VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

MATEMATIKA III

Pavel Burda
Jarmila Doležalová

Vytvořeno v rámci projektu Operačního programu Rozvoje lidských zdrojů
CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016
Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

ISBN 80-248-1195-2

OBSAH

Úvod 6

POKYNY KE STUDIU 7

1. DVOJROZMĚRNÝ (DVOJNÝ) INTEGRÁL 10

1.1. Dvojrozměrný integrál v obdélníku 10
Kontrolní otázky 20
Kontrolní test 22
Shrnutí lekce 24

1.2. Dvojrozměrný integrál v obecné uzavřené oblasti 25
Kontrolní otázky 38
Kontrolní test 40
Shrnutí lekce 42

1.3. Transformace v dvojrozměrném integrálu 44
Kontrolní otázky 54
Kontrolní test 56
Shrnutí lekce 58

1.4. Aplikace dvojrozměrného integrálu 59
1.4.1 Objem tělesa 59
1.4.2. Obsah rovinné oblasti normální vzhledem k ose x, resp. y 63
1.4.3. Obsah plochy 67
1.4.4. Fyzikální aplikace 70
Kontrolní otázky 74
Kontrolní test 76
Shrnutí lekce 77

2. TROJROZMĚRNÝ (TROJNÝ) INTEGRÁL 78

2.1. Trojrozměrný integrál v kvádru 78
Kontrolní otázky 84
Kontrolní test 86
Shrnutí lekce 88

2.2. Trojrozměrný integrál v obecné uzavřené oblasti 89
Kontrolní otázky 96
Kontrolní test 98
Shrnutí lekce 100

2.3 Transformace v trojrozměrném integrálu 102
2.3.1. Transformace do válcových souřadnic 103
2.3.2. Transformace do sférických souřadnic 106
Kontrolní otázky 110
Kontrolní test 112
Shrnutí lekce 114

2.4. Aplikace trojrozměrného integrálu ... 114
2.4.1. Objem tělesa ... 115
2.4.2 Fyzikální aplikace ... 118
Kontrolní otázky ... 125
Kontrolní test ... 127
Shrnutí lekce ... 129

3. VEKTOROVÁ ANALÝZA ... 130

3.1. Vektorová funkce ... 130
Kontrolní otázky ... 140
Kontrolní test ... 142
Shrnutí lekce ... 145

3.2. Skalární pole ... 146
Kontrolní otázky ... 153
Kontrolní test ... 154
Shrnutí lekce ... 156

3.3. Vektorové pole ... 158
Kontrolní otázky ... 164
Kontrolní test ... 165
Shrnutí lekce ... 167

3.4. Operace druhého řádu ... 168
Shrnutí lekce ... 172

4. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL ... 173

4.1. Křivka a její orientace ... 173
Kontrolní otázky ... 179
Kontrolní test ... 181
Shrnutí lekce ... 183

4.2. Zavedení křivkového integrálu ... 185
Shrnutí lekce ... 187

4.3. Výpočet a vlastnosti křivkových integrálů ... 188
Kontrolní otázky ... 205
Kontrolní test ... 207
Shrnutí lekce ... 209

4.4. Greenova věta ... 210
Kontrolní otázky ... 214
Kontrolní test ... 216
Shrnutí lekce ... 218

4.5. Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě ... 220
Kontrolní otázky ... 228
Kontrolní test ... 230
Shrnutí lekce ... 233

4.6. Aplikace křivkového integrálu ... 234
4.6.1. Obsah válcové plochy ... 235
4.6.2. Délka křivky ... 237
4.6.3. Obsah rovinné oblasti ... 238
4.6.4. Práce síly po křivce ... 240
4.6.5. Cirkulace vektorového pole ... 243
4.6.6. Hmotnost oblouku křivky ... 246
4.6.7. Statické momenty a souřadnice těžiště křivky ... 248
4.6.8. Momenty setrvačnosti křivky ... 250
Kontrolní otázky ... 251
Kontrolní test ... 253
Shrnutí lekce ... 255

5. PLOŠNÝ INTEGRÁL ... 256

5.1. Plocha a její orientace ... 256
Kontrolní otázky ... 259
Shrnutí lekce ... 261

5.2. Zavedení plošného integrálu ... 261
Shrnutí lekce ... 263

5.3. Výpočet a vlastnosti plošných integrálů ... 264
Kontrolní otázky ... 275
Kontrolní test ... 278
Shrnutí lekce ... 280

5.4. Gauss-Ostrogradského věta, Stokesova věta ... 280
Kontrolní otázky ... 286
Kontrolní test ... 288
Shrnutí lekce ... 290

