8. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

8.1. Diferenciální rovnice prvního řádu – separovatelná, homogenní, lineární, Bernoulliova, exaktní

8.1.1. Separovatelná diferenciální rovnice

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte obecné nebo partikulární řešení dané DR:

a) $y' \sin y \cos^2 x - \sin x \cos^2 y = 0$,

b) $y'\left(x^2 + x\right) = y$,

c) $\left(xy + y + 2x + 2\right) y' = xy + x + 2y + 2$,

d) $\sqrt{1 - y^2} + \left(1 + x^2\right) y' = 0$, počáteční podmínka $y(1) = 1$,

e) $y' = \dfrac{6x^2 - 1}{2x^3 + x^2}$,

f) $y' x^2 y = xy^2 + x + y^2 + 1$,

g) $y' \sin y \left(\sin x + 1\right) - \cos x \cos y = 0$, počáteční podmínka $y(0) = 0$,

h) $\dfrac{y'}{x} = e^{x-y}$,

i) $y' \ln y = x \ln x$, počáteční podmínka $y(1) = e$

j) $y' \sin^2 x - y = 4$,

k) $y'\left(x^2 y + xy\right) = xy^2 + 2y^2 + x + 2$,

l) $2y' = \left(2y + 1\right)\left(\ln x + 1\right)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

8.1.2. Homogenní diferenciální rovnice

Úlohy k samostatnému řešení

2. Najděte obecné nebo partikulární řešení dané DR:

a) $xy' \sin \dfrac{y}{x} = y \sin \dfrac{y}{x} - x$,

b) $y' = \dfrac{2x - y}{x + y}$,

c) $y'\left(x - y\right) = 2x - y$,

d) $2xyy' = 3y^2 + x^2$,

e) $xyy' = 2y^2 + 3xy + 2x^2$,

f) $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$,

g) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$,

h) $y' = \dfrac{y}{x-y}$,

i) $x^2 y' = y^2 + 6xy + 6x^2$,

j) $y' = \dfrac{3y-2x}{x+y}$,

k) $y'x^2 = y^2 + xy + 4x^2$,

l) $4x^2 y' = y^2 + xy - 4x^2$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

8.1.3. Lineární diferenciální rovnice

Úlohy k samostatnému řešení

3. Najděte obecné nebo partikulární řešení dané DR:

a) $y' - 2y = 2x$,

b) $y' + xy = 3x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$,

c) $y' - 2xy = -2x^3$,

d) $y' - \dfrac{y}{2\sqrt{1+x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$,

e) $y' \sin x - y \cos x = \dfrac{1}{\sin x}$,

f) $y' + y \sin x = \sin x$, počáteční podmínka $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$,

g) $y' + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$,

h) $y'x - y = x^3 e^x$,

i) $y'x + y = \sin x$,

j) $y'x + y = x \ln x$,

k) $y'x - y = x^2 \ln x$,

l) $y' \cos x - y \sin x = x \cos x$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

8.1.4. Bernoulliova diferenciální rovnice

Úlohy k samostatnému řešení

4. Najděte obecné nebo partikulární řešení dané DR:

a) $xy' + y = y^2 \ln x$,

b) $2x^2y' + xy = \dfrac{1}{y}$,

c) $y' + xy = xy^2$,

d) $y' - \dfrac{2y}{x} = x\sqrt{y}$,

e) $y' + \dfrac{y}{x+1} = -3(x+1)^3 y^2$,

f) $y' - \dfrac{y}{x} = y^2 \cos x$,

g) $y' - \dfrac{y}{x} = y^2 \sin x$,

h) $xy' - y = y^3 e^x$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

8.1.5. Exaktní diferenciální rovnice

Úlohy k samostatnému řešení

5. Najděte obecné nebo partikulární řešení dané DR:

a) $\left(3x^2y + 2y + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x^3 + 2x - 2y\right)dy = 0$,

