11. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL ... 115

11.1. Křivkový integrál I. druhu ... 115
Úlohy k samostatnému řešení ... 115

11.2. Křivkový integrál II. druhu ... 116
Úlohy k samostatnému řešení ... 116

11.3. Greenova věta ... 117
Úlohy k samostatnému řešení ... 117

11.4. Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě ... 117
Úlohy k samostatnému řešení ... 117

11.5. Geometrické aplikace křivkového integrálu ... 118
Úlohy k samostatnému řešení ... 118

Výsledky úloh k samostatnému řešení ... 120

11. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

11.1. Křivkový integrál I. druhu

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočítejte křivkový integrál I. druhu po dané křivce:

a) $\int_k x\,ds$, k : úsečka AB, $A[3,1]$, $B[2,5]$,

b) $\int_k y\,ds$, k : úsečka AB, $A[3,1]$, $B[2,5]$,

c) $\int_k xy\,ds$, k : úsečka AB, $A[1,1]$, $B[2,4]$,

d) $\int_k \frac{1}{x+y}\,ds$, k : úsečka AB, $A[0,1]$, $B[2,3]$,

e) $\int_k (x-y)\,ds$, k : úsečka AB, $A[0,1]$, $B[2,3]$,

f) $\int_k (x^2+y^2)\,ds$, k : úsečka AB, $A[2,-2]$, $B[4,4]$,

g) $\int_k x\sin(x+y)\,ds$, k : část přímky $y=x$ mezi body $A[0,0]$, $B[\pi,\pi]$,

h) $\int_k xe^{x+y}\,ds$, k : úsečka AB, $A[1,-1]$, $B[2,0]$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. Vypočítejte křivkový integrál I. druhu po dané křivce:
(Parametrické rovnice kružnice: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $r>0$.)

a) $\int_k x\,ds$, k : kružnice $x^2+y^2=9$,

b) $\int_k y\,ds$, k : půlkružnice $x^2+y^2=4$ od bodu $A[2,0]$ do bodu $B[-2,0]$,

c) $\int_k xy\,ds$, k : část kružnice $x^2+y^2=1$ v I. kvadrantu,

d) $\int_k (x+y)\,ds$, k : půlkružnice $x^2+y^2=1$, $x\geq 0$,

e) $\int_k (x^2+y^2)\,ds$, k : kružnice $x^2+y^2=4$,

f) $\int_k x\cos\arcsin y\,ds$, k : kružnice $x^2+y^2=1$,

g) $\int_k \frac{x}{y}\,ds$, k : část kružnice $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $t\in\left\langle \frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right\rangle$,

h) $\int_k \frac{y}{x}\,ds$, k : kružnice $x^2+y^2=r^2$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. Vypočítejte křivkový integrál I. druhu po dané křivce:

a) $\int_k ds,\ k: y = 1 + \ln x,\ x \in \langle 1, 2 \rangle$,

b) $\int_k x^2 ds,\ k: y = 1 + \ln x,\ x \in \langle 1, 2 \rangle$,

c) $\int_k x ds,\ k: y = x^2,\ x \in \langle -1, 1 \rangle$,

d) $\int_k 3y ds,\ k: y = \frac{x^3}{3}$, mezi body $A[-3, -9],\ B[3, 9]$,

e) $\int_k \sin 2x ds,\ k:\ y = \sin x,\ x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

11.2. Křivkový integrál II. druhu

Úlohy k samostatnému řešení

4. Vypočítejte křivkový integrál II. druhu po křivce:

a) $\int_k x^2 dx + (y - x) dy,\ k:$ orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB},\ A[3, 1],\ B[2, 5]$,

b) $\int_k x^2 dx + y^2 dy,\ k:$ kružnice $x^2 + y^2 = r^2$,

c) $\int_k y dx,\ k:$ první oblouk cykloidy $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$,

d) $\int_k dx + dy,\ k: x = 2(\cos t + t \sin t),\ y = 2(\sin t - t \cos t),\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$,

e) $\int_k x dx - y dy,\ k:$ část asteroidy $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$ v I. kvadrantu ,

f) $\int_k x \sin(x + y) dx + \cos y dy,\ k:$ trojúhelník $ABC,\ A[0, 0],\ B[\pi, 0],\ C[0, \pi]$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5. Vypočítejte křivkový integrál II. druhu po dané křivce:

a) $\int_k (x^2 + y) dx + y dy,\ k: y = x^2 - 3x - 4$, mezi průsečíky s osou x ,

b) $\int_k xy dx + x dy,\ k: y = \ln x,\ x \in \langle 1, 3 \rangle$,

c) $\int_k xy dx + x dy,\ k: y = \sin x$, mezi průsečíky s přímkou $y = \frac{1}{2}$ v I. a II. kvadrantu ,

d) $\int_k y dx + dy,\ k: y = x^2 + 2x - 3$, mezi průsečíky s osou x ,

e) $\int_k xydx + xydy,\ k: y = \ln x,\ x \in \langle 1, 4 \rangle$.

f) $\int_k ydx + ydy,\ k: y = \sin x$, mezi průsečíky s přímkou $y = \frac{1}{2}$ v I. a II. kvadrantu .