5.5. Aplikace plošného integrálu ... 291
5.5.1. Obsah plochy ... 292
5.5.2. Objem tělesa ... 294
5.5.3. Hmotnost plochy ... 296
5.5.4. Statické momenty a souřadnice těžiště plochy ... 298
5.5.5. Momenty setrvačnosti plochy ... 301
5.5.6. Tok vektorového pole plochou ... 302
Kontrolní otázky ... 304
Kontrolní test ... 306
Shrnutí lekce ... 308

Literatura ... 309

STUDIJNÍ OPORY S PŘEVAŽUJÍCÍMI DISTANČNÍMI PRVKY PRO PŘEDMĚTY TEORETICKÉHO ZÁKLADU STUDIA

je název projektu, který uspěl v rámci první výzvy Operačního programu Rozvoj lidských zdrojů. Projekt je spolufinancován státním rozpočtem ČR a Evropským sociálním fondem. Partnery projektu jsou Regionální středisko výchovy a vzdělávání, s.r.o. v Mostě, Univerzita obrany v Brně a Technická univerzita v Liberci. Projekt byl zahájen 5.1.2006 a bude ukončen 4.1.2008.

Cílem projektu je zpracování studijních materiálů z matematiky, deskriptivní geometrie, fyziky a chemie tak, aby umožnily především samostatné studium a tím minimalizovaly počet kontaktních hodin s učitelem. Je zřejmé, že vytvořené texty jsou určeny studentům všech forem studia. Studenti kombinované a distanční formy studia je využijí k samostudiu, studenti v prezenční formě si mohou doplnit získané vědomosti. Všem studentům texty pomohou při procvičení a ověření získaných vědomostí. Nezanedbatelným cílem projektu je umožnit zvýšení kvalifikace širokému spektru osob, které nemohly ve studiu na vysoké škole z různých důvodů (sociálních, rodinných, politických) pokračovat bezprostředně po maturitě.

V rámci projektu jsou vytvořeny jednak standardní učební texty v tištěné podobě, koncipované pro samostatné studium, jednak e-learningové studijní materiály, přístupné prostřednictvím internetu. Součástí výstupů je rovněž banka testových úloh pro jednotlivé předměty, na níž si studenti ověří, do jaké míry zvládli prostudované učivo.

Bližší informace o projektu můžete najít na adrese http://www.studopory.vsb.cz/.

Přejeme vám mnoho úspěchů při studiu a budeme mít radost, pokud vám předložený text pomůže při studiu a bude se vám líbit. Protože nikdo není neomylný, mohou se i v tomto textu objevit nejasnosti a chyby. Předem se za ně omlouváme a budeme vám vděčni, pokud nás na ně upozorníte.

ESF – ROVNÉ PŘÍLEŽITOSTI PRO VŠECHNY

POKYNY KE STUDIU

V úvodu si vysvětlíme jednotnou pevnou strukturu každé kapitoly textu, která by vám měla pomoci k rychlejší orientaci při studiu. Pro zvýraznění jednotlivých částí textu jsou používány ikony a barevné odlišení, jejichž význam nyní objasníme.

Průvodce studiem

vás stručně seznámí s obsahem dané kapitoly a s její motivací. Slouží také k instrukci, jak pokračovat dál po vyřešení kontrolních otázek nebo kontrolních textů.

Cíle

vás seznámí s učivem, které v dané kapitole poznáte a které byste po jejím prostudování měli umět.

Předpokládané znalosti

shrnují stručně učivo, které byste měli znát ještě dříve než kapitolu začnete studovat. Jsou nezbytným předpokladem pro úspěšné zvládnutí následující kapitoly.

Výklad

označuje samotný výklad učiva dané kapitoly, který je členěn způsobem obvyklým v matematice na definice, věty, případně důkazy.

Definice 1.1.1.
Zavádí základní pojmy v dané kapitole.

Věta 1.1.1.
Uvádí základní vlastnosti pojmů zavedených v dané kapitole.

Důkaz: Vychází z předpokladů věty a dokazuje tvrzení uvedené ve větě.

Poznámka

neformálně komentuje vykládanou látku..

Řešené úlohy

označují vzorové příklady, které ilustrují probrané učivo.

Příklad Uvádí zadání příkladu.

Řešení: Uvádí podrobné řešení zadaného příkladu.

Úlohy k samostatnému řešení

obsahují zadání příkladů k procvičení probraného učiva. Úlohy označené ✖ patří k obtížnějším a jsou určeny zájemcům o hlubší pochopení tématu.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

obsahují správné výsledky předchozích příkladů, slouží ke kontrole správnosti řešení.

Kontrolní otázky

obsahují soubor otázek k probranému učivu včetně několika odpovědí, z nichž je vždy alespoň jedna správná.