b) $\left(\dfrac{y}{x^2y^2+1} + 1\right)dx + \left(\dfrac{x}{x^2y^2+1} + 1\right)dy = 0$,

c) $\left(\dfrac{2x}{x^2+y^2} + 2y\right)dx + \left(\dfrac{2y}{x^2+y^2} + 2x - 3\right)dy = 0$,

d) $(y\cos xy + y\sin x)dx + (x\cos xy - \sin x)dy = 0$,

e) $(\operatorname{cotg} x + y^2)dx + (2xy - \operatorname{tg} y)dy = 0$,

f) $\left(\cos(x+y) - \sin(y-x) + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx + \left(\cos(x+y) + \sin(y-x)\right)dy = 0$,

g) $\left(\dfrac{1}{y^2+1} - \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2xy}{(y^2+1)^2}\right)dy = 0$

h) $\left(\operatorname{arctg} y + \dfrac{1}{x^2+1}\right)dx + \dfrac{x}{1+y^2}dy = 0$,

i) $\left(-\dfrac{1}{\cos^2 x} - \cos y + \sin y + y\right)dx + \left(x\cos y + x\sin y + x - \dfrac{1}{\sin^2 y}\right)dy = 0$,

j) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} + 1\right)dx + \left(2y - \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)dy = 0$,

k) $\left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}}-\frac{1}{2(x+y)\sqrt{x+y}}\right)dx+\left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}}-\frac{1}{2(x+y)\sqrt{x+y}}\right)dy=0$,

l) $\left(ye^{xy}-e^{-x}\right)dx+\left(xe^{xy}-2e^{y}\right)dy=0$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

8.2. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

8.2.1. Homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Úlohy k samostatnému řešení

6. Najděte obecné nebo partikulární řešení dané DR:

a) $y''-4y'+3y=0$,

b) $y''-4y=0$,

c) $y'''-3y''+3y'-y=0$,

d) $y'''+4y''=0$,

e) $y''+y=0$,

f) $y''+4y=0$,

g $y''+4y'+29y=0$,

h) $y''-2y'+2y=0$,

i) $y''-4y'+3y=0$, počáteční podmínka $y(0)=6, y'(0)=10$,

j) $y''+y'-2y=0$, počáteční podmínka $y(0)=2, y'(0)=11$,

k) $y'''-y'=0$, počáteční podmínka $y(0)=3, y'(0)=-1, y''(0)=1$,

l) $y''-6y'+9y=0$, počáteční podmínka $y(0)=3, y'(0)=6$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

8.2.2. Nehomogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Úlohy k samostatnému řešení

7. Najděte obecné nebo partikulární řešení dané DR:

a) $y''+4y=\frac{1}{\sin 2x}$,

b) $y''+y=\frac{1}{\cos x}$, počáteční podmínka $y(0)=2, y'(0)=1$,

c) $y''-2y'+y=\frac{e^{x}}{x}$,

d) $y'' + y' = \dfrac{1}{1+e^x}$,
e) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \cdot \ln x$,
f) $y'' - 4y = 8x^3$,
g) $y'' - 4y' = 12x^2 - 6x - 4$,
h) $y'' - 4y' + 4y = 18e^{-x}$,
i) $y'' + 4y' + 4y = (24x+8)e^{-2x}$,
j) $y'' + 4y = 6\sin x$,
k) $y'' - 4y = 13x \cdot \sin 3x$,
l) $y'' + 4y = 4\sin 2x - 8\cos 2x$,
m) $y'' + y = 4x \cdot \sin x$,
n) $y'' + 3y' + 2y = 10e^x \cdot \cos x - 10e^x \cdot \sin x$,
o) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cdot \sin x$,
p) $y'' - 4y' + 4y = 18e^{-x}$, počáteční podmínka $y(0) = 4, y'(0) = 7$,
q) $y'' - 4y' + 3y = \sin x - \cos x$,
r) $y'' - 5y' + 6y = (2x+1)e^{2x}$, počáteční podmínka $y(0) = 4, y'(0) = 2$,
s) $y'' + y' = 4x^2 + 1 - xe^{-x}$,
t) $y'' + y = 4e^x + \sin x - \cos x$,
u) $y'' + y' = x^2 - x + 6e^{2x}$,
v) $y'' + 4y = 16\cos 2x - 4\sin x$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