Výsledky úloh k samostatnému řešení

11.3. Greenova věta

Úlohy k samostatnému řešení

6. Užitím Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál II. druhu po křivce:

a) $\oint_k x^2dx + (y-x)dy,\ k:$ trojúhelník $ABC,\ A[0,0],\ B[2,1],\ C[2,5]$,

b) $\oint_k x^2ydx - xy^2dy,\ k:$ kružnice $x^2 + y^2 = r^2$,

c) $\oint_k xdy,\ k: x^2 + y^2 = 2x$,

d) $\oint_k (2xy - 2y^2)dx + xy^2dy,\ k:$ strany obdélníka $x = 0, x = 2, y = 0, y = 4$,

e) $\oint_k 3xdy + 3ydx,\ k:$ elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

f) $\oint_k (e^{x+y} + 3y)dx + e^{x+y}dy,\ k:$ parabola $y = x^2 - 3x - 4$ a osa x,

g) $\oint_k y\sin(xy)dx + (x\sin(xy) + x^2)dy,\ k:$ kružnice $x^2 + y^2 = 16$,

h) $\oint_k x^2ydx - xy^2dy,\ k:$ trojúhelník ohraničný přímkami $y = 0,\ x = 0,\ x + y - 2 = 0$,

i) $\oint_k xdy - ydx,\ k: x^2 + y^2 = 2y$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

11.4. Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě

Úlohy k samostatnému řešení

7. K totálnímu diferenciálu určete kmenovou funkci:

a) $dF = (3x^2 + 2xy - 2y^2)dx + \left(x^2 - 4xy + \frac{1}{y}\right)dy$,

b) $dF = (e^{x+y} - y\sin(xy))dx + (e^{x+y} - x\sin(xy))dy$,

c) $dF = (xy\cos(xy) + (1 - y^2)\sin(xy))dx + ((1 + x^2)\cos(xy) - xy\sin(xy))dy$,

d) $dF=\left(8x^3y^2-6xy+\dfrac{y}{x}+6\right)dx+\left(\ln x+4x^4y-3x^2-7\right)dy$,

e) $dF=\left(\dfrac{2y}{\sqrt{1-x^2y^2}}-\sin x\right)dx+\left(\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2y^2}}-\cos y\right)dy$,

f) $dF=\left(9x^2y^2-2\sin y+2x\cos x^2-4\operatorname{tg} y+1\right)dx+\left(6x^3y-2x\cos y-\dfrac{4x}{\cos^2 y}-6y^2\right)dy$,

g) $dF=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-y\right)dx-\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}+x\right)dy$,

h) $dF=\left(y\cos xy-8xy+6\ln(x+y)+\dfrac{6x}{x+y}\right)dx+\left(x\cos xy-4x^2+\dfrac{6x}{x+y}\right)dy$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

8. Vypočítejte křivkový integrál po křivce k s počátečním bodem A a koncovým bodem B:

a) $\int_k e^{x+y}(2x-y+2)\,dx+e^{x+y}(2x-y-1)\,dy,\ A[0,0],\ B[1,-1]$,

b) $\int_k (3x^2+6xy+3y^2)\,dx+(3x^2+6xy+3y^2)\,dy,\ A[1,1],\ B[2,2]$,

c) $\int_k (y\cos xy+2x-y\sin xy)\,dx+(x\cos xy+2y-x\sin xy)\,dy,\ A[0,0],\ B\left[\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right]$,

d) $\int_k \left(\dfrac{1}{x+y}+2e^{2x}\right)dx+\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+y}-2ye^{y^2}\right)dy,\ A[0,1],\ B[1,1]$,

e) $\int_k \left(-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx+\left(-\dfrac{2}{y^3}+\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{\sin^2 y}\right)dy,\ A\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right],\ B\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$,

f) $\int_k \left(\dfrac{y}{1+x^2y^2}+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right)dx+\left(\dfrac{x}{1+x^2y^2}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right)dy,\ A[0,0],\ B[1,1]$,

g) $\int_k \left(e^{x+y}-e^{x-y}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)dx+\left(e^{x+y}+e^{x-y}+\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)dy,\ A[1,1],\ B[2,-1]$,

h) $\int_k \left(-\dfrac{\sin x}{y}-\dfrac{\sin y}{x^2}-\dfrac{1}{y^3}-\dfrac{2y}{x^3}\right)dx+\left(-\dfrac{\cos x}{y^2}+\dfrac{\cos y}{x}+\dfrac{3x}{y^4}+\dfrac{1}{x^2}\right)dy,\ A\left[\pi,\dfrac{\pi}{2}\right],\ B\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

