1. ČÍSELNÉ OBORY 10

1.1. Některé pojmy z matematické logiky 10
1.1.1. Výroková logika 10
1.1.2. Množiny a vztahy mezi nimi 12
1.1.3. Množinové operace 13
1.1.4. Grafické znázornění množin 14

1.2. Číselné obory 15
1.2.1. Čísla – názvy a jejich charakteristiky 15
1.2.2. Charakteristiky číselných oborů 17
1.2.3. Základní početní operace 17
1.2.4. Intervaly 17

1.3. Algebraické výrazy 19
1.3.1. Polynomy (mnohočleny) 19
1.3.2. Úprava racionálních lomených výrazů (vzorce a pravidla pro umocňování). 20
1.3.3. Úprava iracionálních algebraických výrazů (pravidla pro odmocňování) 22
1.3.4. Absolutní hodnota reálného čísla 23
1.3.5. Rozklad kvadratického trojčlenu 24

Kontrolní otázky 24

Úlohy k samostatnému řešení 25

Výsledky úloh k samostatnému řešení 25

Klíč k řešení úloh 26

Kontrolní test 27

Výsledky testu 28

1. ČÍSELNÉ OBORY

Průvodce studiem

Tato kapitola Základů matematiky je rozdělena do tří menších celků a ty jsou ještě dále rozčleněny na menší oddíly, v nichž je podán stručný přehled těch partií ze středoškolské matematiky, které potřebujete k pochopení dalšího učiva. Jejím prostudováním si zopakujete a doplníte případné mezery ve svých matematických znalostech. Do třetí podkapitoly jsou zařazeny řešené příklady a po nich Úlohy k samostatnému řešení s výsledky. Jak dalece jste zvládli učivo 1.kapitoly si ověříte na kontrolním testu.

Předpokládané znalosti

Znát základní vlastnosti početních operací (komutativnost, asociativnost,distributivnost), umět mnohočleny sčítat, odečítat, násobit, znát výpočet kořenů kvadratické rovnice.

1.1. Některé pojmy z matematické logiky

Cíle

Cílem této kapitoly je stručně se seznámit se základními pojmy z matematické logiky a teorie množin.

Výklad

1.1.1. Výroková logika

VÝROK je vyslovené nebo napsané tvrzení, o němž má smysl rozhodnout, zda je pravdivé nebo nepravdivé, přičemž musí nastat právě jedna z těchto dvou možností.

Tvrzení, o nichž v daném okamžiku nejsme schopni říct, zda jsou pravdivé či nepravdivé, nazýváme **HYPOTÉZY** (domněnky).

Je-li výrok **pravdivý**, pak můžeme také říct, že výrok **platí**.

Je-li výrok **nepravdivý**, pak můžeme také říct, že výrok **neplatí**.

Výroky označujeme velkými písmeny latinské abecedy (A, B, C,…).

Proměnná je symbol, který označuje kterýkoli objekt z dané množiny objektů.

Logická spojka má symbolické označení : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ **.**

Pomoci logických spojek vytvoříme z daných výroků výroky nové.

Základní složené výroky vidíme v následující tabulce. Základní se jim říká proto, že vzniknou použitím pouze jediné logické spojky.

Symbol logické spojky	Název složeného výroku	Symbolické označení výroku	Vyjádření v jazyce
$\neg$	negace výroku A	$\neg A$	není pravda, že A
$\wedge$	konjunkce výroků A, B	$A \wedge B$	A a B, A a zároveň B,(A i B)
$\vee$	disjunkce výroků A, B	$A \vee B$	A nebo B, (nebo není vylučovací!)
$\Rightarrow$	implikace výroku A výrokem B	$A \Rightarrow B$	jestliže A, pak B A je postačující podmínkou pro B B je nutnou podmínkou pro A
$\Leftrightarrow$	ekvivalence výroků A, B	$A \Leftrightarrow B$	A právě tehdy když B A tehdy a jen tehdy, když B A je nutnou a postačující podmínkou pro B

Výrokům se přiřazují tzv. **pravdivostní hodnoty**. **Pravdivému výroku** se přiřazuje pravdivostní hodnota **1** a **nepravdivému výroku** se přiřazuje pravdivostní hodnota **0**.

Tabulka pravdivostních hodnot základních složených výroků:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Základní kvantifikátory

Název kvantifikátoru	**Označení**	**Čtení – jazykový význam**
Obecný kvantifikátor	$\forall$	pro každé, pro všechna
Existenční kvantifikátor	$\exists$	existuje (alespoň jedno)
Kvantifikátor jednoznačné existence	$\exists\,!$	existuje právě jedno

Výrazy vytvořené z konečného počtu výrokových proměnných, logických spojek a případných závorek se nazývají **výrokové formule**. Výrokové formule, které jsou vždy pravdivé, se nazývají **tautologie**, Výrokové formule, které jsou vždy nepravdivé, se nazývají **kontradikce**. Výroky vzniklé kvantifikací všech proměnných ve výrokové formuli se nazývají **výroky s kvantifikátory**. Uvedeme si je na příkladech výroků s jednou proměnnou:

a) **Obecný výrok** $\forall x \in R : x^2 \geq 0$...pravdivý výrok

b) **Existenční výrok**: $\exists x \in R : x^2 = 2$...pravdivý výrok

c) **Výrok o existenci a unicitě**: $\exists! x \in R : x^2 = 2$ ...nepravdivý

1.1.2. Množiny a vztahy mezi nimi

MNOŽINA je soubor libovolných navzájem rozlišitelných objektů, které mají stejnou vlastnost, vzhledem ke které jsou chápány jako jeden celek. Množinu pokládáme za určenou, je-li možno o každém objektu jednoznačně rozhodnout, zda do ní patří, či nikoliv.

