



SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY

Radka Hamříková

Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

ESF – ROVNÉ PŘÍLEŽITOSTI PRO VŠECHNY

ISBN 978-80-248-1317-2

OBSAH

TITULNÍ STRÁNKA	1
ÚVOD	5
1. LINEÁRNÍ ALGEBRA	7
2. ANALYTICKÁ GEOMETRIE V PROSTORU	19
3. FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ	33
4. DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ	38
5. INTEGRÁLNÍ POČET	53
6. URČITÝ INTEGRÁL	62
7. DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH	76
8. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE	86
9. DVOJROZMĚRNÝ INTEGRÁL	95
10. TROJROZMĚRNÝ INTEGRÁL	100
11. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL	105
12. ŘADY	112
LITERATURA	119

STUDIJNÍ OPORY S PŘEVAŽUJÍCÍMI DISTANČNÍMI PRVKY PRO PŘEDMĚTY TEORETICKÉHO ZÁKLADU STUDIA

je název projektu, který uspěl v rámci první výzvy Operačního programu Rozvoj lidských zdrojů. Projekt je spolufinancován státním rozpočtem ČR a Evropským sociálním fondem. Partnery projektu jsou Regionální středisko výchovy a vzdělávání, s.r.o. v Mostě, Univerzita obrany v Brně a Technická univerzita v Liberci. Projekt byl zahájen 5.1.2006 a bude ukončen 4.1.2008.

Cílem projektu je zpracování studijních materiálů z matematiky, deskriptivní geometrie, fyziky a chemie tak, aby umožnily především samostatné studium a tím minimalizovaly počet kontaktních hodin s učitelem. Je zřejmé, že vytvořené texty jsou určeny studentům všech forem studia. Studenti kombinované a distanční formy studia je využijí k samostudiu, studenti v prezenční formě si mohou doplnit získané vědomosti. Všem studentům texty pomohou při procvičení a ověření získaných vědomostí. Nezanedbatelným cílem projektu je umožnit zvýšení kvalifikace širokému spektru osob, které nemohly ve studiu na vysoké škole z různých důvodů (sociálních, rodinných, politických) pokračovat bezprostředně po maturitě.

V rámci projektu jsou vytvořeny jednak standardní učební texty v tištěné podobě, koncipované pro samostatné studium, jednak e-learningové studijní materiály, přístupné prostřednictvím internetu. Součástí výstupů je rovněž banka testových úloh pro jednotlivé předměty, na níž si studenti ověří, do jaké míry zvládli prostudované učivo.

Bližší informace o projektu můžete najít na adrese <http://www.studopory.vsb.cz/>.

Přejeme vám mnoho úspěchů při studiu a budeme mít radost, pokud vám předložený text pomůže při studiu a bude se vám líbit. Protože nikdo není neomylný, mohou se i v tomto textu objevit nejasnosti a chyby. Předem se za ně omlouváme a budeme vám vděční, pokud nás na ně upozorníte.

ESF – ROVNÉ PŘÍLEŽITOSTI PRO VŠECHNY



Průvodce studiem



Dostává se vám do rukou *Sbírka úloh z matematiky*. Protože kapacita sbírky není neomezená, může se stát, že zde nenajdete vše, co hledáte. V tom případě zkuste hledat v materiálech pro *Matematiku I*, *Matematiku II* nebo *Matematiku III*. Nenajdete zde kapitoly *Vektorová analýza* a *Plošný integrál*. Pokud zde objevíte chyby, to se bohužel může stát, nebo budete mít připomínky či požadavky, obraťte se na mě mailem Radka.Hamrikova@vsb.cz, budu vám nesmírně vděčná.

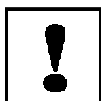
Ke sbírce patří také řada řešených úloh. Tyto úlohy budete mít k dispozici jako videa na internetových stránkách projektu www.studopory.vsb.cz.



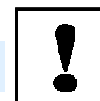
Cíle



Cílem je nabídnout vám k procvičení příklady z většiny kapitol *Matematiky I*, *Matematiky II* a *Matematiky III*.



Předpokládané znalosti



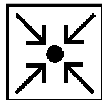
Jak vyplývá z předchozího, předpokládají se znalosti *Matematiky I*, *Matematiky II* a *Matematiky III*.

1. LINEÁRNÍ ALGEBRA	8
1.1. Vektory	8
1.1.1. Operace s vektory	8
Úlohy k samostatnému řešení	8
1.1.2. Lineární závislost a nezávislost vektorů	8
Úlohy k samostatnému řešení	8
1.1.3. Báze vektorového prostoru	9
Úlohy k samostatnému řešení	9
1.2. Determinant	9
Úlohy k samostatnému řešení	9
1.3. Matice	10
1.3.1. Operace s maticemi	10
Úlohy k samostatnému řešení	10
1.3.2. Hodnost matice	12
Úlohy k samostatnému řešení	12
1.3.3. Inverzní matice	13
Úlohy k samostatnému řešení	13
1.3.4. Maticové rovnice	13
Úlohy k samostatnému řešení	13
1.4. Soustavy lineárních rovnic	15
Úlohy k samostatnému řešení	15
Výsledky úloh k samostatnému řešení	17

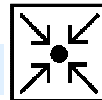
1. LINEÁRNÍ ALGEBRA

1.1. Vektory

1.1.1. Operace s vektory



Úlohy k samostatnému řešení



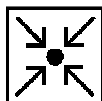
1. Vypočítejte součet $\vec{a} + \vec{b}$ a rozdíl $\vec{a} - \vec{b}$ a $\vec{b} - \vec{a}$ vektorů:
- a) $\vec{a} = (2, 3, 5), \vec{b} = (-8, 3, 9),$ b) $\vec{a} = (1, 1, 0, -5), \vec{b} = (3, -6, 8, -11),$
c) $\vec{a} = (7, -8, 0, 15), \vec{b} = (-1, 4, 9, 9),$ d) $\vec{a} = (-4, 9, 2), \vec{b} = (3, 3, -9, 7).$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

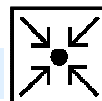
2. Vypočítejte souřadnice vektoru $\vec{x}$, pro který platí:
- a) $\vec{x} + 2\vec{a} - 4\vec{b} = \vec{o}, \vec{a} = (8, 7, 11), \vec{b} = (9, 3, -5),$
b) $4\vec{x} - 8\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{o}, \vec{a} = (-5, -13, 8, 4), \vec{b} = (6, 8, -14, 6).$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1.1.2. Lineární závislost a nezávislost vektorů



Úlohy k samostatnému řešení



3. Určete konstantu m tak, aby vektory $\vec{a}, \vec{b}$ byly lineárně závislé, (kolineární):
- a) $\vec{a} = (-4, m, 5), \vec{b} = (-8, 6, 10),$ b) $\vec{a} = (1, m, 0, m), \vec{b} = (3, -6, 0, -6).$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

4. Určete konstanty m, r tak, aby vektory $\vec{a}, \vec{b}$ byly lineárně závislé, (kolineární):
- a) $\vec{a} = (12, m, 16), \vec{b} = (9, 3, r),$ b) $\vec{a} = (4, m, 8, 4), \vec{b} = (6, 9, r, 6).$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5. Zjistěte, jak jsou vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ závislé:
- a) $\vec{a} = (1, 0, 1), \vec{b} = (2, 3, 5), \vec{c} = (0, 3, 3),$
b) $\vec{a} = (-4, 3, 2, 5), \vec{b} = (-1, 0, 1, 0), \vec{c} = (0, 3, -2, 5),$
c) $\vec{a} = (2, 7, 4, 2), \vec{b} = (-12, -16, 12, -8), \vec{c} = (1, -3, -7, 0),$
d) $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (1, 0, 1), \vec{c} = (3, 4, 7),$
e) $\vec{a} = (5, 1, 1), \vec{b} = (2, 1, 0), \vec{c} = (3, 0, 4).$

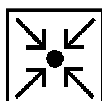
Výsledky úloh k samostatnému řešení

6. Zapište vektor $\vec{d}$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

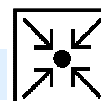
- a) $\vec{a} = (1, 0, 1), \vec{b} = (2, 3, 5), \vec{c} = (0, 3, -3), \vec{d} = (5, 12, 5),$
 b) $\vec{a} = (-4, 3, 2, 5), \vec{b} = (-1, 0, 1, 0), \vec{c} = (0, 3, -3, 5), \vec{d} = (2, 6, -9, 10),$
 c) $\vec{a} = (1, 7, 4, 2), \vec{b} = (-3, 7, 4, -8), \vec{c} = (3, -8, -1, 6), \vec{d} = (0, -1, 3, -2),$
 d) $\vec{a} = (2, 1, 2), \vec{b} = (-1, 0, 3), \vec{c} = (1, 1, 0), \vec{d} = (0, 1, 13).$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

1.1.3. Báze vektorového prostoru



Úlohy k samostatnému řešení

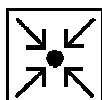


7. Dokažte, že vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tvoří bázi vektorového prostoru a zapište souřadnice vektoru $\vec{d}$ v této bázi:

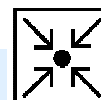
- a) $\vec{a} = (1, 0, 1), \vec{b} = (2, -4, 7), \vec{c} = (0, 3, -1), \vec{d} = (1, 19, -9),$
 b) $\vec{a} = (-4, 3, 2), \vec{b} = (-1, 1, 0), \vec{c} = (0, 3, 4), \vec{d} = (-12, 29, 36),$
 c) $\vec{a} = (6, 5, 4), \vec{b} = (-5, 2, 4), \vec{c} = (1, 0, -4), \vec{d} = (-17, -1, 8).$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

1.2. Determinant



Úlohy k samostatnému řešení



8. Vypočítejte determinant:

- a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},$ b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix},$ c) $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix},$
 d) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

9. Vypočítejte determinant Sarrusovým pravidlem:

- a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix},$ b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 7 \end{vmatrix},$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix},$
 d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix},$ e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

- 10.** Vypočítejte determinant, determinant upravte a použijte rozvoj podle některého řádku nebo sloupce:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ -4 & -5 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

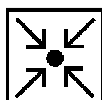
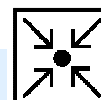
- 11.** Vypočítejte determinant úpravou na trojúhelníkový tvar:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & -2 & -10 \\ -6 & 11 & 13 & 8 \\ 6 & 21 & 2 & 14 \end{vmatrix},$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení**1.3. Matice****1.3.1. Operace s maticemi****Úlohy k samostatnému řešení**

- 12.** Vypočítejte $2 \cdot \mathbf{A} + 3 \cdot \mathbf{B} - \mathbf{C}$, kde:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 11 \\ -5 & -1 & -3 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

13. Vypočítejte $\mathbf{A} + 2 \cdot \mathbf{E} - 2 \cdot \mathbf{B}$, kde:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

14. Vynásobte matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 5 \\ 7 & 8 & 4 & -9 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},$$

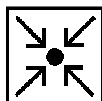
$$\text{g) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{h) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{i) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{j) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 6 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

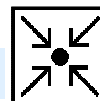
$$\text{k) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 6 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ matice lze násobit více způsoby.}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

1.3.2. Hodnost matice



Úlohy k samostatnému řešení



15. Vypočítejte hodnost matice:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 5 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 6 & 8 & -5 & 8 \\ 5 & 5 & 16 & 22 & -15 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\text{f) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{g) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

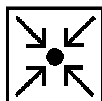
$$\text{h) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)16. Doplňte parametry a, b tak, aby matice měla danou hodnost:

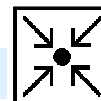
$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & 4 & 2 \\ 4 & 4 & b \end{pmatrix}, h(\mathbf{A}) = 2, \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ a & -7 & 2 \\ 4 & b & 4 \end{pmatrix}, h(\mathbf{A}) = 2.$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

1.3.3. Inverzní matice



Úlohy k samostatnému řešení



17. Najděte inverzní matici:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 12 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

18. Najděte inverzní matici:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 11 & 12 & 13 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

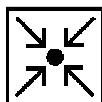
19. Najděte inverzní matici:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

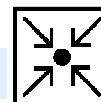
$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

1.3.4. Maticové rovnice



Úlohy k samostatnému řešení

20. Řešte rovnici s neznámou maticí $\mathbf{X}$:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 18 & -6 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

21. Řešte rovnici s neznámou maticí $\mathbf{X}$:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

22. Řešte rovnici s neznámou maticí $\mathbf{X}$:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 5 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -13 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 10 \\ -12 & 10 \\ -6 & 4 \\ -25 & 18 \end{pmatrix}.$$

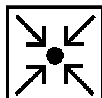
Výsledky úloh k samostatnému řešení

23. Řešte soustavu maticových rovnic s neznámými maticemi $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$:

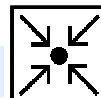
$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}, \mathbf{Y} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{X}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{X}.$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1.4. Soustavy lineárních rovnic



Úlohy k samostatnému řešení



24. Řešte soustavu lineárních rovnic GEM a Cramerovým pravidlem:

$$\begin{array}{lll}
 x + y + z = 4 & 2x + 3y - 2z = -4 & -x + y + 2z = 6 \\
 \text{a) } 2x - 3y + z = -3, & \text{b) } 4x - 3y + 3z = 10, & \text{c) } 2x - y - 4z = -16, \\
 -x + 2y - 2z = 1 & 6x - 4y - 2z = 14 & 5x + y + z = 12 \\
 \\
 2x + 3y + 4z = 9 & 6x + y - z = 7 & x + y - z = 5 \\
 \text{d) } 5x - 3y + 4z = -6, & \text{e) } x - 6y + z = 17, & \text{f) } x - 2y + z = 0, \\
 4x + 3y - 4z = -21 & -x + y + 6z = 14 & -x + y - z = -5 \\
 \\
 x + 2y - z = 9 & 2x + y - 2z = 7 & -2x + 3y - 4z = 4 \\
 \text{g) } x + y + z = 3, & \text{h) } -x + 2y + z = -1, & \text{i) } 5x - 3y + 7z = 2. \\
 2x - y - z = 6 & 2x + 3y + z = 0 & -9x + 4y - 12z = 1
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

25. Řešte soustavu lineárních rovnic GEM:

$$\begin{array}{lll}
 x + y - 4z = 9 & x + y + z + u = 4 & 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\
 \text{a) } x + y + 2z = 3, & \text{b) } x - 2y + 3z - u = 2 & -3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 4 \\
 x + y - z = 6 & 2x - y + 4z = 6, & \text{c) } 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\
 & 3x + 5z + u = 11 & -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 2 \\
 \\
 x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 4 & & x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_5 = 1 \\
 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 5 & & x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = 4 \\
 \text{d) } -2x_2 - x_3 - 3x_4 + 3x_5 = -3, & \text{e) } & 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -6. \\
 -x_1 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 & & x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 8 \\
 x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 6 & &
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

26. Řešte homogenní soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{lll}
 x + y - 4z = 0 & x + y + z + u = 0 & 2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\
 \text{a) } x + y + 2z = 0, & \text{b) } 3x - 2y + z = 0 & -3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\
 x + y - z = 0 & 2x + 2y + z + 2u = 0, & \text{c) } 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\
 & 6x + y + 3z - 3u = 0 & 3x_3 + 5x_4 = 0 \\
 \\
 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 & & x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\
 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 & & 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 0 \\
 \text{d) } x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, & \text{e) } & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \\
 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 & & -x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\
 7x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 & &
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $\vec{a} + \vec{b} = (-6, 6, 14)$, $\vec{a} - \vec{b} = (10, 0, -4)$, $\vec{b} - \vec{a} = (-10, 0, 4)$; b) $\vec{a} + \vec{b} = (4, -5, 8, -16)$,
 $\vec{a} - \vec{b} = (-2, 7, -8, 6)$, $\vec{b} - \vec{a} = (2, -7, 8, -6)$; c) $\vec{a} + \vec{b} = (6, -4, 9, 24)$, $\vec{a} - \vec{b} = (8, -12, -9, 6)$,
 $\vec{b} - \vec{a} = (-8, 12, 9, -6)$; d) nelze sčítat ani odčítat. 2. a) $\vec{x} = (20, -2, -42)$;
b) $\vec{x} = (-7, -22, 9, 11)$. 3. a) $m = 3$; b) $m = -2$. 4. a) $m = 4, r = 12$; b) $m = 6, r = 12$.
5. a) $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$; b) $\vec{a} - 4\vec{b} - \vec{c} = \vec{o}$; c) $4\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c} = \vec{o}$; d) $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{o}$;
e) LNZ. 6. a) $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}$; b) $\vec{d} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$; c) $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$; d) $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

7. a) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = -11 \neq 0 \Rightarrow$ tvoří bázi, $\vec{d}_{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} = (3, -1, 5)$;

b) $\det \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow$ tvoří bázi, $\vec{d}_{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} = (4, -4, 7)$;

c) $\det \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ -5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} = -136 \neq 0 \Rightarrow$ tvoří bázi, $\vec{d}_{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} = (-1, 2, -1)$.

8. a) 3; b) 12; c) 0; d) 1; e) -11. 9. a) 7; b) -41; c) 0, d) -24; e) 0. 10. a) 20;
b) 7; c) 0, d) 20; e) -44. 11. a) -3; b) 27; c) 800, d) 8.

12. a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 27 & 29 & 29 \\ -9 & -10 & -9 \\ 13 & -39 & -11 \end{pmatrix}$. 13. a) $\begin{pmatrix} -9 & 7 \\ -3 & -20 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -15 & -16 & -12 \\ -5 & 16 & 12 \\ -8 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

14. a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 58 & 17 \\ 48 & -54 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 22 & 32 \\ 111 & -18 \end{pmatrix}$;

b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 9 \\ 43 & 4 & -3 \\ 5 & -62 & -65 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 19 & 88 & -3 \\ 1 & -68 & 26 \\ 7 & 16 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 17 & 17 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ nelze násobit;

$$\text{e) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (1), \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ 5 & -10 & 0 & 15 \\ -4 & 8 & 0 & -12 \\ 3 & -6 & 0 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{f) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 31 \\ 58 & -18 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 17 \\ 25 & 35 & 20 & -20 \\ 2 & 1 & 0 & -5 \\ 50 & 61 & 32 & -57 \end{pmatrix};$$

$$\text{g) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 12 & 19 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 22 & -5 & 7 \\ 2 & 9 & -3 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{h) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \text{ nelze násobit, } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 45 & 12 \\ 37 & 7 \\ 32 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{i) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (7), \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -6 & -3 & -6 & -9 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{j) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & 6 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{k) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 56 & 49 \\ 20 & 37 \end{pmatrix}, \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 72 & 84 \\ 5 & 21 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 47 & 18 & 7 & 11 \\ 3 & -3 & -12 & 9 \\ 162 & 72 & 54 & 18 \\ 7 & 6 & 11 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$15. \text{ a) } h(A) = 2; \text{ b) } h(A) = 3; \text{ c) } h(A) = 3; \text{ d) } h(A) = 4; \text{ e) } h(A) = 2.; \text{ f) } h(A) = 5;$$

$$\text{g) } h(A) = 3; \quad \text{h) } h(A) = 5. \quad 16. \text{ a) } (a = 4 \wedge b = 2), \left(a = 4 - \frac{1}{k}, b = 2 + \frac{2}{k}, k \neq 0 \right);$$

$$\text{b) } a = -5, b \in \mathbb{R}.$$

$$17. \text{ a) } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$18. \text{ a) } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 30 & -5 & -10 \\ -1 & 0 & 1 \\ -23 & 5 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 12 & -2 & -5 \\ -4 & 6 & 15 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \mathbf{A}^{-1} \text{ neexistuje};$$

$$\text{d) } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } \mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -12 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$19. \text{ a) } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 12 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \text{ b) } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 6 & -12 & -3 & 3 \\ 16 & 8 & -4 & -4 \\ -26 & -4 & 5 & 11 \\ 18 & -12 & 3 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 8 & 11 & -21 & 3 \\ 12 & 30 & 36 & -9 \\ -12 & -30 & -9 & 9 \\ 1 & -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}; \text{ d) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 7 & -3 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}. \text{ 20. a) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{31}{5} & -\frac{14}{5} \end{pmatrix}; \text{ c) } \mathbf{X} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \text{ d) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}; \text{ e) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ \frac{49}{2} & -\frac{241}{4} \end{pmatrix};$$

$$\text{f) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 12 & -\frac{15}{2} \\ 4 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}. \text{ 21. a) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -\frac{17}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}; \text{ b) } \mathbf{X} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 29 & -34 \\ -14 & 16 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ c) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 23 & -9 \\ 5 & -2 \\ -16 & 7 \end{pmatrix}; \text{ e) } \mathbf{X} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 12 & -41 & 2 \\ -18 & 24 & -6 \\ 0 & -69 & -12 \end{pmatrix}. \text{ 22. a) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{70}{3} \\ -\frac{31}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \text{ c) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}. \text{ 23. a) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ 24. a) } (1, 2, 1)^T, \text{ b) } (1, -2, 0)^T, \text{ c) } (2, -4, 6)^T, \text{ d) } (-3, 1, 3)^T,$$

$$\text{e) } (2, -2, 3)^T, \text{ f) } (5, 5, 5)^T; \text{ g) } (3, 2, -2)^T; \text{ h) } (0, 1, -3)^T;$$

$$\text{i) } (27, -14, 25)^T. \text{ 25. a) } (5-t, t, -1)^T; \text{ b) } \text{nemá řešení}; \text{ c) } \left(-\frac{21}{8}, \frac{47}{24}, \frac{5}{8}, -\frac{25}{3}\right)^T;$$

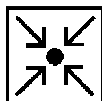
$$\text{d) } (17-t-4s, s, 9-2s, t, 2+t)^T \text{ e) } \text{nemá řešení. 26. a) } (-t, t, 0)^T; \text{ b) } (0, 0, 0, 0)^T;$$

$$\text{c) } (t, t, 5t, -3t)^T; \text{ d) } (0, t-s, s, 4s-2t, t)^T \text{ e) } (-9t-14s-2r, r, t, s, -2t-2s)^T.$$

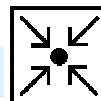
2. ANALYTICKÁ GEOMETRIE V PROSTORU	21
2.1. Vektory	21
Úlohy k samostatnému řešení.....	21
2.2. Přímka a rovina v prostoru	22
Úlohy k samostatnému řešení.....	22
2.3. Vzájemná poloha přímek a rovin	25
Úlohy k samostatnému řešení.....	25
2.4. Vzdálenosti a odchylky	28
Úlohy k samostatnému řešení.....	28
2.5. Kolmost	30
Úlohy k samostatnému řešení.....	30
Výsledky úloh k samostatnému řešení	31

2. ANALYTICKÁ GEOMETRIE V PROSTORU

2.1. Vektory



Úlohy k samostatnému řešení



1. Vypočítejte souřadnice vektoru $\vec{x}$, pro který platí:
 - a) $\vec{x} + 2\vec{a} - 4\vec{b} = \vec{o}$, $\vec{a} = (8, 7, 11)$, $\vec{b} = (9, 3, -5)$,
 - b) $4\vec{x} - 8\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{o}$, $\vec{a} = (-5, -13, 8, 4)$, $\vec{b} = (6, 8, -14, 6)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. Je dán vektor $\vec{u}$ a bod A . Najděte souřadnice bodu B , je-li A počáteční a B koncový bod vektoru $\vec{u}$. Vypočítejte velikost vektoru $\vec{u}$.
 - a) $\vec{u} = (2, 1, -2)$, $A[3, 1, 0]$, b) $\vec{u} = (3, 0, -4)$, $A[2, 5, -1]$,
 - c) $\vec{u} = (6, -8, -5)$, $A[-9, 5, 4]$, d) $\vec{u} = (6, 5, -4)$, $A[-1, 4, -2]$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. Vypočítejte směrové úhly vektoru $\vec{a}$:
 - a) $\vec{a} = (3, -2, 2)$, b) $\vec{a} = (-1, 3, 5)$, c) $\vec{a} = (12, 0, 5)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

4. Vypočítejte odchylku vektorů:
 - a) $\vec{a} = (2, -4, 1)$, $\vec{b} = (3, 1, -2)$, b) $\vec{u} = (3, 1, -4)$, $\vec{v} = (6, 0, 8)$,
 - c) $\vec{a} = (2, -4, 8)$, $\vec{b} = (3, -6, 12)$, d) $\vec{u} = (0, -3, 4)$, $\vec{v} = (5, -5, 5)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5. Najděte vektor $\vec{c}$, který je kolmý k vektorům $\vec{a}$, $\vec{b}$:
 - a) $\vec{a} = (2, 1, -6)$, $\vec{b} = (-7, 3, 11)$, b) $\vec{a} = (-2, 5, 1)$, $\vec{b} = (-4, 3, 2)$,
 - c) $\vec{a} = (7, 6, -2)$, $\vec{b} = (6, -6, 0)$, d) $\vec{a} = (0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-5, 0, 4)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

6. Najděte souřadnice vektoru $\vec{x}$, pro který platí:
 - a) $\vec{x} \cdot \vec{a} = 4$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = 2$, $\vec{x} \perp \vec{c}$, $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (3, -2, 3)$, $\vec{c} = (-6, 1, 4)$,
 - b) $\vec{x} \cdot \vec{a} = -15$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = 7$, $\vec{x} \perp \vec{c}$, $\vec{a} = (0, -4, 7)$, $\vec{b} = (2, 3, 5)$, $\vec{c} = (5, -2, 11)$,
 - c) $\vec{x} \cdot \vec{a} = 23$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = 6$, $\vec{x} \perp \vec{c}$, $\vec{a} = (-2, 5, 5)$, $\vec{b} = (8, -5, -6)$, $\vec{c} = (7, 5, -6)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

7. Vypočítejte obsah trojúhelníka ABC .
 - a) $A[2, 3, 1]$, $B[4, 1, 2]$, $C[8, 9, -7]$, b) $A[1, 1, 1]$, $B[3, 4, 3]$, $C[-3, 5, 7]$,
 - c) $A[-2, 4, 5]$, $B[2, 5, 2]$, $C[6, 8, -1]$, d) $A[-7, 5, -3]$, $B[-7, 1, 0]$, $C[-6, 5, -6]$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

8. Pomocí smíšeného součinu rozhodněte, zda jsou vektory komplanární:

a) $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (-4, 6, 8)$, $\vec{c} = (2, 15, 11)$,

b) $\vec{a} = (-6, 8, 0)$, $\vec{b} = (1, 2, -3)$, $\vec{c} = (9, 8, 7)$,

c) $\vec{a} = (-4, 3, 0)$, $\vec{b} = (-1, 2, 2)$, $\vec{c} = (6, 7, 9)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

9. Vypočítejte objem tělesa:

a) čtyřboký jehlan $ABCDV$, kde $A[1, 0, 1]$, $B[0, 2, 6]$, $D[5, 9, 0]$, $V[12, 15, 19]$,

b) rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$, kde $A[1, 3, 5]$, $B[2, 4, 6]$, $D[-2, 5, -3]$, $E[11, 10, 9]$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

10. Vypočítejte vnitřní úhly trojúhelníka ABC .

a) $A[2, 3, 1]$, $B[4, 1, 2]$, $C[8, 9, -7]$, b) $A[1, 1, 1]$, $B[3, 4, 3]$, $C[-3, 5, 7]$,

c) $A[-2, 4, 5]$, $B[2, 5, 2]$, $C[6, 8, -1]$, d) $A[-7, 5, -3]$, $B[-7, 1, 0]$, $C[-6, 5, -6]$.

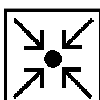
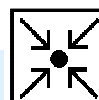
Výsledky úloh k samostatnému řešení

11. Určete konstanty m, n tak, aby vektory byly:

a) kolineární, $\vec{a} = (m, 4, 6)$, $\vec{b} = (3, 2, n)$,

b) ortogonální (kolmé), $\vec{a} = (m, 2, 1)$, $\vec{b} = (3, 6, 3m)$,

c) komplanární, $\vec{a} = (1, 2, m)$, $\vec{b} = (0, m, 1)$, $\vec{c} = (1, 3, 2)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení**2.2. Přímka a rovina v prostoru****Úlohy k samostatnému řešení**

12. Napište rovnice přímky, která je dána bodem a směrovým vektorem:

a) $A[-2, 3, 5]$, $\vec{s} = (6, -3, 1)$,

b) $A[0, 2, -4]$, $\vec{s} = (8, -1, 0)$,

c) $A[5, 5, 2]$, $\vec{s} = (4, -8, 3)$,

d) $A[6, -5, -4]$, $\vec{s} = (-1, 0, 3)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

13. Napište rovnice přímky, která prochází dvěma body:

a) $A[2, 1, -4]$, $B[3, 9, 6]$,

b) $A[-4, 5, 7]$, $B[5, 7, -4]$,

c) $A[6, 2, 3]$, $B[6, 2, 0]$,

d) $A[5, -7, 9]$, $B[11, -12, -1]$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

14. Napište rovnice přímky, která prochází bodem a je rovnoběžná s danou přímkou:

a) $A[2, 4, 6]$, $p: x = 1 - 3t, y = 2 + 4t, z = 2 - 5t, t \in \mathbf{R}$,

- b) $A[3, 2, 1]$, $p: x = 5 + 2t, y = 4 - 3t, z = 2 + t, t \in \mathbf{R}$,
 c) $A[0, -2, 7]$, $p: x = 5, y = t, z = 3 + 3t, t \in \mathbf{R}$,
 d) $A[-3, 4, 7]$, $p: x = 7 - 6t, y = -2 + 5t, z = 4t, t \in \mathbf{R}$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

- 15.** Přímka je dána jako průsečnice dvou rovin, napište její parametrické rovnice a kanonickou rovnici:

- a) $p: \begin{cases} x + 2y - 3z + 6 = 0 \\ 2x - 2y + 4z - 9 = 0, \end{cases}$ b) $p: \begin{cases} y - 4z + 8 = 0 \\ 2x + 4z - 1 = 0, \end{cases}$
 c) $p: \begin{cases} 5x + y + z + 6 = 0 \\ x - 3y + z - 2 = 0, \end{cases}$ d) $p: \begin{cases} x + 5y - 3z - 4 = 0 \\ x - 4y + 4z + 10 = 0. \end{cases}$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

- 16.** Bodem A veďte přímku kolmo k rovině ρ .

