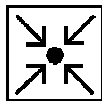


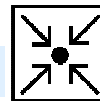
11. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL.....	115
11.1. Křivkový integrál I. druhu.....	115
Úlohy k samostatnému řešení.....	115
11.2. Křivkový integrál II. druhu	116
Úlohy k samostatnému řešení.....	116
11.3. Greenova věta.....	117
Úlohy k samostatnému řešení.....	117
11.4. Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě.....	117
Úlohy k samostatnému řešení.....	117
11.5. Geometrické aplikace křivkového integrálu	118
Úlohy k samostatnému řešení.....	118
Výsledky úloh k samostatnému řešení	120

11. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

11.1. Křivkový integrál I. druhu



Úlohy k samostatnému řešení



1. Vypočítejte křivkový integrál I. druhu po dané křivce:
 - a) $\int_k x ds$, k : úsečka AB , $A[3,1]$, $B[2,5]$,
 - b) $\int_k y ds$, k : úsečka AB , $A[3,1]$, $B[2,5]$,
 - c) $\int_k xy ds$, k : úsečka AB , $A[1,1]$, $B[2,4]$,
 - d) $\int_k \frac{1}{x+y} ds$, k : úsečka AB , $A[0,1]$, $B[2,3]$,
 - e) $\int_k (x-y) ds$, k : úsečka AB , $A[0,1]$, $B[2,3]$,
 - f) $\int_k (x^2 + y^2) ds$, k : úsečka AB , $A[2,-2]$, $B[4,4]$,
 - g) $\int_k x \sin(x+y) ds$, k : část přímky $y = x$ mezi body $A[0,0]$, $B[\pi, \pi]$,
 - h) $\int_k x e^{x+y} ds$, k : úsečka AB , $A[1,-1]$, $B[2,0]$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. Vypočítejte křivkový integrál I. druhu po dané křivce:
(Parametrické rovnice kružnice: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $r > 0$.)
 - a) $\int_k x ds$, k : kružnice $x^2 + y^2 = 9$,
 - b) $\int_k y ds$, k : půlkružnice $x^2 + y^2 = 4$ od bodu $A[2,0]$ do bodu $B[-2,0]$,
 - c) $\int_k xy ds$, k : část kružnice $x^2 + y^2 = 1$ v I. kvadrantu,
 - d) $\int_k (x+y) ds$, k : půlkružnice $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$,
 - e) $\int_k (x^2 + y^2) ds$, k : kružnice $x^2 + y^2 = 4$,
 - f) $\int_k x \cos \arcsin y ds$, k : kružnice $x^2 + y^2 = 1$,
 - g) $\int_k \frac{x}{y} ds$, k : část kružnice $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$,
 - h) $\int_k \frac{y}{x} ds$, k : kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. Vypočítejte křivkový integrál I. druhu po dané křivce:

a) $\int_k ds, k: y = 1 + \ln x, x \in \langle 1, 2 \rangle,$

b) $\int_k x^2 ds, k: y = 1 + \ln x, x \in \langle 1, 2 \rangle,$

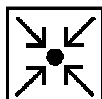
c) $\int_k x ds, k: y = x^2, x \in \langle -1, 1 \rangle,$

d) $\int_k 3y ds, k: y = \frac{x^3}{3},$ mezi body $A[-3, -9], B[3, 9],$

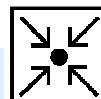
e) $\int_k \sin 2x ds, k: y = \sin x, x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

11.2. Křivkový integrál II. druhu



Úlohy k samostatnému řešení



4. Vypočítejte křivkový integrál II. druhu po křivce:

a) $\int_k x^2 dx + (y - x) dy, k:$ orientovaná úsečka $\overline{AB}, A[3, 1], B[2, 5],$

b) $\int_k x^2 dx + y^2 dy, k:$ kružnice $x^2 + y^2 = r^2,$

c) $\int_k y dx, k:$ první oblouk cykloidy $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t,$

d) $\int_k dx + dy, k: x = 2(\cos t + t \sin t), y = 2(\sin t - t \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$

e) $\int_k x dx - y dy, k:$ část asteroidy $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ v I. kvadrantu,

f) $\int_k x \sin(x + y) dx + \cos y dy, k:$ trojúhelník $ABC, A[0, 0], B[\pi, 0], C[0, \pi].$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

5. Vypočítejte křivkový integrál II. druhu po dané křivce:

a) $\int_k (x^2 + y) dx + y dy, k: y = x^2 - 3x - 4,$ mezi průsečíky s osou $x,$

b) $\int_k xy dx + x dy, k: y = \ln x, x \in \langle 1, 3 \rangle,$

c) $\int_k xy dx + x dy, k: y = \sin x,$ mezi průsečíky s přímkou $y = \frac{1}{2}$ v I. a II. kvadrantu,