Každý z objektů, který patří do množiny, se nazývá **prvek množiny**.

K označování množin se většinou používají velká písmena latinské abecedy $A, B, M, ...$, k označování jejich prvků malá písmena $a, b, x, ...$ Výjimkou je např. značení v geometrii.

Značení: $a \in A$.........objekt a je prvkem (elementem) množiny A,

$b \notin A$...........objekt b není prvkem (elementem) množiny A.

Množina obsahující alespoň jeden prvek se nazývá neprázdná.

Množina, která neobsahuje žádný prvek se nazývá prázdná a značí se $\emptyset$.

Z hlediska počtu prvků můžeme množiny rozdělit na

konečné – mají konečný počet prvků (prázdná množina nebo množina, jejíž počet prvků je přirozené číslo). Počet prvků konečné množiny A označujeme $|A|$.

nekonečné – ty, které nejsou konečné.

Způsoby zadání množiny:

a) **výčtem prvků**, tj. vyjmenováním všech prvků množiny, např. $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

Pozor! množina přirozených čísel $N = \{1,2,3,4,5,...\}$ není dána výčtem prvků.

Tímto způsobem lze zadat pouze množinu konečnou.

Množina všech jednociferných přirozených čísel $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

b) charakteristickou **vlastností**, tj. vlastností, kterou mají právě jen prvky zadávané množiny

Prvky množin mohou být opět množiny. Množinu, jejímiž prvky jsou jisté množiny, nazýváme **systém množin**. Vylučuje se případ množiny, která by obsahovala jako prvek samu sebe a případ množiny všech množin.

Vztahy mezi množinami A, B

vztah	symbol	čtení symbolu	definice
Inkluze množin A a B	$A \subseteq B$	množina A je podmnožinou (částí) množiny B	A je podmnožinou B, právě když každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B
Rovnost množin A a B	$A = B$	množina A se rovná množině B	A a B jsou si rovny, právě když $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq A$
Ostrá inkluze množin A a B	$A \subset B$	množina A je vlastní podmnožinou B	A je vlastní podmnožinou B, právě když $A \subseteq B$ a zároveň $A \neq B$, $A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \wedge A \neq B$

1.1.3. Množinové operace

Základní operace s množinami A a B

operace	symbol	definice
Sjednocení množin A a B	$A \cup B$	Sjednocení množin A a B je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin A, B.
Průnik množin A a B	$A \cap B$	Průnik množin A a B je množina všech prvků, které patří do množiny A a zároveň do množiny B.
Rozdíl množin A a B	$A - B$	Rozdíl množin A a B je množina všech prvků, které patří do množiny A a zároveň nepatří do množiny B.
Doplněk množiny A	A'_U	Doplněk množiny A je množina všech prvků z množiny U, které nepatří do množiny A.

Pro $A \subset B$ nazveme rozdíl $B - A$ **doplňkem** množiny A v množině B. Značíme A'_B.

Říkáme, že množina A **je disjunktní s množinou** B**,** právě když mají množiny A a B prázdný průnik ($A \cap B = \emptyset$), tj. nemají žádný společný prvek.

Řešená úloha

Příklad 1.1.1. Jsou dány intervaly A=<1; 4> a B=(-2; 3). Určete sjednocení, průnik a rozdíl těchto intervalů.

Řešení: $A \cup B = (-2; 4>$, $A \cap B =<1; 3)$; $A - B =<3; 4>$; $B - A = (-2; 1)$.

Výklad

Kartézské násobení množin

to je vytváření kartézských součinů, představuje další operaci s množinami, avšak podstatně odlišnou od základních množinových operací.

Kartézským součinem množiny *A* a množiny *B*, který značíme $A \times B$, nazveme množinu všech uspořádaných dvojic, jejichž první člen je libovolný prvek z množiny A a druhý člen je libovolný prvek z množiny B.

$$A \times B = \left\{ [x_i, y_j], x_i \in A, y_j \in B \right\}$$

Pro počet prvků kartézského součinu dvou konečných množin A s počtem prvků n a B s počtem prvků m platí: $|A \times B| = |A| \cdot |B| = n \cdot m$.

Řešená úloha

Příklad 1.1.2. Jsou dány množiny A={1, 2, 3}, B={a, b}.

Vytvořte kartézský součin $A \times B$ a $B \times A$.