Odpovědi na kontrolní otázky

uvádějí správné odpovědi na kontrolní otázky.

Kontrolní test

obsahuje soubor příkladů k probranému učivu.

Výsledky testu

uvádějí správné odpovědi na příklady kontrolního testu.

Shrnutí lekce

obsahuje stručný přehled učiva, které by měl student po prostudování příslušné kapitoly zvládnout.

Literatura

obsahuje seznam knih, které byly použity při tvorbě příslušného textu a na které byly případně uvedeny odkazy k hlubšímu prostudování tématu.

Piktogram, který upozorňuje na důležité vztahy nebo vlastnosti, které je nezbytné si zapamatovat.

✖ Označuje příklad (řešený nebo k samostatnému řešení), který je obtížnější a slouží proto k hlubšímu studiu.

Takto podbarvený text je určen k hlubšímu studiu daného problému, obvykle není předmětem zkoušky.

1. DVOJROZMĚRNÝ (DVOJNÝ) INTEGRÁL

Průvodce studiem

V prvním ročníku jste se seznámili s integrálním počtem funkce jedné proměnné. Poznali jste pojem primitivní funkce a její vztah k neurčitému integrálu, základní metody výpočtu neurčitého integrálu. Metodou dělení intervalu byl zaveden Riemannův určitý integrál a pomocí Newton – Leibnizovy věty jste se jej naučili počítat. V závěru jste se zabývali využitím integrálního počtu v matematice a fyzice.

Stejně jako jsme v prvním ročníku rozšířili pojmy diferenciálního počtu funkce jedné proměnné na funkce dvou a více proměnných, zavedeme i pojem integrálního počtu funkcí dvou proměnných na základě analogií s integrálním počtem funkce jedné proměnné.

Získáme tak pojem dvojrozměrný integrál, který uvedl v roce 1769 jako první švýcarský matematik Leonhard Euler. Naučíme se dvojrozměrný integrál počítat a ukážeme si jeho využití v matematice a fyzice.

Cíle

V první kapitole zavedeme dvojrozměrný integrál v obdélníku a obecné rovinné oblasti a naučíme se metody jeho výpočtu. Ukážeme si také využití dvojrozměrného integrálu v geometrii a fyzice.

Předpokládané znalosti

Integrační metody (základní integrační vzorce, metoda integrace substitucí, metoda per partes), výpočet určitého integrálu (Newton – Leibnizova věta).

Analytická geometrie lineárních útvarů (obecná rovnice přímky, její směrnicový a úsekový tvar, parametrické rovnice přímky) a kvadratických útvarů v rovině (kuželosečky).

1.1. Dvojrozměrný integrál v obdélníku

Průvodce studiem

Z prvního ročníku si jistě pamatujete, že jednoduchý určitý integrál byl definován pro funkci jedné proměnné $y = f(x)$, přičemž integrační oblast tvořil uzavřený interval $< a, b >$.

V této kapitole zavedeme analogicky Riemannův dvojrozměrný integrál, který je obecně definován pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$. Výpočet Riemannova dvojrozměrného integrálu je jednoduchý, je-li integrační oblastí obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami.

Cíle

Cílem této kapitoly je objasnit pojem Riemannova dvojrozměrného integrálu v obdélníku a ukázat způsob jeho výpočtu.

Předpokládané znalosti

K výpočtu jakéhokoliv integrálu je zcela nezbytné znát základní integrační vzorce. Abychom je měli neustále k dispozici, připomeneme si je v následujících řádcích.

[1.] $\int 0\,dx = C$

[2.] $\int 1\,dx = x + C$

[3.] $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ pro $x > 0, \quad n \neq -1$

[4.] $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ pro $x \neq 0$

[5.] $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

[6.] $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

[7.] $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$ pro $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$

[8.] $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$ pro $x \neq k\pi, \quad k \in Z$

[9.] $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ pro $x \in (-1, 1)$

[10.] $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$

[11.] $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ pro $a > 0, \quad a \neq 1$

[12.] $\int e^x dx = e^x + C$

[13.] $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$ pro $f(x) \neq 0$

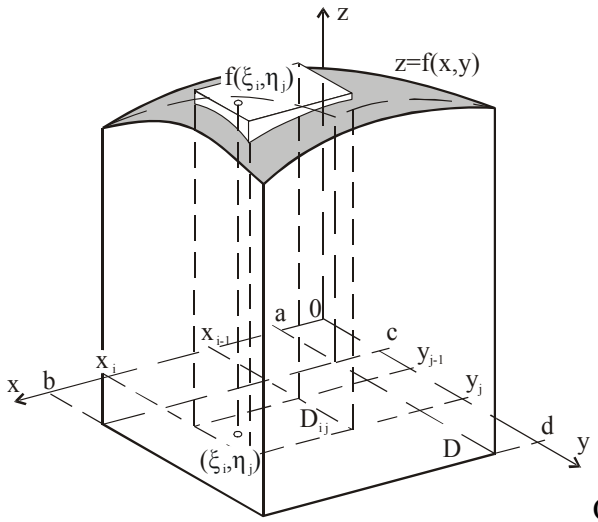
[14.] $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$ pro $a > 0$