- a) $A[3, -2, 5]$, $\rho: 6x + 2y - 5z + 12 = 0$,
 b) $A[4, 0, 7]$, $\rho: -x + 6y - 4z + 4 = 0$,
 c) $A[5, -8, 7]$, $\rho: 2x - 4z + 11 = 0$,
 d) $A[4, 8, 12]$, $\rho: 5x + 9y + 2 = 0$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

- 17.** Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici roviny, která prochází třemi body:

- a) $A[1, 2, 1]$, $B[2, 0, 2]$, $C[-1, 2, 2]$, b) $A[1, 1, 1]$, $B[3, 4, 3]$, $C[-3, 5, 7]$,
 c) $A[-2, 4, 5]$, $B[2, 5, 2]$, $C[6, 8, -1]$, d) $A[-7, 5, -3]$, $B[-7, 1, 0]$, $C[-6, 5, -6]$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

- 18.** Napište obecnou rovnici roviny, která je dána bodem normálovým vektorem:

- a) $A[2, 6, 1]$, $\vec{n} = (-2, 1, 4)$, b) $A[0, 2, -4]$, $\vec{n} = (8, -1, 0)$,
 c) $A[5, 5, 2]$, $\vec{n} = (4, -8, 3)$, d) $A[6, -5, -4]$, $\vec{n} = (-1, 0, 3)$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

- 19.** Napište obecnou rovnici roviny, která prochází bodem A a vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou s touto rovinou komplanární:

- a) $A[0, -3, 5]$, $\vec{u} = (3, 2, 6)$, $\vec{v} = (1, 2, -3)$,
 b) $A[1, -4, 8]$, $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 2, 5)$,
 c) $A[7, 0, -6]$, $\vec{u} = (2, 5, -3)$, $\vec{v} = (4, 10, 8)$,
 d) $A[1, 0, 1]$, $\vec{u} = (11, 7, 3)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

20. Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici roviny, která je dána rovnoběžkami p, q :

- $p: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t, t \in \mathbf{R} \end{cases} \quad q: \begin{cases} x = 3 - r \\ y = 2 + 3r \\ z = 1 - 2r, r \in \mathbf{R}, \end{cases}$
 a)
- $p: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 + 5t, t \in \mathbf{R} \end{cases} \quad q: \begin{cases} x = 2 - 4r \\ y = 2 - 8r \\ z = 8 + 10r, r \in \mathbf{R}, \end{cases}$
 b)
- $p: \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = 11 + t \\ z = 9 - 4t, t \in \mathbf{R} \end{cases} \quad q: \begin{cases} x = 3 - 2r \\ y = 8 - r \\ z = 5 + 4r, r \in \mathbf{R}. \end{cases}$
 c)

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

21. Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici roviny, která je dána různoběžkami p, q :

- $p: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + t \\ z = 7 - 3t, t \in \mathbf{R} \end{cases} \quad q: \begin{cases} x = 2 + 4r \\ y = 4 - 3r \\ z = 7 + 5r, r \in \mathbf{R}, \end{cases}$
 a)
- $p: \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 + t \\ z = 8 + t, t \in \mathbf{R} \end{cases} \quad q: \begin{cases} x = 5 + 3r \\ y = -2 - 2r \\ z = 8 + 5r, r \in \mathbf{R}, \end{cases}$
 b)
- $p: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 9 - t, t \in \mathbf{R} \end{cases} \quad q: \begin{cases} x = -6r \\ y = 1 - 4r \\ z = 9 + 7r, r \in \mathbf{R}. \end{cases}$
 c)

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

22. Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici roviny, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkami p, q :

- a) $A[6, 7, 8], p: x = -1 + 2t, y = 10 + 6t, z = -3 + 3t, q: x = 7 + 3r, y = 3 + 9r, z = 1 - 4r,$
- b) $A[4, 1, -3], p: x = 5 + t, y = 1, z = 3 - t, q: x = 2, y = 3 - 4r, z = 10 + 2r,$
- c) $A[0, -5, 6], p: x = t, y = 12 - 3t, z = -4 + 8t, q: x = -r, y = 3, z = -5r.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

23. Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici roviny, která prochází přímkou a a je rovnoběžná s přímkou b :

- a) $a: x = 7 + t, y = 1 - 4t, z = 2 - t, b: x = 2 - 6r, y = 2 + r, z = 2 - 3r,$
- b) $a: x = 9 - 3t, y = 8 + t, z = 6 + 2t, b: x = r, y = 2 - 5r, z = 8,$
- c) $a: x = -5t, y = 6 + 2t, z = 8 - t, b: x = 11 + r, y = -4r, z = 12.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

24. Napište obecnou rovnici roviny, která prochází bodem A a je kolmá k přímce k :

- a) $A[5,5,5], k : x = 2 + 3t, y = 3 - 2t, z = 6 + t$,
 b) $A[4,1,-3], k : x = 5 + t, y = 1, z = 3 - t$,
 c) $A[0,-5,6], k : x = t, y = 12 - 3t, z = -4 + 8t$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

25. Napište obecnou rovnici roviny, která prochází bodem A a přímkou p :

- a) $A[1,1,1], p : \begin{cases} 2x - y + 3z + 6 = 0 \\ 4x + 5y - 3z + 2 = 0, \end{cases}$
 b) $A[0,2,3], p : \begin{cases} y - 4z + 8 = 0 \\ 2x + 4z - 1 = 0, \end{cases}$
 c) $A[1,2,-1], p : \begin{cases} 5x + y + z + 6 = 0 \\ x - 3y + z - 2 = 0. \end{cases}$

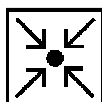
[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

26. Napište obecnou rovnici roviny, která prochází přímkou q a je rovnoběžná s přímkou p :

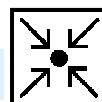
- a) $p : \begin{cases} 2x - 3z + 4 = 0 \\ x + y + 7 = 0 \end{cases}, q : x = 1 - 6t, y = 2 + 5t, z = 1 + 4t$,
 b) $p : \begin{cases} y - 4z + 8 = 0 \\ 2x + 4z - 1 = 0 \end{cases}, q : x = 3 + t, y = -4t, z = 0$,
 c) $p : \begin{cases} 5x + y + z + 6 = 0 \\ x - 3y + z - 2 = 0 \end{cases}, q : x = 5 - t, y = 1 - 2t, z = t$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

2.3. Vzájemná poloha přímek a rovin



Úlohy k samostatnému řešení



27. Rozhodněte o vzájemné poloze dvou přímek, určete souřadnice průsečíku, jestliže existuje:

- $p : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + 3t \\ z = 5 - t, t \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad q : \begin{cases} x = -1 + 2r \\ y = 10 - 3r \\ z = 3 + r, r \in \mathbf{R}, \end{cases}$
 a) $p : \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 5 + 4t \\ z = 7 - 3t, t \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad q : \begin{cases} x = 3 - 2r \\ y = 3 + 4r \\ z = 5 - 3r, r \in \mathbf{R}, \end{cases}$
 b)

$$\begin{array}{ll} p: & x = -2 + 4t \\ c) & y = 2 + t \\ & z = 3, t \in \mathbf{R}, \end{array} \quad \begin{array}{ll} q: & x = -3 + 9r \\ & y = 1 + 3r \\ & z = 7 - 4r, r \in \mathbf{R}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} p: & x = -2 + 4t \\ d) & y = 2 + t \\ & z = 3, t \in \mathbf{R}, \end{array} \quad \begin{array}{ll} q: & x = 1 - 2r \\ & y = r \\ & z = 3 - 4r, r \in \mathbf{R}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} p: & x = 2 - 2t \\ e) & y = 3 + t \\ & z = 4 - 3t, t \in \mathbf{R}, \end{array} \quad q: \begin{cases} x + y - z + 7 = 0 \\ 2x - y + 3z - 69 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} p: & x = t \\ f) & y = 2 - t \\ & z = 3 + t, t \in \mathbf{R}, \end{array} \quad q: \begin{cases} x + 2y - 3z + 7 = 0 \\ 3x + y + z - 9 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} p: & x = 4 + 5t \\ g) & y = 6 - 3t \\ & z = 7 + 2t, t \in \mathbf{R}, \end{array} \quad q: \begin{cases} 2x + 2y - 2z + 7 = 0 \\ x + 3y + 2z - 20 = 0. \end{cases}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

28. Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin, určete parametrické rovnice průsečnice, jestliže existuje:

$$\begin{array}{ll} a) & \alpha: 6x + 4y + 12z - 18 = 0, \\ & \beta: 3x + 2y + 6z - 9 = 0, \end{array} \quad \begin{array}{ll} b) & \alpha: 6x + 4y + 12z - 18 = 0, \\ & \beta: 3x + 2y + 6z + 9 = 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} c) & \alpha: 6x + 4y + 12z - 18 = 0, \\ & \beta: 2x + 5y + 5z + 3 = 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} d) & \alpha: \begin{array}{l} x = 1 + 2u - 4v \\ y = -1 - u + 4v \\ z = 2 + 3u - v, u, v \in \mathbf{R}, \end{array} \\ & \beta: x + y + z + 1 = 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} e) & \alpha: \begin{array}{l} x = 1 + 2u - 4v \\ y = -1 - u + 4v \\ z = 2 + 3u - v, u, v \in \mathbf{R}, \end{array} \\ & \beta: 11x + 10y - 4z + 7 = 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} f) & \alpha: \begin{array}{l} x = 4 + u - v \\ y = 5 - u + 4v \\ z = 6 + 2u + 4v, u, v \in \mathbf{R}, \end{array} \\ & \beta: \begin{array}{l} x = 3 + t - r \\ y = 6 - 2t + 5r \\ z = 1 + 6t, t, r \in \mathbf{R}, \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \alpha: & x = 4 + u - v \\
 \beta: & x = 5 - r \\
 \text{g)} & y = 5 - u + 3v \\
 & y = 7 + t + 5r \\
 & z = 6 + 2u + 4v, u, v \in \mathbf{R}, \\
 & z = 3 + 3t + 10r, t, r \in \mathbf{R}.
 \end{array}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

29. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky a roviny, určete souřadnice průsečíku, jestliže existuje:

$$\begin{array}{ll}
 a: & x = 6 + 2t \\
 \rho: & 2x + 3y + 5z + 2 = 0, \\
 \text{a)} & y = 5 - 3t \\
 & z = 4 + t, t \in \mathbf{R},
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 a: & x = 6 + 2t \\
 \rho: & x - 3y - 11z + 53 = 0, \\
 \text{b)} & y = 5 - 3t \\
 & z = 4 + t, t \in \mathbf{R},
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 a: & x = 6 + 2t \\
 \rho: & 3x + y - 4z - 3 = 0, \\
 \text{c)} & y = 5 - 3t \\
 & z = 4 + t, t \in \mathbf{R},
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 a: & x = -2 + t \\
 \rho: & x = 4 + 2u - v \\
 \text{d)} & y = 4 - 2t \\
 & y = 4 + 4u - 6v \\
 & z = 8 - 3t, t \in \mathbf{R}, \\
 & z = 4 + u - 4v, u, v \in \mathbf{R},
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 a: & x = -2 + t \\
 \rho: & x = 2 + 3u - 2v \\
 \text{e)} & y = 4 - 2t \\
 & y = 10 + u - 3v \\
 & z = 8 - 3t, t \in \mathbf{R}, \\
 & z = 8 - 3u, u, v \in \mathbf{R},
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 a: & x = -2 + t \\
 \rho: & x = -5 - u + 2v \\
 \text{f)} & y = 4 - 2t \\
 & y = -7 + 4u + v \\
 & z = 8 - 3t, t \in \mathbf{R}, \\
 & z = -5 - 5u + 4v, u, v \in \mathbf{R}.
 \end{array}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

30. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} & \alpha: 3x + 2y + 6z - 9 = 0, \\
 & \beta: -3x - 2y - 6z + 13 = 0, \\
 & \gamma: 6x + 4y + 12z + 3 = 0, \\
 \text{b)} & \alpha: x - y + 3z - 2 = 0, \\
 & \beta: 2x - 2y + 6z - 9 = 0, \\
 & \gamma: 5x - 4y + 3z - 7 = 0, \\
 \text{c)} & \alpha: 2x - 2y + 6z - 8 = 0, \\
 & \beta: -3x - 6y + z + 1 = 0, \\
 & \gamma: x + 8y - 7z + 13 = 0, \\
 \text{d)} & \alpha: x - 4y + 5z - 3 = 0, \\
 & \beta: 3x - 3y + z - 11 = 0, \\
 & \gamma: 5x - 11y + 11z - 15 = 0,
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \alpha: 2x + y - 4z - 1 &= 0, \\ \beta: x + y - 2z - 1 &= 0, \\ \gamma: 4x + 4y - 5z - 7 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \alpha: x - y + z - 4 &= 0, \\ \beta: -2x - 2y + 6z &= 0, \\ \gamma: x + 2z - 11 &= 0. \end{aligned}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

31. Najděte obecnou rovnici roviny, která prochází bodem M a patří danému svazku:

$$\begin{aligned} \text{a) } M[1, 2, 0] \quad \begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - y + z - 5 = 0, \end{cases} & \quad \text{b) } M[-1, 4, 7] \quad \begin{cases} -x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - 2y + z = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

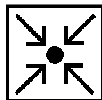
Výsledky úloh k samostatnému řešení

32. Najděte obecnou rovnici roviny, která je rovnoběžná s přímkou p a patří danému svazku:

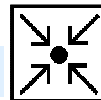
$$\begin{aligned} \text{a) } p: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+5}{1} \quad \begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - y + z - 5 = 0, \end{cases} \\ \text{b) } p: \frac{x-4}{0} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+6}{4} \quad \begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - y + z - 5 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2.4. Vzdálenosti a odchylky



Úlohy k samostatnému řešení



33. Vypočítejte vzdálenost dvou bodů:

$$\begin{aligned} \text{a) } A[2, 1, -4], B[3, 9, 6], \\ \text{c) } A[6, 2, 3], B[6, 2, 0], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A[-4, 5, 7], B[5, 7, -4], \\ \text{d) } A[5, -7, 9], B[11, -12, -1]. \end{aligned}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

34. Vypočítejte vzdálenost bodu od roviny:

$$\begin{aligned} \text{a) } A[2, 1, 4], \rho: 3x - 2y + 8z + 12 &= 0, \\ \text{b) } A[4, 0, 4], \rho: 3x + 4y - 12z + 12 &= 0, \\ \text{c) } A[-12, 5, 3], \rho: 6x + 8z - 18 &= 0. \end{aligned}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

35. Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných rovin:

$$\begin{aligned} \text{a) } \alpha: 2x + 5y - 4z + 7 &= 0, \beta: 4x + 10y - 8z + 28 = 0, \\ \text{b) } \alpha: 5x - 4y + 7z - 14 &= 0, \beta: 5x - 4y + 7z + 21 = 0, \\ \text{c) } \alpha: -3x + 5y - z + 13 &= 0, \beta: 3x - 5y + z + 19 = 0. \end{aligned}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

36. Vypočítejte vzdálenost bodu od přímky:

$$\text{a) } A[2, 4, 6], p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2},$$

b) $A[5,5,5], p: x=3+4t, y=-2-t, z=3, t \in \mathbf{R},$

c) $A[1,0,3], p: \frac{x+7}{6} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-2}{-1}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

37. Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných přímek:

a) $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}, q: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{-2},$

b) $p: x=5, y=-7+3t, z=9-4t, t \in \mathbf{R}, q: x=-1, y=-8+6r, z=3-8r, r \in \mathbf{R},$

c) $p: \frac{x+9}{5} = \frac{y+6}{1} = \frac{z-1}{4}, q: \frac{x-3}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

38. Vypočítejte vzdálenost mimoběžných přímek:

a) $p: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}, q: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+2}{5},$

b) $p: x=5, y=-7+3t, z=9-4t, t \in \mathbf{R}, q: \frac{x+1}{3} = \frac{y+8}{6} = \frac{z-3}{9},$

c) $p: x=-4+t, y=3, z=t, t \in \mathbf{R}, q: \frac{x-7}{2} = \frac{y+3}{10} = \frac{z+12}{3}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

39. Vypočítejte odchylku dvou přímek:

a) $p: \begin{aligned} x &= 3+2t \\ y &= 4-3t \\ z &= 5+7t, t \in \mathbf{R}, \end{aligned} \quad q: \begin{aligned} x &= 2+4r \\ y &= 1+9r \\ z &= 3-11r, r \in \mathbf{R}, \end{aligned}$

b) $p: \begin{aligned} x &= 1+3t \\ y &= 1-4t \\ z &= 2+t, t \in \mathbf{R}, \end{aligned} \quad q: \begin{aligned} x &= 5+4r \\ y &= 4-9r \\ z &= 3-2r, r \in \mathbf{R}, \end{aligned}$

c) $p: \begin{aligned} x &= 7+6t \\ y &= -3t \\ z &= 3+9t, t \in \mathbf{R}, \end{aligned} \quad q: \begin{aligned} x &= 3+r \\ y &= -2-r \\ z &= -4-r, r \in \mathbf{R}. \end{aligned}$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

40. Vypočítejte odchylku dvou rovin:

a) $\alpha: 5x-4y+6z-1=0,$ b) $\alpha: 6x+4y+2z-4=0,$
 $\beta: -3x+8y+9z+6=0,$ $\beta: 3x-2y-5z+9=0,$

c) $\alpha: -x+5y+2z+3=0,$
 $\beta: x+2y+3z+1=0.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

41. Vypočítejte odchylku přímky a roviny:

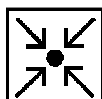
a) $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{7}, \rho: -3x+8y+9z-5=0,$

b) $p: \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+8}{1}, \rho: -4x+2y-z+8=0,$

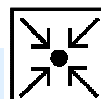
c) $p: x=1+5t, y=-t, z=-7, t \in \mathbf{R}, \rho: -x-5y+6z-13=0.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

2.5. Kolmost



Úlohy k samostatnému řešení



42. Najděte pravoúhlý průmět bodu K do roviny ρ :

a) $K[5,3,6], \rho: 2x+4y-z+5=0,$

b) $K[1,-10,-2], \rho: 3x+2y-3z-11=0,$

c) $K[5,-5,5], \rho: 5x-4y+4z+49=0.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

43. Najděte pravoúhlý průmět bodu K na přímku p :

a) $K[1,2,3], p: \frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-5}{2},$

b) $K[0,1,0], p: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-1},$

c) $K[9,8,7], p: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{1}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

44. Najděte pravoúhlý průmět přímky m do roviny σ :

a) $m: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+8}{5}, \sigma: 2x+y-4z+6=0,$

b) $m: \frac{x-19}{19} = \frac{y-21}{19} = \frac{z+19}{-18}, \sigma: 3x+4y-4z-12=0,$

c) $m: \frac{x-12}{11} = \frac{y+7}{-8} = \frac{z+1}{-3}, \sigma: 5x-4y+z-3=0.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $\vec{x} = (20, -2, -42)$; b) $\vec{x} = (-7, -22, 9, 7)$. 2. a) $B[5, 2, -2], |\vec{u}| = 3$;
 b) $B[5, 5, -5], |\vec{u}| = 5$; c) $B[-3, -3, -1], |\vec{u}| = 5\sqrt{5}$; d) $B[5, 9, -6], |\vec{u}| = \sqrt{77}$.
 3. a) $\alpha = 43^\circ 19', \beta = 119^\circ 1', \gamma = 60^\circ 59'$; b) $\alpha = 99^\circ 44', \beta = 59^\circ 32', \gamma = 32^\circ 19'$;
 c) $\alpha = 22^\circ 37', \beta = 90^\circ, \gamma = 67^\circ 23'$. 4. a) $\varphi = 90^\circ$; b) $\varphi = 105^\circ 56'$; c) $\varphi = 0^\circ$; d) $\varphi = 36^\circ 4'$.
 5. a) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (29, 20, 13)$; b) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (7, 0, 14)$; c) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (-12, -12, -78)$;
 d) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (4, -10, 5)$. 6. a) $\vec{x} = (1, 2, 1)$; b) $\vec{x} = (3, 2, -1)$; c) $\vec{x} = (6, 0, 7)$.
 7. a) $S = \sqrt{290} j^2$; b) $S = 15 j^2$; c) $S = 10 j^2$; d) $S = \frac{13}{2} j^2$. 8. a) jsou komplanární;
 b) nejsou komplanární; c) nejsou komplanární. 9. a) $V = \frac{538}{3} j^3$; b) $V = 45 j^3$.
 10. a) $\alpha = 103^\circ 13', \beta = 63^\circ 29', \gamma = 13^\circ 18'$; b) $\alpha = 61^\circ 56', \beta = 88^\circ 5', \gamma = 29^\circ 59'$;
 c) $\alpha = 10^\circ 29', \beta = 160^\circ 21', \gamma = 9^\circ 10'$; d) $\alpha = 124^\circ 42', \beta = 20^\circ 55', \gamma = 34^\circ 23'$.
 11. a) $m = 6, n = 3$; b) $m = -2$; c) $m = 1$.
 12. a) $a: x = -2 + 6t, y = 3 - 3t, z = 5 + t, t \in \mathbf{R}, a: \frac{x+2}{6} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-5}{1}$;
 b) $a: x = 8t, y = 2 - t, z = -4, t \in \mathbf{R}$;
 c) $a: x = 5 + 4t, y = 5 - 8t, z = 2 + 3t, t \in \mathbf{R}, a: \frac{x-5}{4} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z-2}{3}$;
 d) $a: x = 6 - t, y = -5, z = -4 + 3t, t \in \mathbf{R}$.
 13. a) $a: x = 2 + t, y = 1 + 8t, z = -4 + 10t, t \in \mathbf{R}, a: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{8} = \frac{z+4}{10}$;
 b) $a: x = -4 + 9t, y = 5 + 2t, z = 7 - 11t, t \in \mathbf{R}, a: \frac{x+4}{9} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-7}{-11}$;
 c) $a: x = 6, y = 2, z = 3 - 3t, t \in \mathbf{R}$;
 d) $a: x = 5 + 6t, y = -7 - 5t, z = 9 - 10t, t \in \mathbf{R}, a: \frac{x-5}{6} = \frac{y+7}{-5} = \frac{z-9}{-10}$.
 14. a) $a: x = 2 - 3r, y = 4 + 4r, z = 6 - 5r, r \in \mathbf{R}, a: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-6}{-5}$;
 b) $a: x = 3 + 2r, y = 2 - 3r, z = 1 + r, r \in \mathbf{R}, a: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{1}$;
 c) $a: x = 0, y = -2 + r, z = 7 + 3r, r \in \mathbf{R}$;

d) $a: x = -3 - 6r, y = 4 + 5r, z = 7 + 4r, r \in \mathbf{R}, a: \frac{x+3}{-6} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-7}{4}.$

15. a) $p: x = 1 + 2r, y = -\frac{7}{2} - 10r, z = -6r, r \in \mathbf{R}, p: \frac{x-1}{2} = \frac{y+\frac{7}{2}}{-10} = \frac{z}{-6};$

b) $p: x = \frac{1}{2} + 4r, y = -8 - 8r, z = -2r, r \in \mathbf{R}, p: \frac{x-\frac{1}{2}}{4} = \frac{y+8}{-8} = \frac{z}{-2};$

c) $p: x = 4r, y = -2 - 4r, z = -4 - 16r, r \in \mathbf{R}, p: \frac{x}{4} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z+4}{-16};$

d) $p: x = -2 + 8r, y = -7r, z = -2 - 9r, r \in \mathbf{R}, p: \frac{x+2}{8} = \frac{y}{-7} = \frac{z+2}{-9}.$

16. a) $p: x = 3 + 6r, y = -2 + 2r, z = 5 - 5r, r \in \mathbf{R}, p: \frac{x-3}{6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{-5};$

b) $p: x = 4 - r, y = 6r, z = 7 - 4r, r \in \mathbf{R}, p: \frac{x-4}{-1} = \frac{y}{6} = \frac{z-7}{-4};$

c) $p: x = 5 + 2r, y = -8, z = 7 - 4r, r \in \mathbf{R};$

d) $p: x = 4 + 5r, y = 8 + 9r, z = 12, r \in \mathbf{R}.$

17. a) $\alpha: x = 1 + t - 2r, y = 2 - 2t, z = 1 + t + r, t, r \in \mathbf{R}, \alpha: 2x + 3y + 4z - 12 = 0;$

b) $\alpha: x = 1 + 2t - 4r, y = 1 + 3t + 4r, z = 1 + 2t + 6r, t, r \in \mathbf{R}, \alpha: x - 2y + 2z - 1 = 0;$

c) $\alpha: x = -2 + 4t + 8r, y = 4 + t + 4r, z = 5 - 3t - 6r, t, r \in \mathbf{R}, \alpha: 3x + 4z - 14 = 0;$

d) $\alpha: x = -7 + r, y = 5 - 4t, z = -3 + 3t - 3r, t, r \in \mathbf{R}, \alpha: 12x + 3y + 4z + 81 = 0.$

18. a) $\alpha: -2x + y + 4z - 6 = 0;$ b) $\alpha: 8x - y + 2 = 0;$ c) $\alpha: 4x - 8y + 3z + 14 = 0;$

d) $\alpha: -x + 3z + 18 = 0.$ 19. a) $\alpha: -18x + 15y + 4z + 25 = 0;$ b) $\alpha: 2x + 5y - 2z + 34 = 0;$

c) $\alpha: 5x - 2y - 35 = 0;$ d) $\alpha: -3x + 3y + 4z - 1 = 0.$

20. a) $\alpha: x = 2 + u + v, y = 1 - 3u + v, z = 2u + v, u, v \in \mathbf{R}, \alpha: -5x + y + 4z + 9 = 0;$

b) $\alpha: x = 4 - 2u - 2v, y = 2 - 4u, z = 3 + 5u + 5v, u, v \in \mathbf{R}, \alpha: 5x + 2z - 26 = 0;$

c) $\alpha: x = 7 + 2u - 4v, y = 11 + u - 3v, z = 9 - 4u - 4v, u, v \in \mathbf{R}, \alpha: 8x - 12y + z + 67 = 0.$

21. a) $\alpha: x = 2 - u + 4v, y = 4 + u - 3v, z = 7 - 3u + 5v, u, v \in \mathbf{R}, \alpha: 4x + 7y + z - 43 = 0;$

b) $\alpha: x = 5 + 3v, y = -2 + u - 2v, z = 8 + u + 5v, u, v \in \mathbf{R}, \alpha: 7x + 3y - 3z - 5 = 0;$

c) $\alpha: x = u - 6v, y = 1 + u - 4v, z = 9 - u + 7v, u, v \in \mathbf{R}, \alpha: 3x - y + 2z - 17 = 0.$

22. a) $\alpha: x = 6 + 2u + 3v, y = 7 + 6u + 9v, z = 8 + 3u - 4v, u, v \in \mathbf{R}, \alpha: -3x + y + 11 = 0;$

b) $\alpha: x = 4 + u, y = 1 - 4v, z = -3 - u + 2v, u, v \in \mathbf{R}, \alpha: 2x + y + 2z - 3 = 0;$

c) $\alpha: x = u - v, y = -5 - 3u, z = 6 + 8u - 5v, u, v \in \mathbf{R}, \alpha: 5x - y - z + 1 = 0.$

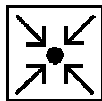
- 23. a)** $\alpha: x = 7 + u - 6v, y = 1 - 4u + v, z = 2 - u - 3v, u, v \in \mathbf{R}, \alpha: 13x + 9y - 23z - 54 = 0$;
b) $\alpha: x = 9 - 3u + v, y = 8 + u - 5v, z = 6 + 2u, u, v \in \mathbf{R}, \alpha: 5x + y + 7z - 95 = 0$;
c) $\alpha: x = -5u + v, y = 6 + u - 4v, z = 8 - u, u, v \in \mathbf{R}, \alpha: 4x + y - 18z + 138 = 0$.
- 24. a)** $\alpha: 3x - 2y + z - 10 = 0$; **b)** $\alpha: x - y - 7 = 0$; **c)** $\alpha: x - 3y + 8z - 63 = 0$.
- 25. a)** $\alpha: 12x + 29y - 27z - 14 = 0$; **b)** $\alpha: 36x + 11y + 28z - 106 = 0$;
c) $\alpha: 13x - 7y + 5z + 6 = 0$. **26. a)** $\alpha: 22x + 24y + 3z - 73 = 0$; **b)** $\alpha: 4x + y + 4z - 12 = 0$;
c) $\alpha: 3x - y + z - 14 = 0$. **27. a)** přímky jsou totožné; **b)** přímky jsou rovnoběžné; **c)** přímky jsou různoběžné, průsečík je $R[6, 4, 3]$; **d)** přímky jsou mimoběžné; **e)** přímky jsou různoběžné, průsečík je $R[10, -1, 16]$; **f)** přímky jsou mimoběžné; **g)** přímky jsou rovnoběžné. **28. a)** roviny jsou totožné; **b)** roviny jsou rovnoběžné; **c)** roviny jsou různoběžné, průsečnice je $r: x = 21 - 40t, y = -6t, z = -9 + 22t, t \in \mathbf{R}$; **d)** roviny jsou různoběžné, průsečnice je $r: x = -11 - 14t, y = 11 + 15t, z = -1 - t, t \in \mathbf{R}$; **e)** roviny jsou totožné; **f)** roviny jsou různoběžné, průsečnice je $r: x = \frac{7}{2}, y = 5 + 3s, z = 4 + 6s, s \in \mathbf{R}$; **g)** roviny jsou rovnoběžné. **29. a)** přímka je s rovinou rovnoběžná; **b)** přímka leží v rovině; **c)** přímka je s rovinou různoběžná, průsečík je $R[14, -7, 8]$; **d)** přímka je s rovinou rovnoběžná; **e)** přímka leží v rovině; **f)** přímka je s rovinou různoběžná, průsečík je $R[0, 0, 2]$. **30. a)** roviny jsou rovnoběžné, nemají žádný společný bod; **b)** dvě roviny jsou rovnoběžné, třetí je s nimi různoběžná, nemají žádný společný bod; **c)** roviny jsou různoběžné, nemají žádný společný bod, tvoří „střechu“; **d)** roviny jsou různoběžné, mají společnou přímku $x = 3 + 11t, y = 14t, z = 9t$; **e)** roviny jsou různoběžné, mají společný jeden bod $R[2, 1, 1]$; **f)** roviny jsou různoběžné, mají společný jeden bod $R[5, 4, 3]$. **31. a)** $23x + y + 4z - 25 = 0$; **b)** $-x + y - 2z + 9 = 0$.
- 32. a)** $-7x + 6y - 5z + 24 = 0$; **b)** $4x - 4y + 3z - 6 = 0$. **33. a)** $|AB| = 12,8 j$;
b) $|AB| = 14,4 j$; **c)** $|AB| = 3 j$; **d)** $|AB| = 12,7 j$. **34. a)** $|Ap| = 5,47 j$; **b)** $|Ap| = 1,85 j$;
c) $|Ap| = 6,6 j$. **35. a)** $|\alpha\beta| = 1,04 j$; **b)** $|\alpha\beta| = 3,69 j$; **c)** $|\alpha\beta| = 5,41 j$.
- 36. a)** $|Ap| = 6,34 j$; **b)** $|Ap| = 7,55 j$; **c)** $|Ap| = 2,88 j$. **37. a)** $|pq| = 6 j$; **b)** $|pq| = 7,44 j$;
c) $|pq| = 10,19 j$. **38. a)** $|pq| = 1,42 j$; **b)** $|pq| = 4,5 j$; **c)** $|pq| = 15,8 j$. **39. a)** $\varphi = 34^\circ 20'$;
b) $\varphi = 26^\circ 9'$; **c)** $\varphi = 90^\circ$. **40. a)** $\varphi = 86^\circ 19'$; **b)** $\varphi = 90^\circ$; **c)** $\varphi = 42^\circ 57'$.

- 41. a)** $\varphi = 19^\circ 44'$; **b)** $\varphi = 90^\circ$; **c)** $\varphi = 0^\circ$. **42. a)** $K'[3, -1, 7]$; **b)** $K'[4, -8, -5]$;
c) $K'[-5, 3, -3]$. **43. a)** $K'[4, 5, 3]$; **b)** $K'[1, 3, 0]$; **c)** $K'[5, -1, -4]$.
44. a) $m': x = -3 - 16s, y = 4s, z = -7s, s \in \mathbf{R}$; **b)** $m': x = 4s, y = 2 - s, z = -1 + 2s, s \in \mathbf{R}$;
c) $m': x = 1 + s, y = 1, z = 1 - 5s, s \in \mathbf{R}$.

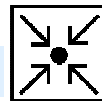
3. FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ	36
3.1. Definiční obor funkce.....	36
Úlohy k samostatnému řešení.....	36
3.2. Parita funkce.....	36
Úlohy k samostatnému řešení.....	36
3.2. Limita funkce.....	37
Úlohy k samostatnému řešení.....	37
Výsledky úloh k samostatnému řešení	40

3. FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

3.1. Definiční obor funkce



Úlohy k samostatnému řešení



1. Určete definiční obor funkce:

a) $f(x) = \sqrt[3]{\ln \frac{5x-x^2}{4}},$

b) $f(x) = \arccos \frac{(x+3)^2}{9},$

c) $y = \sqrt{\ln x},$

d) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$

e) $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{x},$

f) $y = \ln\left(\ln \frac{x+2}{x-1}\right),$

g) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x-2}{x+3}},$

h) $y = \log_3 \frac{x-6}{x} + \arcsin \frac{x+1}{6},$

i) $y = \operatorname{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{4-x^2},$

j) $y = \arccos \frac{x+3}{2} + \sqrt{x+2},$

k) $y = \sqrt{x^2-4x+3} - \frac{1}{\sqrt[3]{4-x^2}},$

l) $y = \operatorname{tg} \frac{2x-\pi}{6},$

m) $y = \frac{\sin 2x}{1-\cos 3x},$

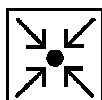
n) $y = \sqrt{1-2\sin 2x},$

o) $y = \operatorname{arctg} \frac{x+2}{x+3},$

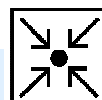
p) $y = \ln \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

3.2. Parita funkce



Úlohy k samostatnému řešení



2. Rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá:

a) $f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2},$

b) $f(x) = \cos(x^3 - x) + 2x - 1,$

c) $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1},$

d) $f(x) = \operatorname{tg}(4 - 2x^2) - x \sin x,$

e) $f(x) = \sin \frac{x-1}{x},$

f) $f(x) = x^2 - 4x + 5 \sin 3x,$

g) $f(x) = \frac{x^2 + \cos x - 2}{x^4 + 3},$

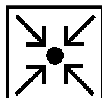
h) $y = \ln \frac{x-6}{x+6},$

i) $y = \cos 2x + \sqrt{4-x^2},$

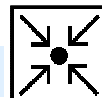
j) $y = \arccos x + \sqrt{x+2}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

3.2. Limita funkce



Úlohy k samostatnému řešení



3. Vypočítejte limitu:

a) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 - 2x^2 - 23x + 4}{x^3 + 10x^2 + 30x + 24},$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 11x + 6}{x^3 - 3x - 2},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^2}{x^3 - x},$

d) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{x^3 - 9x^2 + x - 9},$

e) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^3 - 5x^2 + 5x - 25}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

4. Vypočítejte limitu:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x},$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x^2 - 25},$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 3x - 4},$

d) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 6}{\sqrt{x+3} - 3},$

e) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4+x} - 3}{\sqrt{x+20} - 5},$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{1-x}}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

5. Vypočítejte limitu:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{(x - 1)^2},$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 4}{x^2 - 1},$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 4}{x^2 - 1},$

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2}{(x + 3)^2},$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 3}{x - 2},$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x},$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 3x + 2},$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 3x + 2}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

6. Vypočítejte limitu:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x},$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2},$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin x},$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{3}},$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{x},$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \operatorname{tg} 3x}{4x},$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 2x + \sin^2 3x},$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - \sin^3 2x}{2x^3},$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 2x}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

7. Vypočítejte limitu:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}x\right)}{\sqrt{x^2+9}-3}, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x+1}}{\operatorname{tg} 4x}, \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\operatorname{tg}^2 4x}. \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

8. Vypočítejte limitu:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\operatorname{tg}(x-4)}{x^2-3x-4}, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin^2(x-2)}{x^2-4x+4}, \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^3+5x^2-x+5}{\operatorname{tg}(x-5)}. \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

9. Vypočítejte limitu:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^x, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^x, \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^x, & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+4}\right)^{3x+1}, & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x-1}\right)^{2x+4}, \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x}\right)^x, & \text{h) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{3x}\right)^x, & \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}, \\ \text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}, & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-2\operatorname{tg}^2 x)^{\cot^2 x}. \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

10. Vypočítejte limitu:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^3-5x^2+4x-3}{7x^3+9x^2+5x-4}, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2-5x+9}{x^4-5x^3-4x+3}, \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^3-5x+3}{2x^2-x+9}. \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

11. Vypočítejte limitu:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{4x^3-2x^2-3x+1}}{x^2+2x+4}, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^4+4x^3-3x}}{3x^2+2x}, \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^4-2x+3}}{5x+6}, & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4-x^3-4x}}{\sqrt[3]{27x^6+x^4}}. \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

12. Vypočítejte limitu:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - 3x), & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x), & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x}), \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - x), & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - 2x + 4} - 2x). \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

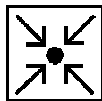
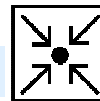


Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $D_f = (0, 5)$; b) $D_f = \langle -6, 0 \rangle$; c) $D_f = \langle 1, \infty \rangle$; d) $D_f = \mathbf{R} - \left\{ \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\}$;
- e) $D_f = \left\langle \frac{1}{2}, \infty \right\rangle$; f) $D_f = (1, \infty)$; g) $D_f = (-3, -2) \cup \langle 1, \infty \rangle$; h) $D_f = \langle -7, 0 \rangle$;
- i) $D_f = \left\langle -2, -\frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, 2 \right)$; j) $D_f = \langle -2, -1 \rangle$;
- k) $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup \langle 3, \infty \rangle$; l) $D_f = \mathbf{R} - \{2\pi + 3k\pi\}$; m) $D_f = \mathbf{R} - \left\{ \frac{2}{3}k\pi \right\}$;
- n) $D_f = \left\langle \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi \right\rangle + k\pi$; o) $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$; p) $D_f = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \right) + 2k\pi$.
2. a) lichá; b) ani sudá ani lichá; c) lichá; d) sudá; e) ani sudá ani lichá; f) ani sudá ani lichá; g) sudá; h) lichá; i) lichá; j) ani sudá ani lichá. 3. a) $-\frac{41}{2}$; b) 1; c) 0; d) $\frac{1}{82}$;
- e) $\frac{1}{3}$. 4. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{8}$; c) $\frac{1}{20}$; d) 6; e) $\frac{5}{3}$; f) $\frac{3}{2}$. 5. a) $-\infty$; b) $\pm\infty$; c) $\mp\infty$; d) $+\infty$;
- e) $\pm\infty$; f) $\pm\infty$; g) $\mp\infty$; h) $\pm\infty$. 6. a) 2; b) 3; c) 4; d) 2; e) $\frac{3}{2}$; f) 2; g) $-\frac{1}{4}$; h) $\frac{3}{52}$;
- i) $-\frac{5}{2}$; j) $\frac{3}{16}$. 7. a) $8\sqrt{2}$; b) $\frac{27}{8}$; c) $-\frac{1}{8}$; d) $\frac{1}{64}$. 8. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{5}$; c) 1; d) 26. 9. a) e ;
- b) e^3 ; c) e^{-1} ; d) e^{-2} ; e) e^{-9} ; f) $e^{\frac{2}{3}}$; g) ∞ ; h) 0; i) e^2 ; j) $e^{-\frac{1}{3}}$; k) e^{-2} . 10. a) $\frac{4}{7}$; b) 0;
- c) $\pm\infty$. 11. a) 0; b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; c) ∞ ; d) $\frac{1}{3}$. 12. a) ∞ ; b) 0; c) 0; d) $\frac{1}{2}$; e) $-\frac{1}{2}$.