Řešení: $A \times B = \{[1,a],[1,b],[2,a],[2,b],[3,a],[3,b]\}$,

$B \times A = \{[a,1],[a,2],[a,3],[b,1],[b,2],[b,3]\}$.

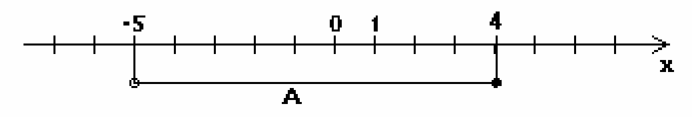
1.1.4. Grafické znázornění množin

a) číselných

Číselné množiny nejčastěji znázorňujeme na číselné ose, a to buď přímo na ní nebo pomocí vodorovných čar rovnoběžných s číselnou osou. Pokud číselná množina obsahuje nekonečně mnoho reálných čísel (viz dále), potom jedna z možností, jak zapsat množinu nebo její část, je **interval**, který může, ale nemusí obsahovat krajní hodnoty. Pokud krajní hodnota intervalu do množiny patří, vyznačíme tuto hodnotu plným kolečkem. Pokud do množiny nepatří, vyznačíme ji kolečkem prázdným. To, zda krajní hodnota do intervalu patří, či ne, poznáme podle uzávorkování intervalu. Špičatá závorka označuje hodnotu, která ještě do intervalu patří a kulatá závorka hodnotu, která již do intervalu nepatří.

Řešená úloha

Příklad 1.1.3. Je dána množina $A = \{ x \in R : x \in (-5; 4\rangle \}$, znázorněte ji na číselné ose.



Výklad

b) nečíselných

Nečíselné množiny a množiny číselné, které z nějakého důvodu nelze nebo není vhodné znázornit na číselné ose, znázorňujeme pomocí tzv. **množinových diagramů**. Jedná se o grafické znázornění množiny v rovině.

Množinové diagramy znázorňující vztahy mezi množinami a operace s množinami se nazývají **Vennovy diagramy**.

1.2. Číselné obory

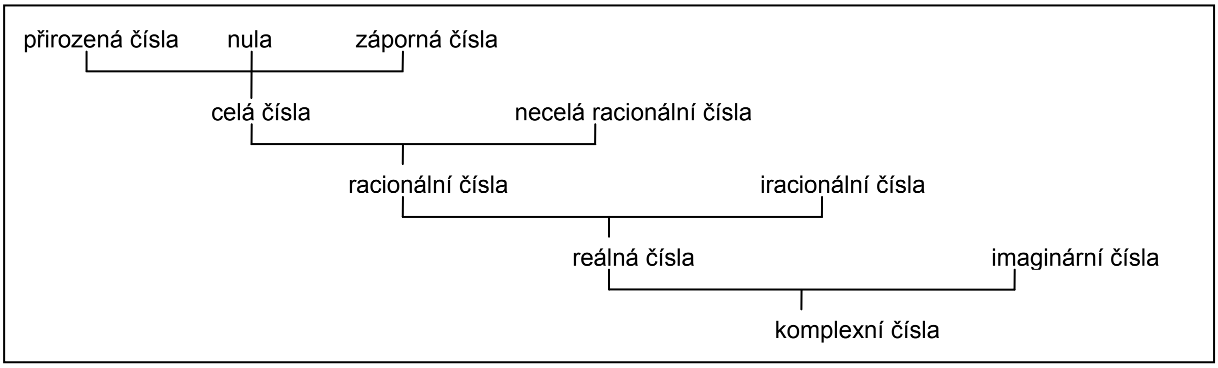
Cíle

Po prostudování této kapitoly by měl student umět bezpečně zařadit dané číslo do příslušného číselného oboru a ovládat všechny způsoby jeho zápisu, obnovit si znalosti základních vlastností početních operací a umět jich využívat, umět zobrazit reálná čísla na číselné ose.

Výklad

1.2.1. Čísla – názvy a jejich charakteristiky

Jeden z nejdůležitějších pojmů matematiky je pojem čísla. Pojem čísla se postupně rozšiřoval a prohluboval v souladu s potřebami vývoje lidské společnosti. Vztahy mezi jednotlivými **druhy čísel** vyjadřuje následující schéma:



Množina všech čísel určitého druhu, ve které jsou definovány bez omezení operace sčítání a násobení, se nazývá **obor čísel**.

Obvyklé označení nejdůležitějších číselných oborů :

$\mathbf{N}$ obor přirozených čísel $\{1, 2, 3, 4,...\}$,

$\mathbf{N_0}$ obor nezáporných celých čísel $\{0, 1, 2, 3, ...\}$,

$\mathbf{Z}$ obor celých čísel $\{...,-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$,

$\mathbf{Q}$ obor racionálních čísel $\{...\frac{-1}{3}, 0, \frac{2}{5}, \frac{12}{11}, 2 = \frac{2}{1},...\}$,

$\mathbf{R}$ obor reálných čísel $\{... -\sqrt{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{3}, \pi...\}$,

$\mathbf{C}$ obor komplexních čísel (viz kap.4.).

