

<b>5. INTEGRÁLNÍ POČET .....</b>	<b>58</b>
<b>  5.1. Integrace rozkladem .....</b>	<b>58</b>
Úlohy k samostatnému řešení.....	58
<b>  5.2. Jednoduché substituce .....</b>	<b>59</b>
Úlohy k samostatnému řešení.....	59
<b>  5.3. Per partes .....</b>	<b>59</b>
Úlohy k samostatnému řešení.....	59
<b>  5.4. Integrace racionální lomené funkce.....</b>	<b>60</b>
Úlohy k samostatnému řešení.....	60
<b>  5.5. Iracionální funkce .....</b>	<b>61</b>
Úlohy k samostatnému řešení.....	61
<b>  5.6. Goniometrické funkce.....</b>	<b>61</b>
Úlohy k samostatnému řešení.....	61
Výsledky úloh k samostatnému řešení .....	63

## 5. INTEGRÁLNÍ POČET

### 5.1. Integrace rozkladem



#### Úlohy k samostatnému řešení



1. Vypočítejte integrál:

- |   |   |   |
|---|---|---|
| a) $\int \left(6x^2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^5}\right) dx,$ | b) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right) dx,$ | c) $\int \frac{x^2 - 2\sqrt{x} + 2}{x} dx,$       |
| d) $\int \frac{x^2 + 4x + 4}{x+2} dx,$                        | e) $\int \frac{x^2 - 9}{x+3} dx,$   | f) $\int \frac{(\sqrt{x}+3)^2}{x\sqrt{x}} dx,$    |
| g) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + 3x + 1}{\sqrt[3]{x}} dx,$      | h) $\int \frac{x^3 - 1}{x-1} dx,$   | i) $\int \frac{(x-2\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx,$ |
| j) $\int \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx,$                      | k) $\int \frac{x^2 e^x - 3x}{2x^2} dx,$   | l) $\int \frac{e^{2x} - e^x \sqrt{x}}{e^x} dx.$   |

#### Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. Vypočítejte integrál:

- |                                   |  |  |
|-----------------------------------|--|--|
| a) $\int \frac{1}{x+2} dx,$       | b) $\int \frac{1}{2x+3} dx,$               | c) $\int \frac{x}{x+1} dx,$            |
| d) $\int \frac{x^2}{x-2} dx,$     | e) $\int \frac{5-x}{x+5} dx,$              | f) $\int \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} dx,$ |
| g) $\int \frac{x^2 + 1}{x-1} dx,$ | h) $\int \frac{2x+2}{3-2x} dx,$            | i) $\int \frac{x^2 + 4x + 8}{x+2} dx,$ |
| j) $\int \frac{x+1}{x^2 + 1} dx,$ | k) $\int \frac{x^2 + 4x + 8}{x^2 + 4} dx,$ | l) $\int \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} dx.$  |

#### Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. Vypočítejte integrál:

- |  |   |   |
|--|---|---|
| a) $\int (\sin x - \cos x) dx,$        | b) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx,$         | c) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx,$   |
| d) $\int 2 \cos^2 \frac{x}{2} dx,$     | e) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx,$       | f) $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx.$ |
| g) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx,$ | h) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx,$ | i) $\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx.$             |

#### Výsledky úloh k samostatnému řešení

4. Vypočítejte integrál:

- |                                     |                                   |                                      |
|-------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx,$ | b) $\int \frac{e^x}{e^x + 3} dx,$ | c) $\int \frac{1}{x(\ln x + 1)} dx,$ |
|-------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|

$$\begin{array}{lll} \text{d)} \int \frac{3x^2+2}{x^3+2x-2} dx, & \text{e)} \int \frac{1}{(1+x^2)\arctg x} dx, & \text{f)} \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x + 4} dx, \\ \text{g)} \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx, & \text{h)} \int \frac{e^{2x}+x}{e^{2x}+x^2+2} dx, & \text{i)} \int \frac{x^2+2x+2}{x^3+3x^2+6x+5} dx. \end{array}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení**5.2. Jednoduché substituce****Úlohy k samostatnému řešení**