4.	DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ	42
4.1.	Derivace.....	42
	Úlohy k samostatnému řešení.....	42
4.2.	Tečna a normála	45
	Úlohy k samostatnému řešení.....	45
4.3.	Taylorův a Maclaurinův polynom	45
	Úlohy k samostatnému řešení.....	45
4.4.	L'Hospitalovo pravidlo	46
	Úlohy k samostatnému řešení.....	46
4.5.	Průběh funkce.....	47
	Úlohy k samostatnému řešení.....	47
	Výsledky úloh k samostatnému řešení	49

4. DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ**4.1. Derivace****Úlohy k samostatnému řešení****1. Derivujte:**

a) $y = x - \frac{1}{x} + 4,$

b) $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}},$

c) $y = \sqrt[4]{x^3} - \sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**2. Derivujte:**

a) $y = (x^2 - 4)(2x + x^2),$

b) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3x \right) (\sqrt{x} - 6x^4),$

c) $y = \left(1 - \frac{4}{\sqrt[4]{x^2}} \right) (x - 2x^3).$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**3. Derivujte:**

a) $y = \frac{1-x}{1+x},$

b) $y = \frac{x+1}{x},$

c) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**4. Derivujte:**

a) $y = \sin x \cos x,$

b) $y = e^x \ln x,$

c) $y = x \cos x,$

d) $y = 4\sqrt{x} \arcsin x.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**5. Derivujte:**

a) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x},$

b) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x},$

c) $y = \frac{\operatorname{arccotg} x}{\arccos x}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**6. Derivujte:**

a) $y = \frac{\ln x \sin x}{\operatorname{cotg} x},$

b) $y = \frac{\arccos x}{x \operatorname{tg} x},$

c) $y = (\ln x + \log x) \frac{\operatorname{arccotg} x}{e^x}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

7. Derivujte:

a) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$,

b) $y = (6 + 5x^4)^7$,

c) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x^2+4} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3+3x^2-6}}$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**8. Derivujte:**

a) $y = \sin(2x+1)$,

b) $y = \cos(5-2x+x^2)$,

c) $y = \operatorname{tg}(\sqrt{x}-2)$,

d) $y = \operatorname{cotg}\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**9. Derivujte:**

a) $y = \sin^2 x$,

b) $y = \cos^3 x$,

c) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$,

d) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{cotg} x}}$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**10. Derivujte:**

a) $y = \sin(\cos 3x)$,

b) $y = \cos x^2$,

c) $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(4x-6)}$,

d) $y = \operatorname{cotg} \sqrt{x^2+3x-2}$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**11. Derivujte:**

a) $y = \frac{2x - \sin x}{x^2 + 1}$,

b) $y = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{3\sin 2x}$,

c) $y = \sqrt{\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x}}$,

d) $y = \frac{\operatorname{cotg} \sqrt{x}}{1 + \sin \frac{x}{2}}$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**12. Derivujte:**

a) $y = \log_4(x+2)$,

b) $y = \ln^2 x$,

c) $y = \ln x^2$,

d) $y = \ln \sin x$,

e) $y = \ln \ln x$,

f) $y = \log_2(\operatorname{arctg} x)$,

g) $y = \ln \frac{1-e^x}{1+e^x}$,

h) $y = \ln \sqrt{\frac{\cos x}{1-\sin x}}$,

i) $y = x \cdot \ln x$,

j) $y = \ln \arcsin \sqrt{x}$,

k) $y = \log_2(\log_3(\ln(x^2+1)))$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

13. Derivujte:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, & \text{b) } y = 2^{\sin 2x + \cos 3x}, & \text{c) } y = \arccos(2^{x+1}), \\
 \text{d) } y = 5^{\ln \sin x}, & \text{e) } y = \sin x^2 e^{\sin x}, & \text{f) } y = e^{\ln x \operatorname{tg} x}, \\
 \text{g) } y = e^{\arcsin x^2}, & \text{h) } y = \frac{1}{4^{\operatorname{ctg} 4x}}, & \text{i) } y = \frac{e^{\sin 2x}}{\sin 2x}, \\
 \text{j) } y = e^{\frac{\operatorname{ctg} 2x}{x^2 + 1}}.
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

14. Derivujte:

$$\text{a) } y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{b) } y = \operatorname{arctg} \sqrt{2x}, \quad \text{c) } y = \arccos \sqrt{2x - x^2}.$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

15. Derivujte:

$$\text{a) } y = \operatorname{arccotg} \frac{x}{x-1}, \quad \text{b) } y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}, \quad \text{c) } y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{x}.$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

16. Derivujte:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } y = \operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}, & \text{b) } y = \arcsin \left(\frac{\sin x}{x - 1} \right), & \text{c) } y = \operatorname{arctg}(\ln^2 x), \\
 \text{d) } y = \arccos(e^{2x \sin x}).
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

17. Derivujte:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } y = x^x, & \text{b) } y = (\sin x)^{\cos x}, & \text{c) } y = (x + 3)^{\operatorname{tg} x}, \\
 \text{d) } y = (\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}, & \text{e) } y = (\operatorname{arctg} x)^{\sin x}, & \text{f) } y = \left(\frac{x}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{x}}.
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

18. Vypočítejte druhou derivaci:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } y = \frac{x-1}{3x^2}, & \text{b) } y = x\sqrt{x^2 + 3}, & \text{c) } y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}, \\
 \text{d) } y = \frac{e^x}{x}, & \text{e) } y = x^2 \sin 3x, \text{ f) } y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{x^2 + 1}).
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

19. Derivujte funkce dané parametricky:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, & \text{b) } \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases},
 \end{array}$$

$$c) \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases},$$

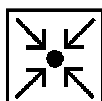
$$d) \begin{cases} x = 2a \cos t - a \cos 2t \\ y = 2a \sin t - a \sin 2t \end{cases},$$

$$e) \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases},$$

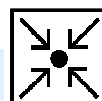
$$f) \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}.$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

4.2. Tečna a normála



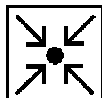
Úlohy k samostatnému řešení



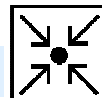
20. Napište rovnici tečny a normály ke křivce $y = x^2 + 6x - 4$ v bodě $T[1, ?]$.
21. Napište rovnici tečny a normály ke křivce $y = x \sin x$ v bodech $T_1[0, ?]$ a $T_2\left[\frac{\pi}{2}, ?\right]$.
22. Napište rovnici tečny a normály ke křivce $y = e^x \cos x$ v bodě $T[0, ?]$.
23. Napište rovnici tečny ke křivce $y = x^2 - 3x + 4$, která je rovnoběžná s přímkou $a: x + y + 1 = 0$.
24. Napište rovnici tečny ke křivce $y = e^{2x}$, která je rovnoběžná s přímkou $a: 2x - y + 3 = 0$.
25. Napište rovnici tečny ke křivce $y = x^2 - 3x + 4$, která je kolmá k přímce $p: x + y - 1 = 0$.
26. Napište rovnice tečen ke křivce $y = x^2 + 1$, které procházejí bodem $P[1, -2]$.
27. Určete konstantu a tak, aby přímka $p: y = 4x - 1$ byla tečnou křivky $y = x^2 + ax$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

4.3. Taylorův a Maclaurinův polynom



Úlohy k samostatnému řešení



28. Sestavte pro danou funkci Taylorův polynom n -tého řádu v okolí bodu x_0 :

$$a) y = \frac{1}{\sqrt{x}}, x_0 = 1, n = 4,$$

$$b) y = \ln x, x_0 = e, n = 4,$$

$$c) y = x \sin x, x_0 = \frac{\pi}{2}, n = 3,$$

$$d) y = \frac{1}{\sin x}, x_0 = \frac{\pi}{2}, n = 3$$

$$e) y = \ln(1 + x^2), x_0 = 1, n = 4$$

$$f) y = \frac{x-1}{x}, x_0 = 2, n = 4.$$

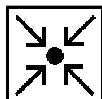
[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

29. Sestavte pro danou funkci Maclaurinův polynom n -tého řádu:

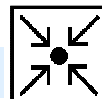
- a) $y = \operatorname{tg} x, n = 3,$ b) $y = \sin 2x, n = 6,$
 c) $y = \cos 3x, n = 6,$ d) $y = e^{-x}, n = 5,$
 e) $y = \sqrt{1+x}, n = 4,$ f) $y = xe^x, n = 5.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

4.4. L'Hospitalovo pravidlo



Úlohy k samostatnému řešení



30. Vypočítejte limitu L'Hospitalovým pravidlem:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 4x - 1},$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{3^{2x}},$
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 4}{3x^4 - 4x^2 + 5x - 3},$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{2x + \sin 3x},$
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x + \sin^2 x}{4x^2},$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\sqrt{x+1}}{x},$
 g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

31. Vypočítejte limitu L'Hospitalovým pravidlem:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x,$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x},$
 c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x},$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\cos \frac{1}{x} - 1 \right).$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

32. Vypočítejte limitu L'Hospitalovým pravidlem:

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2 - 2x - 3} \right),$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cotg x - \frac{1}{x^2} \right),$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin x} \right),$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

33. Vypočítejte limitu L'Hospitalovým pravidlem:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}},$

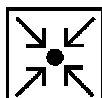
b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}},$

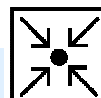
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

4.5. Průběh funkce



Úlohy k samostatnému řešení



34. Najděte intervaly monotonnosti funkce a její extrémy:

a) $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 5,$

b) $y = \frac{x^2}{x+4},$

c) $y = e^{x^2+2x-4},$

d) $y = \ln \frac{x-2}{x+1},$

e) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2+1},$

f) $y = \sin x \cos x,$

g) $y = \arcsin \frac{x}{x+1},$

h) $y = \frac{3}{4} \ln \frac{x+2}{2-x} - x.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

35. Najděte intervaly, na kterých je funkce konvexní a konkávní, najděte inflexní body:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 1,$

b) $y = \frac{x^2}{x+4},$

c) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3},$

d) $y = \ln \frac{x-1}{x},$

e) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2+1},$

f) $y = e^{x^2+1},$

g) $y = (-x^2 + 4x - 5)e^x,$

h) $y = \sin x \cos x.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

36. Určete globální (absolutní) extrémy funkce na daném intervalu:

a) $y = x^2 - 4x + 3, I = \langle -6, 9 \rangle,$

b) $y = x - \frac{1}{x+1}, I = \langle -4, -1 \rangle,$

c) $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 3, I = \langle -4, 4 \rangle,$

d) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}, I = \langle -3, 0 \rangle,$

e) $y = x + \sin 2x, I = \left\langle \frac{\pi}{4}, \pi \right\rangle,$

f) $y = e^{x^2+2x-3}, I = \langle -2, 1 \rangle,$

g) $y = x^2 e^{-x}, I = \left\langle -\frac{1}{2}, 3 \right\rangle,$

h) $y = \operatorname{arctg}(x^2 - x - 2), I = \langle -1, 1 \rangle.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

37. Určete rovnice asymptot funkce:

a) $y = xe^{-x}$,

b) $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{3x - 5}$,

c) $y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x}$,

d) $y = \frac{2x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 + 2}$,

e) $y = \frac{x+1}{x^2 - 9}$,

f) $y = x + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$,

g) $y = \frac{x-6}{2x+6}$,

h) $y = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{4x^2-1}$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**38.** Vyšetřete průběh funkce:

a) $y = \frac{x^2}{1-x}$,

b) $y = \frac{x^3}{8-2x^2}$,

c) $y = xe^{-x}$,

d) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1}$,

e) $y = x^2 \ln x$,

f) $y = \sqrt{x+1} + x$,

g) $y = \sin x + \cos x$,

h) $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$,

i) $y = \frac{1}{x^2 + x - 2}$,

j) $y = \sin 2x - x$,

k) $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$,

l) $y = e^{\sqrt{1-x^2}}$,

m) $y = \frac{x+1}{x^2 + 2x}$,

n) $y = \frac{e^x}{x+2}$,

o) $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{x-1}$,

p) $y = \frac{x}{2} - \cos x$,

q) $y = \sqrt{4-x^2} + 2x^2$,

r) $y = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2}$,

s) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$,

t) $y = \ln \frac{x-4}{x}$,

u) $y = (x^2 + 2x + 2)e^x$,

v) $y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$,

w) $y = \frac{x^2 + 1}{e^x}$,

z) $y = x^4 - 4x^3 + 8x - 1$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení



$$1. \text{ a) } y' = 1 + \frac{1}{x^2}; \quad \text{b) } y' = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}; \quad \text{c) } y' = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

$$2. \text{ a) } y' = 4x^3 + 6x^2 - 8x - 8;$$

$$\text{b) } y' = \frac{9\sqrt{x} - 180x^4 - 42x^2\sqrt{x}}{2};$$

$$\text{c) } y' = \frac{20x^2 - 6x^2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}. \quad 3. \text{ a) } y' = -\frac{2}{(1+x)^2}; \quad \text{b) } y' = -\frac{1}{x^2}; \quad \text{c) } y' = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}.$$

$$4. \text{ a) } y' = \cos 2x; \quad \text{b) } y' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}; \quad \text{c) } y' = \cos x - x \sin x; \quad \text{d) } y' = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}.$$

$$5. \text{ a) } y' = \frac{x \ln x - (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x}{x(x^2 + 1) \ln^2 x}; \quad \text{b) } y' = \frac{\sin x \cos x - (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x}{(x^2 + 1) \sin^2 x};$$

$$\text{c) } y' = \frac{(1+x^2) \operatorname{arccotg} x - \sqrt{1-x^2} \arccos x}{(1+x^2) \sqrt{1-x^2} \arccos^2 x}.$$

$$6. \text{ a) } y' = \frac{x \ln x \sin x + \cos x \sin^2 x + x \ln x \cos^2 x \sin x}{x \cos^2 x};$$

$$\text{b) } y' = \frac{-x \sin x \cos x - \arccos x (\sin x \cos x + x) \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sin^2 x \sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{c) } y' = \frac{(\ln 10 + 1) \operatorname{arccotg} x}{x e^x \ln 10} - (\ln x + \log x) \frac{1 + (1+x^2) \operatorname{arccotg} x}{(1+x^2) e^x}. \quad 7. \text{ a) } y' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+6}};$$

$$\text{b) } y' = 140x^3(6+5x^4)^6;$$

$$\text{c) } y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+4)^2}} + \frac{3x^2+6x}{4\sqrt[4]{(x^3+3x^2-6)^5}}.$$

$$8. \text{ a) } y' = 2\cos(2x+1); \quad \text{b) } y' = -(2x-2)\sin(5-2x+x^2); \quad \text{c) } y' = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2(\sqrt{x}-2)};$$

$$\text{d) } y' = -\frac{4}{(2-x)^2 \sin^2\left(\frac{x+2}{2-x}\right)}.$$

$$9. \text{ a) } y' = \sin 2x;$$

$$\text{b) } y' = -3\cos^2 x \sin x;$$

$$\text{c) } y' = \frac{1}{2\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}}; \quad \text{d) } y' = \frac{1}{3\cos x \sin x \sqrt[3]{\operatorname{cotg} x}}. \quad 10. \text{ a) } y' = -3\cos(\cos 3x) \sin 3x;$$

$$\text{b) } y' = -2x \sin x^2; \quad \text{c) } y' = -\frac{2}{\operatorname{tg}^3(4x-6)} \cdot \frac{4}{\cos^2(4x-6)} = \frac{-8\cos(4x-6)}{\sin^3(4x-6)};$$

d) $y' = -\frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2+3x-2}} \cdot \frac{(2x+3)}{2\sqrt{x^2+3x-2}}; \quad \mathbf{11. a)} y' = \frac{(2-\cos x) \cdot (x^2+1) - 2x \cdot (2x-\sin x)}{(x^2+1)^2};$
b) $y' = -\frac{x^2 \sin 2x + 2(1-x^3) \cos 2x}{3\sqrt[3]{(1-x^3)^2} \sin^2 2x}; \quad \mathbf{c)} y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x}} \frac{3 \cos 3x \sin x \cos x - \sin 3x}{\sin^2 x};$
d) $y' = -\frac{1 + \sin \frac{x}{2} + \sqrt{x} \sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x} \cos \frac{x}{2}}{2\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x} \left(1 + \sin \frac{x}{2}\right)^2}; \quad \mathbf{12. a)} y' = \frac{1}{\ln 4(x+2)}; \quad \mathbf{b)} y' = \frac{2 \ln x}{x};$
c) $y' = \frac{2}{x}; \quad \mathbf{d)} y' = \operatorname{cotg} x; \quad \mathbf{e)} y' = \frac{1}{x \ln x}; \quad \mathbf{f)} y' = \frac{1}{\ln 2(1+x^2) \operatorname{arctg} x}; \quad \mathbf{g)} y' = \frac{2e^x}{e^{2x}-1};$
h) $y' = \frac{1}{2 \cos x}; \quad \mathbf{i)} y' = \ln x + 1; \quad \mathbf{j)} y' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2} \arcsin \sqrt{x}};$
k) $y' = \frac{2x}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot (x^2+1) \cdot \log_3(\ln(x^2+1)) \cdot \ln(x^2+1)}; \quad \mathbf{13. a)} y' = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2};$
b) $y' = 2^{\sin 2x + \cos 3x} (2 \cos 2x - 3 \sin 3x) \ln 2; \quad \mathbf{c)} y' = -\frac{2^{x+1} \ln 2}{\sqrt{1-2^{2x+2}}}; \quad \mathbf{d)} y' = 5^{\ln \sin x} \operatorname{cotg} x \ln 5;$
e) $y' = 2x \cos x^2 e^{\sin x} + \sin x^2 \cos x e^{\sin x}; \quad \mathbf{f)} y' = e^{\ln x \operatorname{tg} x} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} + \frac{\ln x}{\cos^2 x} \right); \quad \mathbf{g)} y' = e^{\arcsin x^2} \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}};$
h) $y' = \frac{4 \ln 4}{4^{\operatorname{cotg} x} \sin^2 4x}; \quad \mathbf{i)} y' = \frac{\sin 4x e^{\sin 2x} - 2 \cos 2x e^{\sin 2x}}{\sin^2 2x}; \quad \mathbf{j)} y' = -e^{\frac{\operatorname{cotg} 2x}{x^2+1}} \frac{2(x^2+1) + x \sin 4x}{\sin^2 2x (x^2+1)^2};$
14. a) $y' = \frac{-2 \operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \mathbf{b)} y' = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+2x)}; \quad \mathbf{c)} y' = \frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}}; \quad \mathbf{15. a)} y' = \frac{1}{2x^2-2x+1};$
b) $y' = \sqrt{\frac{1-x}{x}}; \quad \mathbf{c)} y' = \frac{\sqrt{1-x} + 1 + x}{2\sqrt{x}(1+x)\sqrt{1-x}}; \quad \mathbf{16. a)} y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)};$
b) $y' = \frac{(x-1) \cos x - \sin x}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2 - \sin^2 x}}; \quad \mathbf{c)} y' = \frac{2 \ln x}{x(1+\ln^4 x)}; \quad \mathbf{d)} y' = \frac{e^{2x \sin x} (2 \sin x + 2x \cos x)}{\sqrt{1-e^{4x \sin x}}}.$
17. a) $y' = x^x (\ln x + 1); \quad \mathbf{b)} y' = (\sin x)^{\cos x} \left(-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right);$
c) $y' = (x+3)^{\operatorname{tg} x} \left(\frac{\ln(x+3)}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x+3} \right); \quad \mathbf{d)} y' = (\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \frac{\cos x - \cos x \ln \sin x}{\sin^2 x};$

$$\text{e) } y' = (\arctg x)^{\sin x} \left(\cos x \ln \arctg x + \frac{\sin x}{(x^2 + 1) \arctg x} \right); \quad \text{f) } y' = \left(\frac{x}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \ln \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x^2} \right).$$

$$18. \text{ a) } y'' = \frac{2x-6}{3x^4}; \quad \text{b) } y'' = \frac{2x^3-9x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}; \quad \text{c) } y'' = \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}};$$

$$\text{d) } y'' = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}; \quad \text{e) } y'' = \sin 3x(2-9x^2) + 12x \cos 3x; \quad \text{f) } y'' = -\frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

$$19. \text{ a) } y' = -\cotg t; \quad \text{b) } y' = \frac{\sin t}{1-\cos t}; \quad \text{c) } y' = -\tg t; \quad \text{d) } y' = \frac{\cos t - \cos 2t}{\sin 2t - \sin t};$$

$$\text{e) } y' = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}; \quad \text{f) } y' = -\frac{b}{a} \cotg t. \quad 20. \quad t: y = 8x-5, \quad n: y = -\frac{1}{8}x + \frac{25}{8}. \quad 21. \quad t_1: y = 0,$$

$$n_1: x = 0, \quad t_2: y = x, \quad n_2: y = \pi - x. \quad 22. \quad t: y = x+1, \quad n: y = 1-x. \quad 23. \quad t: y = 3-x,$$

$$n: y = x+1. \quad 24. \quad t: y = 2x+1. \quad 25. \quad t: y = x. \quad 26. \quad t_1: y = 6x-8,$$

$$t_2: y = -2x. \quad 27. \quad a_1 = 2, a_2 = 6.$$

$$28. \text{ a) } T_4 = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3 + \frac{35}{128}(x-1)^4;$$

$$\text{b) } T_4 = 1 + \frac{1}{e}(x-1) - \frac{1}{2e^2}(x-1)^2 + \frac{1}{3e^3}(x-1)^3 - \frac{1}{4e^4}(x-1)^4;$$

$$\text{c) } T_3 = \frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3; \quad \text{d) } T_4 = 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2;$$

$$\text{e) } T_4 = \ln 2 + (x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{8}(x-1)^4;$$

$$\text{f) } T_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4.$$

$$29. \text{ a) } M_3 = x + \frac{1}{3}x^3; \quad \text{b) } M_6 = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5; \quad \text{c) } M_6 = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 - \frac{81}{80}x^6;$$

$$\text{d) } M_5 = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5; \quad \text{e) } M_4 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4;$$

$$\text{f) } M_5 = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^5. \quad 30. \text{ a) } -2; \quad \text{b) } 0; \quad \text{c) } 2; \quad \text{d) } -\frac{1}{5}; \quad \text{e) } \frac{1}{2}; \quad \text{f) } 0;$$

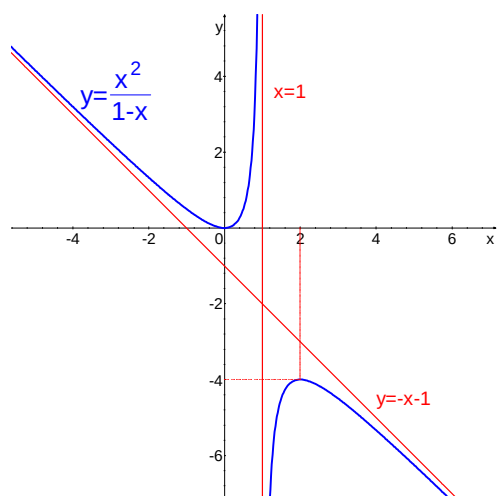
$$\text{g) } 2. \quad 31. \text{ a) } 0; \quad \text{b) } 1; \quad \text{c) } -\frac{1}{2}; \quad \text{d) } -\frac{1}{2}. \quad 32. \text{ a) } \frac{1}{4}; \quad \text{b) } -\infty; \quad \text{c) } \pm\infty; \quad \text{d) } \frac{1}{2}. \quad 33. \text{ a) } 1;$$

$$\text{b) } e; \quad \text{c) } e^3; \quad \text{d) } e^{-1}.$$

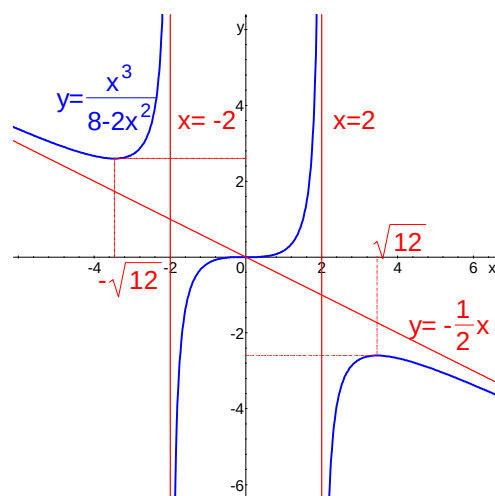
- 34. a)** $D_f = \mathbf{R}$, $\nearrow: \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right), (2, \infty)$, $\searrow: \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$, $\max \left[-\frac{2}{3}, \frac{175}{27}\right]$, $\min [2, -3]$;
- b)** $D_f = \mathbf{R} - \{-4\}$, $\nearrow: (-\infty, -8), (0, \infty)$, $\searrow: (-8, -4), (-4, 0)$, $\max [-8, -16]$, $\min [0, 0]$;
- c)** $D_f = \mathbf{R}$, $\nearrow: (-1, \infty)$, $\searrow: (-\infty, -1)$, $\min [-1, e^{-5}]$;
- d)** $D_f = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$, $\nearrow: (-\infty, -1), (2, \infty)$;
- e)** $D_f = \mathbf{R}$, $\nearrow: (0, \infty)$, $\searrow: (-\infty, 0)$, $\min \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$;
- f)** $D_f = \mathbf{R}$, $\nearrow: \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + k\pi$, $\searrow: \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) + k\pi$, $\max \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{1}{2}\right]$, $\min \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{1}{2}\right]$;
- g)** $D_f = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$, $\nearrow: \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$;
- h)** $D_f = (-2, 2)$, $\nearrow: (-2, -1), (1, 2)$, $\searrow: (-1, 1)$, $\max [-1; 0, 18]$, $\min [1; -0, 18]$.
- 35. a)** $D_f = \mathbf{R}$, $\cup: (1, \infty)$, $\cap: (-\infty, 1)$, $\text{IB} [1, 4]$; **b)** $D_f = \mathbf{R} - \{4\}$, $\cup: (-4, \infty)$, $\cap: (-\infty, -4)$;
- c)** $D_f = \mathbf{R}$, $\cup: \mathbf{R}$; **d)** $D_f = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, $\cup: (-\infty, 0)$, $\cap: (1, \infty)$; **e)** $D_f = \mathbf{R}$, $\cup: \mathbf{R}$;
- f)** $D_f = \mathbf{R}$, $\cup: (-1, \infty)$, $\cap: (-\infty, -1)$, $\text{IB} [-1, e^2]$;
- g)** $D_f = \mathbf{R}$, $\cup: (-1, 1)$, $\cap: (-\infty, -1), (1, \infty)$, $\text{IB} [-1, -10e^{-1}]$, $\text{IB} [1, -2e]$;
- h)** $D_f = \mathbf{R}$, $\cup: \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) + k\pi$, $\cap: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$, $\text{IB} [k\pi, 0]$. **36. a)** $\max [-6, 63]$, $\min [2, -3]$;
- b)** $\max$ není, $\min \left[-4, -\frac{11}{3}\right]$; **c)** $\max [4, 73]$, $\min [1, -8]$; **d)** $\max [-3, \sqrt{26}]$, $\min [0, \sqrt{5}]$;
- e)** $\max [\pi; 3, 14]$, $\min \left[\frac{2}{3}\pi; 1, 22\right]$; **f)** $\max [1, 1]$, $\min [-1, e^{-4}]$; **g)** $\max [2, 4e^{-2}]$, $\min [0, 0]$;
- h)** $\max [-1, 0]$, $\min \left[\frac{1}{2}; -1, 15\right]$. **37. a)** $y = 0$; **b)** $y = \frac{3x-1}{9}$, $x = \frac{5}{3}$, zleva $-\infty$, zprava $+\infty$;
- c)** $y = \frac{\pi}{4}$; **d)** $y = 2x + 3$; **e)** $y = 0$, $x = 3$, zleva $-\infty$, zprava $+\infty$, $x = -3$, zleva $-\infty$, zprava $+\infty$;
- f)** $y = x + \frac{\pi}{2}$, $y = x - \frac{\pi}{2}$; **g)** $y = \frac{1}{2}$, $x = -3$, zleva $+\infty$, zprava $-\infty$;
- h)** $y = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, zleva $-\infty$, zprava $+\infty$, $x = -\frac{1}{2}$, zleva $-\infty$, zprava $+\infty$.

38.

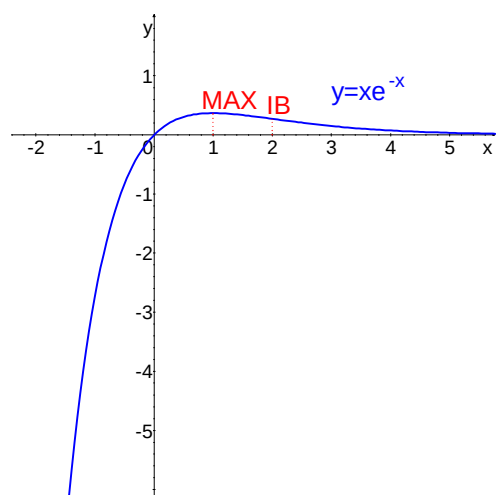
a)



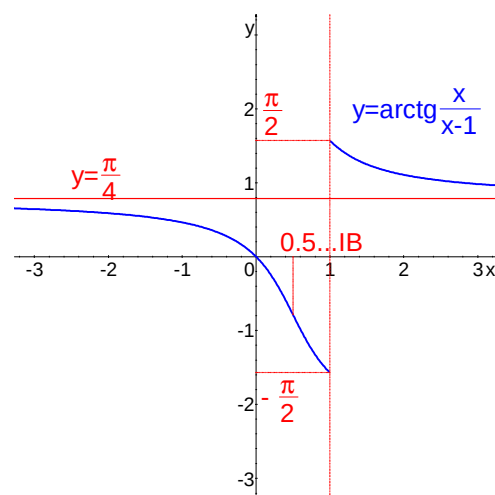
b)



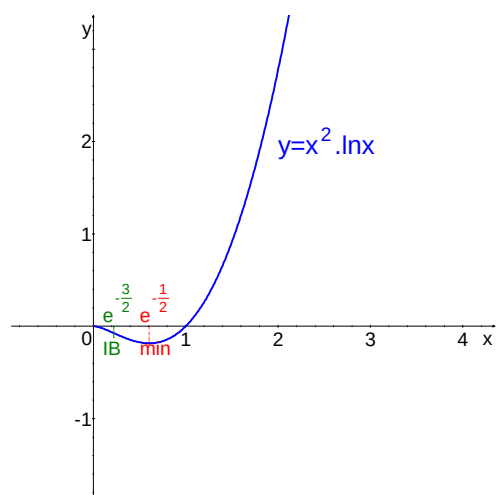
c)



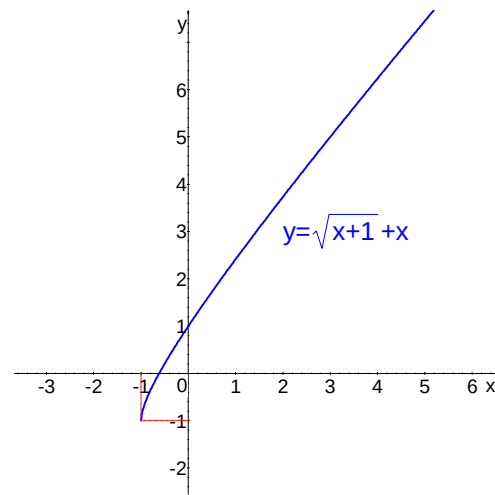
d)



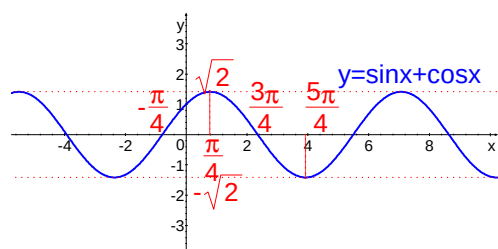
e)



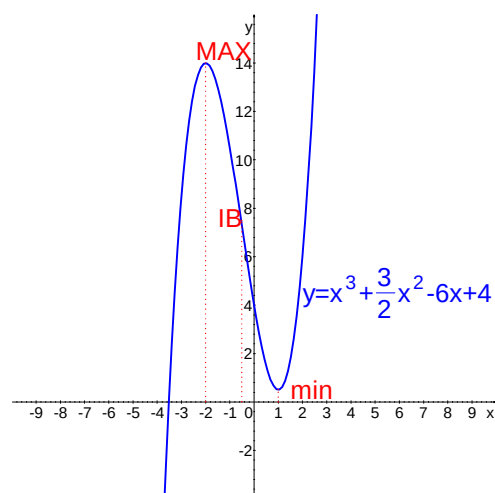
f)



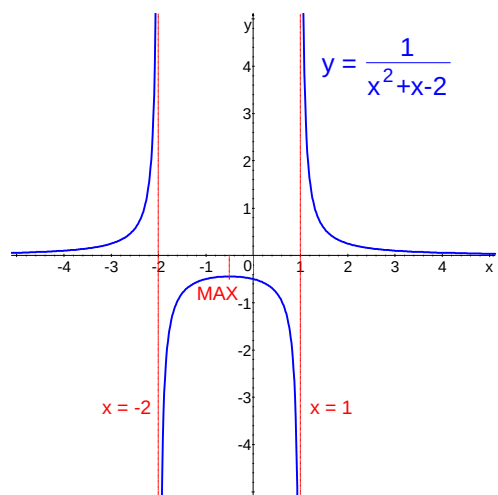
g)



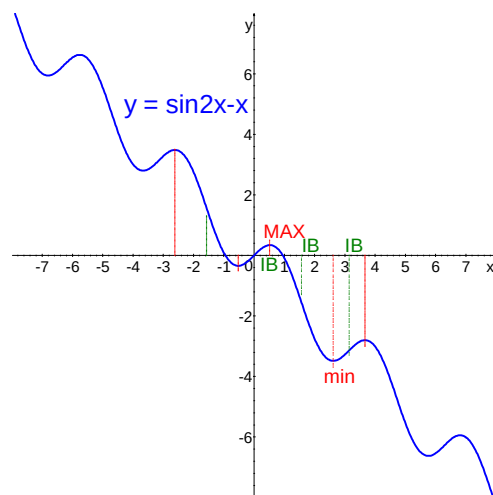
h)



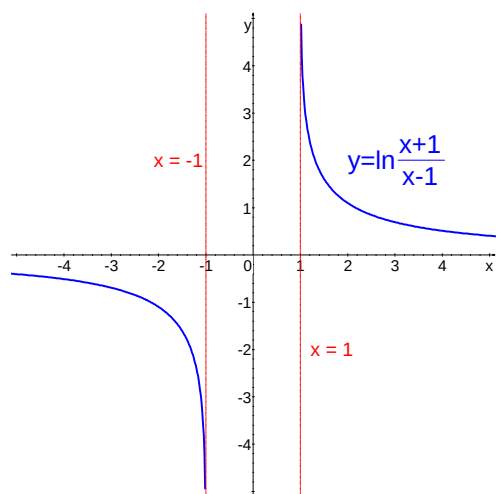
i)