Platí tyto inkluze: $\mathbf{N} \subset \mathbf{N_0} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

Přirozená čísla vyjadřují počet prvků konečných neprázdných množin a pořadí prvků v uspořádaných n-ticích.

Celá čísla umožňují vyjádřit nejen počty prvků konečných množin, ale i změny těchto počtů (přírůstky a úbytky).

Racionální čísla v porovnání s celými čísly, jež jsou jejich speciálním případem, dovolují navíc vyjádřit údaje o počtech dílů určitého celku. Racionální číslo je každé reálné číslo, které lze psát ve tvaru zlomku p/q, kde p je celé číslo a q je přirozené číslo.

Iracionální čísla jsou charakterizována nekonečným neperiodickým desetinným rozvojem.

Reálná čísla jsou sjednocením všech racionálních a iracionálních čísel.

Komplexními čísly se podrobně zabývá 4.kapitola Základů matematiky.

1.2.2. Charakteristiky číselných oborů

a) Obor přirozených čísel **N** je uzavřen vzhledem k operacím sčítání a násobení, tzn. výsledkem těchto operací je opět přirozené číslo.

b) Uzavřenosti vzhledem k operaci odčítání lze docílit rozšířením oboru **N** na obor **Z** celých čísel, který obsahuje přirozená čísla, nulu a celá záporná čísla.

c) Abychom docílili uzavřenosti oboru čísel vzhledem k operaci dělení (číslem různým od nuly), rozšiřuje se obor **Z** na obor racionálních čísel **Q**. Obor **Q** je uzavřený vzhledem k operaci sčítání, odčítání, násobení a dělení.

d) Sjednocením racionálních a iracionálních čísel vytvoříme obor reálných čísel **R**, který je uzavřený vzhledem k operacím sčítání, odčítání, násobení a dělení.

1.2.3. Základní početní operace

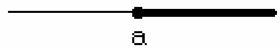
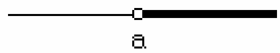
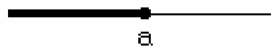
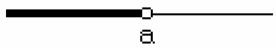
Použití čísel si vyžádalo zavedení početních operací, jimiž ke dvěma či více číslům přiřazujeme předepsaným způsobem jisté číslo.

Sčítání	$a + b$	sčítanec + sčítanec = součet
Odčítání	$a - b$	menšenec − menšitel = rozdíl
Násobení	$a \cdot b$	činitel · činitel = součin
Dělení	$a : b$	dělenec : dělitel = podíl
	$\frac{a}{b}$	$\frac{\text{čitatel}}{\text{jmenovatel}} = \text{podíl}$
Umocňování	a^n	n-tá mocnina čísla a, n exponent, a základ
Odmocňování	$\sqrt[n]{a}$	n-tá odmocnina čísla a

1.2.4. Intervaly

Interval je každá množina reálných čísel, jejichž obrazy na číselné ose vyplňují její souvislou podmnožinu.

Různé druhy intervalů jsou popsány v následující tabulce:

Množina všech reálných čísel x, pro která platí:	Označení	Grafické znázornění na číselné ose
$a \leq x \leq b$	$\langle a,b \rangle$	
$a < x < b$	(a,b)	
$a \leq x < b$	$\langle a,b)$	
$a < x \leq b$	$(a,b \rangle$	
$x \geq a$	$\langle a,+\infty)$	
$x > a$	$(a,+\infty)$	
$x \leq a$	$(-\infty,a \rangle$	
$x < a$	$(-\infty,a)$	
$x \in R$	$(-\infty,+\infty)$	

Číslům *a*, *b* říkáme **krajní body intervalu** nebo také **meze intervalu** (dolní a horní mez). Libovolný bod intervalu, který není jeho krajním bodem, se nazývá **vnitřní bod** intervalu. Vnitřních bodů intervalu je nekonečně mnoho.

Patří-li k intervalu obě jeho meze, nazývá se **uzavřený interval.**

Patří-li k intervalu jediná z jeho mezí, nazývá se **polouzavřený** nebo **polootevřený interval**.

Nepatří-li k intervalu žádná z jeho mezí, nazývá se **otevřený interval**.

Řešená úloha

Příklad 1.2.1. Jinak zapište : a) $(2, 6) \cap < 4,\infty)$, b) $< 2, 6) \cup (4,10)$, c) $(-\infty, 3) \cup (0, \infty)$.

Řešení: a) <4, 6), b) <2, 10), c) $(-\infty, \infty) = R$.

1.3. Algebraické výrazy

Cíle

Umět používat při úpravách algebraických výrazů vzorce uváděné v jednotlivých podkapitolách.

Výklad

Algebraický výraz je výraz (zápis) skládající se z čísel a z písmen označujících proměnné, jež jsou spojeny znaky operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování. Je-li třeba, obsahuje také závorky, které určují pořadí provádění operací.

K výrazům obsahujícím proměnné se připojuje obor proměnných. Není-li uveden, rozumí se jím obvykle číselný obor **R**.