[15.] $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ pro $x \in (-a, a)$

[16.] $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ pro $a \neq 0$

Výklad

Pojem Riemannova dvojrozměrného integrálu funkce dvou proměnných v obdélníku je analogický pojmu Riemannova určitého integrálu funkce jedné proměnné v uzavřeném intervalu. Pro naše potřeby bude postačující omezit se při výkladu pojmu dvojrozměrného integrálu na takové funkce $z = f(x,y)$, které jsou v obdélníku $D = \{(x,y) : x \in < a,b >, y \in < c,d >\}$, jehož strany jsou rovnoběžné s osami souřadnic, spojité a ohraničené, viz obr. 1.



Obr. 1

Rozdělíme intervaly $< a,b >$, resp. $< c,d >$ posloupnostmi bodů

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$, resp. $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = d$

na intervaly $< x_{i-1}, x_i >$, $i = 1,2,\ldots,m$, resp. $< y_{j-1}, y_j >$, $j = 1,2,\ldots,n$. Označíme velikosti dílčích intervalů $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Rovnoběžky s osou y vedené body x_i a rovnoběžky s osou x vedené body y_j rozdělí obdélník D na $m.n$ obdélníků, které označíme D_{ij}, viz obr. 1. Pro jejich obsah platí $\Delta D_{ij} = \Delta x_i . \Delta y_j$. Nyní v každém obdélníku D_{ij} zvolíme

bod (ξ_i, η_j) a určíme příslušnou funkční hodnotu $z = f(\xi_i, \eta_j)$. Vytvoříme součiny $f(\xi_i, \eta_j).\Delta D_{ij} = f(\xi_i, \eta_j).\Delta x_i.\Delta y_j$, které pro funkce $f(x, y) \geq 0$ v obdélníku D znamenají objemy hranolů o základně D_{ij} a výšce $f(\xi_i, \eta_j)$.

Utvoříme nyní součty $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i.\Delta y_j$. Pro $f(x, y) \geq 0$ v obdélníku D se jedná o objem tělesa složeného z hranolů nad všemi obdélníky D_{ij} o příslušných výškách $f(\xi_i, \eta_j)$.

Definice 1.1.1.

Jestliže pro $m \to \infty, n \to \infty$ a $\Delta x_i \to 0, \Delta y_j \to 0$ pro všechna $i = 1,2,\ldots, j = 1,2,\ldots$ existuje

$$\lim_{\substack{m\to\infty, n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0,\, \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i.\Delta y_j, \qquad (1)$$

nazveme ji **dvojrozměrným (dvojným) integrálem** funkce $f(x, y)$ v obdélníku D

a označíme $\iint_D f(x, y)dxdy.$ (2)

Poznámka

Pro funkce $f(x, y) \geq 0$ v obdélníku D znamená vztah (2) ***objem tělesa*** *S ohraničeného rovinami $z = 0, x = a, x = b, y = c, y = d$ a plochou $z = f(x, y)$, viz obr. 1.*

Věta 1.1.1. (Dirichletova)

Nechť je dán obdélník $D = \{(x, y) : x \in < a, b >, y \in < c, d >\}$. Jestliže $f(x, y)$ je funkce spojitá v obdélníku D, pak

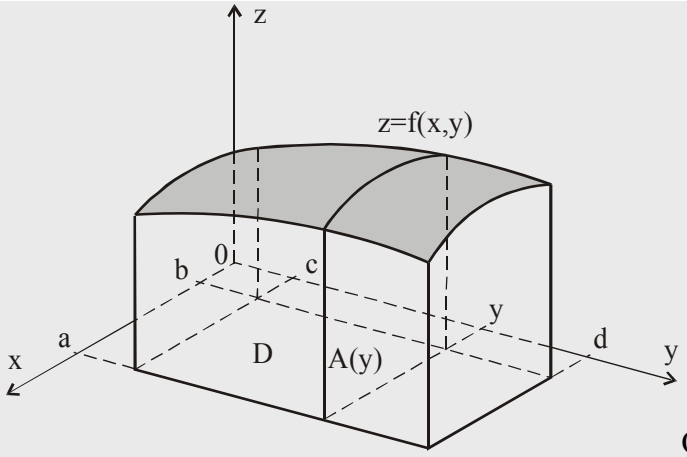
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy. \qquad (3)$$

