulové body $x = -\frac{1}{2}$ a $x = 2$ rozdělí číselnou osu na 3 intervaly.

d) nulové body $x = 0$ a $x = 1$ rozdělí číselnou osu na 3 intervaly.

e) nulové body $x = -1, x = 0, x = 1$ rozdělí číselnou osu na 4 intervaly.

f) nulové body jsou $x = 0, x = 1, x = 7$.

8. a) návod na řešení najdete v řešeném příkladu 3.4.1. Umocněním a úpravou dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - 44x + 448 = 0 \Rightarrow (x-28)(x-16) = 0$. Zkouškou si ověříte,že rovnici vyhovuje pouze kořen $x = 28$.

b) stejný postup jako za a).

c) rovnici si upravíme takto: $\sqrt{x+9} = 9 - \sqrt{x}$ a dále postupujeme stejně jako u př. 3.4.2.

d) obdobně jako v úloze 3.4.2.

e) po roznásobení závorek a úpravě dostaneme $\sqrt{x} = 3$.

f) rovnice nemá řešení, protože platí podmínka $x \geq 5$.

g) rovnici umocníme, upravíme a dostaneme $4(2x+7)(x-5) = 0$. Zkouškou zjistíme,že vyhovuje pouze $x = 5$.

9. Všechny rovnice a) až c) se řeší podle příkladu 3.5.1. krok b).Stačí si uvědomit, že potřebujeme na pravé straně mocninu o stejném základu:

a) $10^x = 10^{-2}$, b) $2^{-x} = 2^{-3}$, c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-8}$.

d) Uvědomíme si, že $0{,}25 = \frac{1}{4}$ a rovnici přepíšeme do tvaru $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = 1 \Rightarrow$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{0} \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

e), f) řešíme zlogaritmováním.

10. a), b) viz řešení příkladu 3.5.1

c) viz příklad 3.5.3.

d) stačí si uvědomit, že mocninu ze jmenovatele můžeme napsat do čitatele s opačným exponentem takto: $3^{x+2}\cdot 3^{-2x+4}=3$, protože $\log 64=\log 4^3=3\log 4$.

f) substituce $3^x=y$, pak máme rovnici $y^2+2y-3=0\Rightarrow (y+3)(y-1)=0$ a pokračujeme jako v příkladu 3.5.2.

g) substituce $5^x=y$, pak dostaneme rovnici $2y^2+2y-12=0\Rightarrow y^2+y-6=0$, tu vyřešíme a dále jako v předchozím příkladu.

11. Všechny rovnice se řeší stejným postupem jako v příkladu 3.6.1.

a) $x=3^2$, b) $x=2^{\frac{1}{2}}$, c) $x=4^{-1}$
d) $4=x^2$, e) $0{,}1=x^{-1}$, f) $100=x^2$,
g) $\dfrac{1}{8}=2^x$, h) $\sqrt[3]{4}=2^x$, i) $3=3^x$.

12. Při řešení rovnic a), b), c) využijeme vlastností logaritmů (kap.3.6.).

a) $\log\dfrac{x+2}{x-1}=\log\dfrac{100}{4}$, typ rovnice b)2. kap.3.6.

b) Zlogaritmujeme mocniny a sečteme: $3\log_3 x-6\log_3 x+2\log_3 x=2\Rightarrow \log_3 x=-2$.

c) Upravíme na $\log 2x=2\log(4x-15)\quad\Rightarrow\quad 2x=(4x-15)^2$.
Po umocnění a úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $16x^2-122x+225=0$, která má kořeny $x_1=\dfrac{9}{2}$ a $x_2=\dfrac{50}{16}=3{,}125$. Druhý kořen nevyhovuje podmínce řešitelnosti rovnice: $x\in(3{,}75;\,4\}\cup(4,\infty)$.

d) Uvědomíme si, že $16^{\log x}=4^{2\log x}=(4^{\log x})^2$, volíme substituci $4^{\log x}=y$, dostaneme kvadratickou rovnici $3y^2-5y-2=0$. Ta má kořeny $y_1=2,\ y_2=-\dfrac{1}{3}$. Druhý kořen nevyhovuje, protože substituční rovnice je exponenciální. Vrátíme se k substituci, pak

$$4^{\log x}=2\ \Rightarrow\ \log x\cdot\log 4=\log 2\ \Rightarrow \log x=\frac{\log 2}{2\log 2}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad x=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}.$$

e) Rovnici přepíšeme do tvaru $\log_3(x-1)=\log_3(x-3)^2\ \Rightarrow\ x-1=x^2-6x+9\Rightarrow$ po úpravě $x^2-7x+10=0\ \Rightarrow\ (x-5)(x-2)=0\ \Rightarrow x=5,\ x=2$ nevyhovuje, protože podmínka řešitelnosti rovnice je $x>3$.

f) Nejprve stanovíme podmínky řešitelnosti rovnice (viz př. 3.6.8.) a uvědomíme si, že na pravé straně rovnice máme $\log_2 4=2$, pak po vynásobení dostaneme rovnici $\log_2(x-1)=2\log_2(3-x)\ \Rightarrow x-1=(3-x)^2=9-6x+x^2\ \Rightarrow\ x^2-7x+10=0$.
Kořeny kvadratické rovnice $x=2$ a $x=5$ nevyhovují podmínce řešitelnosti: $x\in(1,2)\cup(2,3)$, proto daná rovnice nemá řešení.