Definičním oborem D algebraického výrazu jsou podmnožiny oborů proměnných, pro jejichž hodnoty má daný výraz smysl.

Pravidla pro stanovování definičního oboru algebraického výrazu jsou:

a) jmenovatel musí být různý od nuly,

b) pod sudou odmocninou nesmí být záporné číslo.

1.3.1. Polynomy (mnohočleny)

Jednočlen je výraz, který vznikne součinem konstanty a mocniny proměnné.

Polynom je součtem několika jednočlenů. Člen s nejvyšší mocninou udává **stupeň** polynomu. Polynom n-tého stupně proměnné x může mít zápis

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 , \; kde \;\; a_n \neq 0 .$$

Jednočlen $a_0 \neq 0$ je polynom nultého stupně,je-li roven nule,nazývá se nulovým polynomem.

Kořenem polynomu nazveme každé reálné číslo, které, po dosazení za proměnnou, daný polynom převede na polynom nulový.

Mějme kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ s podmínkou, že $b^2 - 4ac \geq 0$ a označme jeho kořeny x_1, x_2. Pak jeho rozklad v oboru R bude mít tento zápis:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) .$$

Je-li absolutní člen c =0, pak pro rozklad kvadratického dvojčlenu platí: $ax^2 + bx = x(ax + b)$.

Je-li b=0, a>0, c>0, pak kvadratický dvojčlen se dá rozložit takto:

$$ax^2 - c = a(x - \sqrt{\frac{c}{a}})(x + \sqrt{\frac{c}{a}}).$$

Při úpravách algebraických výrazů používáme tyto vzorce:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

V oboru reálných čísel R jsou kvadratický dvojčlen $a^2 + b^2$ a kvadratické trojčleny $a^2 \pm ab + b^2$ nerozložitelné na součin lineárních dvojčlenů.

1.3.2. Úprava racionálních lomených výrazů (vzorce a pravidla pro umocňování).

Při úpravách racionálních lomených výrazů se používají výše uvedené vzorce o rozkladu mnohočlenů a dále vzorce pro počítání se zlomky. V úlohách o úpravách lomených výrazů je nutné klást podmínky, že jmenovatel každého zlomku v původních výrazech i v upravených tvarech musí být různý od nuly.

Při úpravách výrazů budeme používat tato pravidla pro početní operace se zlomky:

rozšíření zlomku číslem $k \neq 0$: $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$, $b \neq 0, k \neq 0$

krácení zlomku číslem $k \neq 0$: $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0, d \neq 0$

sčítání zlomků: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$, $b \neq 0, d \neq 0$

odčítání zlomků: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$, $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$, $b \neq 0, d \neq 0$

násobení zlomků: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, $b\neq 0, d\neq 0$

dělení zlomků: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$, $b\neq 0, d\neq 0$, $c\neq 0$

úprava složeného zlomku: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$, $b\neq 0, d\neq 0, c\neq 0$

umocňování: pro přirozená čísla r,s a pro reálná čísla a,b platí:

$$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$$

$$a^r:a^s=a^{r-s}, \qquad a\neq 0$$

$$\left(a^r\right)^s=a^{rs}$$

$$(a\cdot b)^r=a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}, \qquad b\neq 0$$

$$a^{-r}=\frac{1}{a^r}, \qquad a\neq 0.$$

Řešené úlohy

Příklad 1.3.1 Zjednodušte algebraický výraz $\left(a+\frac{1}{b}\right)^{-2}\left(b-\frac{1}{a}\right)^{-3}\left(ab-\frac{1}{ab}\right)^{2}$.

Řešení: $$\left(a+\frac{1}{b}\right)^{-2}\left(b-\frac{1}{a}\right)^{-3}\left(ab-\frac{1}{ab}\right)^{2}=\left(\frac{ab+1}{b}\right)^{-2}\left(\frac{ab-1}{a}\right)^{-3}\left(\frac{a^2b^2-1}{ab}\right)^{2}=$$

$$=\left(\frac{b}{ab+1}\right)^{2}\left(\frac{a}{ab-1}\right)^{3}\left(\frac{(ab-1)(ab+1)}{ab}\right)^{2}=$$

$$=\frac{b^2}{(ab+1)^2}\cdot\frac{a^3}{(ab-1)^3}\cdot\frac{(ab-1)^2(ab+1)^2}{a^2b^2}=\frac{a}{(ab-1)}.$$

Podmínky řešitelnosti výrazu vycházejí z toho, že všechny výrazy ve jmenovatelích musí být nenulové, takže postupně dostáváme: $b\neq 0$, $a\neq 0$, $ab\neq -1$, $ab\neq 1$.

Příklad 1.3.2. Zjednodušte algebraický výraz $\dfrac{a^2+a-2}{a^4-3a^3}\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right]$.