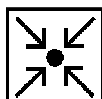
d) $\int_k y dx + dy, k: y = x^2 + 2x - 3,$ mezi průsečíky s osou $x,$

$$e) \int_k xy dx + xy dy, k : y = \ln x, x \in \langle 1, 4 \rangle.$$

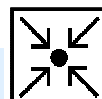
$$f) \int_k y dx + y dy, k : y = \sin x, \text{ mezi průsečíky s přímkou } y = \frac{1}{2} \text{ v I. a II. kvadrantu.}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

11.3. Greenova věta



Úlohy k samostatnému řešení



6. Užitím Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál II. druhu po křivce:

$$a) \oint_k x^2 dx + (y - x) dy, k : \text{trojúhelník } ABC, A[0,0], B[2,1], C[2,5],$$

$$b) \oint_k x^2 y dx - xy^2 dy, k : \text{kružnice } x^2 + y^2 = r^2,$$

$$c) \oint_k x dy, k : x^2 + y^2 = 2x,$$

$$d) \oint_k (2xy - 2y^2) dx + xy^2 dy, k : \text{strany obdélníka } x = 0, x = 2, y = 0, y = 4,$$

$$e) \oint_k 3x dy + 3y dx, k : \text{elipsa } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$f) \oint_k (e^{x+y} + 3y) dx + e^{x+y} dy, k : \text{parabola } y = x^2 - 3x - 4 \text{ a osa } x,$$

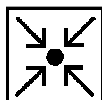
$$g) \oint_k y \sin(xy) dx + (x \sin(xy) + x^2) dy, k : \text{kružnice } x^2 + y^2 = 16,$$

$$h) \oint_k x^2 y dx - xy^2 dy, k : \text{trojúhelník ohraničený přímkami } y = 0, x = 0, x + y - 2 = 0,$$

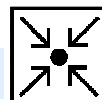
$$i) \oint_k x dy - y dx, k : x^2 + y^2 = 2y.$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

11.4. Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě



Úlohy k samostatnému řešení



7. K totálnímu diferenciálu určete kmenovou funkci:

$$a) dF = (3x^2 + 2xy - 2y^2) dx + \left(x^2 - 4xy + \frac{1}{y} \right) dy,$$

$$b) dF = (e^{x+y} - y \sin(xy)) dx + (e^{x+y} - x \sin(xy)) dy,$$

$$c) dF = (xy \cos(xy) + (1 - y^2) \sin(xy)) dx + ((1 + x^2) \cos(xy) - xy \sin(xy)) dy,$$

$$d) dF = \left(8x^3 y^2 - 6xy + \frac{y}{x} + 6 \right) dx + (\ln x + 4x^4 y - 3x^2 - 7) dy,$$

$$e) dF = \left(\frac{2y}{\sqrt{1-x^2 y^2}} - \sin x \right) dx + \left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2 y^2}} - \cos y \right) dy,$$

$$f) dF = (9x^2 y^2 - 2 \sin y + 2x \cos x^2 - 4 \operatorname{tg} y + 1) dx + \left(6x^3 y - 2x \cos y - \frac{4x}{\cos^2 y} - 6y^2 \right) dy,$$

$$g) dF = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - y \right) dx - \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + x \right) dy,$$

$$h) dF = \left(y \cos xy - 8xy + 6 \ln(x+y) + \frac{6x}{x+y} \right) dx + \left(x \cos xy - 4x^2 + \frac{6x}{x+y} \right) dy.$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

8. Vypočítejte křivkový integrál po křivce k s počátečním bodem A a koncovým bodem B :

$$a) \int_k e^{x+y} (2x - y + 2) dx + e^{x+y} (2x - y - 1) dy, A[0,0], B[1,-1],$$

$$b) \int_k (3x^2 + 6xy + 3y^2) dx + (3x^2 + 6xy + 3y^2) dy, A[1,1], B[2,2],$$

$$c) \int_k (y \cos xy + 2x - y \sin xy) dx + (x \cos xy + 2y - x \sin xy) dy, A[0,0], B\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right],$$

$$d) \int_k \left(\frac{1}{x+y} + 2e^{2x} \right) dx + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x+y} - 2ye^{y^2} \right) dy, A[0,1], B[1,1],$$

$$e) \int_k \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx + \left(-\frac{2}{y^3} + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{\sin^2 y} \right) dy, A\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], B\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right],$$