Tuto důležitou větu, podle které je možno převést výpočet dvojrozměrného integrálu na dvojnásobnou integraci integrálů funkcí jedné proměnné, nebudeme dokazovat. Můžeme se

však opřít o následující geometrickou interpretaci pro $f(x,y) \geq 0$ v D. Jak bylo řečeno, dvojrozměrný integrál $\iint_D f(x,y)dxdy$ znamená objem $V(S)$ tělesa S. Platí zřejmě také

$$V(S) = \int_c^d A(y)dy,$$

kde $A(y)$ je oblast, která vznikne řezem tělesa S rovinou kolmou k ose y vedenou bodem y, viz obr. 2. Uvažujme, jak lze sečíst takto vzniklé oblasti $A(y)$. Pro každé pevné $y \in < c,d >$ je $f(x,y)$ funkcí proměnné x a pro obsah $A(y)$ platí $A(y) = \int_a^b f(x,y)dx.$



Obr. 2

Dosadíme do vztahu pro $V(S)$ a dostaneme $V(S) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$

Podobnou úvahu můžeme provést pro roviny kolmé k ose x. Dostaneme

$$V(S) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Poznámky

1. Ve vztahu (3) *je nutno odlišovat* ***dvojrozměrný*** *nebo také* ***dvojný integrál*** $\iint_D f(x,y)dxdy$ *od* ***integrálu dvojnásobného*** $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$

2. *Ve vztahu* (3) *počítáme nejprve integrál v závorce, který nazýváme vnitřní integrál a teprve pak integrál mimo závorku, který se nazývá vnější integrál.*

3. *Dvojnásobné integrály ve vztahu* (3) *obvykle pro větší přehlednost zapisujeme ve tvaru*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy, \qquad (3a)$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx. \qquad (3a)$$

Praktický výpočet provádíme tedy dvojnásobnou integrací funkcí jedné proměnné, při čemž druhou proměnnou považujeme za konstantu podobně jako při praktickém výpočtu parciálních derivací, viz [3], [7], [9]. Z definice součtů ve vztahu (1) přímo vyplývá:

Věta 1.1.2. (Vlastnosti dvojného integrálu na obdélníku *D*)

1. $\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy,$

2. $\iint_D \big(f(x,y)+g(x,y)\big)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy,$

3. $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy,$

kde $f(x,y)$, $g(x,y)$ funkce jsou spojité v D, $c \in R$ a D_1, D_2 jsou obdélníky, které vzniknou z obdélníku D jeho rozdělením přímkou rovnoběžnou s osou x, resp. s osou y.

Řešené úlohy

Příklad 1.1.1. Vypočtěte dvojrozměrný integrál

$$A = \iint_D e^{2x+3y}dxdy, \quad D = \{(x,y) : x \in <0,1>, y \in <1,2>\}.$$

Řešení: 1. Podle vztahu (3a): $A = \int_0^1 dx \int_1^2 e^{2x+3y}dy = \int_0^1 dx \int_1^2 e^{2x}e^{3y}dy = \int_0^1 e^{2x}dx \left[\frac{e^{3y}}{3}\right]_1^2 =$

$$= \int_0^1 e^{2x}\left(\frac{1}{3}e^6 - \frac{1}{3}e^3\right)dx = \frac{1}{3}e^3(e^3-1)\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{3}e^3(e^3-1)\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}e^3(e^3-1)\frac{1}{2}(e^2-1) = \frac{1}{6}e^3(e^3-1)(e^2-1),$$

2. podle vztahu (3b): $A = \int_1^2 dy \int_0^1 e^{2x+3y}dx = \int_1^2 dy \int_0^1 e^{2x}e^{3y}dx = \int_1^2 e^{3y}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 dy =$

$$= \int_1^2 e^{3y}\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right)dy = \frac{1}{2}(e^2-1)\int_1^2 e^{3y}dy = \frac{1}{2}(e^2-1)\left[\frac{1}{3}e^{3y}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(e^2-1)\left(\frac{1}{3}e^6 - \frac{1}{3}e^3\right) = \frac{1}{6}e^3(e^3-1)(e^2-1).$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte dvojrozměrné integrály v obdélníku D užitím vztahu (3a) nebo (3b):

a) $\iint_D (x+3)dxdy,\ D = \{(x,y) : x \in <0,1>,\ y \in <0,2>\}$,

b) $\iint_D (2x-4y)dxdy,\ D = \{(x,y) : x \in <1,3>,\ y \in <-1,1>\}$,

c) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy,\ D = \{(x,y) : x \in <-2,0>,\ y \in <-1,2>\}$,