13. a) viz příklad 3.7.3., druhý kořen dosazený do substituční rovnice.

b) $\cos 4x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (I.a IV.kvadrant), $4x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi\Rightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in Z$.

c) $\cot g\frac{x}{2}=1\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$.

d) použijeme vzorec $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\,\cos\alpha$,

$2\sin 2x\cos 2x=1\Rightarrow\sin 4x=1\Rightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$.

e) $\sin 2x=\sin x\Rightarrow 2\sin x\cos x-\sin x=0\Rightarrow\sin x(2\cos x-1)=0\Rightarrow$

$\sin x=0\vee\cos x=\frac{1}{2}$, dále viz tab. v kapitole 2.10.2.

f) nejprve rovnici upravíme na tvar $4\sin^2 x-4\sin x+1=0,$ substituce $\sin x=y$,

$4y^2-4y+1=0\Rightarrow(2y-1)^2=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}$, takže $\sin x=\frac{1}{2}$, viz příklad 3.7.1.a).

g) Platí $\sin^2 2x+\cos^2 2x=1\Rightarrow\sin^2 2x=1-\cos^2 2x$ a toto dosadíme do rovnice a po úpravě dostaneme $4\cos^2 2x-1=0\Rightarrow\cos^2 2x=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos 2x=\pm\frac{1}{2}$,

$\cos 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$,

$\cos 2x=-\frac{1}{2}$ (II. a III.kvadrant), pro II.kvadrant: $2x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi$,

pro III.kvadrant $2x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi\Rightarrow x=\frac{2}{3}\pi+k\pi$.

Výsledky $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $x=\frac{2}{3}\pi+k\pi$ lze zapsat jediným zápisem

$x=\pm\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2},\ k\in Z.$

h) po vytknutí: $\sin x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0$, buď $\sin x=0\Rightarrow x=k\pi$, nebo

$\sin x=\sqrt{3}\cos x\ \Rightarrow\ \frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{3}\ \Rightarrow\ tgx=\sqrt{3}\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in Z$.

i) $tgx=\frac{1}{tgx}\ \Rightarrow\ tg^2x=1\ \Rightarrow\ tgx=\pm 1\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in Z$.

j) Použijeme vzorec $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ a nahradíme v dané rovnici

$\cos x=\cos(2\frac{x}{2})=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$, dále platí,že $\cos^2\frac{x}{2}=1-\sin^2\frac{x}{2}$, tímto

postupným nahrazováním a následnou úpravou se dostaneme k rovnici

$2\sin^2\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0\ \Rightarrow\ \sin\frac{x}{2}(2\sin\frac{x}{2}-1)=0\Rightarrow\sin\frac{x}{2}=0\vee\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$ (I. a II.kv.)

$\sin\frac{x}{2}=0\ \Rightarrow\ \frac{x}{2}=k\pi\ \Rightarrow x=2k\pi$, $k\in Z$.

$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{3}+4k\pi,k\in Z$, platí pro I. kvadrant,

$\frac{x}{2}=\frac{5}{6}\pi+2k\pi\ \Rightarrow\ x=\frac{5}{3}\pi+4k\pi,\ k\in Z$, platí pro II.kvadrant.

14. a) po vynásobení číslem 6 a úpravě získáme nerovnici $3x < 15 \Rightarrow x < 5 \Rightarrow x \in (-\infty, 5)$.

b) $4x \le 2 + 3x \Rightarrow x \le 2 \Rightarrow x \in (-\infty, 2 >$.

c) umocníme a upravíme na tvar $-14x > -18 \Rightarrow x < \frac{18}{14} = \frac{9}{7} \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{9}{7})$.

d) nulové body $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{5}{2}$ rozdělí číselnou osu na 3 intervaly a dále podle př.3.8.2.

e) zvolte stejný postup jako u příkladu 3.8.2. Úpravou dostaneme $\frac{7x-13}{3-2x} \ge 0$,

nulové body $x = \frac{13}{7}$ a $x = \frac{3}{2}$ rozdělí číselnou osu na 3 intervaly.

f) po úpravě dostaneme kvadratickou nerovnici $x^2 + 5x + 6 \ge 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) \ge 0$,

nulové body $x = 2, x = 3$ rozdělí číselnou osu na 3 intervaly a dále podle př.3.8.3.

g) rozklad $3(x - \frac{1}{3})(x-6) < 0$, viz úloha 14.f).

h) $1 + 2x - 3x^2 < 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 > 0 \Rightarrow 3(x-1)(x+\frac{1}{3}) > 0$,

dále metodou nulových bodů.

15. Nerovnice s absolutní hodnotou a),b) řešíme metodou nulových bodů, viz příklad 3.8.4.

c) nulové body $x = 7, x = 1, x = 0$ rozdělí číselnou osu na disjunktní intervaly

$(-\infty, 0), < 0, 1), < 1, 7), < 7, \infty)$.

d) za předpokladu, že $x \in (-\infty, \frac{3}{5})$ nerovnice $\frac{3-5x}{x-1} > 5$ nemá řešení,

pro $x \in < \frac{3}{5}, \infty)$ nerovnici $\frac{5x-3}{x-1} > 5$ upravíme na $\frac{2}{x-1} > 0 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x \in (1, \infty)$.

16. a) vycházíme z grafu funkce $y = \sin x$, ten protneme přímkou y = -0,5, průsečíky vymezí intervaly, viz příklad 3.8.5.

b) z grafu funkce $y = \operatorname{cotg} x$ (kap.2.10.2.) vyčteme, že pro $x \in (\frac{\pi}{4}, \pi)$ je $\operatorname{cotg} x < 1$,

takže náš argument $\frac{x}{2} \in (\frac{\pi}{4} + k\pi, \pi + k\pi) \Rightarrow x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi), k \in Z$.

c) z grafu funkce $y = tgx$ vyčteme, že pro $x \in < -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ je $tgx \ge -1$, takže argument

$2x \in < -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \Rightarrow x \in < -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}), \ k \in Z$.