9. DVOJROZMĚRNÝ INTEGRÁL

9.1. Dvojrozměrný integrál v obdélníku

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočítejte dvojrozměrný integrál v obdélníku D:

a) $\iint\limits_D x^2y^3dxdy,\ D=\{(x,y): x\in\langle 1,4\rangle,\ y\in\langle 2,4\rangle\}$,

b) $\iint\limits_D xe^{x+2y}dxdy,\ D=\{(x,y): x\in\langle 1,2\rangle,\ y\in\langle 0,1\rangle\}$,

c) $\iint\limits_D \ln(1+2y)^{3x^2}\,dxdy$, D je čtyřúhelník $KLMN$, $K[0,0]$, $L[3,0]$, $M[3,2]$, $N[0,2]$,

d) $\iint\limits_D xy\sin x^2\cos y\,dxdy,\ D=\left\{(x,y): x\in\left\langle 0,\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\rangle,\ y\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle\right\}$,

e) $\iint\limits_D \frac{y+1}{x+2}dxdy,\ D=\{(x,y): x\in\langle 0,1\rangle,\ y\in\langle 1,3\rangle\}$,

f) $\iint\limits_D (2x^2-3xy+4y^3)dxdy,\ D=\{(x,y): x\in\langle 0,3\rangle,\ y\in\langle 2,6\rangle\}$,

g) $\iint\limits_D (x\sin y-\cos x\cos y)dxdy,\ D=\left\{(x,y): x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle,\ y\in\left\langle \frac{\pi}{2},\pi\right\rangle\right\}$,

h) $\iint\limits_D \frac{1}{(x+y)^2}dxdy,\ D=\{(x,y): x\in\langle 1,2\rangle,\ y\in\langle 1,2\rangle\}$,

i) $\iint\limits_D \left(\frac{y}{1+x^2}-\frac{x}{1+y^2}\right)dxdy,\ D=\{(x,y): x\in\langle 0,1\rangle,\ y\in\langle 0,1\rangle\}$,

j) $\iint\limits_D \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 y}\right)dxdy,\ D=\left\{(x,y): x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{4}\right\rangle,\ y\in\left\langle \frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right\rangle\right\}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

9.2. Dvojrozměrný integrál v oblasti

Úlohy k samostatnému řešení

2. Určete integrační meze pro $\iint\limits_\Omega f(x,y)dxdy$ jednodušším způsobem, jestliže Ω je:

a) čtyřúhelník $K[0,0]$, $L[3,3]$, $M[3,7]$, $N[0,4]$,

b) čtyřúhelník $K[1,2]$, $L[6,2]$, $M[6,6]$, $N[2,6]$,

c) ohraničena křivkami $y=\frac{4}{x},\ x+y=5$,

d) ohraničena křivkami $y=0,\ y=x^2-3x+2$,

e) ohraničena křivkami $y=0,\ y=-x^2+x+6$,

f) ohraničena křivkami $y=0,\ y=\ln x,\ x=e^2$,

g) ohraničena křivkami $y=x+2,\ y=-\dfrac{x}{2}+2,\ y=0$,

h) ohraničena křivkami $y=x+6,\ y=x^2+4x+6$,

i) ohraničena křivkami $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x\ge 0$,

j) ohraničena křivkami $x=1,\ y=e^x,\ y=e^{2x}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. Vypočítejte dvojrozměrný integrál v oblasti Ω:

a) $\iint\limits_{\Omega}(x-y)^2\,dxdy,\ \Omega: y=\dfrac{1}{x},\ y=0,\ x=1,\ x=4$,

b) $\iint\limits_{\Omega}x\,dxdy,\ \Omega: x=0,\ y=x,\ x+y=6$,

c) $\iint\limits_{\Omega}x\,dxdy,\ \Omega: y=0,\ y=x,\ x+y=6$,

d) $\iint\limits_{\Omega}(x-1)\,dxdy,\ \Omega: y=4x^2,\ y=2-4x^2$,

e) $\iint\limits_{\Omega}\dfrac{1}{(2-x-y)^2}\,dxdy,\ \Omega: y=0,\ x=0,\ x+y=1$,

f) $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dxdy$, Ω je čtyřúhelník $KLMN$, $K[0,0]$, $L[3,1]$, $M[3,3]$, $N[1,3]$,

g) $\iint\limits_{\Omega}x\,dxdy,\ \Omega: y=x,\ x=\dfrac{\pi}{2},\ y=\sin x$,

h) $\iint\limits_{\Omega}2y\,dxdy,\ \Omega: y\ge 0,\ y=\sin x$,

i) $\iint\limits_{\Omega}(2xy-x)\,dxdy,\ \Omega: y=x^3,\ y=\sqrt{x}$,

j) $\iint\limits_{\Omega}(x+6)\,dxdy,\ \Omega: y=x+6,\ y=x^2+4x+6$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