d) $\iint_D x(x^2+y)^{\frac{1}{2}}dxdy,\ D = \{(x,y) : x \in <0,1>,\ y \in <0,3>\}$,

e) $\iint_D \frac{x}{(xy+1)^2}dxdy,\ D = \{(x,y) : x \in <0,1>,\ y \in <0,1>\}$,

f) $\iint_D xye^{xy^2}dxdy,\ D = \{(x,y) : x \in <0,\ln 2>,\ y \in <0,1>\}$,

g) $\iint_D x\sqrt{1-x^2}dxdy,\ D = \{(x,y) : x \in <0,1>,\ y \in <2,3>\}$,

h) $\iint_D \cos(x+y)dxdy,\ D = \left\{(x,y) : x \in <-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}>,\ y \in <0,\frac{\pi}{4}>\right\}$,

i) $\iint_D (x^2+y^2-2x-2y+4)dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<0,2>,\ y\in<0,2>\}$,

j) $\iint_D x^2 y\cos(xy^2)dxdy,\ D=\left\{(x,y): x\in<0,\frac{\pi}{2}>,\ y\in<0,2>\right\}$, ✖

k) $\iint_D \sin(2x+y)dxdy,\ D=\left\{(x,y): x\in<0,\pi>,\ y\in<\frac{\pi}{4},\pi>\right\}$,

l) $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2},\ D=\{(x,y): x\in<3,4>,\ y\in<1,2>\}$,

m) $\iint_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<0,1>,\ y\in<0,1>\}$, ✖

n) $\iint_D x^2 y e^{xy}dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<0,1>,\ y\in<0,2>\}$, ✖

o) $\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<0,1>,\ y\in<0,1>\}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 7; **b)** 16; **c)** 14; **d)** $\frac{2}{15}(31-9\sqrt{3})$; **e)** $1-\ln 2$; **f)** $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$; **g)** $\frac{1}{3}$; **h)** 1; **i)** $\frac{32}{3}$; **j)** $-\frac{\pi}{16}$;

k) 0; **l)** $\ln\frac{25}{24}$; **m)** $\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$; **n)** 2; **o)** $\ln\frac{4}{3}$.

Výklad

Snadno lze dvojrozměrný integrál v obdélníku $D=\{(x,y): x\in<a,b>,\ y\in<c,d>\}$ vypočítat pro funkce, které lze napsat jako součin dvou funkcí jedné proměnné: $f(x,y)=f_1(x).f_2(y)$. Pak zřejmě platí

$$\iint_D f_1(x).f_2(y)dxdy=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy. \qquad (3c)$$

Řešené úlohy

Příklad 1.1.2. Vypočtěte integrál A z příkladu 1.1.1 užitím vztahu (3c).

Řešení: $A = \iint_D e^{2x+3y}\,dxdy = \iint_D e^{2x}e^{3y}\,dxdy = \int_0^1 e^{2x}dx \int_1^2 e^{3y}dy =$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 \left[\frac{1}{3}e^{3y}\right]_1^2 = \frac{1}{6}e^3(e^3-1)(e^2-1).$$

Úlohy k samostatnému řešení

2. Vypočtěte dvojrozměrné integrály v obdélníku D užitím vztahu (3c):

a) $\iint_D x^2 y\,dxdy,\ D = \{(x,y) : x \in <0,2>,\ y \in <1,2>\},$

b) $\iint_D \frac{y^2}{1+x^2}\,dxdy,\ D = \{(x,y) : x \in <0,1>,\ y \in <0,1>\},$

c) $\iint_D ye^{x+y}\,dxdy,\ D = \{(x,y) : x \in <0,1>,\ y \in <0,1>\},$

d) $\iint_D \ln(1+x)^{2y}\,dxdy,\ D = \{(x,y) : x \in <0,1>,\ y \in <0,1>\},$

e) $\iint_D x\sin y\,dxdy,\ D = \left\{(x,y) : x \in <1,2>,\ y \in <0,\frac{\pi}{2}>\right\},$

f) $\iint_D ydxdy$, D je čtverec o vrcholech $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$,

g) $\iint_D \sqrt{xy}\,dxdy$, D je obdélník o vrcholech $(0,0), (a,0), (a,b), (0,b)$, $0 < a < b$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. a) 4; **b)** $\frac{\pi}{12}$; **c)** $e-1$; **d)** $2\ln 2 - 1$; **e)** $\frac{3}{2}$; **f)** $\frac{1}{2}$; **g)** $\frac{4}{9}\sqrt{a^3b^3}$.

Výklad

Nelze-li funkci $f(x,y)$ rozložit v součin dvou funkcí jedné proměnné $f_1(x).f_2(y)$, pak při integraci budeme postupovat stejně jako v prvním nebo druhém způsobu řešení integrálu A, tj. podle vztahů (3a) nebo (3b).