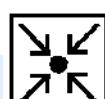
5. Vypočítejte integrál:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int 2e^{2x} dx, & \text{b)} \int \cos(4x+3) dx, & \text{c)} \int \sin 3x dx, \\ \text{d)} \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx, & \text{e)} \int (2x-1)^4 dx, & \text{f)} \int \frac{1}{1+4x^2} dx, \\ \text{g)} \int \frac{1}{\sin^2 5x} dx, & \text{h)} \int 2^{3x} dx, & \text{i)} \int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx. \end{array}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

6. Vypočítejte integrál:

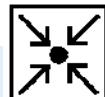
$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int (e^{2x} + 3e^x + 5)e^x dx, & \text{b)} \int \sin x \cos^2 x dx, & \text{c)} \int 2x \sin x^2 dx, \\ \text{d)} \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx, & \text{e)} \int \frac{(\operatorname{cotg} x - 1)^4}{\sin^2 x} dx, & \text{f)} \int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx, \\ \text{g)} \int \frac{\sqrt{\operatorname{arccotg}^3 x}}{1+x^2} dx, & \text{h)} \int \frac{\ln^2 x + 3 \ln x - 8}{x} dx, & \text{i)} \int \frac{1+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{array}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení**5.3. Per partes****Úlohy k samostatnému řešení**

7. Vypočítejte integrál:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int xe^x dx, & \text{b)} \int (x^2 - 2x + 3)e^{-x} dx, & \text{c)} \int (4x+2)\sin 2x dx, \\ \text{d)} \int (3x-4)\cos \frac{x}{2} dx, & \text{e)} \int x \operatorname{tg}^2 x dx, & \text{f)} \int \ln x dx, \\ \text{g)} \int \arcsin x dx, & \text{h)} \int \operatorname{arctg} x dx, & \text{i)} \int \arccos x dx, \\ \text{j)} \int \operatorname{arccotg} x dx, & \text{k)} \int (x^2 + 1) \ln x dx, & \text{l)} \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx, \\ \text{m)} \int x \sin^2 x dx, & \text{n)} \int e^x \cos x dx, & \text{o)} \int e^{3x} \sin 2x dx, \end{array}$$

p)  $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ ,      q)  $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ ,      r)  $\int \sqrt{x} \ln x dx$ ,  
 s)  $\int \sqrt{1-x^2} dx$ ,      t)  $\int \sin \ln x dx$ ,      u)  $\int e^x \sin 2x dx$ .

Výsledky úloh k samostatnému řešení**5.4. Integrace racionální lomené funkce****Úlohy k samostatnému řešení**

8. Vypočítejte integrál:

a)  $\int \frac{2}{x^2+2x} dx$ ,      b)  $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$ ,      c)  $\int \frac{2}{4-x^2} dx$ ,  
 d)  $\int \frac{5-x}{x^2+4x+3} dx$ ,      e)  $\int \frac{4x+2}{x^3+2x^2-x-2} dx$ ,      f)  $\int \frac{1}{4x^2-1} dx$ ,  
 g)  $\int \frac{5}{2+3x-2x^2} dx$ ,      h)  $\int \frac{3x+1}{x-x^3} dx$ ,      i)  $\int \frac{-1}{(2+x)(2+3x)} dx$ ,  
 j)  $\int \frac{8}{7-6x-x^2} dx$ ,      k)  $\int \frac{3}{8x^2-28x+24} dx$ ,      l)  $\int \frac{3-21x-16x^2}{x(1-4x)(x+3)} dx$ .

Výsledky úloh k samostatnému řešení

9. Vypočítejte integrál:

a)  $\int \frac{2-x^2}{x(x+1)^2} dx$ ,      b)  $\int \frac{5-2x}{(1-x)^4} dx$ ,      c)  $\int \frac{-4x-2}{x^2(x+1)^2} dx$ ,  
 d)  $\int \frac{-4x^2+5x-6}{x^3(x-3)} dx$ ,      e)  $\int \frac{1-3x-x^2-x^3}{(1-x^2)^2} dx$ ,      f)  $\int \frac{40-6x^2}{(4-x^2)^2} dx$ ,  
 g)  $\int \frac{2x^2-x-1}{x^3(x+1)} dx$ ,      h)  $\int \frac{12x^2-12x+4}{x(2x-1)^2} dx$ ,      i)  $\int \frac{-2x^2+26x-35}{(2x+5)(x-5)^2} dx$ .