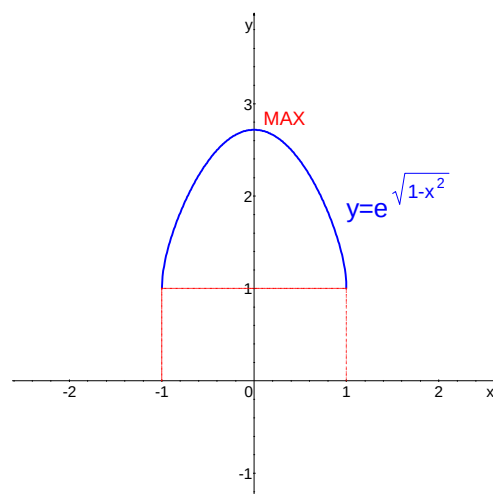
j)



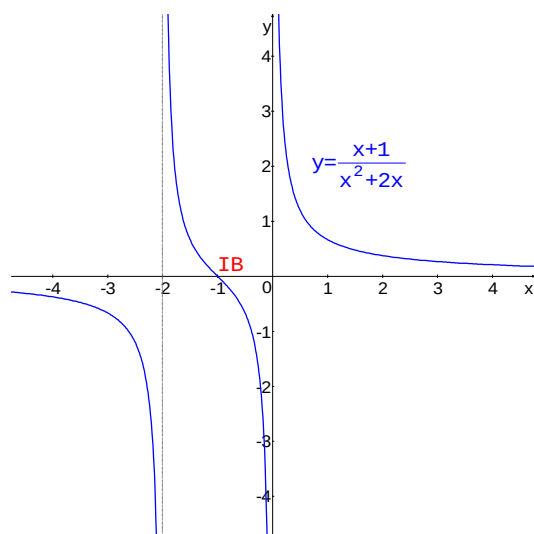
k)



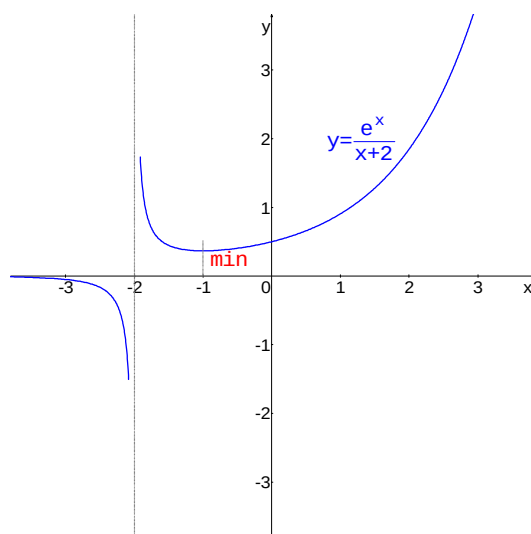
l)



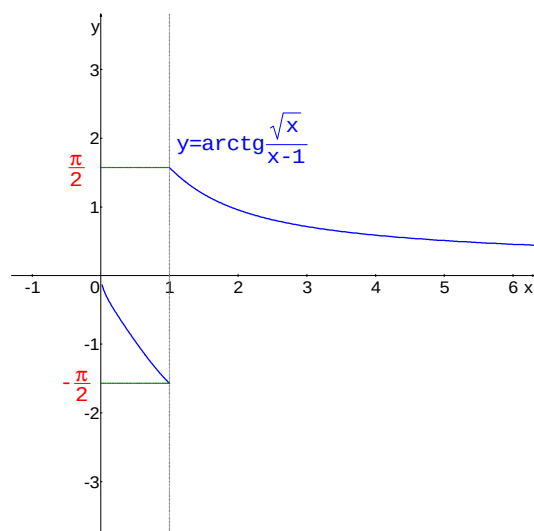
m)



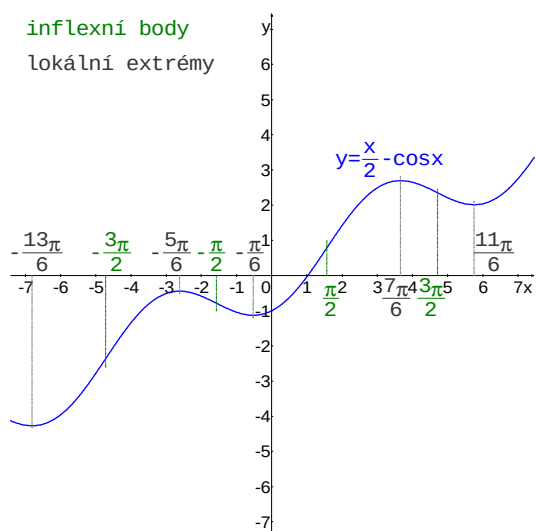
n)



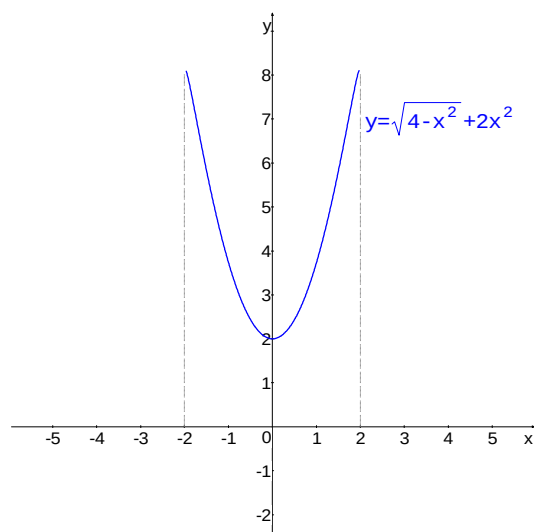
o)



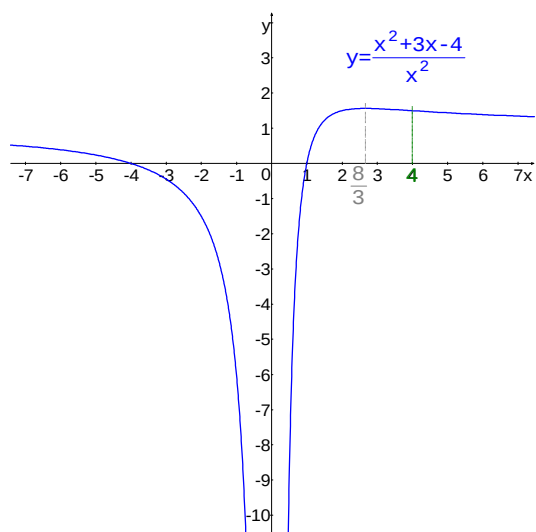
p)



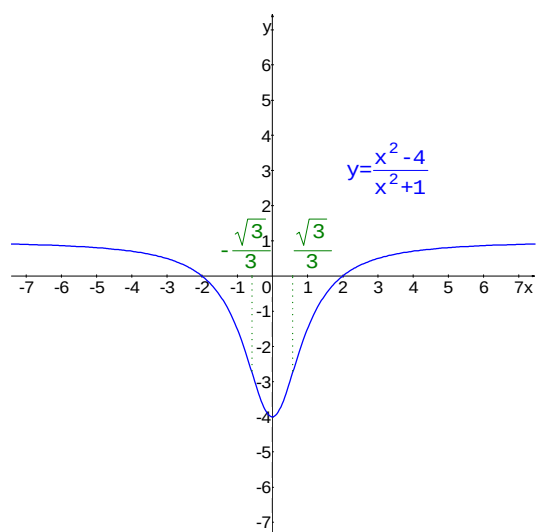
q)



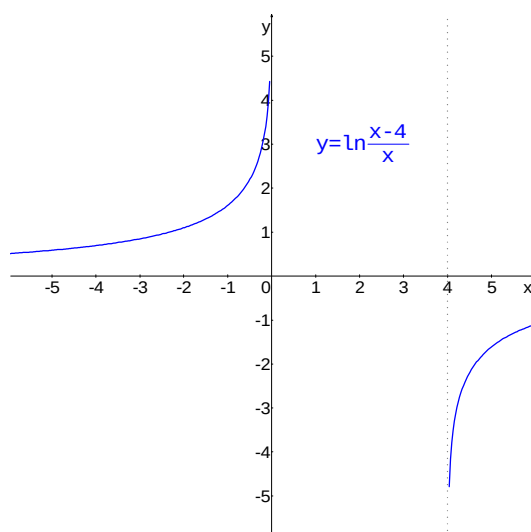
r)



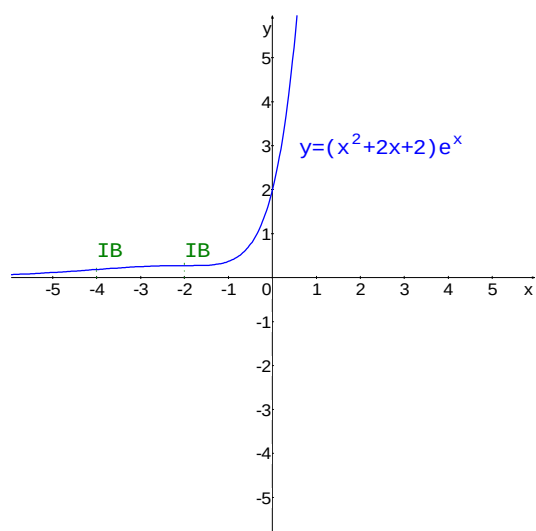
s)



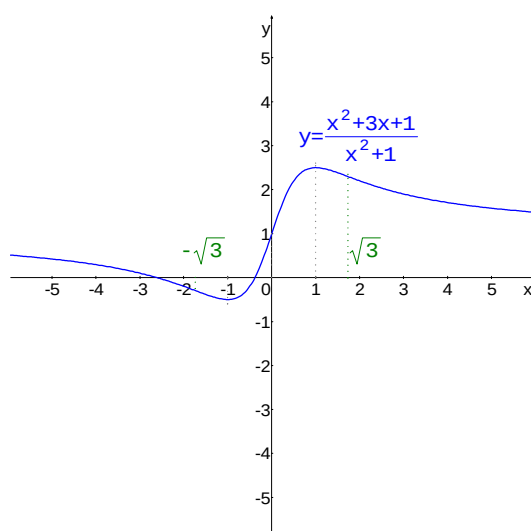
t)



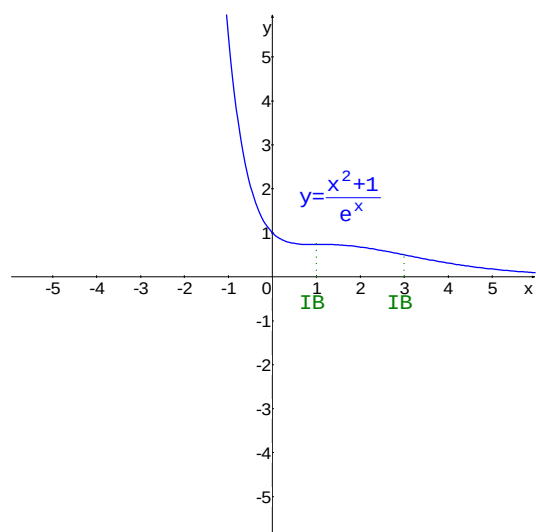
t)



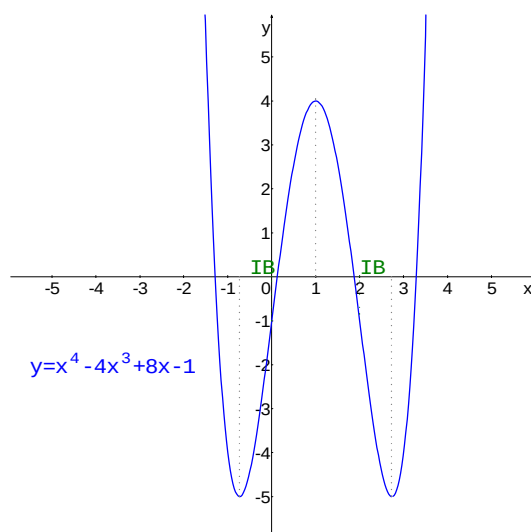
u)



v)



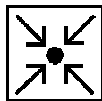
z)



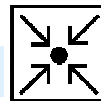
5. INTEGRÁLNÍ POČET	58
5.1. Integrace rozkladem	58
Úlohy k samostatnému řešení.....	58
5.2. Jednoduché substituce	59
Úlohy k samostatnému řešení.....	59
5.3. Per partes	59
Úlohy k samostatnému řešení.....	59
5.4. Integrace racionální lomené funkce.....	60
Úlohy k samostatnému řešení.....	60
5.5. Iracionální funkce	61
Úlohy k samostatnému řešení.....	61
5.6. Goniometrické funkce.....	61
Úlohy k samostatnému řešení.....	61
Výsledky úloh k samostatnému řešení	63

5. INTEGRÁLNÍ POČET

5.1. Integrace rozkladem



Úlohy k samostatnému řešení



1. Vypočítejte integrál:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \left(6x^2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^5} \right) dx, & \text{b) } \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right) dx, & \text{c) } \int \frac{x^2 - 2\sqrt{x} + 2}{x} dx, \\ \text{d) } \int \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} dx, & \text{e) } \int \frac{x^2 - 9}{x + 3} dx, & \text{f) } \int \frac{(\sqrt{x} + 3)^2}{x\sqrt{x}} dx, \\ \text{g) } \int \frac{\sqrt[3]{x^2} + 3x + 1}{\sqrt[3]{x}} dx, & \text{h) } \int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx, & \text{i) } \int \frac{(x - 2\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx, \\ \text{j) } \int \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx, & \text{k) } \int \frac{x^2 e^x - 3x}{2x^2} dx, & \text{l) } \int \frac{e^{2x} - e^x \sqrt{x}}{e^x} dx. \end{array}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. Vypočítejte integrál:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{1}{x + 2} dx, & \text{b) } \int \frac{1}{2x + 3} dx, & \text{c) } \int \frac{x}{x + 1} dx, \\ \text{d) } \int \frac{x^2}{x - 2} dx, & \text{e) } \int \frac{5 - x}{x + 5} dx, & \text{f) } \int \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} dx, \\ \text{g) } \int \frac{x^2 + 1}{x - 1} dx, & \text{h) } \int \frac{2x + 2}{3 - 2x} dx, & \text{i) } \int \frac{x^2 + 4x + 8}{x + 2} dx, \\ \text{j) } \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx, & \text{k) } \int \frac{x^2 + 4x + 8}{x^2 + 4} dx, & \text{l) } \int \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1} dx. \end{array}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. Vypočítejte integrál:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int (\sin x - \cos x) dx, & \text{b) } \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx, & \text{c) } \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx, \\ \text{d) } \int 2 \cos^2 \frac{x}{2} dx, & \text{e) } \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx, & \text{f) } \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx, \\ \text{g) } \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx, & \text{h) } \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx, & \text{i) } \int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx. \end{array}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

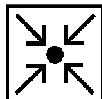
4. Vypočítejte integrál:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{\sin x}{\cos x} dx, & \text{b) } \int \frac{e^x}{e^x + 3} dx, & \text{c) } \int \frac{1}{x(\ln x + 1)} dx, \end{array}$$

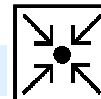
$$\begin{array}{lll} \text{d)} \int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 2} dx, & \text{e)} \int \frac{1}{(1+x^2) \arctg x} dx, & \text{f)} \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x + 4} dx, \\ \text{g)} \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx, & \text{h)} \int \frac{e^{2x} + x}{e^{2x} + x^2 + 2} dx, & \text{i)} \int \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3 + 3x^2 + 6x + 5} dx. \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

5.2. Jednoduché substituce



Úlohy k samostatnému řešení



5. Vypočítejte integrál:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int 2e^{2x} dx, & \text{b)} \int \cos(4x+3) dx, & \text{c)} \int \sin 3x dx, \\ \text{d)} \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx, & \text{e)} \int (2x-1)^4 dx, & \text{f)} \int \frac{1}{1+4x^2} dx, \\ \text{g)} \int \frac{1}{\sin^2 5x} dx, & \text{h)} \int 2^{3x} dx, & \text{i)} \int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx. \end{array}$$

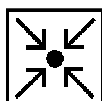
[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

6. Vypočítejte integrál:

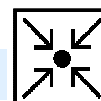
$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int (e^{2x} + 3e^x + 5)e^x dx, & \text{b)} \int \sin x \cos^2 x dx, & \text{c)} \int 2x \sin x^2 dx, \\ \text{d)} \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx, & \text{e)} \int \frac{(\operatorname{cotg} x - 1)^4}{\sin^2 x} dx, & \text{f)} \int \frac{\arctg^3 x}{1+x^2} dx, \\ \text{g)} \int \frac{\sqrt{\operatorname{arccotg}^3 x}}{1+x^2} dx, & \text{h)} \int \frac{\ln^2 x + 3 \ln x - 8}{x} dx, & \text{i)} \int \frac{1 + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

5.3. Per partes



Úlohy k samostatnému řešení



7. Vypočítejte integrál:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int x e^x dx, & \text{b)} \int (x^2 - 2x + 3)e^{-x} dx, & \text{c)} \int (4x + 2) \sin 2x dx, \\ \text{d)} \int (3x - 4) \cos \frac{x}{2} dx, & \text{e)} \int x \operatorname{tg}^2 x dx, & \text{f)} \int \ln x dx, \\ \text{g)} \int \arcsin x dx, & \text{h)} \int \arctg x dx, & \text{i)} \int \arccos x dx, \\ \text{j)} \int \operatorname{arccotg} x dx, & \text{k)} \int (x^2 + 1) \ln x dx, & \text{l)} \int \arctg \sqrt{x} dx, \\ \text{m)} \int x \sin^2 x dx, & \text{n)} \int e^x \cos x dx, & \text{o)} \int e^{3x} \sin 2x dx, \end{array}$$

p) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx,$

q) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx,$

r) $\int \sqrt{x} \ln x dx,$

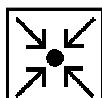
s) $\int \sqrt{1-x^2} dx,$

t) $\int \sin \ln x dx,$

u) $\int e^x \sin 2x dx.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

5.4. Integrace racionální lomené funkce



Úlohy k samostatnému řešení



8. Vypočítejte integrál:

a) $\int \frac{2}{x^2 + 2x} dx,$

b) $\int \frac{x+5}{x^2 + x - 2} dx,$

c) $\int \frac{2}{4-x^2} dx,$

d) $\int \frac{5-x}{x^2 + 4x + 3} dx,$

e) $\int \frac{4x+2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx,$

f) $\int \frac{1}{4x^2 - 1} dx,$

g) $\int \frac{5}{2+3x-2x^2} dx,$

h) $\int \frac{3x+1}{x-x^3} dx,$

i) $\int \frac{-1}{(2+x)(2+3x)} dx,$

j) $\int \frac{8}{7-6x-x^2} dx,$

k) $\int \frac{3}{8x^2 - 28x + 24} dx,$

l) $\int \frac{3-21x-16x^2}{x(1-4x)(x+3)} dx.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

9. Vypočítejte integrál:

a) $\int \frac{2-x^2}{x(x+1)^2} dx,$

b) $\int \frac{5-2x}{(1-x)^4} dx,$

c) $\int \frac{-4x-2}{x^2(x+1)^2} dx,$

d) $\int \frac{-4x^2+5x-6}{x^3(x-3)} dx,$

e) $\int \frac{1-3x-x^2-x^3}{(1-x^2)^2} dx,$

f) $\int \frac{40-6x^2}{(4-x^2)^2} dx,$

g) $\int \frac{2x^2-x-1}{x^3(x+1)} dx,$

h) $\int \frac{12x^2-12x+4}{x(2x-1)^2} dx,$

i) $\int \frac{-2x^2+26x-35}{(2x+5)(x-5)^2} dx.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

10. Vypočítejte integrál:

a) $\int \frac{3x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx,$

b) $\int \frac{2-x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx,$

c) $\int \frac{2-6x-x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx,$

d) $\int \frac{4x}{1-x^4} dx,$

e) $\int \frac{x^2+6x}{(x^2+9)(2x-3)} dx,$

f) $\int \frac{3x^2+4x+33}{(x^2+9)(3-x)} dx,$

$$\begin{aligned} \text{g)} \int \frac{5x^2 - 6x + 6}{(2 - 4x)(x^2 + 4)} dx, \quad \text{h)} \int \frac{x^2 - 3x - 2}{(x^2 + 2x + 2)(5x + 4)} dx, \quad \text{i)} \int \frac{2}{x^3 + 2x} dx, \\ \text{j)} \int \frac{6x^3 - x^2 + 12x - 3}{x^4 + 3x^2} dx, \quad \text{k)} \int \frac{2x}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} dx, \quad \text{l)} \int \frac{3x^4 + 3x^2 - 18}{x^5 + 6x^3} dx. \end{aligned}$$

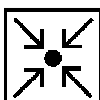
Výsledky úloh k samostatnému řešení

11. Vypočítejte integrál:

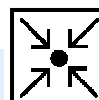
$$\begin{aligned} \text{a)} \int \frac{x^4}{x+1} dx, \quad \text{b)} \int \frac{(x-1)^3}{x+2} dx, \quad \text{c)} \int \frac{x^3}{4-x^2} dx, \\ \text{d)} \int \frac{x^4}{1-x^2} dx, \quad \text{e)} \int \frac{x^4 + 6x^2}{x^2 - 9} dx, \quad \text{f)} \int \frac{2x^3 + 5x^2 - 3x + 3}{x(3+x)} dx, \\ \text{g)} \int \frac{x^2 - 4x + 12}{(x^2 + 4)} dx, \quad \text{h)} \int \frac{x^4 + 4x^3 - x^2 + 5x + 2}{(x^2 + 1)(x + 4)} dx, \quad \text{i)} \int \frac{x^4}{x^3 + 2x} dx, \\ \text{j)} \int \frac{6x^3}{6-3x^2} dx, \quad \text{k)} \int \frac{2x^5}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} dx, \quad \text{l)} \int \frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + x^3} dx. \end{aligned}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5.5. Iracionální funkce



Úlohy k samostatnému řešení

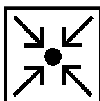


12. Vypočítejte integrál:

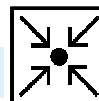
$$\begin{aligned} \text{a)} \int x \sqrt[3]{2-x^2} dx, \quad \text{b)} \int \sqrt{1+x^2} dx, \quad \text{c)} \int \sqrt{1-x^2} dx, \\ \text{d)} \int \frac{x}{\sqrt{5+x^2}} dx, \quad \text{e)} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx, \quad \text{f)} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx, \\ \text{g)} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx, \quad \text{h)} \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx, \quad \text{i)} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+4}} dx, \\ \text{j)} \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x-4}} dx, \quad \text{k)} \int \frac{\sqrt[4]{x+3}}{1-\sqrt{x+3}} dx, \quad \text{l)} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx. \end{aligned}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5.6. Goniometrické funkce



Úlohy k samostatnému řešení



13. Vypočítejte integrál:

$$\text{a)} \int \sin x \cos x dx, \quad \text{b)} \int \sin^2 x \cos x dx, \quad \text{c)} \int \sin x \cos^3 x dx,$$

- d) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx,$ e) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx,$ f) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx,$
g) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx,$ h) $\int \operatorname{tg}^5 x dx,$ i) $\int \frac{1}{\sin x} dx,$
j) $\int \frac{1}{\cos x} dx,$ k) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx,$ l) $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^3 x} dx,$
m) $\int \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x} dx,$ n) $\int \frac{\cos x}{1 + 4 \sin^2 x} dx,$ o) $\int \frac{1}{\sin^2 x - 2 \cos^2 x} dx,$
p) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx,$ q) $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx,$ r) $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^6 x} dx,$
s) $\int \frac{\cos x}{\cos x + 1} dx,$ t) $\int \frac{\sin x}{\sin x + 1} dx,$ u) $\int \frac{\sin x}{\cos 2x + 1} dx,$
v) $\int \frac{1}{2 \sin x \cos x} dx,$ w) $\int \frac{1}{(\sin x + 1) \cos x} dx,$ z) $\int \frac{1}{2 \sin x \cos x + \sin^2 x} dx.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $2x^3 - \ln|x| - \frac{1}{x^4} + c$; b) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + c$; c) $\frac{x^2}{2} - 4\sqrt{x} + 2\ln|x| + c$;
- d) $\frac{x^2}{2} + 2x + c$; e) $\frac{x^2}{2} - 3x + c$; f) $2\sqrt{x} + 6\ln|x| - \frac{18}{\sqrt{x}} + c$; g) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$;
- h) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$; i) $\frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2} - \frac{24}{13}x^2\sqrt[6]{x} + \frac{12}{5}x\sqrt[3]{x^2} + c$; j) $e^x - 2x + c$; k) $\frac{e^x}{2} - \frac{3}{2}\ln x + c$;
- l) $e^x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$. 2. a) $\ln|x+2| + c$; b) $\frac{1}{2}\ln|2x+3| + c$; c) $x - \ln|x+1| + c$;
- d) $\frac{x^2}{2} + 2x + 4\ln|x-2| + c$; e) $-x + 10\ln|x+5| + c$; f) $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| + c$;
- g) $\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + c$; h) $-x - \frac{5}{2}\ln|3-2x| + c$; i) $\frac{x^2}{2} + 2x + 4\ln|x+2| + c$;
- j) $\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \arctg x + c$; k) $x + 2\ln|x^2+4| + 2\arctg \frac{x}{2} + c$; l) $x + \ln|x^2+1| + c$.
3. a) $-\cos x - \sin x + c$; b) $\tg x - x + c$; c) $\cos x + \sin x + c$; d) $x + \sin x$;
- e) $\tg x - \cotg x + c$; f) $-\frac{1}{2}\cos x + c$; g) $-\cotg x - 2x + c$; h) $-\cotg x - \tg x + c$;
- i) $\frac{1}{2}\tg x + c$. 4. a) $-\ln|\cos x| + c$; b) $\ln|e^x+3| + c$; c) $\ln|\ln x+1| + c$; d) $\ln|x^3+2x-2| + c$;
- e) $\ln|\arctg x| + c$; f) $-\ln|\cos^2 x+3| + c$; g) $\ln|\sin^2 x| + c$; h) $\frac{1}{2}\ln|e^{2x}+x^2+2| + c$;
- i) $\frac{1}{3}\ln|x^3+3x^2+6x+5| + c$. 5. a) $e^{2x} + c$; b) $\frac{1}{4}\sin(4x+3) + c$; c) $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$;
- d) $2\tg \frac{x}{2} + c$; e) $\frac{1}{10}(2x-1)^5 + c$; f) $\frac{1}{2}\arctg 2x + c$; g) $-\frac{1}{5}\cotg 5x + c$; h) $\frac{2^{3x}}{3\ln 2} + c$;
- i) $\frac{1}{3}\arcsin 3x + c$. 6. a) $\frac{e^{3x}}{3} + \frac{3}{2}e^{2x} + 5e^x + c$; b) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + c$; c) $-\cos x^2 + c$;
- d) $\frac{1}{3}\tg^3 x + c$; e) $-\frac{1}{5}(\cotg x - 1)^5 + c$; f) $\frac{1}{4}\arctg^4 x + c$; g) $-\frac{2}{5}\sqrt{\arccotg^5 x} + c$;
- h) $\frac{1}{3}\ln^3 x + \frac{3}{2}\ln^2 x - 8\ln x + c$; i) $\arcsin x + \frac{1}{2}\arcsin^2 x + c$. 7. a) $xe^x - e^x + c$;
- b) $-e^{-x}(x^2+3)$; c) $\sin 2x - (2x+1)\cos 2x + c$; d) $(6x-8)\sin \frac{x}{2} + 12\cos \frac{x}{2} + c$;

$$\text{e)} x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln |\cos x| + c, \quad \text{f)} x \ln x - x + c; \quad \text{g)} x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c;$$

$$\text{h)} x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c; \quad \text{i)} x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c; \quad \text{j)} x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c;$$

$$\text{k)} \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} - x + c; \quad \text{l)} x \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + c; \quad \text{m)} \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + c;$$

$$\text{n)} \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c; \quad \text{o)} \frac{e^{3x}}{13} (3 \sin 2x - 2 \cos 2x) + c; \quad \text{p)} x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + c;$$

$$\text{q)} -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c; \quad \text{r)} \frac{2}{3} x \sqrt{x} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right) + c; \quad \text{s)} \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c;$$

$$\text{t)} \frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x) + c; \quad \text{u)} \frac{e^x}{5} (\sin 2x - 2 \cos 2x) + c. \quad \text{8. a)} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + c;$$

$$\text{b)} \ln \left| \frac{(x-1)^2}{x+2} \right| + c; \quad \text{c)} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + c; \quad \text{d)} 3 \ln |x+1| - 4 \ln |x+3| + c = \ln \left| \frac{(x+1)^3}{(x+3)^4} \right| + c;$$

$$\text{e)} \ln \left| \frac{x^2-1}{(x+2)^2} \right| + c, \quad \text{f)} \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+1} \right| + c; \quad \text{g)} \ln \left| \frac{2x+1}{x-2} \right| + c; \quad \text{h)} \ln \left| \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \right| + c;$$

$$\text{i)} \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{3x+2} \right| + c; \quad \text{j)} \ln \left| \frac{x+7}{x-1} \right| + c; \quad \text{k)} \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-2}{2x-3} \right| + c; \quad \text{l)} \ln |x(x+3)^2(4x-1)| + c.$$

$$\text{9. a)} \frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x^2}{(x+1)^3} \right| + c; \quad \text{b)} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} + c; \quad \text{c)} \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} + c;$$

$$\text{d)} \ln \left| \frac{x}{x-3} \right| + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + c; \quad \text{e)} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \ln |x-1| + c, \quad \text{f)} 2 \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + c;$$

$$\text{g)} \frac{1}{2x^2} + 2 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + c; \quad \text{h)} \ln \left| \frac{x^4}{2x-1} \right| - \frac{1}{2x-1} + c; \quad \text{i)} -\ln |2x+5| - \frac{3}{x-5} + c.$$

$$\text{10. a)} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2+1}{x^2+4} \right| + c; \quad \text{b)} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c; \quad \text{c)} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x^2+4}{x^2+1} \right| + c;$$

$$\text{d)} \ln \left| \frac{x^2+1}{x^2-1} \right| + c; \quad \text{e)} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \ln |2x-3| + c, \quad \text{f)} \frac{1}{2} \ln |x^2+9| - 4 \ln |x-3| - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + c;$$

$$\text{g)} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln |x^2+4| - \frac{1}{4} \ln |2-4x| + c; \quad \text{h)} \frac{1}{5} \ln |5x+4| - \operatorname{arctg} (x+1) + c;$$

$$\text{i)} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2}{x^2+2} \right| + c; \quad \text{j)} \ln |x^2+3| + 4 \ln |x| + \frac{1}{x} + c; \quad \text{k)} -\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x-1} + c;$$

l) $\ln|x(x^2+6)| + \frac{3}{2x^2} + c$. **11. a)** $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$;

b) $\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 13x - 27\ln|x+2| + c$; **c)** $-\frac{x^2}{2} - 2\ln|x^2-4| + c$; **d)** $-\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c$;

e) $\frac{x^3}{3} + 15x + \frac{45}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$, **f)** $x^2 - x + \ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + c$; **g)** $x + 4\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - 2\ln|x^2+4| + c$;

h) $\operatorname{arctg} x - 2\ln|x+4| + \frac{x^2}{2} + c$; **i)** $\frac{x^2}{2} - \ln|x^2+2| + c$; **j)** $-2\ln|x^2-2| - x^2 + c$;

k) $x^2 + 4x + 4\ln|x-1| - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x-1} + c$; **l)** $4\ln|x+1| - \ln|x| + x - \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2} + c$.

12. a) $-\frac{3}{8}(2-x^2)\sqrt[3]{2-x^2} + c$; **b)** $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln|x+\sqrt{x^2+1}|\right) + c$;

c) $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + c$; **d)** $\sqrt{5+x^2} + c$; **e)** $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + c$,

f) $x - 2\sqrt{x} + 2\ln|1+\sqrt{x}| + c$; **g)** $\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + c$; **h)** $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + c$;

i) $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{24}{5}\sqrt[6]{x^5} + 32\sqrt{x} - 384\sqrt[6]{x} + 768\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + c$;

j) $x + \frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3} + 32\sqrt{x} + 256\sqrt[4]{x} + 1024\ln|\sqrt[4]{x}-4| + c$;

k) $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(x+3)^3} - 4\sqrt[4]{x+3} + 2\ln\left|\frac{1+\sqrt[4]{x+3}}{1-\sqrt[4]{x+3}}\right| + c$; **l)** $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + c$. **13. a)** $\frac{\sin^2 x}{2} + c$;

b) $\frac{\sin^3 x}{3} + c$; **c)** $-\frac{\cos^4 x}{4} + c$; **d)** $-\frac{1}{2\sin^2 x} + c$; **e)** $\ln|\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2} + c$,

f) $\operatorname{arccotg}(\cos x) + c$; **g)** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c$; **h)** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{tg}^2 x| + c$; **i)** $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$;

j) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right| - \ln\left|1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$; **k)** $-\frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} + c$; **l)** $\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + c$;

m) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x-2}{\cos x+2}\right| + c$; **n)** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\sin x) + c$; **o)** $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}+\operatorname{tg} x}\right| + c$; **p)** $-\frac{1}{\sin x} - \sin x + c$;

q) $\frac{1}{2}\ln\left|1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right| - \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{x}{2} + c$; **r)** $-\frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} - \operatorname{cotg} x - x + c$;

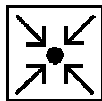
$$\text{s)} -\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2x + c; \quad \text{t)} \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + x + c; \quad \text{u)} \frac{1}{2 \cos x} + c; \quad \text{v)} \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1 \right| + c;$$

$$\text{w)} \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + c, \quad \text{z)} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 2} \right| + c.$$

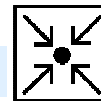
6. URČITÝ INTEGRÁL	68
6.1. Výpočet určitého integrálu	68
Úlohy k samostatnému řešení	68
6.2. Geometrické aplikace	69
6.2.1. Obsah rovinného obrazce	69
Úlohy k samostatnému řešení	69
6.2.2. Délka oblouku rovinné křivky	70
Úlohy k samostatnému řešení	70
6.2.3. Objem rotačního tělesa	70
Úlohy k samostatnému řešení	70
6.2.4. Povrch rotačního tělesa	71
Úlohy k samostatnému řešení	71
6.3. Nevlastní integrál	71
Úlohy k samostatnému řešení	71
Výsledky úloh k samostatnému řešení	73
Nápověda k úlohám k samostatnému řešení	74
Obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami	74
Délku oblouku rovinné křivky	75
Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy x	77
Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy y	79
Povrch tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy x	79

6. URČITÝ INTEGRÁL

6.1. Výpočet určitého integrálu



Úlohy k samostatnému řešení



1. Vypočítejte integrál:

a) $\int_1^4 \left(x^2 - 4\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx,$

b) $\int_0^{\pi} (\cos 2x - 2 \sin x + 2) dx,$

c) $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx,$

d) $\int_4^9 \left(\frac{x^2 - 5\sqrt{x} + x}{x^3} \right) dx,$

e) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx,$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx,$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx,$

h) $\int_0^1 \left(e^{2x} - 4^{3x} + \frac{1}{2^x} \right) dx,$

i) $\int_0^1 \frac{x+2}{x+1} dx,$

j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx,$

k) $\int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx,$

l) $\int_0^2 \frac{x^2}{4+x^2} dx.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. Vypočítejte integrál:

a) $\int_0^1 (x-1)e^x dx,$

b) $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx,$

c) $\int_0^{\pi} x \sin 2x dx,$

d) $\int_1^4 x^2 \ln x dx,$

e) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos \frac{x}{2} dx,$

f) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx,$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx,$

h) $\int_0^{\pi} (x^2 - 2x + 2) \sin x dx,$

i) $\int_1^e \ln^2 x dx,$

j) $\int_0^{\pi} (x^2 - 1) \cos \frac{x}{2} dx,$

k) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx,$

l) $\int_0^1 x \ln(x+1) dx.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. Vypočítejte integrál:

- a) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx$, b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx$, c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos x dx$,
- d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$, e) $\int_0^1 \sin(\pi\sqrt{x}) dx$, f) $\int_1^e \frac{5\ln^4 x}{x} dx$,
- g) $\int_0^1 \frac{e^x(2e^x+2)}{e^{2x}+2e^x+2} dx$, h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x+3} dx$, i) $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$,
- j) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(x+1)} dx$, k) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x+2}{\cos^2 x} dx$, l) $\int_0^5 \frac{\sqrt{x+4}}{x+3} dx$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

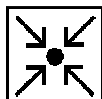
4. Vypočítejte integrál:

- a) $\int_1^2 \frac{x-1}{x^3(x+1)} dx$, b) $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x^2+1)} dx$, c) $\int_1^2 \frac{4}{x^2+4x} dx$,
- d) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x+2}{x(x^2+1)} dx$, e) $\int_3^5 \frac{x+4}{x^2-4x+4} dx$, f) $\int_4^5 \frac{2x}{x^2-x-6} dx$.