Řešené úlohy

Příklad 1.1.3. Vypočtěte $B=\iint_D \frac{1}{(x+2y+1)^2}dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<1,3>,\ y\in<1,2>\}$.

Řešení: Použijeme vztah (3a): $B=\int_1^3 dx\int_1^2 \frac{1}{(x+2y+1)^2}dy=\int_1^3 dx\int_1^2 (x+2y+1)^{-2}dy=$

$$=\int_1^3\left[\frac{1}{2}.\frac{(x+2y+1)^{-1}}{-1}\right]_1^2 dx=-\frac{1}{2}\int_1^3((x+5)^{-1}-(x+3)^{-1})dx=-\frac{1}{2}\int_1^3(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+3})dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln|x+5|-\ln|x+3|\right]_1^3=-\frac{1}{2}(\ln 8-\ln 6-\ln 6+\ln 4)=-\frac{1}{2}\ln\frac{32}{36}=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{8}.$$

Poznámky

1. Pokud se zdá přímé integrování užitím vztahu $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)$ *obtížné, lze užít při integraci substituci:*

$$B=\int_1^3 dx\int_1^2 \frac{1}{(x+2y+1)^2}dy=\left|\begin{matrix}x+2y+1=t, & y=1, & t=x+3\\ 2dy=dt, & y=2, & t=x+5\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 dx\int_{x+3}^{x+5}\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{2}\int_1^3\left[-\frac{1}{t}\right]_{x+3}^{x+5}dx=-\frac{1}{2}\int_1^3\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{8}.$$

2. Obecně nezáleží na pořadí integrace, tedy platí vztahy (3a, 3b). *V některých případech ale daný dvojrozměrný integrál může být snadno řešitelný jedním způsobem, druhý způsob však může být komplikovaný v závislosti na tvaru integrované funkce.*

Řešené úlohy

Příklad 1.1.4. Vypočtěte integrál $C = \iint_D x^y dxdy,\ D = \{(x,y) : x \in <0,1>,\ y \in <1,2>\}$.

Řešení: 1. Použijeme vztah (3b): $C = \int_1^2 dy \int_0^1 x^y dx = \int_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{y+1} - \frac{0}{y+1} \right) dy =$

$$= \int_1^2 \frac{dy}{y+1} = \left[\ln |y+1| \right]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}.$$

2. Použijeme vztah (3a): $C = \int_0^1 dx \int_1^2 x^y dy = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\ln x} \right]_1^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right) dx = \ldots$.

Další výpočet výše uvedeného integrálu je pracný.

Kontrolní otázky

1. Jaká musí být funkce $f(x,y)$, abychom ji mohli integrovat v obdélníku D?

   a) kladná, b) spojitá a ohraničená,

   c) monotónní, d) periodická.

2. Jaký geometrický útvar určuje množina bodů $\{(x,y) : x \in <a,b>,\ y \in <a,b>\}$?

   a) Kruh, b) čtverec,

   c) obdélník, d) parabolu.

3. Jakou polohu má obdélník $D = \{(x,y) : x \in <a,b>,\ y \in <c,d>\}$ v souřadnicovém systému Oxy?

   a) Libovolnou,

   b) jeho strany jsou rovnoběžné s osami souřadnic,

   c) jeden vrchol obdélníka musí být v počátku soustavy souřadnic a jeho strany jsou rovnoběžné s osami souřadnic,

   d) jeden vrchol obdélníka musí být v počátku soustavy souřadnic.

4. Který z následujících výrazů je zápisem dvojrozměrného integrálu?

   a) $\int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy$, b) $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$,

c) $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy,$ d) $\iint_D f(x,y)dxdy$.

5. Který z následujících výrazů je zápisem dvojnásobného integrálu?

a) $\iint_D f_1(x).f_2(y)dxdy$, b) $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$,

c) $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy,$ d) $\iint_D f(x,y)dxdy$.

6. Jaké je obecně pořadí výpočtu jednotlivých integrálů v dvojnásobném integrálu funkce $f(x,y)$?

a) Nejprve počítáme vnější integrál, pak teprve vnitřní,

b) na pořadí nezáleží,

c) nejprve počítáme vnitřní integrál, pak teprve vnější,

d) oba integrály počítáme současně.

