10. TROJROZMĚRNÝ INTEGRÁL 110

10.1. Trojrozměrný integrál v kvádru 110
Úlohy k samostatnému řešení.. 110

10.2. Trojrozměrný integrál v oblasti 110
Úlohy k samostatnému řešení.. 110

10.3. Transformace trojrozměrných integrálů.. 111
Úlohy k samostatnému řešení.. 111

10.4. Geometrické aplikace 112
Úlohy k samostatnému řešení.. 112

Výsledky úloh k samostatnému řešení 113

10. TROJROZMĚRNÝ INTEGRÁL

10.1. Trojrozměrný integrál v kvádru

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočítejte trojrozměrný integrál v kvádru W :

a) $\iiint\limits_W xy^2z^3dxdydz, W=\{(x,y,z): x\in\langle 0,2\rangle, y\in\langle 0,3\rangle, z\in\langle 0,4\rangle\}$,

b) $\iiint\limits_W \cos x\sin y\, e^z dxdydz, W=\left\{(x,y,z): x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle, y\in\left\langle \frac{\pi}{2},\pi\right\rangle, z\in\langle 0,1\rangle\right\}$,

c) $\iiint\limits_W x\sin x\cos z dxdydz, W=\left\{(x,y,z): x\in\langle 0,\pi\rangle, y\in\langle 0,3\rangle, z\in\left\langle \frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right\rangle\right\}$,

d) $\iiint\limits_W \ln x^{\ln y} dxdydz, W=\{(x,y,z): x\in\langle 1,e\rangle, y\in\langle 1,e\rangle, z\in\langle 2,4\rangle\}$,

e) $\iiint\limits_W \frac{x+6}{z(y-4)} dxdydz, W=\{(x,y,z): x\in\langle 0,6\rangle, y\in\langle 5,6\rangle, z\in\langle 1,e\rangle\}$,

f) $\iiint\limits_W \frac{y+z}{\cos^2 x} dxdydz, W=\left\{(x,y,z): x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{4}\right\rangle, y\in\langle 1,3\rangle, z\in\langle 3,4\rangle\right\}$,

g) $\iiint\limits_W \frac{1}{(x+y+z)^3} dxdydz, W=\{(x,y,z): x\in\langle 0,1\rangle, y\in\langle 0,1\rangle, z\in\langle 1,2\rangle\}$,

h) $\iiint\limits_W (3x^2+4xyz-6xy^2-4z^3+6) dxdydz, W=\{(x,y,z): x\in\langle 0,1\rangle, y\in\langle 0,1\rangle, z\in\langle 0,1\rangle\}$,

i) $\iiint\limits_W \left(\frac{z}{1+x^2}+\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+z^2}\right) dxdydz, W=\{(x,y,z): x\in\langle 0,1\rangle, y\in\langle 0,1\rangle, z\in\langle 0,1\rangle\}$,

j) $\iiint\limits_W \left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\right) dxdydz, W=\{(x,y,z): x\in\langle 0,1\rangle, y\in\langle 0,1\rangle, z\in\langle 0,1\rangle\}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

10.2. Trojrozměrný integrál v oblasti

Úlohy k samostatnému řešení

2. Určete integrační meze pro $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz$, jestliže Ω je ohraničena danými plochami:

a) $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$,

b) $z=4-x^2-y^2,\ z=0,\ x+y=2,\ x=0,\ y=0$,

c) $z=4-x^2,\ z=0,\ y=2,\ y=-2$,

d) $z=x^2+y^2-4,\ z=0$,

e) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=4,\ y=2,\ 3x+2y-2z+6=0$,

f) $y=\dfrac{1}{x},\ x=2,\ z=0,\ y+z=2$,

g) $z=x^2+y^2,\ z=16$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. Vypočítejte trojrozměrný integrál, je-li oblast Ω ohraničena danými plochami:

a) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{1}{(2+x+y+z)^3}\,dxdydz,\Omega: x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$,

b) $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)\,dxdydz,\Omega: z=4-x^2-y^2,\ z=0,\ x+y=2,\ x=0,\ y=0$,

c) $\iiint\limits_{\Omega}xy^2\,dxdydz,\Omega: z=4-x^2,\ z=0,\ y=2,\ y=-2$,

d) $\iiint\limits_{\Omega}(1+x)\,dxdydz,\Omega: y=\ln x,\ y=0,\ x=e,\ z=0,\ z=x$,

e) $\iiint\limits_{\Omega}\left(3-\dfrac{3}{2}x-y\right)dxdydz,\Omega: x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=4,\ y=2,\ 3x+2y-2z+6=0$,

f) $\iiint\limits_{\Omega}2z(x+y)\,dxdydz,\Omega: y=\dfrac{1}{x},\ x=2,\ z=0,\ y+z=2$,

g) $\iiint\limits_{\Omega}\cos x\,dxdydz,\Omega: y=0,\ z=0,\ y=\sin x,\ x+z=\dfrac{\pi}{2}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