Výsledky úloh k samostatnému řešení

10. Vypočítejte integrál:

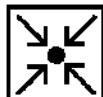
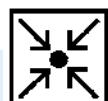
a)  $\int \frac{3x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$ ,      b)  $\int \frac{2-x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$ ,      c)  $\int \frac{2-6x-x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$ ,  
 d)  $\int \frac{4x}{1-x^4} dx$ ,      e)  $\int \frac{x^2+6x}{(x^2+9)(2x-3)} dx$ ,      f)  $\int \frac{3x^2+4x+33}{(x^2+9)(3-x)} dx$ ,

g)  $\int \frac{5x^2 - 6x + 6}{(2-4x)(x^2+4)} dx$ , h)  $\int \frac{x^2 - 3x - 2}{(x^2 + 2x + 2)(5x+4)} dx$ , i)  $\int \frac{2}{x^3 + 2x} dx$ ,  
j)  $\int \frac{6x^3 - x^2 + 12x - 3}{x^4 + 3x^2} dx$ , k)  $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$ , l)  $\int \frac{3x^4 + 3x^2 - 18}{x^5 + 6x^3} dx$ .

Výsledky úloh k samostatnému řešení

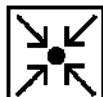
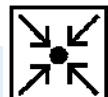
11. Vypočítejte integrál:

a)  $\int \frac{x^4}{x+1} dx$ , b)  $\int \frac{(x-1)^3}{x+2} dx$ , c)  $\int \frac{x^3}{4-x^2} dx$ ,  
d)  $\int \frac{x^4}{1-x^2} dx$ , e)  $\int \frac{x^4 + 6x^2}{x^2-9} dx$ , f)  $\int \frac{2x^3 + 5x^2 - 3x + 3}{x(3+x)} dx$ ,  
g)  $\int \frac{x^2 - 4x + 12}{(x^2 + 4)} dx$ , h)  $\int \frac{x^4 + 4x^3 - x^2 + 5x + 2}{(x^2 + 1)(x+4)} dx$ , i)  $\int \frac{x^4}{x^3 + 2x} dx$ ,  
j)  $\int \frac{6x^3}{6-3x^2} dx$ , k)  $\int \frac{2x^5}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$ , l)  $\int \frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + x^3} dx$ .

Výsledky úloh k samostatnému řešení**5.5. Iracionální funkce****Úlohy k samostatnému řešení**

12. Vypočítejte integrál:

a)  $\int x \sqrt[3]{2-x^2} dx$ , b)  $\int \sqrt{1+x^2} dx$ , c)  $\int \sqrt{1-x^2} dx$ ,  
d)  $\int \frac{x}{\sqrt{5+x^2}} dx$ , e)  $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ , f)  $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$ ,  
g)  $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ , h)  $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$ , i)  $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+4}} dx$ ,  
j)  $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x-4}} dx$ , k)  $\int \frac{\sqrt[4]{x+3}}{1-\sqrt{x+3}} dx$ , l)  $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ .

Výsledky úloh k samostatnému řešení**5.6. Goniometrické funkce****Úlohy k samostatnému řešení**

13. Vypočítejte integrál:

a)  $\int \sin x \cos x dx$ , b)  $\int \sin^2 x \cos x dx$ , c)  $\int \sin x \cos^3 x dx$ ,