11.5. Geometrické aplikace křivkového integrálu

Úlohy k samostatnému řešení

9. Vypočítejte obsah válcové plochy:

a) $z=x,\ y=x^2,\ z=0,\ x=1$,

b) $x^2+y^2=16,\ z=0,\ z=12$,

c) $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ x + y + z = 8$,

d) $x^2 + y^2 = r^2,\ z = r^2 + x^2 + y^2$,

e) $x + y = 4,\ z = xy + 6$,

f) $y = \dfrac{1}{x},\ z = \dfrac{1}{y^5},\ x = 1,\ x = 2$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

10. Vypočítejte délku křivky:

a) $y = \ln \sin x,\ x \in \left\langle \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$,

b) $x^2 + y^2 = r^2$,

c) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$,

d) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2},\ x \in \langle -1, 1 \rangle$,

e) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

11. Vypočítejte obsah obrazců ohraničených danými křivkami:

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,

b) $x^2 + y^2 = r^2$,

c) $y = \dfrac{4}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$,

d) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$,

e) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle,\ y = 0$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{5\sqrt{17}}{2}$; **b)** $3\sqrt{17}$; **c)** $4\sqrt{10}$; **d)** $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 5$; **e)** $-\sqrt{8}$; **f)** $\frac{80\sqrt{10}}{3}$; **g)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$; **h)** $\frac{3e^2-1}{4}\sqrt{2}$. **2. a)** 0; **b)** 8; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** 2; **e)** 16π; **f)** π; **g)** $r\ln\sqrt{2}$; **h)** 0.

3. a) $\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$; **b)** $\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)$; **c)** 0; **d)** 0; **e)** $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

4. a) $-\frac{13}{3}$; **b)** 0; **c)** 3π; **d)** -4π; **e)** -1; **f)** π. **5. a)** $\frac{5}{6}$; **b)** $\frac{9}{2}\ln 3$; **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$; **d)** $-\frac{32}{3}$; **e)** $12\ln 4-\frac{27}{4}$; **f)** $\sqrt{3}$. **6. a)** -4; **b)** $-\frac{\pi r^4}{2}$; **c)** π; **d)** $\frac{272}{3}$; **e)** 0; **f)** $-\frac{125}{2}$; **g)** 0; **h)** $-\frac{8}{3}$; **i)** 2π. **7. a)** $F(x,y)=x^3+x^2y-2xy^2+\ln y+c$;

b) $F(x,y)=e^{x+y}+\cos xy+c$; **c)** $F(x,y)=x\sin xy+y\cos xy+c$;

d) $F(x,y)=2x^4y^2-3x^2y+y\ln x+6x-7y+c$; **e)** $F(x,y)=2\arcsin xy-\sin y+\cos x+c$;

f) $F(x,y)=3x^3y^2-2x\sin y+\cos x^2-4x\operatorname{tg} y+x-2y^3+c$; **g)** $F(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-xy+c$;

h) $F(x,y)=\sin xy-4x^2y+6x\ln(x+y)+c$. **8. a)** 3; **b)** 56; **c)** π; **d)** $\left(e^2-1\right)+\ln 2$; **e)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{7}{\pi^2}$; **f)** $\frac{3}{4}\pi$; **g)** $e-e^2-e^3+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}+1$; **h)** $\frac{15}{2\pi^2}+\frac{9}{2\pi}$. **9. a)** $\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)$; **b)** 96π; **c)** 32π; **d)** $4\pi r^3$; **e)** $\frac{104\sqrt{2}}{3}$; **f)** $\frac{1}{12}\left(17\sqrt{17}-2\sqrt{2}\right)$. **10. a)** $\ln\sqrt{3}$; **b)** $2\pi r$; **c)** $6a$; **d)** $\frac{e^2-1}{e}$; **e)** $8a$. **11. a)** πab; **b)** πr^2; **c)** $4\ln 4$; **d)** $\frac{3}{8}\pi a^2$; **e)** $3\pi a^2$.