9.3. Transformace dvojrozměrných integrálů do polárních souřadnic

Úlohy k samostatnému řešení

4. Transformací do polárních souřadnic vypočítejte dvojrozměrný integrál v oblasti Ω:

a) $\iint\limits_{\Omega}(x-2y)\,dxdy,\ \Omega: x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0$,

b) $\iint\limits_{\Omega}\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\,dxdy,\ \Omega: x^2+y^2\le 2x$,

c) $\iint\limits_{\Omega}3x\,dxdy,\ \Omega: x^2+y^2\le 2y,\ x\ge 0$,

d) $\iint\limits_{\Omega} dxdy,\ \Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$,

e) $\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\ \Omega: 1\le x^2+y^2\le 4$,

f) $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{16-x^2-y^2}\,dxdy,\ \Omega: x^2+y^2\le 4x$,

g) $\iint\limits_{\Omega} (x+y)^2\,dxdy,\ \Omega: x^2+y^2\le 2ry$,

h) $\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy,\ \Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

9.4. Geometrické aplikace

Úlohy k samostatnému řešení

5. Vypočítejte objem tělesa, které je ohraničeno plochami:

a) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=2,\ y=2,\ x+y+2z-4=0$,

b) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ 6x+4y+z-24=0$,

c) $x=2,\ x=-2,\ y=2,\ y=-2,\ z=0,\ z=8-x^2-y^2$,

d) $z=0,\ z=36-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}$,

e) $x^2+y^2=r^2,\ z=0,\ z=v$,

f) $y=x^2-1,\ z=y,\ y=0,\ z=0$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

6. Vypočítejte obsah elementární oblasti, která je ohraničena křivkami:

a) $y=\sqrt{3}x,\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x,\ x^2+y^2=4$, v I. kvadrantu ,

b) $y=x^2-2x-4,\ y=-x^2+4x+4$,

c) $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9$,

d) $x=y^2,\ y=\frac{1}{x^2},\ y=\frac{1}{2}$,

e) $x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0,\ y\le x+1$,

f) $(x-1)^2+y^2\le 1,\ y\ge -x,\ y\le x$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

7. Vypočítejte obsah části plochy:

a) $z=0,\ z=4-x^2-y^2$,

b) $z=9,\ z=x^2+y^2$,

c) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ 3x+4y+2z-12=0$,

d) $z=3,\ z^2=x^2+y^2$,

e) $z=0,\ z=x^2+y^2-1$,

f) $z=x+y,\ y=\frac{1}{2}x,\ y=2x,\ y=1-x$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 1260; **b)** $\frac{e^2}{2}\left(e^2-1\right)$; **c)** $27\left(\frac{5}{2}\ln 5-2\right)$; **d)** $\frac{\pi-2}{4}$; **e)** $6\ln\frac{3}{2}$; **f)** 3696; **g)** $\frac{\pi^2}{8}+1$; **h)** $\ln\frac{9}{8}$; **i)** 0; **j)** 0. **2. a)** $x\in\langle 0,3\rangle,\ y\in\langle x,x+4\rangle$; **b)** $y\in\langle 2,6\rangle,\ x\in\left\langle \frac{y+2}{4},6\right\rangle$; **c)** $x\in\langle 1,4\rangle,\ y\in\left\langle \frac{4}{x},5-x\right\rangle$; **d)** $x\in\langle 1,2\rangle,\ y\in\left\langle x^2-3x+2,0\right\rangle$; **e)** $x\in\langle -2,3\rangle,\ y\in\left\langle 0,-x^2+x+6\right\rangle$; **f)** $x\in\left\langle 1,e^2\right\rangle,\ y\in\langle 0,\ln x\rangle$; **g)** $y\in\langle 0,2\rangle,\ x\in\langle y-2,4-2y\rangle$; **h)** $x\in\langle -3,0\rangle,\ y\in\left\langle x^2+4x+6,x+6\right\rangle$; **i)** $x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{4}\right\rangle,\ y\in\langle \sin x,\cos x\rangle$; **j)** $x\in\langle 0,1\rangle,\ y\in\left\langle e^x,e^{2x}\right\rangle$. **3. a)** $\frac{245}{32}-\ln 4$; **b)** 9; **c)** 27; **d)** $-\frac{4}{3}$; **e)** $1-\ln 2$; **f)** 40; **g)** $\frac{\pi^3}{24}+1$; **h)** $\frac{\pi}{2}$; **i)** $\frac{1}{120}$; **j)** $\frac{81}{4}$. **4. a)** $-\frac{32}{3}$; **b)** π; **c)** 2; **d)** πab; **e)** 2π; **f)** $\frac{64}{3}\pi-\frac{256}{9}$; **g)** $\frac{3}{2}\pi r^4$; **h)** $\frac{\pi ab}{4}$. **5. a)** 4; **b)** 96; **c)** $\frac{256}{3}$; **d)** 213π; **e)** $\pi r^2 v$; **f)** $\frac{16}{15}$. **6. a)** $\frac{\pi}{3}$; **b)** $\frac{125}{3}$; **c)** 8π; **d)** $\frac{41}{24}-\sqrt{2}$; **e)** $\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{2}$; **f)** $1+\frac{\pi}{2}$.

7. a) $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$; **b)** $\frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right)$; **c)** $3\sqrt{29}\,j^3$; **d)** $9\sqrt{2}\pi$; **e)** $\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$; **f)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$.