10.3. Transformace trojrozměrných integrálů

Úlohy k samostatnému řešení

4. Vypočítejte trojrozměrný integrál transformací do válcových souřadnic:

a) $\iiint\limits_{\Omega}x^2z\,dxdydz,\Omega: -1\le x\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2},\ 0\le z\le 3$,

b) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\Omega: x^2+y^2=2y,\ z=0,\ z=1$,

c) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dxdydz,\Omega: z=4-x^2-y^2,\ z=0$,

d) $\iiint\limits_{\Omega}z\,dxdydz,\Omega: x^2+y^2+z^2=8,\ z\ge 0$,

e) $\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\Omega: z=x^2+y^2,\ z=1$,

f) $\iiint\limits_{\Omega}x\,dxdydz,\Omega: 4=x^2+y^2,\ z=0,\ z=4,\ x\ge 0, y\ge 0$,

g) $\iiint\limits_{\Omega}y\,dxdydz,\Omega: 4=x^2+(y-2)^2,\ z=0, z=1$,

h) $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dxdydz, \Omega: x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=4$,

i) $\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz, \Omega: (x-1)^2+y^2=1,\ z=-1,\ z=3$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5. Vypočítejte trojrozměrný integrál transformací do sférických souřadnic:

a) $\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz, \Omega: x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 1$,

b) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz, \Omega: z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le r^2$,

c) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz, \Omega: z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le r^2$,

d) $\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz, \Omega: x^2+y^2+z^2=8,\ z\ge 0$,

e) $\iiint\limits_{\Omega} x\,dxdydz, \Omega: x^2+y^2+z^2=1$,

f) $\iiint\limits_{\Omega} y\,dxdydz, \Omega: x^2+y^2+z^2=r^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$,

g) $\iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2\right)dxdydz, \Omega: x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$,

h) $\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz, \Omega: x^2+y^2+z^2=4,\ z\ge 0$,

i) $\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz, \Omega: x^2+y^2+z^2=4$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

10.4. Geometrické aplikace

Úlohy k samostatnému řešení

6. Vypočítejte objem tělesa ohraničeného plochami:

a) $x^2+y^2=1,\ x+y+z=2,\ z=0$,

b) $x^2+y^2=z,\ z=16$,

c) $x^2+y^2+z^2=r^2$,

d) $x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2+z^2=1$,

e) $y=\sin x,\ y=0,\ z=y,\ z=0$,

f) $y=e^x,\ z=xy,\ z=0,\ y=e$,

g) $y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=1,\ z=0,\ z=x$,

h) $y=x,\ z=y\sin x,\ z=0,\ x=\pi$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 1152; **b)** $e-1$; **c)** $3\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; **d)** 2; **e)** $54\ln 2$; **f)** 11; **g)** $\frac{1}{2}\ln\frac{32}{27}$; **h)** $\frac{11}{2}$; **i)** $\frac{3}{8}\pi$; **j)** $\frac{3}{2}\ln 2$.

2. a) $x\in\langle 0,1\rangle,\ y\in\langle 0,1-x\rangle,\ z\in\langle 0,1-x-y\rangle$; **b)** $x\in\langle 0,2\rangle,\ y\in\langle 0,2-x\rangle,\ z\in\langle 0,4-x^2-y^2\rangle$;

c) $x\in\langle -2,2\rangle,\ y\in\langle -2,2\rangle,\ z\in\langle 0,4-x^2\rangle$;

d) $x\in\langle -2,2\rangle,\ y\in\left\langle -\sqrt{4-x^2},\sqrt{4-x^2}\right\rangle,\ z\in\langle x^2+y^2-4,0\rangle$;

e) $x\in\langle 0,4\rangle,\ y\in\langle 0,2\rangle,\ z\in\left\langle 0,\frac{3}{2}x+y+3\right\rangle$; **f)** $x\in\left\langle \frac{1}{2},2\right\rangle,\ y\in\left\langle \frac{1}{x},2\right\rangle,\ z\in\langle 0,2-y\rangle$;

g) $x\in\langle -4,4\rangle,\ y\in\left\langle -\sqrt{16-x^2},\sqrt{16-x^2}\right\rangle,\ z\in\langle x^2+y^2,16\rangle$. **3. a)** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}-\frac{7}{36}$; **b)** $-\frac{8}{5}$; **c)** 0;

d) $\frac{1}{4}e^2+\frac{2}{9}e^3+\frac{13}{36}$; **e)** $\frac{652}{9}$; **f)** $4\ln 2-\frac{61}{32}$; **g)** $\frac{\pi}{4}$. **4. a)** $\frac{9}{8}\pi$; **b)** $\frac{32}{9}$; **c)** $\frac{32}{3}\pi$; **d)** 16π;

e) $\frac{4}{21}\pi$; **f)** $\frac{32}{3}$; **g)** 8π; **h)** 0; **i)** 4π. **5. a)** $\frac{\pi}{16}$; **b)** $\frac{\pi r^4}{2}$; **c)** $\frac{\pi^2 r^4}{8}$; **d)** 16π; **e)** 0;

f) $\frac{\pi r^4}{16}$; **g)** $\frac{\pi}{15}$; **h)** 4π; **i)** 8π. **6. a)** 2π; **b)** 128π; **c)** $\frac{4}{3}\pi r^3$; **d)** $\frac{4}{3}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; **e)** $\frac{\pi}{4}$;

f) $\frac{e^2-1}{8}$; **g)** $\frac{2}{e}$; **h)** $\frac{\pi^2}{2}-2$.