Řešení:

$$\frac{a^2+a-2}{a^4-3a^3}\left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\frac{3}{a^2-a}\right]=\frac{a^2+a-2}{a^3(a-3)}\left[\frac{a^2+4a+4-a^2}{4(a-1)(a+1)}-\frac{3}{a(a-1)}\right]=$$

$$=\frac{a^2+a-2}{a^3(a-3)}\left[\frac{4(a+1)}{4(a-1)(a+1)}-\frac{3}{a(a-1)}\right]=\frac{a^2+a-2}{a^3(a-3)}\left[\frac{1}{(a-1)}-\frac{3}{a(a-1)}\right]=$$

$$=\frac{(a+2)(a-1)}{a^3(a-3)}\frac{a-3}{a(a-1)}=\frac{a+2}{a^4}$$

Podmínky řešitelnosti výrazu neboli společný definiční obor:

všechny výrazy ve jmenovatelích musí být nenulové, takže postupně dostáváme: $a\neq 0,\quad a\neq 3,\quad a\neq 1,\quad a\neq -1$.

Výklad

1.3.3. Úprava iracionálních algebraických výrazů (pravidla pro odmocňování)

Při úpravách iracionálních algebraických výrazů využíváme poznatků o odmocninách a mocninách s racionálními mocniteli a pravidel pro početní operace se zlomky. Podmínky, za nichž prováděné úpravy mají smysl, především vyjadřují, že základy všech sudých odmocnin musí být nezáporné a jmenovatelé zlomků se nesmějí rovnat nule.

Pravidla pro počítání s odmocninami ($a\geq 0, b\geq 0)$:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\,,$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\quad \text{pro } b\neq 0\,, \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}\,,$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\,,\ m\in Z,\ n\in N, \qquad \sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p}\,,\ p\in N.$$

Poznámka

Odmocnina ze součtu ***se nerovná*** *součtu odmocnin!!* $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Řešená úloha

Příklad 1.3.3.: Upravte výraz $V(x) = \dfrac{\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3}}}}{\sqrt[12]{x^{11}}}$ převodem odmocnin na mocniny s racionálními exponenty.

Řešení: $V(x) = \dfrac{\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3}}}}{\sqrt[12]{x^{11}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{11}{12}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}}{x^{\frac{11}{12}}} = x^{\frac{23}{12}-\frac{11}{12}} = x^{\frac{12}{12}} = x$

za předpokladu, že $x > 0$.

Výklad

1.3.4. Absolutní hodnota reálného čísla

Každému reálnému číslu a je přiřazeno právě jedno reálné číslo $|a|$ takto:

$|a| = a \;\; pro \;\; a \geq 0, \;\; |a| = -a \;\; pro \;\; a < 0.$

Toto číslo $|a|$ se nazývá **absolutní hodnota** reálného čísla a.

Některé vlastnosti absolutní hodnoty reálného čísla.

1) Pro $\forall a \in R: |a| \geq 0, \;\; |-a| = a, \;\; |a| \geq a, |a| \geq -a$.

2) Pro $\forall a,b \in R: |ab| = |a|.|b|, \;\; \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \; pro \; b \neq 0$.

3) Pro $\forall a,b \in R: \;\; |a+b| \leq |a| + |b|$.

4) Pro $\forall a,k \in R, k > 0: \;\; |a| < k \Leftrightarrow -k < a < k, neboli \;\; a \in (-k,k)$.

5) Pro $\forall a \in R: \;\; \sqrt{a^2} = |a|, \;\; \sqrt{a^2} = a \; pro \;\; a \geq 0, \;\; \sqrt{a^2} = -a \;\; pro \; a < 0.$

Geometrický význam absolutní hodnoty reálných čísel: na číselné ose představuje $|a|$ vzdálenost obrazu čísla a od počátku, $|a-b|$ vzdálenost obrazů čísel a, b.

1.3.5. Rozklad kvadratického trojčlenu

Kvadratickým trojčlenem s nenulovými koeficienty *a, b, c* nazveme výraz ax^2+bx+c.

Je-li diskriminant příslušné kvadratické rovnice $D \geq 0$ a její kořeny označíme x_1, x_2, pak můžeme provést rozklad kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů v oboru R :

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Je-li koeficient $a = 1$, pak kvadratický trojčlen se nazývá **normovaný** s koeficienty *p*, *q*,

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2),$$

přičemž platí $x_1+x_2=-p,\ x_1x_2=q$.

Řešená úloha

Příklad 1.3.4. Upravte a) $\dfrac{x^3-8}{x^2+5x-14}:\dfrac{2x^2+4x+8}{x^2-49}$,

b) $\dfrac{2x^2-2x+2}{x^2-25}:\dfrac{x^3+1}{x^2-4x-5}$.

Řešení: a) $\dfrac{x^3-8}{x^2+5x-14}:\dfrac{2x^2+4x+8}{x^2-49}=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+7)(x-2)}\cdot\dfrac{(x+7)(x-7)}{2(x^2+2x+4)}=\dfrac{x-7}{2}$,

za podmínky, že $x \neq 2,\ x \neq \pm 7$.

b) $\dfrac{2x^2-2x+2}{x^2-25}:\dfrac{x^3+1}{x^2-4x-5}=\dfrac{2(x^2-x+1)}{(x-5)(x+5)}\cdot\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{2}{x+5}$,

za podmínky, že $x \neq \pm 5,\ x \neq -1$.