- d)  $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx,$       e)  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx,$       f)  $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx,$   
 g)  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx,$       h)  $\int \operatorname{tg}^5 x dx,$       i)  $\int \frac{1}{\sin x} dx,$   
 j)  $\int \frac{1}{\cos x} dx,$       k)  $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx,$       l)  $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^3 x} dx,$   
 m)  $\int \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x} dx,$       n)  $\int \frac{\cos x}{1 + 4 \sin^2 x} dx,$       o)  $\int \frac{1}{\sin^2 x - 2 \cos^2 x} dx,$   
 p)  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx,$       q)  $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx,$       r)  $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^6 x} dx,$   
 s)  $\int \frac{\cos x}{\cos x + 1} dx,$       t)  $\int \frac{\sin x}{\sin x + 1} dx,$       u)  $\int \frac{\sin x}{\cos 2x + 1} dx,$   
 v)  $\int \frac{1}{2 \sin x \cos x} dx,$       w)  $\int \frac{1}{(\sin x + 1) \cos x} dx,$       z)  $\int \frac{1}{2 \sin x \cos x + \sin^2 x} dx.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení



## Výsledky úloh k samostatnému řešení



**1.** a)  $2x^3 - \ln|x| - \frac{1}{x^4} + c$ ;      b)  $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + c$ ;      c)  $\frac{x^2}{2} - 4\sqrt{x} + 2\ln|x| + c$ ;

d)  $\frac{x^2}{2} + 2x + c$ ;    e)  $\frac{x^2}{2} - 3x + c$ ;    f)  $2\sqrt{x} + 6\ln|x| - \frac{18}{\sqrt{x}} + c$ ;    g)  $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x} + \frac{9}{5}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$ ;

h)  $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$ ;    i)  $\frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2} - \frac{24}{13}x^2\sqrt[6]{x} + \frac{12}{5}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2} + c$ ;    j)  $e^x - 2x + c$ ;    k)  $\frac{e^x}{2} - \frac{3}{2}\ln x + c$ ;

l)  $e^x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$ .      **2.** a)  $\ln|x+2| + c$ ;      b)  $\frac{1}{2}\ln|2x+3| + c$ ;      c)  $x - \ln|x+1| + c$ ;

d)  $\frac{x^2}{2} + 2x + 4\ln|x-2| + c$ ;      e)  $-x + 10\ln|x+5| + c$ ;      f)  $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| + c$ ;

g)  $\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + c$ ;      h)  $-x - \frac{5}{2}\ln|3-2x| + c$ ;      i)  $\frac{x^2}{2} + 2x + 4\ln|x+2| + c$ ;

j)  $\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \arctg x + c$ ;      k)  $x + 2\ln|x^2+4| + 2\arctg\frac{x}{2} + c$ ;      l)  $x + \ln|x^2+1| + c$ .

**3.** a)  $-\cos x - \sin x + c$ ;      b)  $\operatorname{tg} x - x + c$ ;      c)  $\cos x + \sin x + c$ ;      d)  $x + \sin x$ ;

e)  $\operatorname{tg} x - \cotg x + c$ ,      f)  $-\frac{1}{2}\cos x + c$ ;      g)  $-\cotg x - 2x + c$ ;      h)  $-\cotg x - \operatorname{tg} x + c$ ;

i)  $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + c$ .      **4.** a)  $-\ln|\cos x| + c$ ;    b)  $\ln|e^x + 3| + c$ ;    c)  $\ln|\ln x + 1| + c$ ;    d)  $\ln|x^3 + 2x - 2| + c$ ;

e)  $\ln|\arctg x| + c$ ,      f)  $-\ln|\cos^2 x + 3| + c$ ;      g)  $\ln|\sin^2 x| + c$ ;      h)  $\frac{1}{2}\ln|e^{2x} + x^2 + 2| + c$ ;

i)  $\frac{1}{3}\ln|x^3 + 3x^2 + 6x + 5| + c$ .      **5.** a)  $e^{2x} + c$ ;      b)  $\frac{1}{4}\sin(4x+3) + c$ ;      c)  $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$ ;

d)  $2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + c$ ;    e)  $\frac{1}{10}(2x-1)^5 + c$ ;    f)  $\frac{1}{2}\arctg 2x + c$ ;    g)  $-\frac{1}{5}\cotg 5x + c$ ;    h)  $\frac{2^{3x}}{3\ln 2} + c$ ;