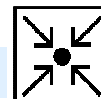
[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

6.2. Geometrické aplikace

6.2.1. Obsah rovinného obrazce



Úlohy k samostatnému řešení



5. Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami:

- a) $x=0, y=0, 3x+4y-12=0$,
 b) $y=0, y=x, y=6-x$,
 c) $y=\sin x+1, y=0, x \in \langle 0, \pi \rangle$,
 d) $y=e^x, y=e^{-x}, y=e$,
 e) $y=\ln(x-1), y=0, x=5$,
 f) $y=-x^2-2x+4, y=x^2-4x-8$,
 g) $x=r \cos t, y=r \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$,
 h) $x=a \cos t, y=b \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$,
 i) $x=r(t-\sin t), y=r(1-\cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle$,
 j) $x=2a \sin t \cos t, y=a \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle$.

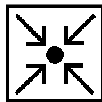
kružnice

elipsa

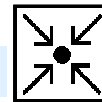
cykloda

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)[Neumím nakreslit obrázek](#)

6.2.2. Délka oblouku rovinné křivky



Úlohy k samostatnému řešení



6. Vypočítejte délku oblouku rovinné křivky:

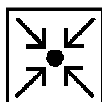
- a) $y = \ln \cos x, x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{3} \right\rangle,$
- b) $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}, x \in \langle 0, 1 \rangle,$
- c) $y = \ln x, x \in \langle 1, 2 \rangle,$
- d) $y = \ln(1-x^2), x \in \left\langle 0, \frac{3}{4} \right\rangle,$
- e) $y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x}, x \in \langle 0, 1 \rangle,$
- f) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x \in \langle 1, 3 \rangle,$
- g) $x = \cos t, y = \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$
- h) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$
- i) $x = t^2, y = \frac{t}{3}(t^2 - 3), t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle,$
- j) $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$

asteroida

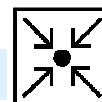
[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

[Neumím nakreslit obrázek](#)

6.2.3. Objem rotačního tělesa



Úlohy k samostatnému řešení



7. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy x :

- a) $y = x^2 - 4, y = 0,$
- b) $y = \ln x, y = 0, x = e,$
- c) $xy = 3, x = 1, x = 3, y = 0,$
- d) $y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{2},$
- e) $y = x^3, y^2 = x,$
- f) $y = \arccos x, y = 0, x = 1,$
- g) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0,$
- h) $x = \cos t, y = \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$
- i) $x = a \cos t, y = b \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$
- j) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

[Neumím nakreslit obrázek](#)

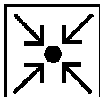
8. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy y :

- a) $y = x^2 - 4, y = 0$,
- b) $y = x^3, y = 1, x = 0$,
- c) $y = 1 - x, y = 1, x = 1$,
- d) $y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{2}$.

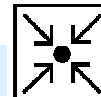
[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

[Neumím nakreslit obrázek](#)

6.2.4. Povrch rotačního tělesa



Úlohy k samostatnému řešení



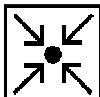
9. Vypočítejte povrch tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy x :

- a) $y = 3 - x, x \in \langle -1, 2 \rangle$,
- b) $y = x^3, x \in \langle 1, 3 \rangle$,
- c) $y = \sqrt{x}, x \in \langle 0, 2 \rangle$,
- d) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), x \in \langle 0, 1 \rangle$,
- e) $x = a \sin 2t, y = 2a \sin^2 t, t \in \langle 0, \pi \rangle$,
- f) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0$,
- g) $x = r \cos t, y = r \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle$,
- h) $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$,
- i) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

[Neumím nakreslit obrázek](#)

6.3. Nevlastní integrál



Úlohy k samostatnému řešení



10. Vypočítejte nevlastní integrál:

- a) $\int_1^2 \frac{x}{x-1} dx$,
- b) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$,
- c) $\int_0^1 \frac{x-1}{x(x+1)} dx$,
- d) $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$,
- e) $\int_1^e \frac{1}{x \ln x} dx$,
- f) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$,

g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx,$

h) $\int_0^{\infty} x \sin x dx,$

i) $\int_0^{\infty} (x-1)e^{-x} dx,$

j) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx,$

k) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3+x^2} dx,$

l) $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $2\ln 2 + \frac{7}{3}$; b) $2\pi - 4$; c) $\ln 2 + \frac{\pi}{4}$; d) $2\ln \frac{3}{2} - \frac{25}{162}$; e) $\frac{\pi}{8} - \frac{3}{4}$; f) $\frac{\pi}{6} - \frac{7\sqrt{3}}{8}$;
g) $1 - \frac{\pi}{4}$; h) $\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{10}{\ln 2}$; i) $\ln 2 + 1$; j) $\ln 2$; k) $\frac{\ln 10}{2}$; l) $2 - \frac{\pi}{2}$. 2. a) $2 - e$; b) $e - \frac{5}{e}$;
c) $-\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{128}{3}\ln 2 - 7$; e) 0 ; f) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$; g) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} + \frac{1}{2}$; h) $\pi^2 - 2\pi$; i) $e - 2$; j) $2\pi^2 - 18$;
k) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$; l) $\frac{1}{4}$. 3. a) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$; b) $4\ln 2 - 3$; c) $\frac{\sqrt{2}}{12}$; d) $\frac{1}{4}$; e) $\frac{2}{\pi}$; f) 1 ;
g) $\ln \frac{e^2 + 2e + 2}{5}$; h) $\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$; i) $1 - \ln \frac{e+1}{2}$; j) $2 - \frac{\pi}{2}$; k) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; l) $\ln \frac{3}{2} + 2$. 4. a) $2\ln \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$;
b) $\frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$; c) $\ln \frac{5}{3}$; d) $\ln \frac{3}{2} + \frac{\pi}{12}$; e) $\ln 3 + 4$; f) $\frac{2}{5}\ln \frac{98}{9}$. 5. a) 6 ; b) 9 ; c) $\pi + 2$; d) 2 ;
e) $8\ln 2 - 4$; f) $\frac{125}{3}$; g) πr^2 ; h) πab ; i) $3\pi r^2$; j) $\frac{4}{3}a^2$. 6. a) $\ln(\sqrt{3} + 2)$; b) $4 - 2\sqrt{2}$;
c) $\ln\left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{10} - \sqrt{2} - 1}{2}\right) + \sqrt{5} - \sqrt{2}$; d) $\ln 7 - \frac{3}{4}$; e) 2 ; f) $\ln(e^4 + e^2 + 1) - 2$; g) 2π ;
h) $\frac{3}{2}$; i) $2\sqrt{3}$; j) $\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$. 7. a) $\frac{512}{15}\pi$; b) $\pi(e - 2)$; c) 6π ; d) $\frac{\pi^2}{4}$; e) $\frac{5}{14}\pi$;
f) $\pi^2 - 2\pi$; g) $5\pi^2 a^3$; h) $\frac{4}{3}\pi$; i) $\frac{4}{3}\pi ab^2$; j) $\frac{52}{105}\pi a^3$. 8. a) 8π ; b) $\frac{3}{5}\pi$; c) $\frac{2}{3}\pi$;
d) 2π . 9. a) $15\sqrt{2}\pi$; b) $\frac{\pi}{27}(730\sqrt{730} - 10\sqrt{10})$; c) $\frac{13}{3}\pi$; d) $\frac{\pi}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)$; e) $4\pi^2 a^2$;
f) $\frac{64}{3}\pi a^2$; g) $4\pi r^2$; h) $\frac{2\sqrt{2}}{5}\pi(e^\pi - 2)$; i) $\frac{6}{5}\pi a^2$. 10. a) diverguje; b) 2 ; c) diverguje;
d) $2 - \pi$; e) diverguje; f) $\sqrt{2}$; g) 0 ; h) diverguje; i) 0 ; j) $\frac{\pi}{2}$; k) $1 - \ln 2$; l) 2 .

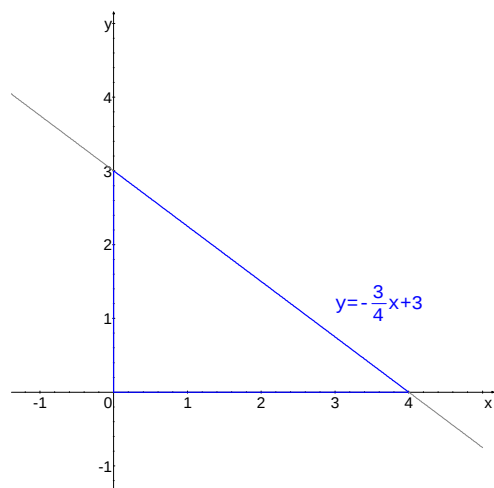


Nápověda k úlohám k samostatnému řešení

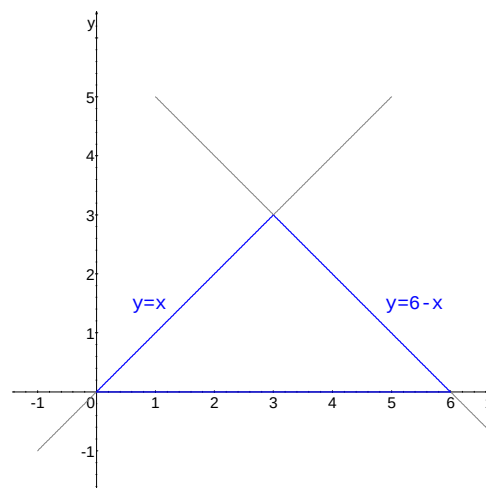


Obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

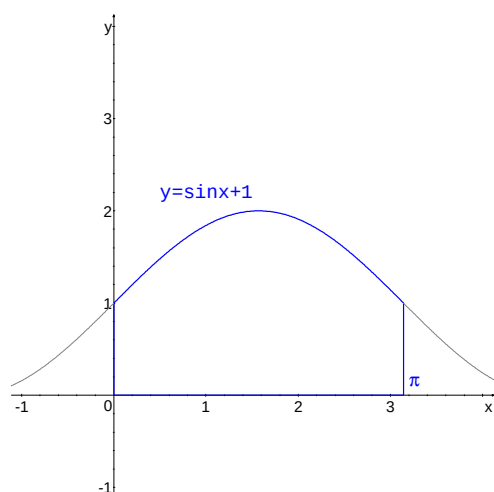
a)



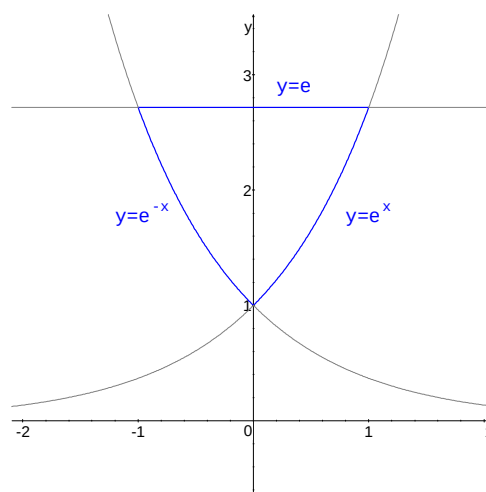
b)



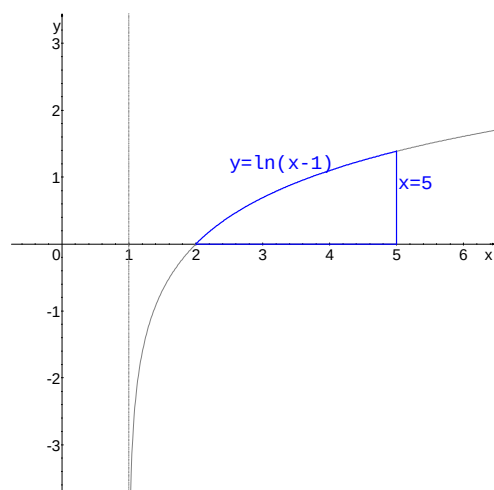
c)



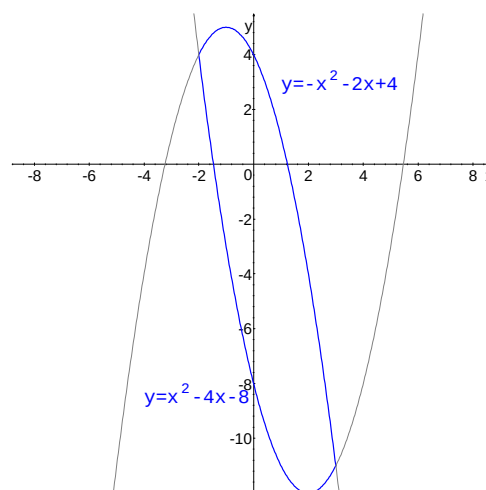
d)



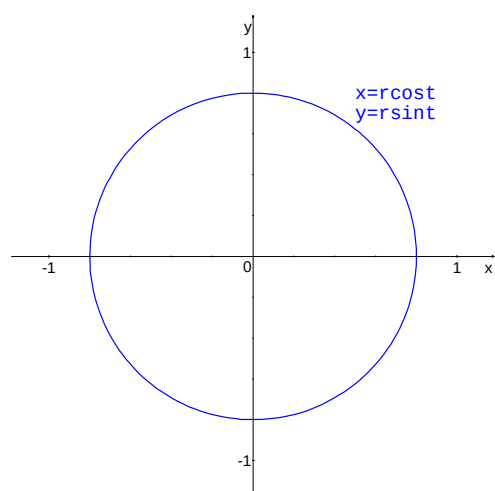
e)



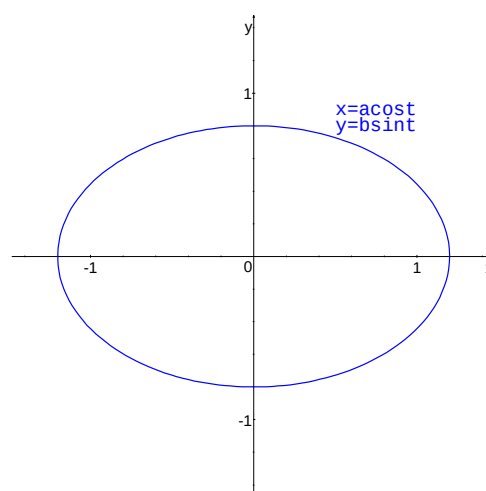
f)



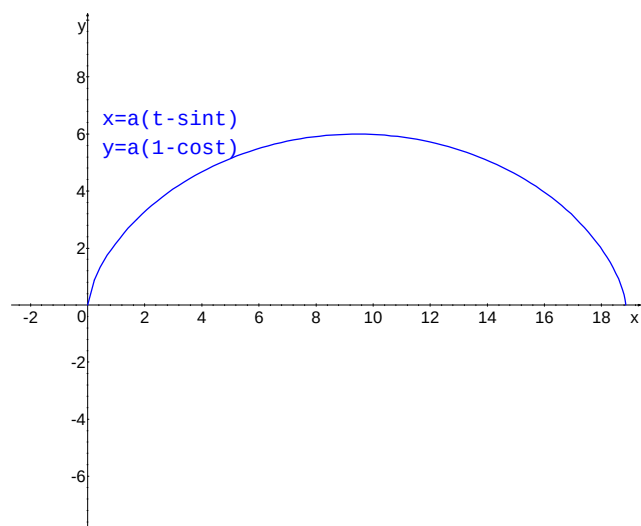
g)



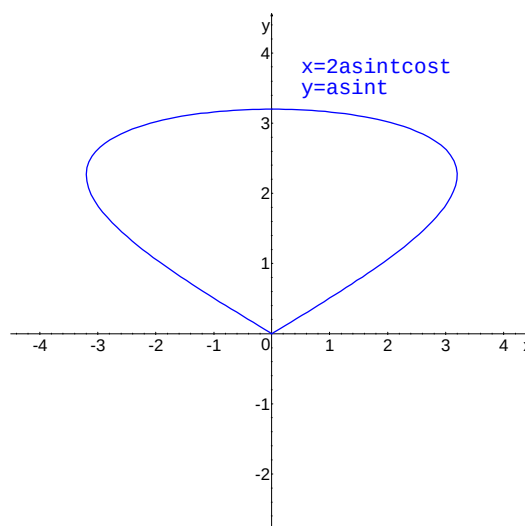
h)



i)

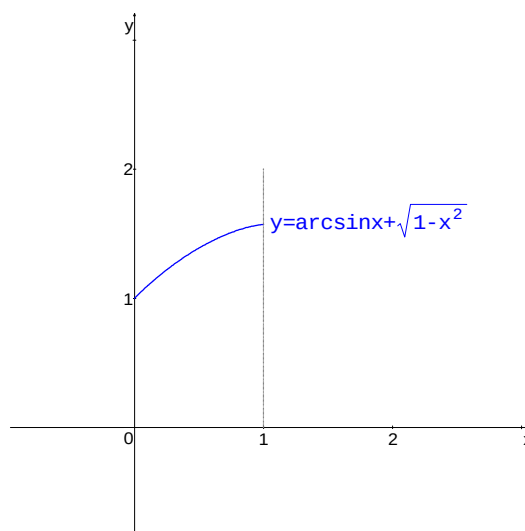
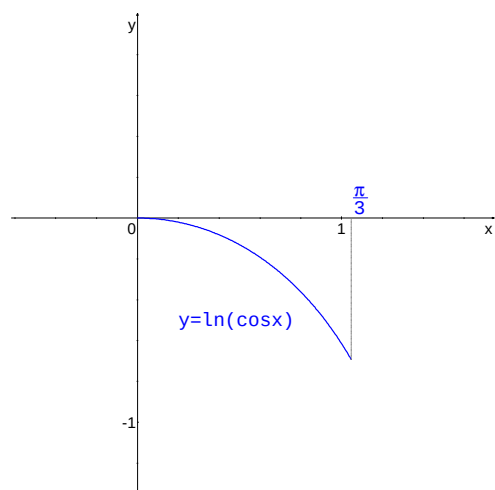


j)

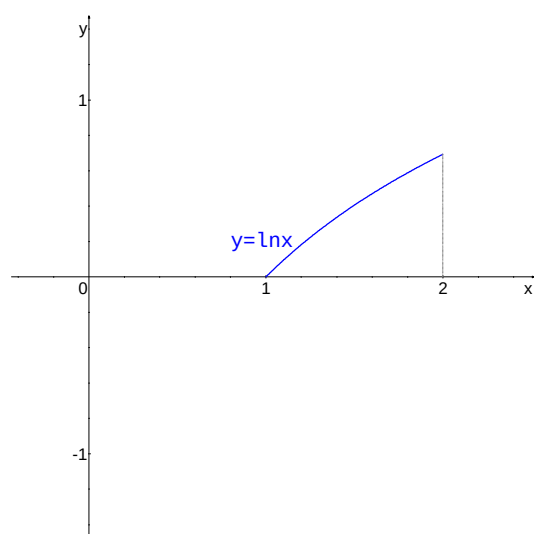


Délku oblouku rovinné křivky

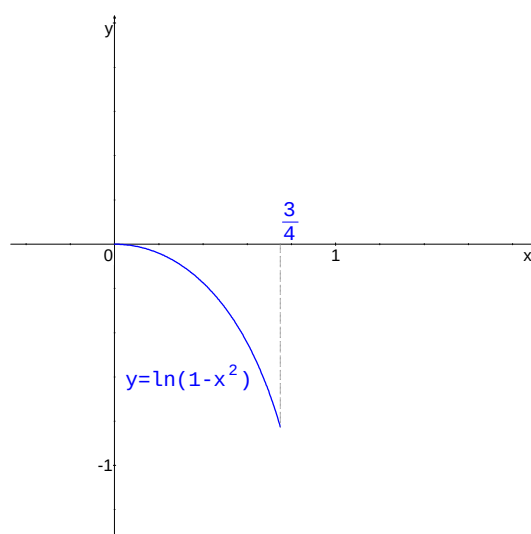
a)



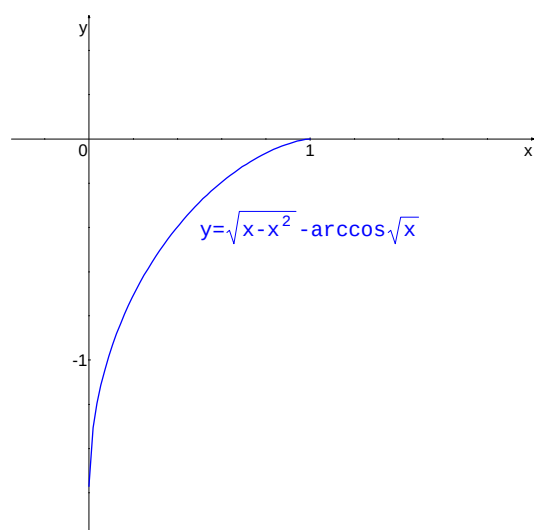
c)



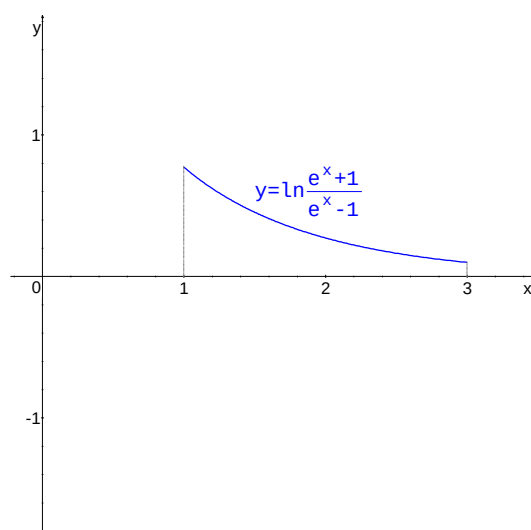
d)



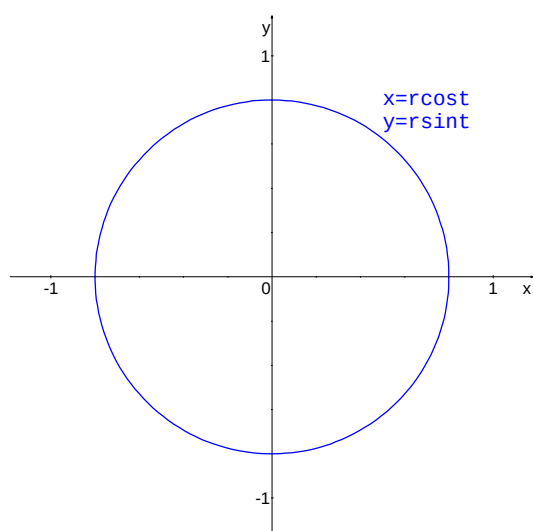
e)



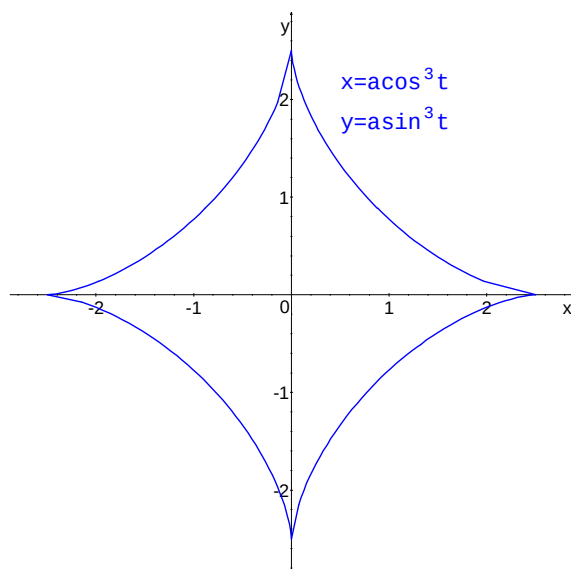
f)



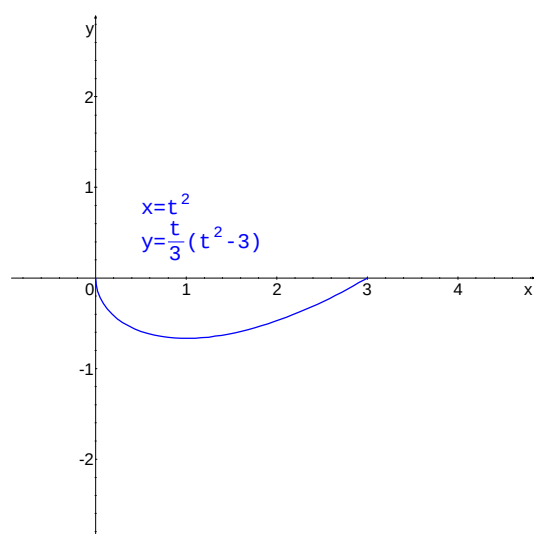
g)



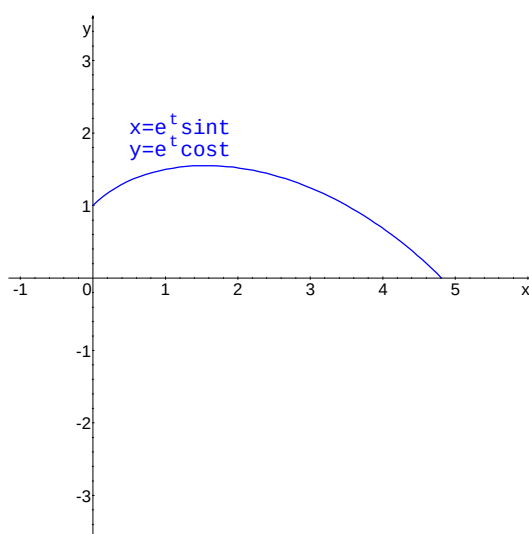
h)



i)

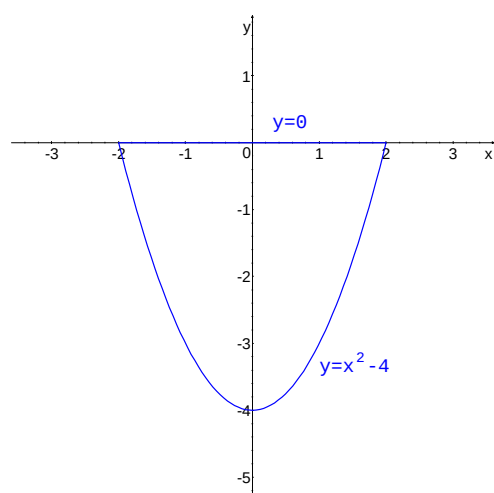


j)

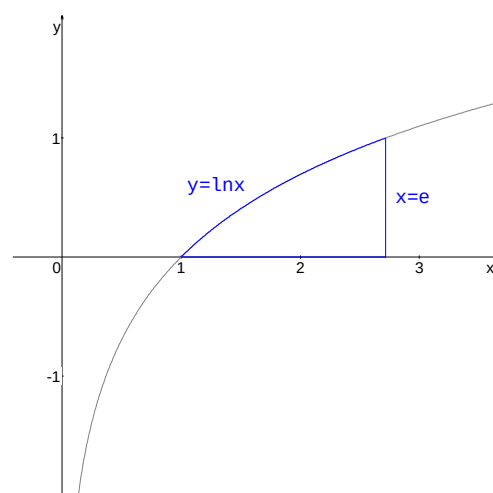


Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy x

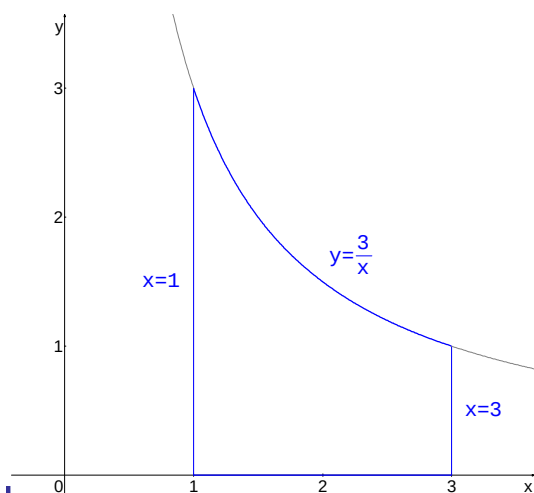
a)



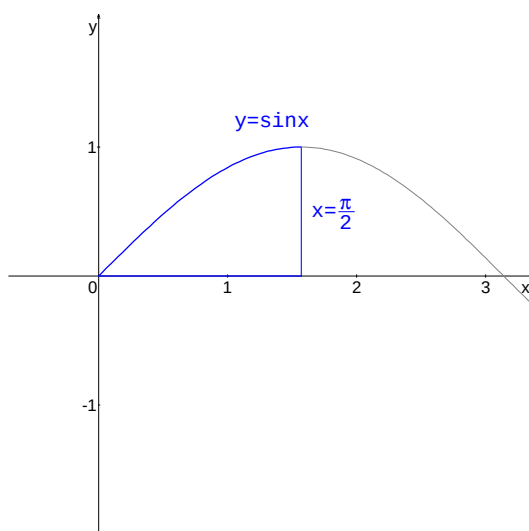
b)



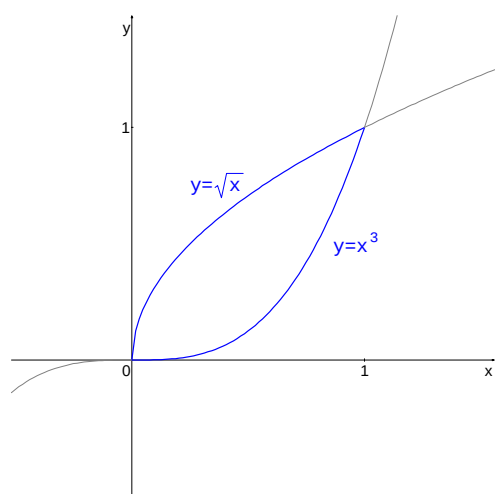
c)



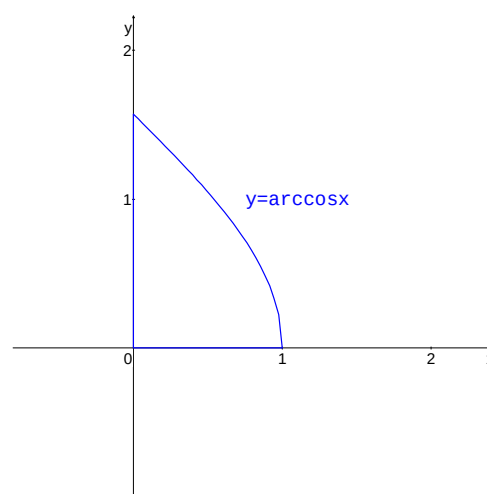
d)



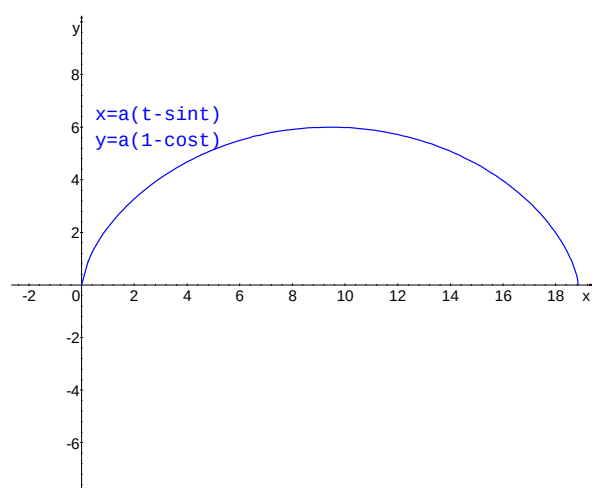
e)



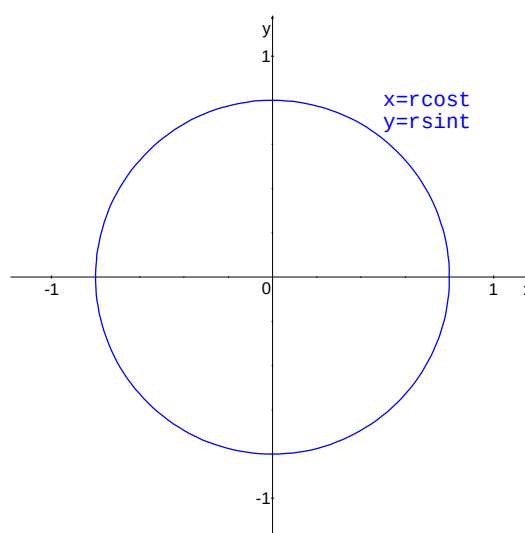
f)