Poznámka

Rozkladem kvadratického trojčlenu se také zabývá kapitola 3.2. a příklady na procvičení jsou uvedeny pod číslem 2. a 4. téže kapitoly.

Kontrolní otázky

1. Umíte přečíst symbolická označení $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$?

2. Čeho se týkají symboly $\cup, \cap, \subset, \in, \notin$?

3. Kolik jste si zapamatovali vzorců z kap. 1.3.1.?

Úlohy k samostatnému řešení

1. Upravte a stanovte podmínky:

a) $\dfrac{a-b}{a^2+ab}-\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a+b}$,

b) $\left(\dfrac{x}{x-1}-1\right)\dfrac{x^2-1}{x}$,

c) $\left(\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{a-2}\right):\dfrac{a}{a+2}$,

d) $\dfrac{2}{x+y}+\dfrac{2y}{x^2-y^2}$,

e) $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}}{\dfrac{8}{4-x^2}}$,

f) $\dfrac{2x^2-2x+2}{x^2-25}:\dfrac{x^3+1}{x^2-4x-5}$.

2. Zjednodušte v **R** daný výraz s mocninami:

a) $\left(\dfrac{2x}{3a}\right)^3\left(\dfrac{9a}{2x}\right)^2$,

b) $\left(3x^2y^{-3}z^{-5}\right)^{-3}:\left(27x^3y^{-2}z\right)^{-2}$,

c) $\left[\left(a^3b\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}:\left[\left(a^3b^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$,

d) $\dfrac{\sqrt[12]{a^5}\,b^{\frac{5}{6}}\sqrt{b^{-1}}}{a^{\frac{-3}{4}}b^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{a^2}}$,

e) $\sqrt{a\sqrt[3]{b}}:\sqrt[3]{b^{-1}\sqrt{a^3}}$,

f) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{x\sqrt{x}}{x^{-2}}}:\sqrt{\dfrac{x^{-3}\sqrt{x}}{x^2}}\right)^{-1}\sqrt{\dfrac{x^{-3}\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\dfrac{-3b}{a(a+b)}$, $a\neq 0,\ a\neq -b$, b) $\dfrac{x+1}{x}$, $x\neq 0, x\neq 1$, c) $\dfrac{2}{a-2}$, $a\neq 0,\ a\neq \pm 2$,

d) $\dfrac{2x}{x^2-y^2}$, $x\neq \pm y$, e) $-x$, $x\neq \pm 2$, f) $\dfrac{2}{x+5}$ $x\neq -1, x\neq \pm 5$.

2. a) $\dfrac{6x}{a}$, $a\neq 0, x\neq 0$, b) $27y^5z^{17}$, $x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0$, c) $\sqrt{b}$, $a.>0, b>0$,

d) $\sqrt{a}$, $a>0, b>0$, e) $\sqrt{b}$, $a>0, b>0$, f) x^{-5}, $x>0$.

Klíč k řešení úloh

Ve všech příkladech je uveden jen postup úpravy algebraických výrazů bez podmínek.

1.

a) $\dfrac{a-b}{a(a+b)}-\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{a-b-2(a+b)+a}{a(a+b)}=\dfrac{a-b-2a-2b+a}{a(a+b)}=\dfrac{-3b}{a(a+b)}$,

b) $\dfrac{x-(x-1)}{x-1}\cdot\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}=\dfrac{(x-x+1)(x+1)}{x}=\dfrac{x+1}{x}$,

c) $\dfrac{a-2+a+2}{(a+2)(a-2)}\cdot\dfrac{a+2}{a}=\dfrac{2a}{a-2}\cdot\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{a-2}$,

d) $\dfrac{2(x-y)+2y}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{2x-2y+2y}{x^2-y^2}=\dfrac{2x}{x^2-y^2}$,

e) $\dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}:\dfrac{8}{4-x^2}=\dfrac{x^2+4x+4-x^2+4x-4}{x^2-4}\cdot\dfrac{4-x^2}{8}=\dfrac{8x}{-(4-x^2)}\cdot\dfrac{4-x^2}{8}=-x$,

f) $\dfrac{2(x^2-x+1)}{(x+5)(x-5)}\cdot\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{2}{x+5}$.

2.

a) $2^3x^3 3^{-3}a^{-3}3^4a^2 2^{-2}x^{-2}=2\cdot 3\cdot x\cdot a^{-1}=\dfrac{6x}{a}$,

b) $3^{-3}x^{-6}y^9z^{15}\cdot(3^3x^3y^{-2}z)^2=3^{-3}x^{-6}y^9z^{15}3^6x^6y^{-4}z^2=3^3x^0y^5z^{17}=27y^5z^{17}$,

c) $(a^3b)^{\frac{1}{6}}\cdot(a^3b^{-2})^{-\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}=b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{b}$,

d) $a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{3}}a^{-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5+9-8}{12}}b^{\frac{5-3-2}{6}}=a^{\frac{6}{12}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$,

e) $(ab^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}:(b^{-1}a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}(b^{-1}a^{\frac{3}{2}})^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{2}}=a^0b^{\frac{1+2}{6}}=b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{b}$,

f) $\left(\sqrt[3]{xx^{\frac{1}{2}}x^2}:\sqrt{x^{-3}x^{\frac{1}{2}}x^{-2}}\right)^{-1}\sqrt{x^{-3}x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{2}{3}}}=\left(\sqrt[3]{x^{\frac{2+1+4}{2}}}:\sqrt{x^{\frac{-6+1-4}{2}}}\right)^{-1}\sqrt{x^{\frac{-18+3-4}{6}}}=$