8.3. Soustavy diferenciálních rovnic

Úlohy k samostatnému řešení

8. Najděte obecné nebo partikulární řešení dané soustavy DR:

a) $\begin{aligned}\dot{x} &= x - y\\ \dot{y} &= -x + y\end{aligned}$, b) $\begin{aligned}\dot{x} &= 4x + 3y\\ \dot{y} &= 3x + 4y\end{aligned}$, c) $\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + 3y\\ \dot{y} &= 4x + y\end{aligned}$,

d) $\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + 3y\\ \dot{y} &= x + 4y\end{aligned}$, e) $\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - y\\ \dot{y} &= 5x + 4y\end{aligned}$, f) $\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y\\ \dot{y} &= -x - y\end{aligned}$,

g) $\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - y\\ \dot{y} &= x + 2y\end{aligned}$, h) $\begin{aligned}\dot{x} &= x + y + e^{2t}\\ \dot{y} &= -x + 3y + 2e^{2t}\end{aligned}$, i) $\begin{aligned}\dot{x} &= -x - 2y - t\\ \dot{y} &= 2x - y + 2t + 1\end{aligned}$,

j) $\begin{aligned}\dot{x} &= 3x + 6y + 2\sin t\\ \dot{y} &= -x - 2y - \cos t\end{aligned}$, k) $\begin{aligned}\dot{x} &= 3x + y + e^t\\ \dot{y} &= 3x + 5y - e^t\end{aligned}$, l) $\begin{aligned}\dot{x} &= -3x + 2y - \sin t\\ \dot{y} &= -2x + y\end{aligned}$,

m) $\begin{array}{l}\dot{x}=-4x+y\\ \dot{y}=-2x-2y,\quad \text{počáteční podmínka } x(0)=1,\ y(0)=14\end{array}$,

n) $\begin{array}{l}\dot{x}=2x-y\\ \dot{y}=5x+4y,\quad \text{počáteční podmínka } x(0)=-2,\ y(0)=4\end{array}$,

o) $\begin{array}{l}\dot{x}=x-y\\ \dot{y}=-x+y,\quad \text{počáteční podmínka } x(0)=2,\ y(0)=-4\end{array}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\cos x} + C$; **b)** $y = \dfrac{Cx}{x+1}$; **c)** $(y+1)e^{y-x} = C(x+1)$;

d) $\operatorname{arctg} x + \arcsin y = \dfrac{3}{4}\pi$; **e)** $y = \ln\left|Cx^2(2x+1)\right| + \dfrac{1}{x}$; **f)** $y^2 = Cx^2 e^{-\frac{2}{x}} - 1$;

g) $\cos y = \dfrac{1}{\sin x + 1}$; **h)** $e^y = xe^x - e^x + C$; **i)** $y \ln y - y = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{4}$; **j)** $y = Ce^{-\operatorname{cotg} x} - 4$;

k) $y^2 = Cx^4(x+1)^2 - 1$; **l)** $y = \dfrac{1}{2}\left(Cx^x - 1\right)$. **2. a)** $\cos\dfrac{y}{x} = \ln Cx$; **b)** $2x^2 - 2xy - y^2 = C$;

c) $y^2 - 2xy + 2x^2 = C$; **d)** $y^2 + x^2 = Cx^3$; **e)** $(y+2x)^2 = Cx^2(y+x)$; **f)** $\arcsin\dfrac{y}{x} = \ln Cx$;

g) $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$; **h)** $ye^{\frac{x}{y}} = C$; **i)** $y + 2x = Cx(y+3x)$;

j) $4\operatorname{arctg}\dfrac{y-x}{x} = \ln\dfrac{C}{y^2 - 2xy + 2x^2}$; **k)** $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2x} = \ln Cx^2$; **l)** $y - 2x = Cx(y+2x)$.