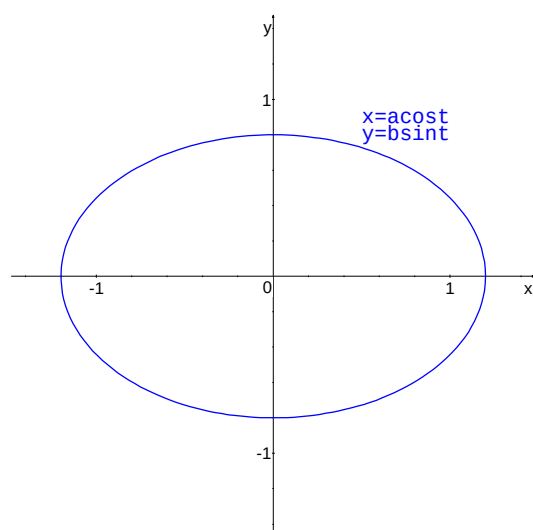
g)



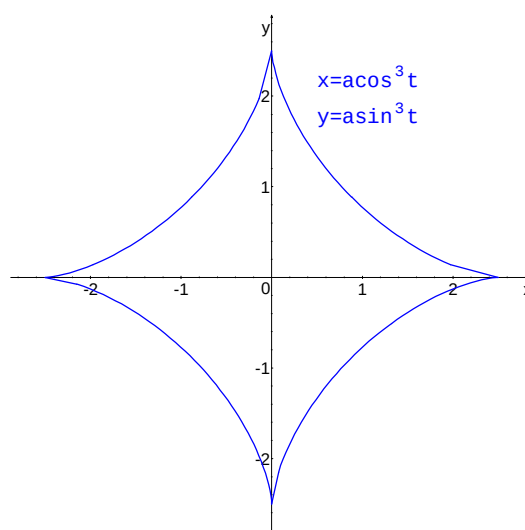
h)



i)

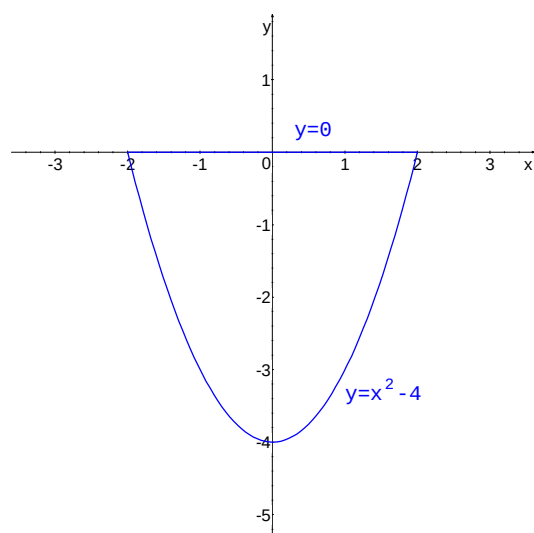


j)

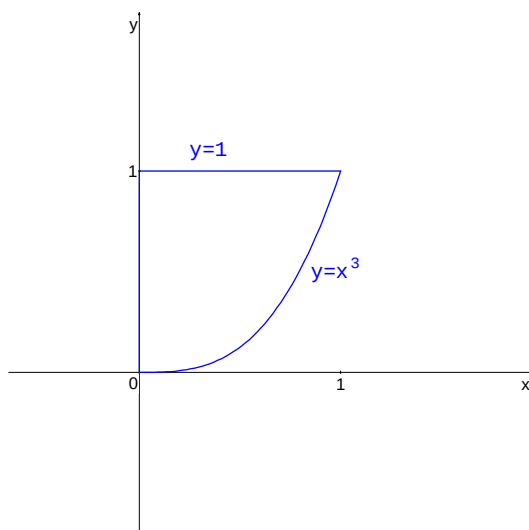


Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy y

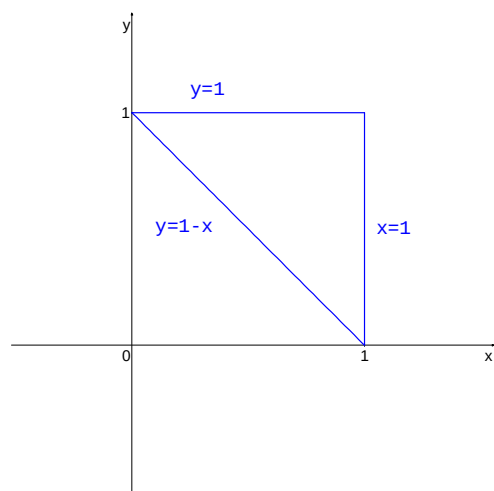
a)



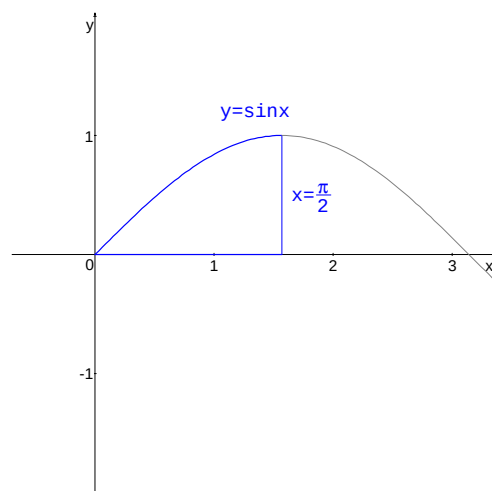
b)



c)

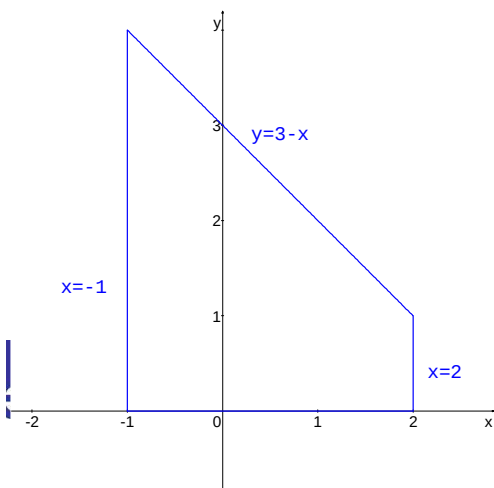


d)

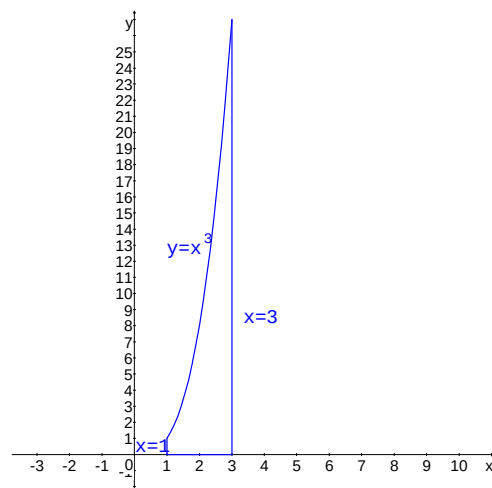


Povrch tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy x

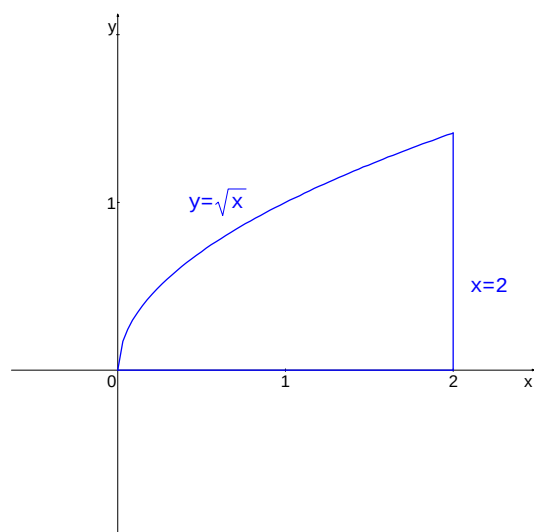
a)



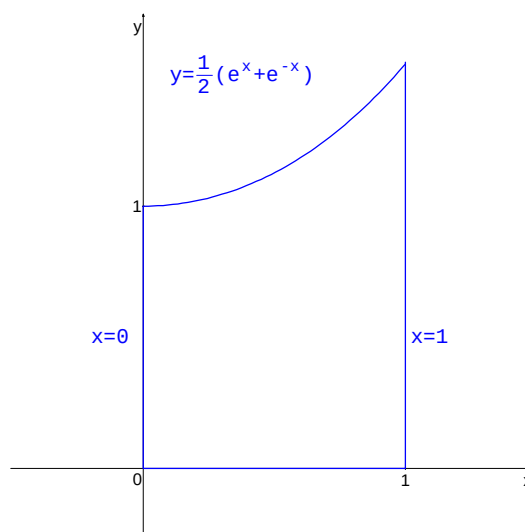
b)



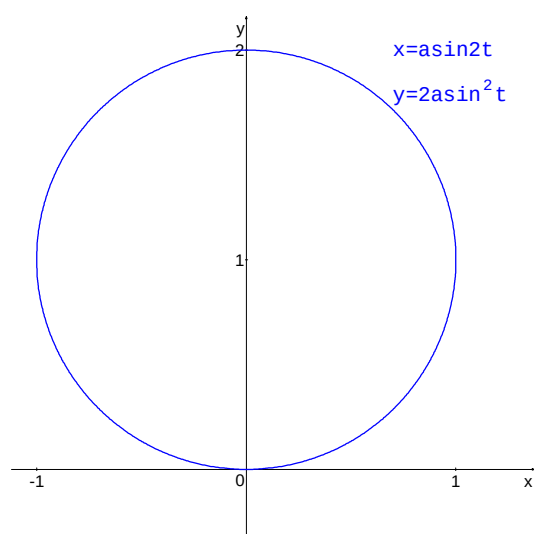
c)



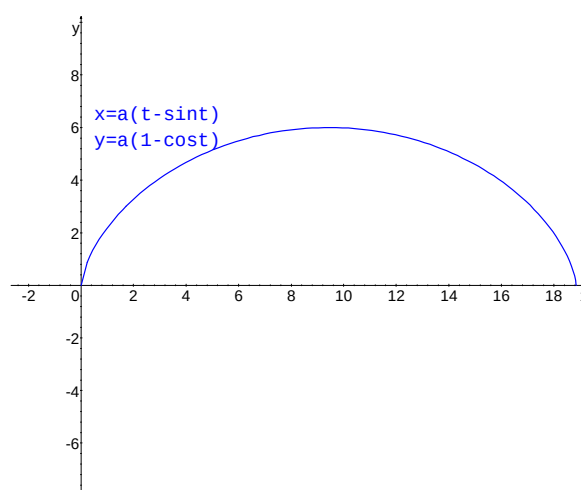
d)



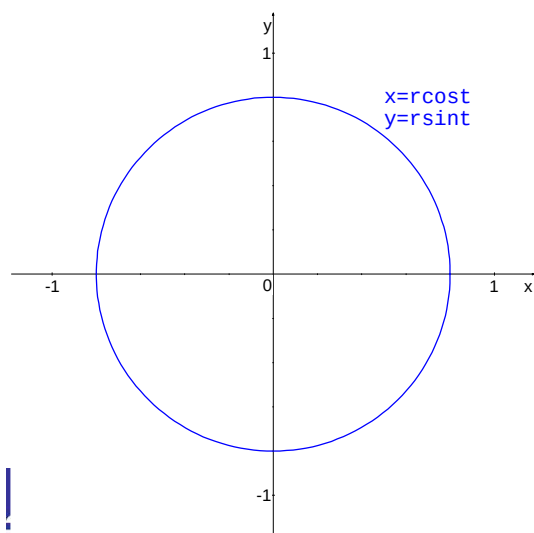
e)



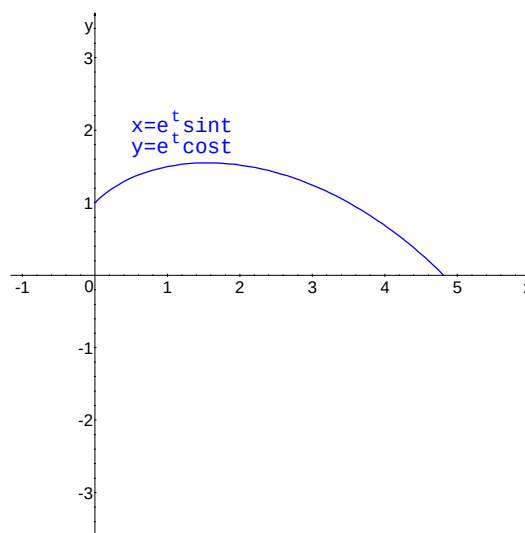
f)



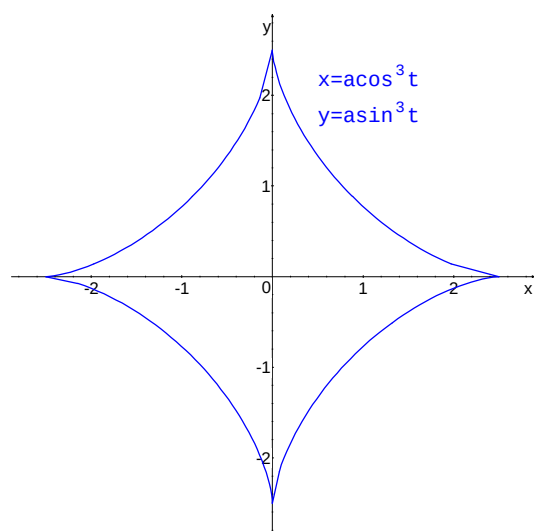
g)



h)



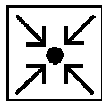
i)



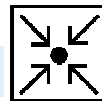
7. DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH	83
7.1. Definiční oblasti	83
Úlohy k samostatnému řešení	83
7.2. Parciální derivace	83
Úlohy k samostatnému řešení	83
7.3. Tečná rovina a normála	84
Úlohy k samostatnému řešení	84
7.4. Lokální extrémy, vázané extrémy	85
Úlohy k samostatnému řešení	85
Výsledky úloh k samostatnému řešení	87

7. DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH

7.1. Definiční oblasti



Úlohy k samostatnému řešení



1. Určete definiční obor funkce:

a) $z = \sqrt{x-y} - \sqrt[3]{x-y}$,

b) $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 4)$,

c) $z = \ln(2-x) + \arccos 2y$,

d) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$,

e) $z = \sqrt{\frac{x+2y}{4}} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x+4}{y-1}\right)$,

f) $z = \sqrt{\frac{4-x^2-y^2}{1-x^2-y^2}}$,

g) $z = \sqrt{9-x^2} - \sqrt{y^2-9}$,

h) $z = \arcsin \frac{xy}{2}$,

i) $z = \ln(2+x+y) - \ln(2-x+y)$,

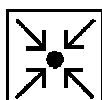
j) $z = e^{\sqrt{1+x^2-y}}$,

k) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$,

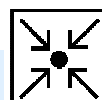
l) $z = \sqrt{\frac{x^2-4}{y^2-1}}$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

7.2. Parciální derivace



Úlohy k samostatnému řešení



2. Vypočítejte první parciální derivace:

a) $z = 4x + 5y - 3$,

b) $z = \frac{1}{x} + \sqrt{y}$,

c) $z = x^2 y^3 + 4xy^2 - 4x$,

d) $z = 3x^2 - 2xy + y^2 \sqrt{xy}$,

e) $z = \frac{x+y}{y-x}$,

f) $z = \sqrt{x^3 + 3y^2 + xy - 7}$,

g) $z = \frac{x-1}{1-y}$,

h) $z = (xy + \sqrt{x+y})^2$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

3. Vypočítejte první parciální derivace:

a) $z = y \sin x$,

b) $z = \sin x \cos y$,

c) $z = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$,

d) $z = 3 \sin xy + y^2 \operatorname{cotg}(y-x)$,

e) $z = \arcsin \frac{x}{y}$,

f) $z = \arccos \sqrt{x^2 + y^2}$,

g) $z = \frac{1}{\operatorname{arctg} \sqrt{y}} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}$,

h) $z = \sin(x^2 + \sqrt{1+y})$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

4. Vypočítejte první parciální derivace:

a) $z = e^{\sqrt{x^2 - y^2}}$,

b) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 - y^2})$,

c) $z = 2^{\frac{y}{x}}$,

d) $z = \ln \frac{4 - \sqrt{xy}}{4 + \sqrt{xy}}$,

e) $z = \frac{x}{y} e^{xy}$,

f) $z = \sqrt{x^2 + y^2} \ln(x + y)$,

g) $z = \ln \frac{x + \sqrt{y^2 - 1}}{y + \sqrt{x^2 - 1}}$,

h) $z = 3^{\frac{x+y}{x-y}}$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**5. Vypočítejte první parciální derivace:**

a) $z = \sqrt{y} \sin(x + \sqrt{y})$,

b) $z = \sin(x^2 - 2y) \cos y$,

c) $z = y \operatorname{tg}\left(x + \frac{x}{y}\right)$,

d) $z = 3 \sin x \operatorname{cotg}(y + 3x)$,

e) $z = x \arcsin\left(y - \frac{x}{y}\right)$,

f) $z = (y + \sqrt{1 - x^2}) \arccos x$,

g) $z = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\operatorname{arctg} \sqrt{y}}$,

h) $z = \sqrt{2x + y} \sin x^2$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**6. Vypočítejte druhé parciální derivace:**

a) $z = 4x^2y + 5y^2x - 3$,

b) $z = \frac{y+1}{x^2} + \sqrt{y^2 + x^2}$,

c) $z = \sin(xy)$,

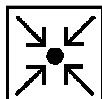
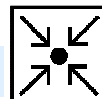
d) $z = 3x^3 - 2x^2y + y^4$,

e) $z = \frac{y+x}{y-x}$,

f) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$,

g) $z = \arcsin \frac{x}{y}$,

h) $z = xy + \sqrt{x+y}$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**7.3. Tečná rovina a normála****Úlohy k samostatnému řešení****7. Napište rovnici tečné roviny a normály funkce v bodě:**

a) $z = x^2y^3 + 4xy^2 - 4x, T = [1, -1, ?]$,

b) $z = 2x + \sqrt{y^2 - x^2}, T = [3, 5, ?]$,

c) $z = \ln \frac{1-x+y}{1+x+y}, T = [-1, 1, ?]$,

- d) $z = x \sin(x + y), T = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, ? \right],$
 e) $z = \arctg(1 - xy), T = [2, 1, ?],$
 f) $z = \sqrt{x^2 + 3y^2 + 2y - 8}, T = [2, 1, ?],$
 g) $z = \sqrt{25 - x^2} - \sqrt{y^2 - 9}, T = [-4, 5, ?],$
 h) $z = \sin(2x + 3y), T \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, ? \right],$
 i) $z = x^2 - 2x\sqrt{y} + 3y - 4, T [1, 4, ?],$
 j) $z = \ln(x^2 + y^2), T [1, 0, ?],$
 k) $z = \operatorname{arccotg} \frac{x}{y}, T [1, 1, ?],$
 l) $z = \frac{\sin x - \sin y}{\cos y - \cos x}, T = \left[0, \frac{\pi}{3}, ? \right].$

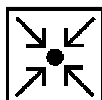
Výsledky úloh k samostatnému řešení

8. Napište rovnici tečné roviny plochy, která rovnoběžná s danou rovinou, určete bod dotyku:

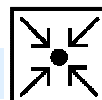
- a) $z = 6x^3y - 2xy^2 + 7x - 8y - 2, \alpha : 23x - 6y - z + 8 = 0,$
 b) $z = xe^y - \cos y + 3, \alpha : x + 2y - z + 6 = 0,$
 c) $z = x\sqrt{y^2 + x} - 6y + 3, \alpha : 23x - 16y - 6z + 7 = 0,$
 d) $z = 3x^2y - 2y^3 + 7xy - 5y - 4, \alpha : 12x - 2y - z + 8 = 0,$
 e) $z = \ln(x - 2y + 6), \alpha : x - 2y - z = 0,$
 f) $z = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}, \alpha : 4x - 5y + 3z - 2 = 0.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

7.4. Lokální extrémy, vázané extrémy



Úlohy k samostatnému řešení



9. Určete lokální extrémy funkce:

- a) $z = 4x^2 + 5y^2 - 12x + 15y + 6,$ b) $z = 3x^2 - 4xy + 6x + 4y^2 - 4y + 9,$
 c) $z = e^{x+y} (x^2 + y^2),$ d) $z = 3y^3 - 6xy + y^2 + 3,$
 e) $z = 4 - x^3 + x^2y - 3y^2 + 20y,$ f) $z = 4x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y},$
 g) $z = x^3 - 4xy + y^2 + 4x + 1,$ h) $z = \ln(xy) - 4x - 9y,$
 i) $z = (x^2 - 1)(y^2 - 4),$ j) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 5,$
 k) $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14),$ l) $z = e^{y-x} (x^2 + y^2).$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

10. Nalezněte vázané extrémy funkce při daných podmínkách:

- a) $z = x^2 + 3xy - y^2$, podm. $x + y = 3$,
- b) $z = x + y$, podm. $xy = 1$,
- c) $z = 4\ln y - x$, podm. $y = x^2$,
- d) $z = \sin(y + 1) + \cos x$, podm. $y - x = -1$,
- e) $z = 4x + xy - 5y$, podm. $x - y = 4$,
- f) $z = 4x(y^2 - 2y + 4)$, podm. $xy = \frac{1}{4}$,
- g) $z = 2x^2 + x - y^4 - 3y^2 + 1$, podm. $y = \sqrt{x}$,
- h) $z = \ln(x + y)$, podm. $xy = 1$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

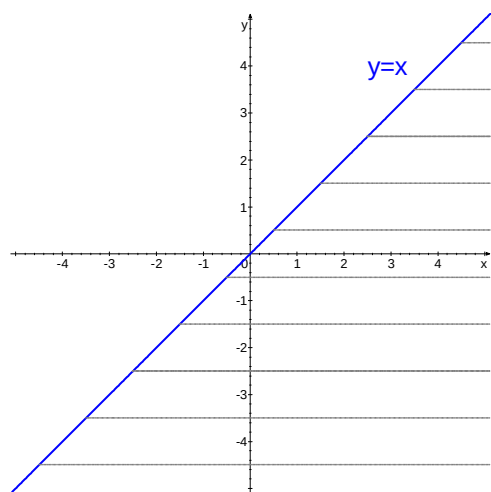


Výsledky úloh k samostatnému řešení

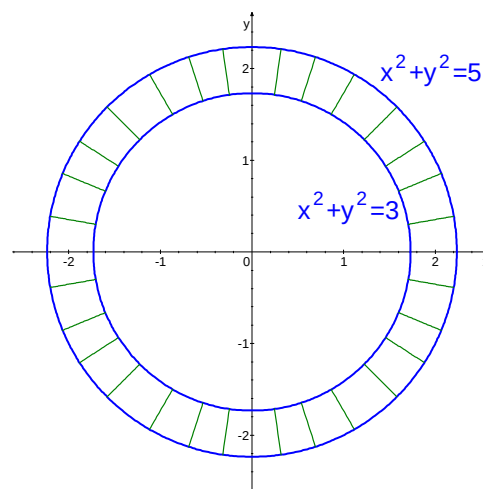


1.

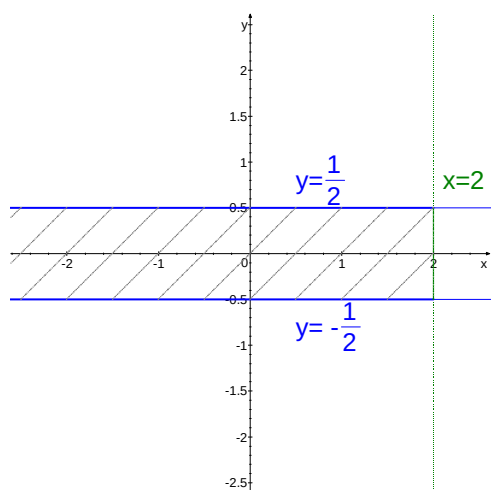
a)



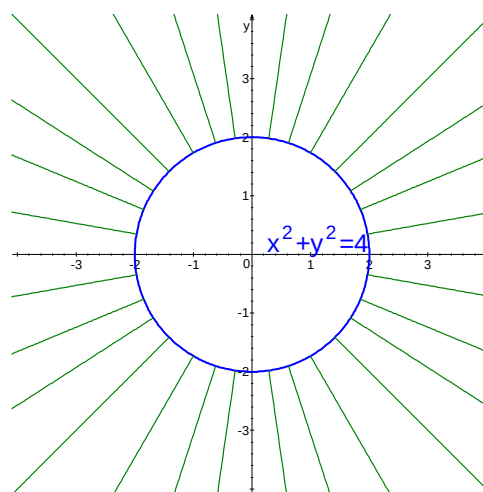
b)



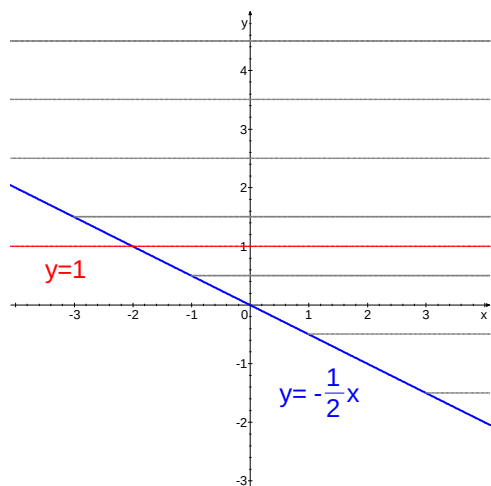
c)



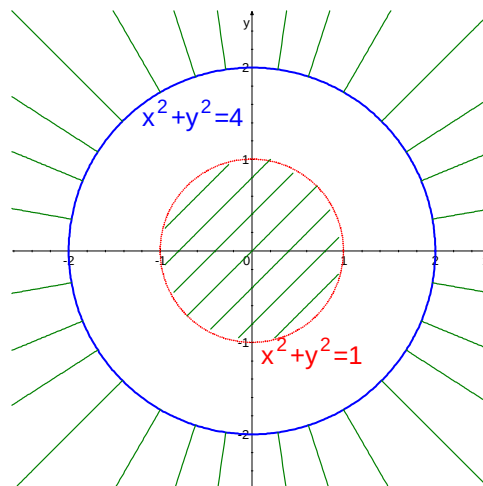
d)



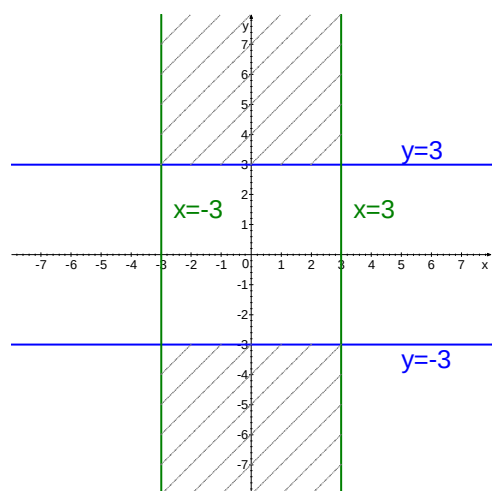
e)



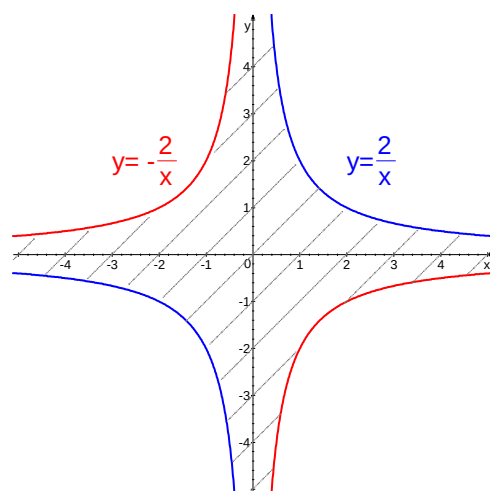
f)



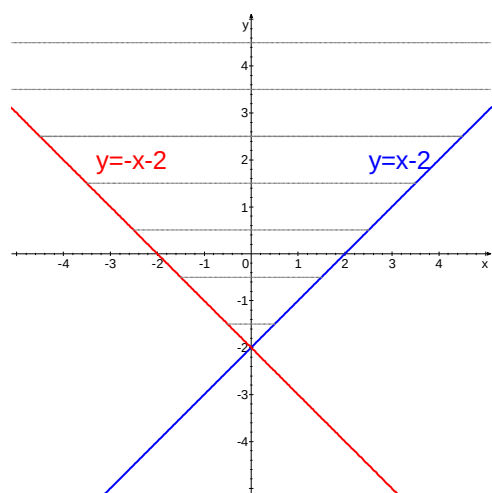
g)



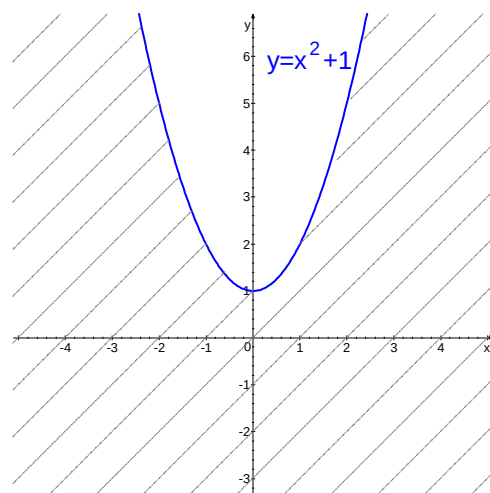
h)



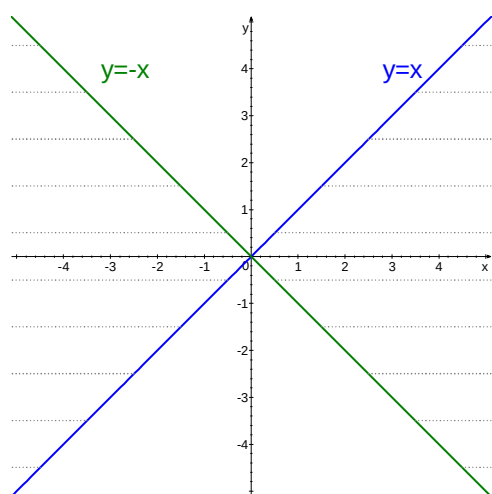
i)



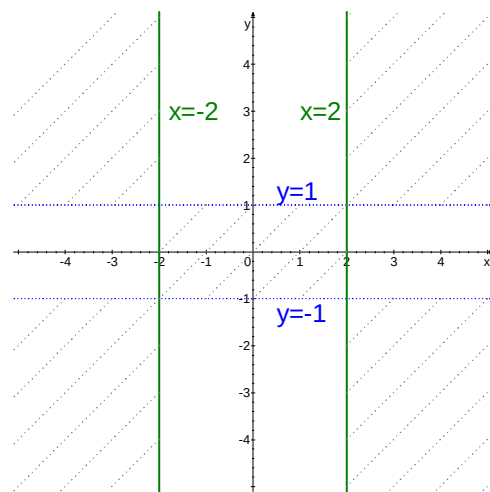
j)



k)



l)



2. a) $z'_x = 4, z'_y = 5$; b) $z'_x = -\frac{1}{x^2}, z'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$; c) $z'_x = 2xy^3 + 4y^2 - 4, z'_y = 3x^2y^2 + 8xy$;

d) $z'_x = 6x - 2y + \frac{y^2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}, z'_y = -2x + \frac{5}{2}y\sqrt{xy}$; e) $z'_x = \frac{2y}{(y-x)^2}, z'_y = \frac{-2x}{(y-x)^2}$;

f) $z'_x = \frac{3x^2 + y}{2\sqrt{x^3 + 3y^2 + xy - 7}}, z'_y = \frac{6y + x}{2\sqrt{x^3 + 3y^2 + xy - 7}}$; g) $z'_x = \frac{1}{1-y}, z'_y = \frac{x-1}{(1-y)^2}$;

h) $z'_x = 2(xy + \sqrt{x+y})\left(y + \frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right), z'_y = 2(xy + \sqrt{x+y})\left(x + \frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right)$.

3. a) $z'_x = y \cos x, z'_y = \sin x$; b) $z'_x = \cos x \cos y, z'_y = -\sin x \sin y$;

c) $z'_x = \frac{-y}{x^2 \cos^2 \frac{y}{x}}, z'_y = \frac{1}{x \cos^2 \frac{y}{x}}$;

d) $z'_x = 3y \cos xy + \frac{y^2}{\sin^2(y-x)}, z'_y = 3x \cos xy + 2y \cotg(y-x) - \frac{y^2}{\sin^2(y-x)}$;

e) $z'_x = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}, z'_y = \frac{-x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$; f) $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$;

g) $z'_x = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}, z'_y = -\frac{1}{2\sqrt{y}(1+y)\operatorname{arctg}^2 \sqrt{y}}$;

h) $z'_x = 2x \cos(x^2 + \sqrt{1+y}), z'_y = \cos(x^2 + \sqrt{1+y}) \frac{1}{2\sqrt{1+y}}$.