i)  $\frac{1}{3}\arcsin 3x + c$ .      **6.** a)  $\frac{e^{3x}}{3} + \frac{3}{2}e^{2x} + 5e^x + c$ ;      b)  $-\frac{1}{3}\cos^3 x + c$ ;      c)  $-\cos x^2 + c$ ;

d)  $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + c$ ;      e)  $-\frac{1}{5}(\cotg x - 1)^5 + c$ ;      f)  $\frac{1}{4}\arctg^4 x + c$ ;      g)  $-\frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{arccotg}^5 x} + c$ ;

h)  $\frac{1}{3}\ln^3 x + \frac{3}{2}\ln^2 x - 8\ln x + c$ ;      i)  $\arcsin x + \frac{1}{2}\arcsin^2 x + c$ .      **7.** a)  $xe^x - e^x + c$ ;

b)  $-e^{-x}(x^2 + 3)$ ;      c)  $\sin 2x - (2x+1)\cos 2x + c$ ;      d)  $(6x-8)\sin\frac{x}{2} + 12\cos\frac{x}{2} + c$ ;

e)  $x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + c$ ; f)  $x \ln x - x + c$ ; g)  $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$ ;

h)  $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$ ; i)  $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$ ; j)  $x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$ ;

k)  $\left(\frac{x^3}{3} + x\right) \ln x - \frac{x^3}{9} - x + c$ ; l)  $x \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + c$ ; m)  $\frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + c$ ;

n)  $\frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c$ ; o)  $\frac{e^{3x}}{13} (3 \sin 2x - 2 \cos 2x) + c$ ; p)  $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + c$ ;

q)  $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c$ ; r)  $\frac{2}{3} x \sqrt{x} \left( \ln x - \frac{2}{3} \right) + c$ ; s)  $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c$ ;

t)  $\frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x) + c$ ; u)  $\frac{e^x}{5} (\sin 2x - 2 \cos 2x) + c$ . 8. a)  $\ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + c$ ;

b)  $\ln \left| \frac{(x-1)^2}{x+2} \right| + c$ ; c)  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + c$ ; d)  $3 \ln|x+1| - 4 \ln|x+3| + c = \ln \left| \frac{(x+1)^3}{(x+3)^4} \right| + c$ ;

e)  $\ln \left| \frac{x^2-1}{(x+2)^2} \right| + c$ ; f)  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+1} \right| + c$ ; g)  $\ln \left| \frac{2x+1}{x-2} \right| + c$ ; h)  $\ln \left| \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \right| + c$ ;

i)  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{3x+2} \right| + c$ ; j)  $\ln \left| \frac{x+7}{x-1} \right| + c$ ; k)  $\frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-2}{2x-3} \right| + c$ ; l)  $\ln |x(x+3)^2(4x-1)| + c$ .

9. a)  $\frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x^2}{(x+1)^3} \right| + c$ ; b)  $\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} + c$ ; c)  $\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} + c$ ;

d)  $\ln \left| \frac{x}{x-3} \right| + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + c$ ; e)  $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \ln|x-1| + c$ ; f)  $2 \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + c$ ;

g)  $\frac{1}{2x^2} + 2 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + c$ ; h)  $\ln \left| \frac{x^4}{2x-1} \right| - \frac{1}{2x-1} + c$ ; i)  $-\ln|2x+5| - \frac{3}{x-5} + c$ .

10. a)  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2+1}{x^2+4} \right| + c$ ; b)  $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c$ ; c)  $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x^2+4}{x^2+1} \right| + c$ ;

d)  $\ln \left| \frac{x^2+1}{x^2-1} \right| + c$ ; e)  $\operatorname{arctg} \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \ln|2x-3| + c$ ; f)  $\frac{1}{2} \ln|x^2+9| - 4 \ln|x-3| - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + c$ ;

g)  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|x^2+4| - \frac{1}{4} \ln|2-4x| + c$ ; h)  $\frac{1}{5} \ln|5x+4| - \operatorname{arctg}(x+1) + c$ ;

i)  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2}{x^2+2} \right| + c$ ; j)  $\ln|x^2+3| + 4 \ln|x| + \frac{1}{x} + c$ ; k)  $-\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x-1} + c$ ;