$\left(x^{\frac{7}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{9}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x^{-\frac{19}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=x^{-\frac{7}{6}-\frac{9}{4}-\frac{19}{12}}=x^{\frac{-14-27-19}{12}}=x^{\frac{-60}{12}}=x^{-5}$.

Kontrolní test

1. Rozhodněte o pravdivosti výroku : $\{\ \forall x \in R : \sqrt{x^2} = |x|\ \}$.

   a) výrok je pravdivý, b) výrok je nepravdivý, c) není to výrok.

2. Výčtem prvků zapište množinu C = $\{\ x \in Z : -1 \leq x < 2\}$.

   a) C = $\{-1, 0, 1\ \}$, b) C = $\{-1, 0, 1, 2\}$, c) C = $\{-1, 1, 2\ \}$.

3. Doplněk množiny $\{x \in R : -3 < x \leq 5\}$ v R zapište jako sjednocení dvou intervalů.

   a) $(-\infty; -3 > \cup < 5; +\infty)$, b) $(-\infty;-3) \cup < 6;+\infty)$,

   c) $(-\infty; -3) \cup (6; +\infty)$, d) $(-\infty; -3 > \cup (5; +\infty)$.

4. Proveďte rozklad kvadratického polynomu $2x^2 - 5x + 2$.

   a) $(x-2)(x-1)$, b) $(2x-1)(x-2)$, c) $(2x+1)(x-2)$, d) $(2x-1)(x+2)$.

5. Proveďte úplný rozklad polynomu $4x^3 - 64x$.

   a) $x(x-4)(x-4)$, b) $4(x+4)(4-x)$, c) $4x(x-4)(x+4)$, d) $4(x+4)(x+4)$.

6. Sestavte normovaný kvadratický trojčlen, jestliže známe kořeny: $x_1 = 8,\ x_2 = -3$.

   a) $x^2 - 5x - 24$, b) $x^2 + 5x - 24$, c) $x^2 - 5x + 24$, d) $x^2 - 11x - 24$.

7. Použitím pravidel pro počítání s mocninami a odmocninami vypočtěte:

$$\left[\left(2^2 \cdot \frac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}} : \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 3^2\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2$$

   a) $\frac{4}{9}$, b) 12, c) 36, d) $\frac{9}{4}$.

8. Zjednodušte a uveďte podmínky, za jakých má daný výraz smysl. Výsledek zapište

   ve tvaru odmocniny. $\left(\frac{\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}{x^{-1}\sqrt{x}}\right)^3$.

a) $\sqrt{x^7}$, $x \neq 0, x > 0$, b) $\sqrt[3]{x^2}$, x>0, c) $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$, $x \neq 0, x > 0$.

9. Zjednodušte algebraický výraz a uveďte podmínky řešitelnosti:

$$\left(1-\frac{2}{1-3x}\right)\left(1-\frac{9x-9x^2}{3x+1}\right):\left(1-9x^2\right).$$

a) $(3x+1)^{-1}$, $x \neq -\dfrac{1}{3}$, b) $\dfrac{-1}{3x+1}$, $x \neq \dfrac{1}{3}$, c) $\dfrac{-1}{3x+1}$, $x \neq \pm\dfrac{1}{3}$.

10. Zjednodušte algebraický výraz a uveďte podmínky řešitelnosti:

$$\frac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}:\frac{(1-b)^2}{2b^2-b^3-b}.$$

a) 2a,. a$\neq \pm b$, $b \neq 0$, $b \neq 1$, b) -2a, $a \neq \pm b$, c) 2a, $a \neq \pm b$, $b \neq 0$.

Výsledky testu

1a); 2a); 3d); 4b); 5c); 6a); 7a); 8a); 9c); 10a).

Shrnutí lekce

Na testu jste si ověřili, zda vaše znalosti jsou výborné (100%), dostatečné (80%) nebo si potřebujete ještě vše znovu zopakovat a odstranit nedostatky při zvládnutí uváděných příkladů. Znovu si projděte řešené příklady a podle nich si propočítejte úlohy k samostatnému řešení. Základní znalosti a početní dovednosti, které vycházejí z vyřešení co největšího počtu úloh, jsou zárukou úspěšného studia na VŠ technického směru. Další příklady k procvičování najdete v kterékoliv sbírce matematiky pro střední školy.

Podrobnější výklad pojmů z matematické logiky a teorie množin najdete v 1.kapitole předmětu Matematika I nebo v některé z učebnic matematiky pro gymnázia.