4. a) $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2 - y^2}}, z'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2 - y^2}}$;

b) $z'_x = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right), z'_y = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} \left(1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right)$;

c) $z'_x = \frac{-y}{x^2} 2^{\frac{y}{x}} \ln 2, z'_y = \frac{1}{x} 2^{\frac{y}{x}} \ln 2$;

d) $z'_x = \frac{-4}{\sqrt{x}(16 - xy)}, z'_y = \frac{-4}{\sqrt{y}(16 - xy)}$;

e) $z'_x = \frac{1}{y} e^{xy} + x e^{xy}, z'_y = -\frac{x}{y^2} e^{xy} + \frac{x^2}{y} e^{xy}$;

f) $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ln(x+y) + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x+y}, z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ln(x+y) + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x+y}$;

$$\text{g) } z'_x = \frac{y\sqrt{x^2-1} - x\sqrt{y^2-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{y^2-1})(y+\sqrt{x^2-1})}, z'_y = \frac{y\sqrt{x^2-1} - x\sqrt{y^2-1} + 1}{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{y^2-1})(y+\sqrt{x^2-1})};$$

$$\text{h) } z'_x = \frac{-2y}{(x-y)^2} 3^{\frac{x+y}{x-y}} \ln 3, z'_y = \frac{2x}{(x-y)^2} 3^{\frac{x+y}{x-y}} \ln 3.$$

$$z'_x = \frac{\sin x^2}{\sqrt{2x+y}} + 2x\sqrt{2x+y} \cos x^2, z'_y = \frac{\sin x^2}{2\sqrt{2x+y}}.$$

$$\text{5. a) } z'_x = \sqrt{y} \cos(x + \sqrt{y}), z'_y = \frac{\sin(x + \sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{\cos(x + \sqrt{y})}{2};$$

$$\text{b) } z'_x = 2x \cos(x^2 - 2y) \cos y, z'_y = -2 \cos(x^2 - 2y) \cos y - \sin(x^2 - 2y) \sin y;$$

$$\text{c) } z'_x = \frac{y}{\cos^2\left(x + \frac{x}{y}\right)} \left(1 + \frac{1}{y}\right), z'_y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{x}{y}\right)} \left(-\frac{x}{y}\right);$$

$$\text{d) } z'_x = 3 \cos x \cotg(y + 3x) - \frac{9 \sin x}{\sin^2(y + 3x)}, z'_y = -\frac{3 \sin x}{\sin^2(y + 3x)};$$

$$\text{e) } z'_x = \arcsin\left(y - \frac{x}{y}\right) - \frac{x}{\sqrt{y^2 - (y^2 - x)^2}}, z'_y = \frac{x(y^2 + x)}{y\sqrt{y^2 - (y^2 - x)^2}};$$

$$\text{f) } z'_x = \frac{y - x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + 1, z'_y = \arccos x;$$

$$\text{g) } z'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{y}}, z'_y = -\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{2\sqrt{y}(1+y) \operatorname{arctg}^2 \sqrt{y}};$$

$$\text{h) } z'_x = \frac{\sin x^2}{\sqrt{2x+y}} + 2x\sqrt{2x+y} \cos x^2, z'_y = \frac{\sin x^2}{2\sqrt{2x+y}}.$$

$$z'_x = \frac{\sin x^2}{\sqrt{2x+y}} + 2x\sqrt{2x+y} \cos x^2, z'_y = \frac{\sin x^2}{2\sqrt{2x+y}}.$$

$$\text{6. a) } z''_{xx} = 8y, z''_{xy} = 8x + 10y, z''_{yy} = 10x;$$

$$\text{b) } z''_{xx} = \frac{6(y+1)}{x^4} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)},$$

$$z''_{xy} = \frac{-2}{x^3} - \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)},$$

$$z''_{yy} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)};$$

$$\text{c) } z''_{xx} = -y^2 \sin xy, z''_{xy} = \cos xy - xy \sin xy, z''_{yy} = -x^2 \sin xy;$$

$$\text{d) } z''_{xx} = 12x - 4y, z''_{xy} = -4x, z''_{yy} = 12y^2; \text{ e) } z''_{xx} = \frac{4y}{(y-x)^3}, z''_{xy} = \frac{-2y-2x}{(y-x)^3}, z''_{yy} = \frac{4x}{(y-x)^3};$$

$$\text{f) } z''_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad z''_{xy} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad z''_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \text{g) } z''_{xx} = \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}(y^2 - x^2)},$$

$$z''_{xy} = \frac{-y}{\sqrt{y^2 - x^2}(y^2 - x^2)}, \quad z''_{yy} = \frac{x}{y^2 \sqrt{y^2 - x^2}} + \frac{x}{(y^2 - x^2) \sqrt{y^2 - x^2}}; \quad \text{h) } z''_{xx} = -\frac{1}{4(y+x)\sqrt{y+x}},$$

$$z''_{xy} = 1 - \frac{1}{4(y+x)\sqrt{y+x}}, \quad z''_{yy} = -\frac{1}{4(y+x)\sqrt{y+x}}.$$

7. a) $\tau: 2x + 5y + z + 4 = 0, n: x = 1 - 2t, y = -1 - 5t, z = -1 - t, t \in \mathbf{R};$

b) $\tau: 5x + 5y - 4z = 0, n: x = 3 + 5t, y = 5 + 5t, z = 10 - 4t, t \in \mathbf{R};$

c) $\tau: 4x + 2y + 3z + 2 - 3\ln 3 = 0, n: x = -1 + 4t, y = 1 + 2t, z = \ln 3 + 3t, t \in \mathbf{R};$

d) $\tau: x - z = 0, n: x = \frac{\pi}{4} + t, y = \frac{\pi}{4}, z = \frac{\pi}{4} - t, t \in \mathbf{R};$

e) $\tau: x + 2y + 2z - 4 + \frac{\pi}{2} = 0, n: x = 2 + t, y = 1 + 2t, z = -\frac{\pi}{4} + 2t, t \in \mathbf{R};$

f) $\tau: 2x + 4y - z - 7 = 0, n: x = 2 + 2t, y = 1 + 4t, z = 1 - t, t \in \mathbf{R};$

g) $\tau: 16x - 15y - 12z + 127 = 0, n: x = -4 + 16t, y = 5 - 15t, z = -1 - 12t, t \in \mathbf{R};$

h) $\tau: 2x + 3y - z - 2\pi = 0, n: x = \frac{\pi}{2} + 2t, y = \frac{\pi}{3} + 3t, z = -t, t \in \mathbf{R},$

i) $\tau: -4x + 5y - 2z - 6 = 0, n: x = 1 - 4t, y = 4 + 5t, z = 5 - 2t, t \in \mathbf{R};$

j) $\tau: 2x - z - 2 = 0, n: x = 1 + 2t, y = 0, z = -t, t \in \mathbf{R};$

k) $\tau: -x + y - 2z + \frac{\pi}{2} = 0, n: x = 1 - t, y = 1 + t, z = \frac{\pi}{4} - 2t, t \in \mathbf{R};$

l) $\tau: 2x + 2y + z - \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = 0, n: x = 2t, y = \frac{\pi}{3} + 2t, z = \sqrt{3} + t, t \in \mathbf{R}.$

8. a) $\tau: 23x - 6y - z - 16 = 0, T = [1, 1, 1];$

b) $\tau: x + 2y - z + 6 = 0, T = [2, 0, 4];$

c) $\tau: 23x - 16y - 6z - 47 = 0, T = [5, 2, 6];$

d) $\tau: 12x - 2y - z - 12 = 0, T = [1, 1, -2];$

e) $\tau: x - 2y - z + 5 = 0, T = [3, 4, 0];$ **f)** $\tau: 4x - 5y + 3z - 2 = 0, T = [5, 4, 3].$

9. a) $\left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{57}{4}\right]$ lokální minimum; **b)** $[-1, 0, 6]$ lokální minimum; **c)** $[0, 0, 0]$ lokální

minimum, $[-1, -1, 2e^{-2}]$ není extrém; ; **d)** $[0, 0, 3]$ není extrém; **e)** $[4, 6, 48]$ lokální

maximum, $\left[0, \frac{10}{3}\right]$ není extrém, $\left[5, \frac{15}{2}\right]$ není extrém; **f)** $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ není extrém, $\left[-\frac{1}{2}, -1\right]$ není

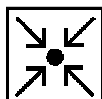
- extrém, $\left[\frac{1}{2}, -1, 6\right]$ lokální minimum, $\left[-\frac{1}{2}, 1, -6\right]$ lokální maximum; **g)** $[2, 4, 1]$ lokální minimum, $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right]$ není extrém; **h)** $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -2 - \ln 36\right]$ lokální maximum;
- i)** $[0, 0, 4]$ lokální maximum, $[1, 2]$ není extrém, $[-1, 2]$ není extrém, $[-1, -2]$ není extrém, $[-1, -2]$ není extrém; **j)** $[4, 4, 17]$ lokální maximum; **k)** $[-1, 2, 0]$ lokální minimum;
- l)** $[0, 0, 0]$ lokální minimum, $[1, -1]$ není extrém.
- 10. a)** $\left[\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right]$ lok. max.; **b)** $\left[2, \frac{1}{2}\right]$ lok. min., $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$ lok. max.; **c)** $[8, 64]$ lok. max.;
- d)** $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} - 1\right]$ lok. max., $\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi, \frac{\pi}{4} - 1\right]$ lok. min.; **e)** $\left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$ lok. min.;
- f)** $\left[\frac{1}{8}, 2\right]$ lok. min., $\left[-\frac{1}{8}, -2\right]$ lok. max.; **g)** $[1, 1]$ lok. min.; **h)** $[1, 1]$ lok. min..

8. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE	94
8.1. Diferenciální rovnice prvního řádu – separovatelná, homogenní, lineární, Bernoulliho, exaktní	94
8.1.1. Separovatelná diferenciální rovnice	94
Úlohy k samostatnému řešení	94
8.1.2. Homogenní diferenciální rovnice	94
Úlohy k samostatnému řešení	94
8.1.3. Lineární diferenciální rovnice	95
Úlohy k samostatnému řešení	95
8.1.4. Bernoulliho diferenciální rovnice	95
Úlohy k samostatnému řešení	95
8.1.5. Exaktní diferenciální rovnice	96
Úlohy k samostatnému řešení	96
8.2. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty	97
8.2.1. Homogenní LDR n-tého řádu s konstantními koeficienty	97
Úlohy k samostatnému řešení	97
8.2.2. Nehomogenní LDR n-tého řádu s konstantními koeficienty	97
Úlohy k samostatnému řešení	97
8.3. Soustavy diferenciálních rovnic	98
Úlohy k samostatnému řešení	98
Výsledky úloh k samostatnému řešení	100

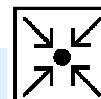
8. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

8.1. Diferenciální rovnice prvního řádu – separovatelná, homogenní, lineární, Bernoulliho, exaktní

8.1.1. Separovatelná diferenciální rovnice



Úlohy k samostatnému řešení



1. Najděte obecné nebo partikulární řešení dané DR:

a) $y' \sin y \cos^2 x - \sin x \cos^2 y = 0$,

b) $y'(x^2 + x) = y$,

c) $(xy + y + 2x + 2)y' = xy + x + 2y + 2$,

d) $\sqrt{1 - y^2} + (1 + x^2)y' = 0$, počáteční podmínka $y(1) = 1$,

e) $y' = \frac{6x^2 - 1}{2x^3 + x^2}$,

f) $y'x^2y = xy^2 + x + y^2 + 1$,

g) $y' \sin y (\sin x + 1) - \cos x \cos y = 0$, počáteční podmínka $y(0) = 0$,

h) $\frac{y'}{x} = e^{x-y}$,

i) $y' \ln y = x \ln x$, počáteční podmínka $y(1) = e$

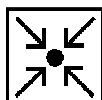
j) $y' \sin^2 x - y = 4$,

k) $y'(x^2y + xy) = xy^2 + 2y^2 + x + 2$,

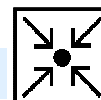
l) $2y' = (2y + 1)(\ln x + 1)$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

8.1.2. Homogenní diferenciální rovnice



Úlohy k samostatnému řešení



2. Najděte obecné nebo partikulární řešení dané DR:

a) $xy' \sin \frac{y}{x} = y \sin \frac{y}{x} - x$,

b) $y' = \frac{2x - y}{x + y}$,

c) $y'(x - y) = 2x - y$,

d) $2xyy' = 3y^2 + x^2$,

e) $xyy' = 2y^2 + 3xy + 2x^2$,

f) $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$,

g) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2},$

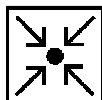
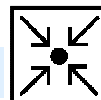
h) $y' = \frac{y}{x-y},$

i) $x^2 y' = y^2 + 6xy + 6x^2,$

j) $y' = \frac{3y-2x}{x+y},$

k) $y'x^2 = y^2 + xy + 4x^2,$

l) $4x^2 y' = y^2 + xy - 4x^2.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**8.1.3. Lineární diferenciální rovnice****Úlohy k samostatnému řešení****3.** Najděte obecné nebo partikulární řešení dané DR:

a) $y' - 2y = 2x,$

b) $y' + xy = 3x^2 e^{-\frac{x^2}{2}},$

c) $y' - 2xy = -2x^3,$

d) $y' - \frac{y}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}},$

e) $y' \sin x - y \cos x = \frac{1}{\sin x},$

f) $y' + y \sin x = \sin x,$ počáteční podmínka $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2,$

g) $y' + \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2},$

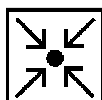
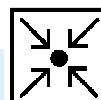
h) $y'x - y = x^3 e^x,$

i) $y'x + y = \sin x,$

j) $y'x + y = x \ln x,$

k) $y'x - y = x^2 \ln x,$

l) $y' \cos x - y \sin x = x \cos x.$

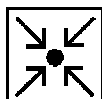
[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)**8.1.4. Bernoulliiova diferenciální rovnice****Úlohy k samostatnému řešení****4.** Najděte obecné nebo partikulární řešení dané DR:

a) $xy' + y = y^2 \ln x,$

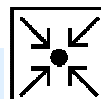
- b) $2x^2 y' + xy = \frac{1}{y}$,
 c) $y' + xy = xy^2$,
 d) $y' - \frac{2y}{x} = x\sqrt{y}$,
 e) $y' + \frac{y}{x+1} = -3(x+1)^3 y^2$,
 f) $y' - \frac{y}{x} = y^2 \cos x$,
 g) $y' - \frac{y}{x} = y^2 \sin x$,
 h) $xy' - y = y^3 e^x$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

8.1.5. Exaktní diferenciální rovnice



Úlohy k samostatnému řešení



5. Najděte obecné nebo partikulární řešení dané DR:

- a) $\left(3x^2 y + 2y + \frac{1}{x}\right) dx + (x^3 + 2x - 2y) dy = 0$,
 b) $\left(\frac{y}{x^2 y^2 + 1} + 1\right) dx + \left(\frac{x}{x^2 y^2 + 1} + 1\right) dy = 0$,
 c) $\left(\frac{2x}{x^2 + y^2} + 2y\right) dx + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} + 2x - 3\right) dy = 0$,
 d) $(y \cos xy + y \sin x) dx + (x \cos xy - \sin x) dy = 0$,
 e) $(\cotg x + y^2) dx + (2xy - \operatorname{tg} y) dy = 0$,
 f) $\left(\cos(x+y) - \sin(y-x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx + (\cos(x+y) + \sin(y-x)) dy = 0$,
 g) $\left(\frac{1}{y^2 + 1} - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{2xy}{(y^2 + 1)^2}\right) dy = 0$,
 h) $\left(\operatorname{arctg} y + \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx + \frac{x}{1 + y^2} dy = 0$,
 i) $\left(-\frac{1}{\cos^2 x} - \cos y + \sin y + y\right) dx + \left(x \cos y + x \sin y + x - \frac{1}{\sin^2 y}\right) dy = 0$,
 j) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} + 1\right) dx + \left(2y - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) dy = 0$,

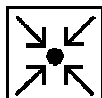
$$k) \left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}} - \frac{1}{2(x+y)\sqrt{x+y}} \right) dx + \left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}} - \frac{1}{2(x+y)\sqrt{x+y}} \right) dy = 0,$$

$$l) (ye^{xy} - e^{-x}) dx + (xe^{xy} - 2e^y) dy = 0.$$

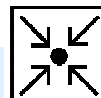
[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

8.2. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

8.2.1. Homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty



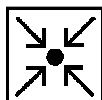
Úlohy k samostatnému řešení



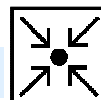
6. Najděte obecné nebo partikulární řešení dané DR:
- $y'' - 4y' + 3y = 0$,
 - $y'' - 4y = 0$,
 - $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$,
 - $y''' + 4y'' = 0$,
 - $y'' + y = 0$,
 - $y'' + 4y = 0$,
 - $y'' + 4y' + 29y = 0$,
 - $y'' - 2y' + 2y = 0$,
 - $y'' - 4y' + 3y = 0$, počáteční podmínka $y(0) = 6, y'(0) = 10$,
 - $y'' + y' - 2y = 0$, počáteční podmínka $y(0) = 2, y'(0) = 11$,
 - $y''' - y' = 0$, počáteční podmínka $y(0) = 3, y'(0) = -1, y''(0) = 1$,
 - $y'' - 6y' + 9y = 0$, počáteční podmínka $y(0) = 3, y'(0) = 6$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

8.2.2. Nehomogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty



Úlohy k samostatnému řešení

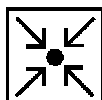


7. Najděte obecné nebo partikulární řešení dané DR:
- $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$,
 - $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$, počáteční podmínka $y(0) = 2, y'(0) = 1$,
 - $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$,

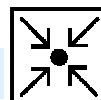
- d) $y'' + y' = \frac{1}{1+e^x}$,
 e) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \cdot \ln x$,
 f) $y'' - 4y = 8x^3$,
 g) $y'' - 4y' = 12x^2 - 6x - 4$,
 h) $y'' - 4y' + 4y = 18e^{-x}$,
 i) $y'' + 4y' + 4y = (24x + 8)e^{-2x}$,
 j) $y'' + 4y = 6 \sin x$,
 k) $y'' - 4y = 13x \cdot \sin 3x$,
 l) $y'' + 4y = 4 \sin 2x - 8 \cos 2x$,
 m) $y'' + y = 4x \cdot \sin x$,
 n) $y'' + 3y' + 2y = 10e^x \cdot \cos x - 10e^x \cdot \sin x$,
 o) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cdot \sin x$,
 p) $y'' - 4y' + 4y = 18e^{-x}$, počáteční podmínka $y(0) = 4, y'(0) = 7$,
 q) $y'' - 4y' + 3y = \sin x - \cos x$,
 r) $y'' - 5y' + 6y = (2x + 1)e^{2x}$, počáteční podmínka $y(0) = 4, y'(0) = 2$,
 s) $y'' + y' = 4x^2 + 1 - xe^{-x}$,
 t) $y'' + y = 4e^x + \sin x - \cos x$,
 u) $y'' + y' = x^2 - x + 6e^{2x}$,
 v) $y'' + 4y = 16 \cos 2x - 4 \sin x$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

8.3. Soustavy diferenciálních rovnic



Úlohy k samostatnému řešení



8. Najděte obecné nebo partikulární řešení dané soustavy DR:

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$ | b) $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$ | c) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4x + y \end{cases}$ |
| d) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = x + 4y \end{cases}$ | e) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 5x + 4y \end{cases}$ | f) $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$ |
| g) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$ | h) $\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^{2t} \\ \dot{y} = -x + 3y + 2e^{2t} \end{cases}$ | i) $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y - t \\ \dot{y} = 2x - y + 2t + 1 \end{cases}$ |
| j) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 6y + 2 \sin t \\ \dot{y} = -x - 2y - \cos t \end{cases}$ | k) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + e^t \\ \dot{y} = 3x + 5y - e^t \end{cases}$ | l) $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y - \sin t \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$ |

m) $\dot{x} = -4x + y$
 $\dot{y} = -2x - 2y$, počáteční podmínka $x(0) = 1, y(0) = 14$,

n) $\dot{x} = 2x - y$
 $\dot{y} = 5x + 4y$, počáteční podmínka $x(0) = -2, y(0) = 4$,

o) $\dot{x} = x - y$
 $\dot{y} = -x + y$, počáteční podmínka $x(0) = 2, y(0) = -4$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $\frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos x} + C$; b) $y = \frac{Cx}{x+1}$; c) $(y+1)e^{y-x} = C(x+1)$;
- d) $\arctg x + \arcsin y = \frac{3}{4}\pi$; e) $y = \ln |Cx^2(2x+1)| + \frac{1}{x}$; f) $y^2 = Cx^2 e^{\frac{2}{x}} - 1$;
- g) $\cos y = \frac{1}{\sin x + 1}$; h) $e^y = xe^x - e^x + C$; i) $y \ln y - y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$; j) $y = Ce^{-\cotg x} - 4$;
- k) $y^2 = Cx^4(x+1)^2 - 1$; l) $y = \frac{1}{2}(Cx^x - 1)$. 2. a) $\cos \frac{y}{x} = \ln Cx$; b) $2x^2 - 2xy - y^2 = C$;
- c) $y^2 - 2xy + 2x^2 = C$; d) $y^2 + x^2 = Cx^3$; e) $(y+2x)^2 = Cx^2(y+x)$; f) $\arcsin \frac{y}{x} = \ln Cx$;
- g) $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$; h) $ye^{\frac{x}{y}} = C$; i) $y + 2x = Cx(y+3x)$;
- j) $4 \arctg \frac{y-x}{x} = \ln \frac{C}{y^2 - 2xy + 2x^2}$; k) $\arctg \frac{y}{2x} = \ln Cx^2$; l) $y - 2x = Cx(y+2x)$.
3. a) $y = Ce^{2x} - x - \frac{1}{2}$; b) $y = (C+x^3)e^{\frac{x^2}{2}}$; c) $y = Ce^{x^2} + x^2 + 1$; d) $y = Ce^{\sqrt{1+x}} - 1$;
- e) $y = -\frac{1}{4} \left(\frac{2 \sin x}{\cos^2 x} + \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C \right) \sin x$; f) $y = e^{\cos x} + 1$; g) $y = Ce^{\frac{1}{x}} + 1$;
- h) $y = Cx + x^2 e^x - x e^x$; i) $y = \frac{C - \cos x}{x}$; j) $y = \frac{C}{x} + \frac{x \ln x}{2} - \frac{x}{4}$; k) $y = Cx + x^2 \ln x - x^2$;
- l) $y = \frac{C}{\cos x} + x \tg x + 1$. 4. a) $\frac{1}{y} = K \cdot x + \ln x + 1$; b) $y^2 = \frac{C + \ln x}{x}$; c) $\frac{1}{y} = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$;
- d) $\sqrt{y} = Cx + \frac{x^2}{2}$; e) $\frac{1}{y} = C(x+1) + (x+1)^4$; f) $\frac{1}{y} = \frac{C}{x} - \sin x - \frac{\cos x}{x}$;
- g) $\frac{1}{y} = \frac{C}{x} + \cos x - \frac{\sin x}{x}$; h) $\frac{1}{y^2} = \frac{C}{x^2} + \frac{2e^x(1-x)}{x^2}$. 5. a) $x^3 y + 2xy - y^2 + \ln x = C$;
- b) $\arctg xy + x + y = C$; c) $\ln(x^2 + y^2) + 2xy - 3y = C$; d) $\sin xy - y \cos x = C$;
- e) $\ln \sin x + \ln \cos y + xy^2 = C$; f) $\sin(x+y) - \cos(y-x) + \arcsin x = C$; g) $\frac{x}{y^2+1} + \frac{y}{x} = C$;
- h) $x \arctg y + \arctg x = C$; i) $x \sin y - x \cos y + xy - \tg x + \cotg y = C$;
- j) $\sqrt{x^2 - y^2} + x + y^2 = C$; k) $\sqrt{x+y} + \frac{1}{\sqrt{x+y}} = C$; l) $e^{xy} - 2e^y + \frac{1}{e^x} = C$.

6. a) $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$; b) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$; c) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$;
 d) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-4x}$; e) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; f) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$;
 g) $y = C_1 e^{-2x} \cos 5x + C_2 e^{-2x} \sin 5x$; h) $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$; i) $y = 4e^x + 2e^{3x}$;
 j) $y = 5e^x - 3e^{-2x}$; k) $y = 2 + e^{-x}$; l) $y = 3e^{3x} - 3xe^{3x}$.

7. a) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \cdot \ln |\sin 2x|$;
 b) $y = 2 \cos x + \sin x + \cos x \cdot \ln |\cos x| + x \cdot \sin x$; c) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x (\ln |x| - 1)$;
 d) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x - \ln |e^x + 1| - e^{-x} \cdot \ln |e^x + 1|$; e) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3}{4} x^2 \right)$;
 f) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x^3 - 3x$; g) $y = C_1 + C_2 e^{4x} - x^3 + x$; h) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 2e^{-x}$;
 i) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + (4x^3 + 4x^2) e^{-2x}$; j) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2 \sin x$;
 k) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - x \sin 3x - \frac{6}{13} \cos 3x$; l) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 2x \sin 2x - x \cos 2x$;
 m) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x - x^2 \cos x$; n) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + 2e^x \cos x$;
 o) $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x - 2x e^x \cos x$; p) $y = 2e^{2x} + 5x e^{2x} + 2e^{-x}$;
 q) $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{3}{10} \sin x + \frac{1}{10} \cos x$; r) $y = 7e^{2x} - 3e^{3x} - (x^2 + 3x) e^{2x}$;
 s) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{4}{3} x^3 - 4x^2 + 9x + \left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) e^{-x}$;
 t) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2e^x - \frac{x}{2} (\sin x + \cos x)$; u) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 3x + e^{2x}$;
 v) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 4x \sin 2x - \frac{4}{3} \sin x$.

8. a) $x = C_1 + C_2 e^{2t}$; b) $x = C_1 e^t + C_2 e^{7t}$; c) $x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{5t}$; d) $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$;
 $y = C_1 - C_2 e^{2t}$; $y = -C_1 e^t + C_2 e^{7t}$; $y = -\frac{4}{3} C_1 e^{-2t} + C_2 e^{5t}$; $y = -\frac{1}{3} C_1 e^t + C_2 e^{5t}$;
 e) $x = C_1 e^{3t} \cos 2t + C_2 e^{3t} \sin 2t$;
 $y = C_1 e^{3t} (2 \sin 2t - \cos 2t) - C_2 e^{3t} (\sin 2t + 2 \cos 2t)$;
 f) $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$;
 $y = \frac{1}{2} C_1 (-\sin t - \cos t) + \frac{1}{2} C_2 (\cos t - \sin t)$;
 g) $x = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t$;
 $y = C_1 e^{2t} \sin t - C_2 e^{2t} \cos t$;

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$$

h)

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 (e^{2t} + t e^{2t}) + e^{2t} \left(\frac{1}{2} t^2 + t - 1 \right);$$

$$x = C_1 + C_2 e^t + 4 \cos t$$

j)

$$y = -\frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{3} C_2 e^t - \sin t - 2 \cos t;$$

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} - \frac{1}{2} (\sin t + \cos t)$$

l)

$$y = C_1 e^{-t} + \frac{1}{2} C_2 e^{-t} + C_2 t e^{-t} - \cos t$$

$$x = -2e^{3t} \cos 2t - e^{3t} \sin 2t$$

n)

$$y = 4e^{3t} \cos 2t - 3e^{3t} \sin 2t;$$

$$x = -1 + 3e^{2t}$$

o)

$$y = -1 - 3e^{2t}.$$

$$x = C_1 e^{-t} \cos 2t + C_2 e^{-t} \sin 2t - t - 1;$$

i)

$$y = C_1 e^{-t} \sin 2t - C_2 e^{-t} \cos 2t + t + 1;$$

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{6t} - e^t$$

k)

$$y = -C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{6t} + e^t;$$

$$x = e^{-3t} \cos t + 13e^{-3t} \sin t$$

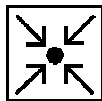
m)

$$y = 14e^{-3t} \cos t + 12e^{-3t} \sin t;$$

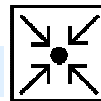
9. DVOJROZMĚRNÝ INTEGRÁL	104
9.1. Dvojitřozměrný integrál v obdélníku.....	104
Úlohy k samostatnému řešení.....	104
9.2. Dvojitřozměrný integrál v oblasti	104
Úlohy k samostatnému řešení.....	104
9.3. Transformace dvojitřozměrných integrálů do polárních souřadnic	105
Úlohy k samostatnému řešení.....	105
9.4. Geometrické aplikace.....	106
Úlohy k samostatnému řešení.....	106
Výsledky úloh k samostatnému řešení	108

9. DVOJITřMŘNÝ INTEGRÁL

9.1. Dvojitřmřný integrál v obdělníku



Úlohy k samostatnému řešení



1. Vypočítejte dvojitřmřný integrál v obdělníku D :

a) $\iint_D x^2 y^3 dx dy, D = \{(x, y) : x \in \langle 1, 4 \rangle, y \in \langle 2, 4 \rangle\},$

b) $\iint_D x e^{x+2y} dx dy, D = \{(x, y) : x \in \langle 1, 2 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle\},$

c) $\iint_D \ln(1+2y)^{3x^2} dx dy, D$ je čtyřúhelník $KLMN$, $K[0, 0], L[3, 0], M[3, 2], N[0, 2],$

d) $\iint_D xy \sin x^2 \cos y dx dy, D = \{(x, y) : x \in \langle 0, \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rangle, y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle\},$

e) $\iint_D \frac{y+1}{x+2} dx dy, D = \{(x, y) : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 1, 3 \rangle\},$

f) $\iint_D (2x^2 - 3xy + 4y^3) dx dy, D = \{(x, y) : x \in \langle 0, 3 \rangle, y \in \langle 2, 6 \rangle\},$

g) $\iint_D (x \sin y - \cos x \cos y) dx dy, D = \{(x, y) : x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, y \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle\},$

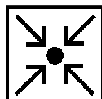
h) $\iint_D \frac{1}{(x+y)^2} dx dy, D = \{(x, y) : x \in \langle 1, 2 \rangle, y \in \langle 1, 2 \rangle\},$

i) $\iint_D \left(\frac{y}{1+x^2} - \frac{x}{1+y^2} \right) dx dy, D = \{(x, y) : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle\},$

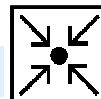
j) $\iint_D \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 y} \right) dx dy, D = \{(x, y) : x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle, y \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \rangle\}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

9.2. Dvojitřmřný integrál v oblasti



Úlohy k samostatnému řešení



2. Určete integrační meze pro $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ jednodušším způsobem, jestliže Ω je:

a) čtyřúhelník $K[0, 0], L[3, 3], M[3, 7], N[0, 4],$

b) čtyřúhelník $K[1, 2], L[6, 2], M[6, 6], N[2, 6],$

c) ohraničena křivkami $y = \frac{4}{x}, x + y = 5,$

d) ohraničena křivkami $y = 0, y = x^2 - 3x + 2,$

e) ohraničena křivkami $y = 0, y = -x^2 + x + 6,$

- f) ohraničena křivkami $y = 0$, $y = \ln x$, $x = e^2$,
 g) ohraničena křivkami $y = x + 2$, $y = -\frac{x}{2} + 2$, $y = 0$,
 h) ohraničena křivkami $y = x + 6$, $y = x^2 + 4x + 6$,
 i) ohraničena křivkami $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x \geq 0$,
 j) ohraničena křivkami $x = 1$, $y = e^x$, $y = e^{2x}$.

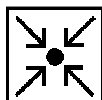
[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

3. Vypočítejte dvozměrný integrál v oblasti Ω :

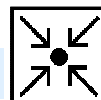
- a) $\iint_{\Omega} (x - y)^2 dx dy$, $\Omega: y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$,
 b) $\iint_{\Omega} x dx dy$, $\Omega: x = 0$, $y = x$, $x + y = 6$,
 c) $\iint_{\Omega} x dx dy$, $\Omega: y = 0$, $y = x$, $x + y = 6$,
 d) $\iint_{\Omega} (x - 1) dx dy$, $\Omega: y = 4x^2$, $y = 2 - 4x^2$,
 e) $\iint_{\Omega} \frac{1}{(2 - x - y)^2} dx dy$, $\Omega: y = 0$, $x = 0$, $x + y = 1$,
 f) $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$, Ω je čtyřúhelník $KLMN$, $K[0, 0]$, $L[3, 1]$, $M[3, 3]$, $N[1, 3]$,
 g) $\iint_{\Omega} x dx dy$, $\Omega: y = x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \sin x$,
 h) $\iint_{\Omega} 2y dx dy$, $\Omega: y \geq 0$, $y = \sin x$,
 i) $\iint_{\Omega} (2xy - x) dx dy$, $\Omega: y = x^3$, $y = \sqrt{x}$,
 j) $\iint_{\Omega} (x + 6) dx dy$, $\Omega: y = x + 6$, $y = x^2 + 4x + 6$.