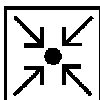
$$f) \int_k \left(\frac{y}{1+x^2 y^2} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2 y^2}} \right) dx + \left(\frac{x}{1+x^2 y^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2 y^2}} \right) dy, A[0,0], B[1,1],$$

$$g) \int_k \left(e^{x+y} - e^{x-y} + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(e^{x+y} + e^{x-y} + \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy, A[1,1], B[2,-1],$$

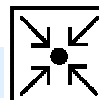
$$h) \int_k \left(-\frac{\sin x}{y} - \frac{\sin y}{x^2} - \frac{1}{y^3} - \frac{2y}{x^3} \right) dx + \left(-\frac{\cos x}{y^2} + \frac{\cos y}{x} + \frac{3x}{y^4} + \frac{1}{x^2} \right) dy, A\left[\pi, \frac{\pi}{2}\right], B\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

11.5. Geometrické aplikace křivkového integrálu



Úlohy k samostatnému řešení



9. Vypočítejte obsah válcové plochy:

$$a) z = x, y = x^2, z = 0, x = 1,$$

$$b) x^2 + y^2 = 16, z = 0, z = 12,$$

- c) $x^2 + y^2 = 4, z = 0, x + y + z = 8,$
d) $x^2 + y^2 = r^2, z = r^2 + x^2 + y^2,$
e) $x + y = 4, z = xy + 6,$
f) $y = \frac{1}{x}, z = \frac{1}{y^5}, x = 1, x = 2.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

10. Vypočítejte délku křivky:

- a) $y = \ln \sin x, x \in \left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$
b) $x^2 + y^2 = r^2,$
c) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$
d) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \langle -1, 1 \rangle,$
e) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

11. Vypočítejte obsah obrazců ohraničených danými křivkami:

- a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$
b) $x^2 + y^2 = r^2,$
c) $y = \frac{4}{x}, y = 0, x = 1, x = 4,$
d) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$
e) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle, y = 0.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $\frac{5\sqrt{17}}{2}$; b) $3\sqrt{17}$; c) $4\sqrt{10}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 5$; e) $-\sqrt{8}$; f) $\frac{80\sqrt{10}}{3}$; g) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$;
 h) $\frac{3e^2-1}{4}\sqrt{2}$. 2. a) 0; b) 8; c) $\frac{1}{2}$; d) 2; e) 16π ; f) π ; g) $r\ln\sqrt{2}$; h) 0.
3. a) $\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{2}$; b) $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$; c) 0; d) 0; e) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.
4. a) $-\frac{13}{3}$; b) 0; c) 3π ; d) -4π ; e) -1; f) π . 5. a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{9}{2}\ln 3$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$;
 d) $-\frac{32}{3}$; e) $12\ln 4-\frac{27}{4}$; f) $\sqrt{3}$. 6. a) -4; b) $-\frac{\pi r^4}{2}$; c) π ; d) $\frac{272}{3}$; e) 0; f) $-\frac{125}{2}$;
 g) 0; h) $-\frac{8}{3}$; i) 2π . 7. a) $F(x, y) = x^3 + x^2y - 2xy^2 + \ln y + c$;
 b) $F(x, y) = e^{x+y} + \cos xy + c$; c) $F(x, y) = x \sin xy + y \cos xy + c$;
 d) $F(x, y) = 2x^4y^2 - 3x^2y + y \ln x + 6x - 7y + c$; e) $F(x, y) = 2 \arcsin xy - \sin y + \cos x + c$;
 f) $F(x, y) = 3x^3y^2 - 2x \sin y + \cos x^2 - 4x \operatorname{tg} y + x - 2y^3 + c$; g) $F(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - xy + c$;
 h) $F(x, y) = \sin xy - 4x^2y + 6x \ln(x+y) + c$. 8. a) 3; b) 56; c) π ; d) $(e^2 - 1) + \ln 2$;
 e) $\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{7}{\pi^2}$; f) $\frac{3}{4}\pi$; g) $e - e^2 - e^3 + \frac{1}{2}\ln \frac{5}{2} + 1$; h) $\frac{15}{2\pi^2} + \frac{9}{2\pi}$. 9. a) $\frac{1}{12}(5\sqrt{5} - 1)$;
 b) 96π ; c) 32π ; d) $4\pi r^3$; e) $\frac{104\sqrt{2}}{3}$; f) $\frac{1}{12}(17\sqrt{17} - 2\sqrt{2})$. 10. a) $\ln\sqrt{3}$; b) $2\pi r$;
 c) $6a$; d) $\frac{e^2-1}{e}$; e) $8a$. 11. a) πab ; b) πr^2 ; c) $4\ln 4$; d) $\frac{3}{8}\pi a^2$; e) $3\pi a^2$.