3. a) $y = Ce^{2x} - x - \dfrac{1}{2}$; **b)** $y = \left(C + x^3\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$; **c)** $y = Ce^{x^2} + x^2 + 1$; **d)** $y = Ce^{\sqrt{1+x}} - 1$;

e) $y = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2\sin x}{\cos^2 x} + \ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} + C\right)\sin x$; **f)** $y = e^{\cos x} + 1$; **g)** $y = Ce^{\frac{1}{x}} + 1$;

h) $y = Cx + x^2 e^x - xe^x$; **i)** $y = \dfrac{C - \cos x}{x}$; **j)** $y = \dfrac{C}{x} + \dfrac{x \ln x}{2} - \dfrac{x}{4}$; **k)** $y = Cx + x^2 \ln x - x^2$;

l) $y = \dfrac{C}{\cos x} + x \operatorname{tg} x + 1$. **4. a)** $\dfrac{1}{y} = K \cdot x + \ln x + 1$; **b)** $y^2 = \dfrac{C + \ln x}{x}$; **c)** $\dfrac{1}{y} = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$;

d) $\sqrt{y} = Cx + \dfrac{x^2}{2}$; **e)** $\dfrac{1}{y} = C(x+1) + (x+1)^4$; **f)** $\dfrac{1}{y} = \dfrac{C}{x} - \sin x - \dfrac{\cos x}{x}$;

g) $\dfrac{1}{y} = \dfrac{C}{x} + \cos x - \dfrac{\sin x}{x}$; **h)** $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{C}{x^2} + \dfrac{2e^x(1-x)}{x^2}$. **5. a)** $x^3 y + 2xy - y^2 + \ln x = C$;

b) $\operatorname{arctg} xy + x + y = C$; **c)** $\ln\left(x^2 + y^2\right) + 2xy - 3y = C$; **d)** $\sin xy - y\cos x = C$;

e) $\ln\sin x + \ln\cos y + xy^2 = C$; **f)** $\sin(x+y) - \cos(y-x) + \arcsin x = C$; **g)** $\dfrac{x}{y^2+1} + \dfrac{y}{x} = C$;

h) $x \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} x = C$; **i)** $x\sin y - x\cos y + xy - \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} y = C$;

j) $\sqrt{x^2 - y^2} + x + y^2 = C$; **k)** $\sqrt{x+y} + \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} = C$; **l)** $e^{xy} - 2e^y + \dfrac{1}{e^x} = C$.

6. **a)** $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$; **b)** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$; **c)** $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$;

d) $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-4x}$; **e)** $y = C_1\cos x + C_2\sin x$; **f)** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$;

g) $y = C_1e^{-2x}\cos 5x + C_2e^{-2x}\sin 5x$; **h)** $y = C_1e^x\cos x + C_2e^x\sin x$; **i)** $y = 4e^x + 2e^{3x}$;

j) $y = 5e^x - 3e^{-2x}$; **k)** $y = 2 + e^{-x}$; **l)** $y = 3e^{3x} - 3xe^{3x}$.

7. **a)** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{2}x\cdot\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\cdot\ln|\sin 2x|$;

b) $y = 2\cos x + \sin x + \cos x\cdot\ln|\cos x| + x\cdot\sin x$; **c)** $y = C_1e^x + C_2xe^x + xe^x(\ln|x| - 1)$;

d) $y = C_1 + C_2e^{-x} + x - \ln|e^x + 1| - e^{-x}\cdot\ln|e^x + 1|$; **e)** $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2\right)$;

f) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2x^3 - 3x$; **g)** $y = C_1 + C_2e^{4x} - x^3 + x$; **h)** $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + 2e^{-x}$;

i) $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + (4x^3 + 4x^2)e^{-2x}$; **j)** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 2\sin x$;

k) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - x\sin 3x - \frac{6}{13}\cos 3x$; **l)** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - 2x\sin 2x - x\cos 2x$;

m) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x - x^2\cos x$; **n)** $y = C_1e^{2x} + C_2e^x + 2e^x\cos x$;

o) $y = C_1e^x\cos x + C_2e^x\sin x - 2xe^x\cos x$; **p)** $y = 2e^{2x} + 5xe^{2x} + 2e^{-x}$;

q) $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + \frac{3}{10}\sin x + \frac{1}{10}\cos x$; **r)** $y = 7e^{2x} - 3e^{3x} - (x^2 + 3x)e^{2x}$;

s) $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 9x + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^{-x}$;

t) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 2e^x - \frac{x}{2}(\sin x + \cos x)$; **u)** $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + e^{2x}$;

v) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 4x\sin 2x - \frac{4}{3}\sin x$.

8. **a)** $\begin{array}{l} x = C_1 + C_2e^{2t} \\ y = C_1 - C_2e^{2t} \end{array}$; **b)** $\begin{array}{l} x = C_1e^t + C_2e^{7t} \\ y = -C_1e^t + C_2e^{7t} \end{array}$; **c)** $\begin{array}{l} x = C_1e^{-2t} + C_2e^{5t} \\ y = -\frac{4}{3}C_1e^{-2t} + C_2e^{5t} \end{array}$; **d)** $\begin{array}{l} x = C_1e^t + C_2e^{5t} \\ y = -\frac{1}{3}C_1e^t + C_2e^{5t} \end{array}$;

e) $\begin{array}{l} x = C_1e^{3t}\cos 2t + C_2e^{3t}\sin 2t \\ y = C_1e^{3t}(2\sin 2t - \cos 2t) - C_2e^{3t}(\sin 2t + 2\cos 2t) \end{array}$;

f) $\begin{array}{l} x = C_1\cos t + C_2\sin t \\ y = \frac{1}{2}C_1(-\sin t - \cos t) + \frac{1}{2}C_2(\cos t - \sin t) \end{array}$; **g)** $\begin{array}{l} x = C_1e^{2t}\cos t + C_2e^{2t}\sin t \\ y = C_1e^{2t}\sin t - C_2e^{2t}\cos t \end{array}$;

h) $$\begin{aligned} x &= C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ y &= C_1e^{2t} + C_2\left(e^{2t} + te^{2t}\right) + e^{2t}\left(\frac{1}{2}t^2 + t - 1\right) \end{aligned};$$

i) $$\begin{aligned} x &= C_1e^{-t}\cos 2t + C_2e^{-t}\sin 2t - t - 1 \\ y &= C_1e^{-t}\sin 2t - C_2e^{-t}\cos 2t + t + 1 \end{aligned};$$

j) $$\begin{aligned} x &= C_1 + C_2e^{t} + 4\cos t \\ y &= -\frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{3}C_2e^{t} - \sin t - 2\cos t \end{aligned};$$

k) $$\begin{aligned} x &= C_1e^{2t} + C_2e^{6t} - e^{t} \\ y &= -C_1e^{2t} + 3C_2e^{6t} + e^{t} \end{aligned};$$

l) $$\begin{aligned} x &= C_1e^{-t} + C_2te^{-t} - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t) \\ y &= C_1e^{-t} + \frac{1}{2}C_2e^{-t} + C_2te^{-t} - \cos t \end{aligned};$$

m) $$\begin{aligned} x &= e^{-3t}\cos t + 13e^{-3t}\sin t \\ y &= 14e^{-3t}\cos t + 12e^{-3t}\sin t \end{aligned};$$

n) $$\begin{aligned} x &= -2e^{3t}\cos 2t - e^{3t}\sin 2t \\ y &= 4e^{3t}\cos 2t - 3e^{3t}\sin 2t \end{aligned};$$

o) $$\begin{aligned} x &= -1 + 3e^{2t} \\ y &= -1 - 3e^{2t} \end{aligned}.$$