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

9.3. Transformace dvozměrných integrálů do polárních souřadnic



Úlohy k samostatnému řešení



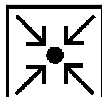
4. Transformací do polárních souřadnic vypočítejte dvozměrný integrál v oblasti Ω :

- a) $\iint_{\Omega} (x - 2y) dx dy$, $\Omega: x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$,
 b) $\iint_{\Omega} \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} dx dy$, $\Omega: x^2 + y^2 \leq 2x$,
 c) $\iint_{\Omega} 3x dx dy$, $\Omega: x^2 + y^2 \leq 2y$, $x \geq 0$,

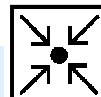
- d) $\iint_{\Omega} dx dy, \Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,$
- e) $\iint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \Omega: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,$
- f) $\iint_{\Omega} \sqrt{16 - x^2 - y^2} dx dy, \Omega: x^2 + y^2 \leq 4x,$
- g) $\iint_{\Omega} (x + y)^2 dx dy, \Omega: x^2 + y^2 \leq 2ry,$
- h) $\iint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy, \Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

9.4. Geometrické aplikace



Úlohy k samostatnému řešení



5. Vypočítejte objem tělesa, které je ohraničeno plochami:

- a) $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 2, x + y + 2z - 4 = 0,$
- b) $x = 0, y = 0, z = 0, 6x + 4y + z - 24 = 0,$
- c) $x = 2, x = -2, y = 2, y = -2, z = 0, z = 8 - x^2 - y^2,$
- d) $z = 0, z = 36 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4},$
- e) $x^2 + y^2 = r^2, z = 0, z = v,$
- f) $y = x^2 - 1, z = y, y = 0, z = 0.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

6. Vypočítejte obsah elementární oblasti, která je ohraničena křivkami:

- a) $y = \sqrt{3}x, y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, x^2 + y^2 = 4,$ v I. kvadrantu,
- b) $y = x^2 - 2x - 4, y = -x^2 + 4x + 4,$
- c) $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9,$
- d) $x = y^2, y = \frac{1}{x^2}, y = \frac{1}{2},$
- e) $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, y \leq x + 1,$
- f) $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq -x, y \leq x.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

7. Vypočítejte obsah části plochy:

- a) $z = 0, z = 4 - x^2 - y^2,$
- b) $z = 9, z = x^2 + y^2,$

c) $x = 0, y = 0, z = 0, 3x + 4y + 2z - 12 = 0,$

d) $z = 3, z^2 = x^2 + y^2,$

e) $z = 0, z = x^2 + y^2 - 1,$

f) $z = x + y, y = \frac{1}{2}x, y = 2x, y = 1 - x.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení

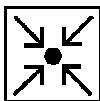


1. a) 1260; b) $\frac{e^2}{2}(e^2 - 1)$; c) $27\left(\frac{5}{2}\ln 5 - 2\right)$; d) $\frac{\pi - 2}{4}$; e) $\frac{7}{2}\ln \frac{3}{2}$; f) 3696; g) $\frac{\pi^2}{8} + 1$;
 h) $\ln \frac{9}{8}$; i) 0; j) 0. 2. a) $x \in \langle 0, 3 \rangle, y \in \langle x, x + 4 \rangle$; b) $y \in \langle 2, 6 \rangle, x \in \left\langle \frac{y + 2}{4}, 6 \right\rangle$;
 c) $x \in \langle 1, 4 \rangle, y \in \left\langle \frac{4}{x}, 5 - x \right\rangle$; d) $x \in \langle 1, 2 \rangle, y \in \langle x^2 - 3x + 2, 0 \rangle$;
 e) $x \in \langle -2, 3 \rangle, y \in \langle 0, -x^2 + x + 6 \rangle$; f) $x \in \langle 1, e^2 \rangle, y \in \langle 0, \ln x \rangle$;
 g) $y \in \langle 0, 2 \rangle, x \in \langle y - 2, 4 - 2y \rangle$; h) $x \in \langle -3, 0 \rangle, y \in \langle x^2 + 4x + 6, x + 6 \rangle$;
 i) $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle, y \in \langle \sin x, \cos x \rangle$; j) $x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle e^x, e^{2x} \rangle$. 3. a) $\frac{245}{32} - \ln 4$; b) 9; c) 27;
 d) $-\frac{4}{3}$; e) $1 - \ln 2$; f) 40; g) $\frac{\pi^3}{24} + 1$; h) $\frac{\pi}{2}$; i) $\frac{1}{120}$; j) $\frac{81}{4}$. 4. a) $-\frac{32}{3}$; b) π ; c) 2;
 d) πab ; e) 2π ; f) $\frac{64}{3}\pi - \frac{256}{9}$; g) $\frac{3}{2}\pi r^4$; h) $\frac{\pi ab}{4}$. 5. a) 4; b) 96; c) $\frac{256}{3}$; d) 213π ;
 e) $\pi r^2 v$; f) $\frac{16}{15}$. 6. a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{125}{3}$; c) 8π ; d) $\frac{41}{24} - \sqrt{2}$; e) $\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}$; f) $1 + \frac{\pi}{2}$.
 7. a) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)$; b) $\frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1)$; c) $3\sqrt{29}j^3$; d) $9\sqrt{2}\pi$; e) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$; f) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

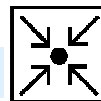
10. TROJROZMĚRNÝ INTEGRÁL	110
10.1. Trojrozměrný integrál v kvádru	110
Úlohy k samostatnému řešení.....	110
10.2. Trojrozměrný integrál v oblasti	110
Úlohy k samostatnému řešení.....	110
10.3. Transformace trojrozměrných integrálů.....	111
Úlohy k samostatnému řešení.....	111
10.4. Geometrické aplikace	112
Úlohy k samostatnému řešení.....	112
Výsledky úloh k samostatnému řešení	113

10. TROJROZMĚRNÝ INTEGRÁL

10.1. Trojrozměrný integrál v kvádru



Úlohy k samostatnému řešení

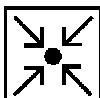


1. Vypočítejte trojrozměrný integrál v kvádru W :

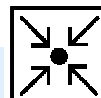
- $\iiint_W xy^2 z^3 dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, 2 \rangle, y \in \langle 0, 3 \rangle, z \in \langle 0, 4 \rangle\},$
- $\iiint_W \cos x \sin y e^z dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, y \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle, z \in \langle 0, 1 \rangle\},$
- $\iiint_W x \sin x \cos z dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, \pi \rangle, y \in \langle 0, 3 \rangle, z \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \rangle\},$
- $\iiint_W \ln x^{\ln y} dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 1, e \rangle, y \in \langle 1, e \rangle, z \in \langle 2, 4 \rangle\},$
- $\iiint_W \frac{x+6}{z(y-4)} dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, 6 \rangle, y \in \langle 5, 6 \rangle, z \in \langle 1, e \rangle\},$
- $\iiint_W \frac{y+z}{\cos^2 x} dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle, y \in \langle 1, 3 \rangle, z \in \langle 3, 4 \rangle\},$
- $\iiint_W \frac{1}{(x+y+z)^3} dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle, z \in \langle 1, 2 \rangle\},$
- $\iiint_W (3x^2 + 4xyz - 6xy^2 - 4z^3 + 6) dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle, z \in \langle 0, 1 \rangle\},$
- $\iiint_W \left(\frac{z}{1+x^2} + \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} \right) dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle, z \in \langle 0, 1 \rangle\},$
- $\iiint_W \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \right) dx dy dz, W = \{(x, y, z) : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle, z \in \langle 0, 1 \rangle\}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

10.2. Trojrozměrný integrál v oblasti



Úlohy k samostatnému řešení



2. Určete integrační meze pro $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$, jestliže Ω je ohraničena danými plochami:

- $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0,$
- $z = 4 - x^2 - y^2, z = 0, x + y = 2, x = 0, y = 0,$
- $z = 4 - x^2, z = 0, y = 2, y = -2,$
- $z = x^2 + y^2 - 4, z = 0,$

- e) $x = 0, y = 0, z = 0, x = 4, y = 2, 3x + 2y - 2z + 6 = 0,$
 f) $y = \frac{1}{x}, x = 2, z = 0, y + z = 2,$
 g) $z = x^2 + y^2, z = 16.$

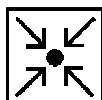
[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

3. Vypočítejte trojrozměrný integrál, je-li oblast Ω ohraničena danými plochami:

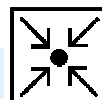
- a) $\iiint_{\Omega} \frac{1}{(2+x+y+z)^3} dx dy dz, \Omega: x+y+z=1, x=0, y=0, z=0,$
 b) $\iiint_{\Omega} (x+y) dx dy dz, \Omega: z=4-x^2-y^2, z=0, x+y=2, x=0, y=0,$
 c) $\iiint_{\Omega} xy^2 dx dy dz, \Omega: z=4-x^2, z=0, y=2, y=-2,$
 d) $\iiint_{\Omega} (1+x) dx dy dz, \Omega: y=\ln x, y=0, x=e, z=0, z=x,$
 e) $\iiint_{\Omega} \left(3-\frac{3}{2}x-y\right) dx dy dz, \Omega: x=0, y=0, z=0, x=4, y=2, 3x+2y-2z+6=0,$
 f) $\iiint_{\Omega} 2z(x+y) dx dy dz, \Omega: y=\frac{1}{x}, x=2, z=0, y+z=2,$
 g) $\iiint_{\Omega} \cos x dx dy dz, \Omega: y=0, z=0, y=\sin x, x+z=\frac{\pi}{2}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

10.3. Transformace trojrozměrných integrálů



Úlohy k samostatnému řešení



4. Vypočítejte trojrozměrný integrál transformací do válcových souřadnic:

- a) $\iiint_{\Omega} x^2 z dx dy dz, \Omega: -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq 3,$
 b) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz, \Omega: x^2+y^2=2y, z=0, z=1,$
 c) $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dx dy dz, \Omega: z=4-x^2-y^2, z=0,$
 d) $\iiint_{\Omega} z dx dy dz, \Omega: x^2+y^2+z^2=8, z \geq 0,$
 e) $\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz, \Omega: z=x^2+y^2, z=1,$
 f) $\iiint_{\Omega} x dx dy dz, \Omega: 4=x^2+y^2, z=0, z=4, x \geq 0, y \geq 0,$
 g) $\iiint_{\Omega} y dx dy dz, \Omega: 4=x^2+(y-2)^2, z=0, z=1,$

- h) $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 4,$
 i) $\iiint_{\Omega} z dx dy dz, \Omega: (x-1)^2 + y^2 = 1, z = -1, z = 3.$

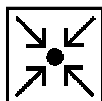
[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

5. Vypočítejte trojrozměrný integrál transformací do sférických souřadnic:

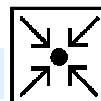
- a) $\iiint_{\Omega} z dx dy dz, \Omega: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,$
 b) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \Omega: z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,$
 c) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \Omega: z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,$
 d) $\iiint_{\Omega} z dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 8, z \geq 0,$
 e) $\iiint_{\Omega} x dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 1,$
 f) $\iiint_{\Omega} y dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0,$
 g) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0,$
 h) $\iiint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0,$
 i) $\iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 4.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

10.4. Geometrické aplikace



Úlohy k samostatnému řešení



6. Vypočítejte objem tělesa ohraničeného plochami:

- a) $x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 2, z = 0,$
 b) $x^2 + y^2 = z, z = 16,$
 c) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$
 d) $x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 + z^2 = 1,$
 e) $y = \sin x, y = 0, z = y, z = 0,$
 f) $y = e^x, z = xy, z = 0, y = e,$
 g) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1, z = 0, z = x,$
 h) $y = x, z = y \sin x, z = 0, x = \pi.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení

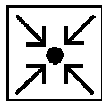


1. a) 1152; b) $e-1$; c) $3\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; d) 2; e) $54\ln 2$; f) 11; g) $\frac{1}{2}\ln\frac{32}{27}$; h) 5; i) $\frac{3}{8}\pi$;
 j) $\frac{3}{2}\ln 2$. 2. a) $x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1-x \rangle, z \in \langle 0, 1-x-y \rangle$;
 b) $x \in \langle 0, 2 \rangle, y \in \langle 0, 2-x \rangle, z \in \langle 0, 4-x^2-y^2 \rangle$;
 c) $x \in \langle -2, 2 \rangle, y \in \langle -2, 2 \rangle, z \in \langle 0, 4-x^2 \rangle$;
 d) $x \in \langle -2, 2 \rangle, y \in \langle -\sqrt{4-x^2}, \sqrt{4-x^2} \rangle, z \in \langle x^2+y^2-4, 0 \rangle$;
 e) $x \in \langle 0, 4 \rangle, y \in \langle 0, 2 \rangle, z \in \langle 0, \frac{3}{2}x+y+3 \rangle$; f) $x \in \langle \frac{1}{2}, 2 \rangle, y \in \langle \frac{1}{x}, 2 \rangle, z \in \langle 0, 2-y \rangle$;
 g) $x \in \langle -4, 4 \rangle, y \in \langle -\sqrt{16-x^2}, \sqrt{16-x^2} \rangle, z \in \langle x^2+y^2, 16 \rangle$. 3. a) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}-\frac{7}{36}$; b) $-\frac{8}{5}$; c) 0;
 d) $\frac{1}{4}e^2-\frac{2}{9}e^3+\frac{13}{36}$; e) $\frac{652}{9}$; f) $4\ln 2-\frac{61}{32}$; g) $\frac{\pi}{4}$. 4. a) $\frac{9}{8}\pi$; b) $\frac{32}{9}$; c) $\frac{32}{3}\pi$; d) 16π ;
 e) $\frac{4}{21}\pi$; f) $\frac{32}{3}$; g) 8π ; h) 0; i) 4π . 5. a) $\frac{\pi}{16}$; b) $\frac{\pi r^4}{2}$; c) $\frac{\pi^2 r^4}{8}$; d) 16π ; e) 0;
 f) $\frac{\pi r^4}{16}$; g) $\frac{\pi}{15}$; h) 4π ; i) 8π . 6. a) 2π ; b) 128π ; c) $\frac{4}{3}\pi r^3$; d) $\frac{4}{3}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; e) $\frac{\pi}{4}$;
 f) $\frac{e^2-1}{8}$; g) $\frac{2}{e}$; h) $\frac{\pi^2}{2}-2$.

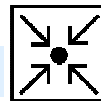
11. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL.....	115
11.1. Křivkový integrál I. druhu.....	115
Úlohy k samostatnému řešení.....	115
11.2. Křivkový integrál II. druhu	116
Úlohy k samostatnému řešení.....	116
11.3. Greenova věta.....	117
Úlohy k samostatnému řešení.....	117
11.4. Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě.....	117
Úlohy k samostatnému řešení.....	117
11.5. Geometrické aplikace křivkového integrálu	118
Úlohy k samostatnému řešení.....	118
Výsledky úloh k samostatnému řešení	120

11. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

11.1. Křivkový integrál I. druhu



Úlohy k samostatnému řešení



1. Vypočítejte křivkový integrál I. druhu po dané křivce:

- $\int_k x ds$, k : úsečka AB , $A[3,1]$, $B[2,5]$,
- $\int_k y ds$, k : úsečka AB , $A[3,1]$, $B[2,5]$,
- $\int_k xy ds$, k : úsečka AB , $A[1,1]$, $B[2,4]$,
- $\int_k \frac{1}{x+y} ds$, k : úsečka AB , $A[0,1]$, $B[2,3]$,
- $\int_k (x-y) ds$, k : úsečka AB , $A[0,1]$, $B[2,3]$,
- $\int_k (x^2 + y^2) ds$, k : úsečka AB , $A[2,-2]$, $B[4,4]$,
- $\int_k x \sin(x+y) ds$, k : část přímky $y = x$ mezi body $A[0,0]$, $B[\pi, \pi]$,
- $\int_k x e^{x+y} ds$, k : úsečka AB , $A[1,-1]$, $B[2,0]$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. Vypočítejte křivkový integrál I. druhu po dané křivce:

(Parametrické rovnice kružnice: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $r > 0$.)

- $\int_k x ds$, k : kružnice $x^2 + y^2 = 9$,
- $\int_k y ds$, k : půlkružnice $x^2 + y^2 = 4$ od bodu $A[2,0]$ do bodu $B[-2,0]$,
- $\int_k xy ds$, k : část kružnice $x^2 + y^2 = 1$ v I. kvadrantu,
- $\int_k (x+y) ds$, k : půlkružnice $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$,
- $\int_k (x^2 + y^2) ds$, k : kružnice $x^2 + y^2 = 4$,
- $\int_k x \cos \arcsin y ds$, k : kružnice $x^2 + y^2 = 1$,
- $\int_k \frac{x}{y} ds$, k : část kružnice $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$,
- $\int_k \frac{y}{x} ds$, k : kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. Vypočítejte křivkový integrál I. druhu po dané křivce:

a) $\int_k ds, k: y = 1 + \ln x, x \in \langle 1, 2 \rangle,$

b) $\int_k x^2 ds, k: y = 1 + \ln x, x \in \langle 1, 2 \rangle,$

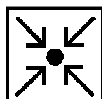
c) $\int_k x ds, k: y = x^2, x \in \langle -1, 1 \rangle,$

d) $\int_k 3y ds, k: y = \frac{x^3}{3}, \text{ mezi body } A[-3, -9], B[3, 9],$

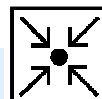
e) $\int_k \sin 2x ds, k: y = \sin x, x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

11.2. Křivkový integrál II. druhu



Úlohy k samostatnému řešení



4. Vypočítejte křivkový integrál II. druhu po křivce:

a) $\int_k x^2 dx + (y - x) dy, k: \text{orientovaná úsečka } \overline{AB}, A[3, 1], B[2, 5],$

b) $\int_k x^2 dx + y^2 dy, k: \text{kružnice } x^2 + y^2 = r^2,$

c) $\int_k y dx, k: \text{první oblouk cykloidy } x = t - \sin t, y = 1 - \cos t,$

d) $\int_k dx + dy, k: x = 2(\cos t + t \sin t), y = 2(\sin t - t \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$

e) $\int_k x dx - y dy, k: \text{část asteroidy } x = \cos^3 t, y = \sin^3 t \text{ v I. kvadrantu},$

f) $\int_k x \sin(x + y) dx + \cos y dy, k: \text{trojúhelník } ABC, A[0, 0], B[\pi, 0], C[0, \pi].$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

5. Vypočítejte křivkový integrál II. druhu po dané křivce:

a) $\int_k (x^2 + y) dx + y dy, k: y = x^2 - 3x - 4, \text{ mezi průsečíky s osou } x,$

b) $\int_k xy dx + x dy, k: y = \ln x, x \in \langle 1, 3 \rangle,$

c) $\int_k xy dx + x dy, k: y = \sin x, \text{ mezi průsečíky s přímkou } y = \frac{1}{2} \text{ v I. a II. kvadrantu},$

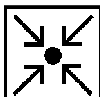
d) $\int_k y dx + dy, k: y = x^2 + 2x - 3, \text{ mezi průsečíky s osou } x,$

e) $\int_k xy dx + xy dy, k : y = \ln x, x \in \langle 1, 4 \rangle.$

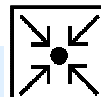
f) $\int_k y dx + y dy, k : y = \sin x, \text{ mezi průsečíky s přímkou } y = \frac{1}{2} \text{ v I. a II. kvadrantu.}$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

11.3. Greenova věta



Úlohy k samostatnému řešení



6. Užitím Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál II. druhu po křivce:

a) $\oint_k x^2 dx + (y - x) dy, k : \text{trojúhelník } ABC, A[0,0], B[2,1], C[2,5],$

b) $\oint_k x^2 y dx - xy^2 dy, k : \text{kružnice } x^2 + y^2 = r^2,$

c) $\oint_k x dy, k : x^2 + y^2 = 2x,$

d) $\oint_k (2xy - 2y^2) dx + xy^2 dy, k : \text{strany obdélníka } x = 0, x = 2, y = 0, y = 4,$

e) $\oint_k 3x dy + 3y dx, k : \text{elipsa } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$

f) $\oint_k (e^{x+y} + 3y) dx + e^{x+y} dy, k : \text{parabola } y = x^2 - 3x - 4 \text{ a osa } x,$

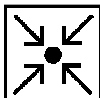
g) $\oint_k y \sin(xy) dx + (x \sin(xy) + x^2) dy, k : \text{kružnice } x^2 + y^2 = 16,$

h) $\oint_k x^2 y dx - xy^2 dy, k : \text{trojúhelník ohraničený přímkami } y = 0, x = 0, x + y - 2 = 0,$

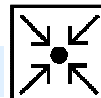
i) $\oint_k x dy - y dx, k : x^2 + y^2 = 2y.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

11.4. Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě



Úlohy k samostatnému řešení



7. K totálnímu diferenciálu určete kmenovou funkci:

a) $dF = (3x^2 + 2xy - 2y^2) dx + \left(x^2 - 4xy + \frac{1}{y}\right) dy,$

b) $dF = (e^{x+y} - y \sin(xy)) dx + (e^{x+y} - x \sin(xy)) dy,$

c) $dF = (xy \cos(xy) + (1 - y^2) \sin(xy)) dx + ((1 + x^2) \cos(xy) - xy \sin(xy)) dy,$

$$d) \quad dF = \left(8x^3y^2 - 6xy + \frac{y}{x} + 6 \right) dx + \left(\ln x + 4x^4y - 3x^2 - 7 \right) dy,$$

$$e) \quad dF = \left(\frac{2y}{\sqrt{1-x^2y^2}} - \sin x \right) dx + \left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2y^2}} - \cos y \right) dy,$$

$$f) \quad dF = \left(9x^2y^2 - 2\sin y + 2x\cos x^2 - 4\operatorname{tg} y + 1 \right) dx + \left(6x^3y - 2x\cos y - \frac{4x}{\cos^2 y} - 6y^2 \right) dy,$$

$$g) \quad dF = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - y \right) dx - \left(\frac{x}{x^2+y^2} + x \right) dy,$$

$$h) \quad dF = \left(y\cos xy - 8xy + 6\ln(x+y) + \frac{6x}{x+y} \right) dx + \left(x\cos xy - 4x^2 + \frac{6x}{x+y} \right) dy.$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

8. Vypočítejte křivkový integrál po křivce k s počátečním bodem A a koncovým bodem B :

$$a) \quad \int_k e^{x+y} (2x - y + 2) dx + e^{x+y} (2x - y - 1) dy, A[0,0], B[1,-1],$$

$$b) \quad \int_k (3x^2 + 6xy + 3y^2) dx + (3x^2 + 6xy + 3y^2) dy, A[1,1], B[2,2],$$

$$c) \quad \int_k (y\cos xy + 2x - y\sin xy) dx + (x\cos xy + 2y - x\sin xy) dy, A[0,0], B\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right],$$

$$d) \quad \int_k \left(\frac{1}{x+y} + 2e^{2x} \right) dx + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x+y} - 2ye^{y^2} \right) dy, A[0,1], B[1,1],$$

$$e) \quad \int_k \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx + \left(-\frac{2}{y^3} + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{\sin^2 y} \right) dy, A\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], B\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right],$$

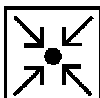
$$f) \quad \int_k \left(\frac{y}{1+x^2y^2} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} \right) dx + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} \right) dy, A[0,0], B[1,1],$$

$$g) \quad \int_k \left(e^{x+y} - e^{x-y} + \frac{x}{x^2+y^2} \right) dx + \left(e^{x+y} + e^{x-y} + \frac{y}{x^2+y^2} \right) dy, A[1,1], B[2,-1],$$

$$h) \quad \int_k \left(-\frac{\sin x}{y} - \frac{\sin y}{x^2} - \frac{1}{y^3} - \frac{2y}{x^3} \right) dx + \left(-\frac{\cos x}{y^2} + \frac{\cos y}{x} + \frac{3x}{y^4} + \frac{1}{x^2} \right) dy, A\left[\pi, \frac{\pi}{2}\right], B\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

11.5. Geometrické aplikace křivkového integrálu



Úlohy k samostatnému řešení



9. Vypočítejte obsah válcové plochy:

$$a) \quad z = x, y = x^2, z = 0, x = 1,$$

$$b) \quad x^2 + y^2 = 16, z = 0, z = 12,$$

- c) $x^2 + y^2 = 4, z = 0, x + y + z = 8,$
- d) $x^2 + y^2 = r^2, z = r^2 + x^2 + y^2,$
- e) $x + y = 4, z = xy + 6,$
- f) $y = \frac{1}{x}, z = \frac{1}{y^5}, x = 1, x = 2.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

10. Vypočítejte délku křivky:

- a) $y = \ln \sin x, x \in \left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$
- b) $x^2 + y^2 = r^2,$
- c) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$
- d) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \langle -1, 1 \rangle,$
- e) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

11. Vypočítejte obsah obrazců ohraničených danými křivkami:

- a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$
- b) $x^2 + y^2 = r^2,$
- c) $y = \frac{4}{x}, y = 0, x = 1, x = 4,$
- d) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$
- e) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle, y = 0.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení

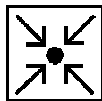


1. a) $\frac{5\sqrt{17}}{2}$; b) $3\sqrt{17}$; c) $4\sqrt{10}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 5$; e) $-\sqrt{8}$; f) $\frac{80\sqrt{10}}{3}$; g) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$;
 h) $\frac{3e^2-1}{4}\sqrt{2}$. 2. a) 0; b) 8; c) $\frac{1}{2}$; d) 2; e) 16π ; f) π ; g) $r\ln\sqrt{2}$; h) 0.
 3. a) $\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{2}$; b) $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$; c) 0; d) 0; e) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.
 4. a) $-\frac{13}{3}$; b) 0; c) 3π ; d) -4π ; e) -1; f) π . 5. a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{9}{2}\ln 3$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$;
 d) $-\frac{32}{3}$; e) $12\ln 4-\frac{27}{4}$; f) $\sqrt{3}$. 6. a) -4; b) $-\frac{\pi r^4}{2}$; c) π ; d) $\frac{272}{3}$; e) 0; f) $-\frac{125}{2}$;
 g) 0; h) $-\frac{8}{3}$; i) 2π . 7. a) $F(x, y) = x^3 + x^2y - 2xy^2 + \ln y + c$;
 b) $F(x, y) = e^{x+y} + \cos xy + c$; c) $F(x, y) = x \sin xy + y \cos xy + c$;
 d) $F(x, y) = 2x^4y^2 - 3x^2y + y \ln x + 6x - 7y + c$; e) $F(x, y) = 2 \arcsin xy - \sin y + \cos x + c$;
 f) $F(x, y) = 3x^3y^2 - 2x \sin y + \cos x^2 - 4x \operatorname{tg} y + x - 2y^3 + c$; g) $F(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - xy + c$;
 h) $F(x, y) = \sin xy - 4x^2y + 6x \ln(x+y) + c$. 8. a) 3; b) 56; c) π ; d) $(e^2-1) + \ln 2$;
 e) $\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{7}{\pi^2}$; f) $\frac{3}{4}\pi$; g) $e - e^2 - e^3 + \frac{1}{2}\ln \frac{5}{2} + 1$; h) $\frac{15}{2\pi^2} + \frac{9}{2\pi}$. 9. a) $\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$;
 b) 96π ; c) 32π ; d) $4\pi r^3$; e) $\frac{104\sqrt{2}}{3}$; f) $\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-2\sqrt{2})$. 10. a) $\ln \sqrt{3}$; b) $2\pi r$;
 c) $6a$; d) $\frac{e^2-1}{e}$; e) $8a$. 11. a) πab ; b) πr^2 ; c) $4\ln 4$; d) $\frac{3}{8}\pi a^2$; e) $3\pi a^2$.

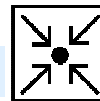
12. ŘADY	122
12.1. Číselné řady	122
Úlohy k samostatnému řešení.....	122
12.2. Řady s kladnými členy	122
Úlohy k samostatnému řešení.....	122
12.3. Alternující řady	123
Úlohy k samostatnému řešení.....	123
12.4. Mocninné řady	123
Úlohy k samostatnému řešení.....	123
12.5. Fouriérový řady	124
Úlohy k samostatnému řešení.....	124
Výsledky úloh k samostatnému řešení	126

12. ŘADY

12.1. Číselné řady



Úlohy k samostatnému řešení



1. Pomocí posloupnosti částečných součtů rozhodněte, zda je řada konvergentní nebo divergentní, najděte její součet, jestliže existuje:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n},$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n},$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1},$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2},$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

2. Najděte součet geometrické řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{5^{n-1}},$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{2n+1},$

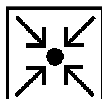
d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^{n+1}},$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n+1}},$

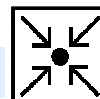
f) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{n+1}}{5^{2n+1}}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

12.2. Řady s kladnými členy



Úlohy k samostatnému řešení



3. Pomocí vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^{2n}},$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1},$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!},$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n!},$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n,$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2},$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{n^2},$

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^3 + 1},$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}},$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}},$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+4},$

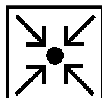
m) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^{2n},$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)},$

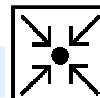
o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n!}{2^n}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

12.3. Alternující řady



Úlohy k samostatnému řešení

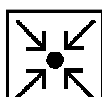


4. Rozhodněte o konvergenci alternující řady:

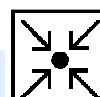
$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+2}, & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}, & \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+2)!}, \\
 \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n, & \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n, & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n, \\
 \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}, & \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n+1}, & \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}, \\
 \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n-1}}, & \text{k) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, & \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{(n-1)!}.
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

12.4. Mocninné řady



Úlohy k samostatnému řešení



5. Vypočítejte obor konvergence mocninné řady, pokud lze řadu sečíst, tak ji sečtěte:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}, & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3^n}, & \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+2)^{2n}, \\
 \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n}, & \text{e) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}, & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{4^n}, \\
 \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}, & \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+4)^n}{3^n \cdot n!}, & \text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} n(x-2)^n, \\
 \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n}, & \text{k) } \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x-1)^n, & \text{l) } \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n.
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

6. Proveďte rozvoj funkce v Maclaurinovu řadu:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } f(x) = e^{2x}, & \text{b) } f(x) = \frac{\cos x}{x}, & \text{c) } f(x) = e^{-x}, \\
 \text{d) } f(x) = \frac{1}{1-x}, & \text{e) } f(x) = \frac{1}{1+x^2}, & \text{f) } f(x) = \sin x^2.
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

7. Vypočítejte integrál pomocí rozvoje funkce v Maclaurinovu řadu:

- | | | |
|----------------------------------|---|----------------------------------|
| a) $\int \frac{e^x}{x} dx,$ | b) $\int \frac{\cos x}{x} dx,$ | c) $\int \frac{\sin x}{x} dx,$ |
| d) $\int \frac{\cos x^2}{x} dx,$ | e) $\int \sin x^2 dx,$ | f) $\int \frac{\arctg x}{x} dx,$ |
| g) $\int_0^1 e^{x^2} dx,$ | h) $\int_{0,1}^1 \frac{\cos 2x}{x} dx,$ | i) $\int_0^1 \arctg x^2 dx.$ |

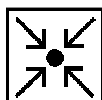
Výsledky úloh k samostatnému řešení

8. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnici:

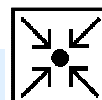
- a) $y' = 2y + x^3$, počáteční podmínka $y(0) = 1$,
 b) $y'' = y' \sin x + \cos x$, počáteční podmínka $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$,
 c) $y' = xy^2 + x^2 y$, počáteční podmínka $y(1) = -1$,
 d) $y' = \sin x + xy$, počáteční podmínka $y(0) = 0$,
 e) $y'' = y \ln x + e^{xy}$, počáteční podmínka $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$,
 f) $y' = \frac{1}{x} + x^2 y$, počáteční podmínka $y(1) = 1$,
 g) $y' = 3y + 2xe^y$, počáteční podmínka $y(0) = 0$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

12.5. Fourierovy řady



Úlohy k samostatnému řešení



9. Rozviňte ve FŘ:

- a) $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 1 & x \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases},$
 b) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$, sinová i kosinová
 c) $f(x) = x^2$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$,
 d) $f(x) = x^2$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$,
 e) $f(x) = x^2$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$, sinová,
 f) $f(x) = x$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$,
 g) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 3, & x \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases},$
 h) $f(x) = x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$,
 i) $f(x) = \begin{cases} -2 & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 2 & x \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases},$

$$j) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 1 & x \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases},$$

$$k) \quad f(x) = 1, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle, \text{ sinová,}$$

$$l) \quad f(x) = \pi - x, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) řada konverguje, $s = \frac{3}{4}$; b) řada konverguje, $s = 1$; c) řada konverguje, $s = \frac{3}{4}$;
 d) řada konverguje, $s = \frac{1}{2}$; e) řada konverguje, $s = 1$; f) řada konverguje, $s = \frac{1}{2}$. 2. a) řada
 konverguje, $s = 2$; b) řada konverguje, $s = \frac{5}{6}$; c) řada konverguje, $s = \frac{12}{25}$; d) řada
 diverguje; e) řada konverguje, $s = \frac{3}{2}$; f) řada konverguje, $s = \frac{20}{29}$. 3. a) řada konverguje;
 b) řada konverguje; c) řada konverguje; d) řada konverguje; e) řada konverguje; f) řada
 konverguje; g) řada konverguje; h) řada diverguje; i) řada konverguje; j) řada konverguje;
 k) řada diverguje; l) řada diverguje; m) řada diverguje; n) řada konverguje; o) řada
 diverguje; p) řada diverguje; q) řada diverguje; r) řada diverguje; s) řada diverguje;
 t) řada konverguje; u) řada konverguje; v) řada konverguje; w) řada konverguje; z) řada
 konverguje. 4. a) konvergentní; b) absolutně konvergentní; c) absolutně konvergentní;
 d) absolutně konvergentní; e) divergentní; f) divergentní; g) absolutně konvergentní;
 h) divergentní; i) konvergentní; j) absolutně konvergentní; k) konvergentní; l) absolutně
 konvergentní. 5. a) $\langle 0, 2 \rangle$, $s = -\ln(2-x)$; b) $(0, 6)$, $s = \frac{x-3}{6-x}$; c) $(-3, -1)$, $s = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$;
 d) $\langle -5, 3 \rangle$, $s = \ln \frac{4}{3-x}$; e) $(1, 3)$, $s = \ln(x-1)$; f) $(-4, 4)$, $s = \frac{x}{x+4}$; g) $(-\infty, \infty)$;
 h) $(-\infty, \infty)$; i) $(1, 3)$; j) $\langle -1, 1 \rangle$, $s = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x}}$; k) $(0, 2)$, $s = \frac{1}{(2-x)^2}$;
 l) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $s = \frac{1}{1-4x}$.
6. a) $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \dots + \frac{2^n x^n}{n!} + \dots = \sum_0^\infty \frac{2^n x^n}{n!}$;
 b) $\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} + \dots = \frac{1}{x} + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$;
 c) $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^n}{n!}$;
 d) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_0^\infty x^n$;

$$\text{e) } \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \sum_0^{\infty} (-1)^n x^{2n};$$

$$\text{f) } \sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!};$$

$$\text{g) } e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + \dots = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!};$$

$$\text{h) } \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$\text{i) } e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2!} + \frac{27x^3}{3!} + \dots + \frac{3^n x^n}{n!} + \dots = \sum_0^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}.$$

$$\text{7. a) } \int \frac{e^x}{x} dx = c + \ln x + x + \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} + \dots = c + \ln x + \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n.n!};$$

$$\text{b) } \int \frac{\cos x}{x} dx = c + \ln x - \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^4}{4.4!} - \frac{x^6}{6.6!} + \dots = c + \ln x + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n).(2n)!};$$

$$\text{c) } \int \frac{\sin x}{x} dx = c + x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \frac{x^7}{7.7!} + \dots = c + \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1).(2n+1)!};$$

$$\text{d) } \int \frac{\cos x^2}{x} dx = c + \ln x - \frac{x^4}{4.2!} + \frac{x^8}{8.4!} - \frac{x^{12}}{12.6!} + \dots = c + \ln x + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(4n).(2n)!};$$

$$\text{e) } \int \sin x^2 dx = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!} + c;$$

$$\text{f) } \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = c + x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \dots = c + \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}; \quad \text{g) } 1,4625; \quad \text{h) } 1,4652;$$

$$\text{i) } 0,2979.$$

$$\text{8. a) } y = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{11}{30}x^5 + \dots;$$

$$\text{b) } y = 2 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{60}x^5 + \dots;$$

$$\text{c) } y = -1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 + \dots;$$

$$\text{d) } y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \dots;$$

$$\text{e) } y = -(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \dots;$$

$$\text{f) } y = 1 + 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{5}{2}(x-1)^3 + \frac{13}{8}(x-1)^4 + \dots,$$

$$\text{g) } y = x^2 + x^3 + \frac{5}{4}x^4 + \dots;$$

$$\text{h)} y = 1 - x - \frac{1}{6}x^3 + \dots; \quad \text{i)} y = 2 + 4(x-1) + 8(x-1)^2 + \frac{47}{3}(x-1)^3 + \frac{95}{3}(x-1)^4 + \dots;$$

$$\text{j)} y = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots; \quad \text{k)} y = 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{35}{24}x^4 + \dots; \quad \text{l)} y = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \dots;$$

$$\text{m)} y = 1 + 2(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \dots; \quad \text{n)} y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \dots.$$

$$9. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin(2n-1)x}{\pi(2n-1)}; \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2}; \quad \text{c)} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n};$$

$$\text{d)} 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin(2n-1)x}{\pi(2n-1)}; \quad \text{e)} \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}; \quad \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \sin(2n-1)x}{\pi(2n-1)}, \quad \text{g)} \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)};$$

$$\text{h)} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}; \quad \text{i)} \pi + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$



Literatura



BARTSCH Hans Jochen. *Matematické vzorce.* Praha: Mladá fronta, 2002.

ISBN 80-204-0607-7.

BURDA Pavel. *Algebra a analytická geometrie.* Skriptum VŠB-TU, Ostrava 1997.

ISBN 80-7078-479-2.

BURDA Pavel, KREML Pavel. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné - Matematika*

Ila. Skriptum VŠB-TU, Ostrava 2004, ISBN 80-248-0634-7.

BURDA Pavel, DOLEŽALOVÁ Jarmila. *Integrální počet funkcí více proměnných -*

Matematika IIb. Skriptum VŠB-TU, Ostrava 2003. ISBN 80-248-0454-9.

BURDA Pavel, DOLEŽALOVÁ Jarmila. *Cvičení z matematiky IV.* Skriptum VŠB-TU

Ostrava 1999. ISBN 80-7078-025-8.

PAVELKA Lubomír, PINKA Petr. *Integrální počet funkcí jedné proměnné - Matematika*

IIla. Skriptum VŠB-TU, Ostrava 1999. ISBN 80-7078-654-X.

REKTORYS Karel a kol. *Přehled užití matematiky.* Praha, SNTL 1968.

VLČEK Jaroslav, VRBICKÝ Jiří. *Řady - Matematika VI.* Skriptum VŠB-TU, Ostrava

2000. ISBN 80-7078-775-9.