I)  $\ln|x(x^2+6)| + \frac{3}{2x^2} + c$ . **11.** a)  $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$ ;

b)  $\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 13x - 27 \ln|x+2| + c$ ; c)  $-\frac{x^2}{2} - 2 \ln|x^2-4| + c$ ; d)  $-\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c$ ;

e)  $\frac{x^3}{3} + 15x + \frac{45}{2} \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$ , f)  $x^2 - x + \ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + c$ ; g)  $x + 4 \operatorname{arctg}\frac{x}{2} - 2 \ln|x^2+4| + c$ ;

h)  $\operatorname{arctg}x - 2 \ln|x+4| + \frac{x^2}{2} + c$ ; i)  $\frac{x^2}{2} - \ln|x^2+2| + c$ ; j)  $-2 \ln|x^2-2| - x^2 + c$ ;

k)  $x^2 + 4x + 4 \ln|x-1| - \operatorname{arctg}x - \frac{1}{x-1} + c$ ; l)  $4 \ln|x+1| - \ln|x| + x - \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2} + c$ .

**12.** a)  $-\frac{3}{8}(2-x^2)\sqrt[3]{2-x^2} + c$ ; b)  $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln|x+\sqrt{x^2+1}|\right) + c$ ;

c)  $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + c$ ; d)  $\sqrt{5+x^2} + c$ ; e)  $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 2\sqrt{x} - 2 \ln|1+\sqrt{x}| + c$ ,

f)  $x - 2\sqrt{x} + 2 \ln|1+\sqrt{x}| + c$ ; g)  $\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + c$ ; h)  $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + c$ ;

i)  $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{24}{5}\sqrt[6]{x^5} + 32\sqrt{x} - 384\sqrt[6]{x} + 768 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + c$ ;

j)  $x + \frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3} + 32\sqrt{x} + 256\sqrt[4]{x} + 1024 \ln|\sqrt[4]{x}-4| + c$ ;

k)  $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(x+3)^3} - 4\sqrt[4]{x+3} + 2 \ln\left|\frac{1+\sqrt[4]{x+3}}{1-\sqrt[4]{x+3}}\right| + c$ ; l)  $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + c$ . **13.** a)  $\frac{\sin^2 x}{2} + c$ ;

b)  $\frac{\sin^3 x}{3} + c$ ; c)  $-\frac{\cos^4 x}{4} + c$ ; d)  $-\frac{1}{2 \sin^2 x} + c$ ; e)  $\ln|\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2} + c$ ,

f)  $\operatorname{arc cotg}(\cos x) + c$ ; g)  $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c$ ; h)  $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{1}{2} \ln|1+\operatorname{tg}^2 x| + c$ ; i)  $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$ ;

j)  $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right| - \ln\left|1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$ ; k)  $-\frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} + c$ ; l)  $\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2 \sin^2 x} + c$ ;

m)  $\frac{1}{4} \ln\left|\frac{\cos x-2}{\cos x+2}\right| + c$ ; n)  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \sin x) + c$ , o)  $\frac{\sqrt{2}}{4} \ln\left|\frac{\sqrt{2}-\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}+\operatorname{tg} x}\right| + c$ ; p)  $-\frac{1}{\sin x} - \sin x + c$ ;

q)  $\frac{1}{2} \ln\left|1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right| - \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{x}{2} + c$ ; r)  $-\frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} - \operatorname{cotg} x - x + c$ ;

$$\mathbf{s)} -\operatorname{tg} \frac{x}{2}-2x+c; \quad \mathbf{t)} \frac{2}{1+\operatorname{tg} \frac{x}{2}}+x+c; \quad \mathbf{u)} \frac{1}{2 \cos x}+c; \quad \mathbf{v)} \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|-\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}-1 \right|+c;$$

$$\mathbf{w)} \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}-1} \right|+c, \quad \mathbf{z)} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+2} \right|+c.$$