7. Jaký tvar musí mít funkce $f(x,y)$, abychom mohli v obdélníku D integrovat současně oba integrály (podle proměnné x i y)?

a) $f_1(x,y).f_2(y),$ b) $f_1(x).f_2(x,y),$

c) $f_1(x).f_2(y),$ d) $f_1(x)+f_2(y).$

8. Jaký geometrický význam má $\iint_D f(x,y)dxdy$ pro $f(x,y) \geq 0$?

a) Obsah oblasti D,

b) obvod oblasti D,

c) objem tělesa, jehož spodní podstavou je obdélník D, které je shora ohraničeno funkcí $z = f(x,y)$,

d) povrch tělesa, jehož spodní podstavou je obdélník D, které je shora ohraničeno funkcí $z = f(x,y)$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. b); 3. b); 4. d); 5. b, c); 6. c); 7. c); 8. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 1.1 znovu.

Kontrolní test

1. Vypočítejte integrál $\iint_D dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<1,3>,\ y\in<2,4>\}$.

a) 1, b) 2,

c) 3, d) 4.

2. Vypočítejte integrál $\iint_D xydxdy,\ D=\{(x,y): x\in<0,1>,\ y\in<0,2>\}$.

a) 1, b) 2,

c) 3, d) 4.

3. Vypočítejte integrál $\iint_D (x+y)dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<0,1>,\ y\in<0,2>\}$.

a) 1, b) 2,

c) 3, d) 4.

4. Vypočítejte integrál $\iint_D \sqrt{xy}dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<0,1>,\ y\in<0,9>\}$.

a) 11, b) 12,

c) 13, d) 14.

5. Vypočítejte integrál $\iint_D \sin^2 x \sin^2 y\ dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<0,\pi>,\ y\in<0,\pi>\}$.

a) $\frac{\pi}{4}$, b) $\frac{\pi^2}{4}$,

c) 4π, d) $4-\pi$.

6. Vypočítejte integrál $\iint_D e^{x+y}dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<0,1>,\ y\in<0,1>\}$.

a) e^2, b) e^2-1,

c) $(e-1)^2$, d) e^2+1.

7. Vypočítejte integrál $\iint_D \frac{y^2}{x^2+1} dxdy, D = \{(x,y) : x \in <0,1>, y \in <0,1>\}$.

a) $\frac{\pi}{12}$, b) $\frac{\pi^2}{12}$,

c) 12π, d) $12-\pi$.

8. Vypočítejte integrál $\iint_D (x^2 + \frac{1}{y^2+1}) dxdy, D = \{(x,y) : x \in <0,1>, y \in <0,1>\}$.

a) $\frac{\pi+3}{4}$, b) $\frac{3\pi+4}{12}$,

c) $12\pi+4$, d) $12-3\pi$.

9. Vypočítejte integrál $\iint_D x\sin(x+y) dxdy, D = \left\{(x,y) : x \in <0,\pi>, y \in <0,\frac{\pi}{2}>\right\}$.

a) $\frac{\pi}{12}-1$, b) $\frac{\pi}{12}+2$,

c) 2π, d) $\pi-2$.

10. Vypočítejte integrál $\iint_D (x^2+y^2) dxdy, D = \{(x,y) : x \in <0,1>, y \in <0,2>\}$.

a) $\frac{10}{3}$, b) $\frac{15}{4}$,

c) $\frac{4}{15}$, d) $\frac{3}{10}$.

Výsledky testu

1. d); 2. a); 3. c); 4. b); 5. b); 6. c); 7. a); 8. b); 9. d); 10. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je potřeba prostudovat kapitolu 1.1 znovu.

Shrnutí lekce

Dvojrozměrný nebo také dvojný integrál $\iint_D f(x,y)dxdy$ funkce $f(x,y)$ v obdélníku $D=\{(x,y): x\in<a,b>, y\in<c,d>\}$ vypočítáme převedením na integrál dvojnásobný $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$ nebo $\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$, tedy dvojnásobnou integrací funkcí jedné proměnné.

Důležitým předpokladem pro výpočet příkladů bylo zopakování základních integračních metod.

1.2. Dvojrozměrný integrál v obecné uzavřené oblasti

Průvodce studiem

V předchozí kapitole jsme se naučili počítat dvojrozměrný integrál, jestliže obor integrace byl jednoduchý geometrický útvar - obdélník, jehož strany byly rovnoběžné s osami souřadnic. Nyní rozšíříme své znalosti dvojrozměrného integrálu na případy, kdy obor integrace tvoří obecná rovinná oblast. Naučíme se vyjádřit hranice oblasti v takovém tvaru, aby mohly být použity jako integrační meze.

Cíle

Cílem této kapitoly je objasnit pojem Riemannova dvojrozměrného integrálu v obecné uzavřené oblasti a ukázat způsob jeho výpočtu.

Předpokládané znalosti

Opět budeme potřebovat znalost základních integračních metod.

K vyjádření integračního oboru je třeba zopakovat analytickou geometrii v rovině, především rovnice přímky a kuželoseček.

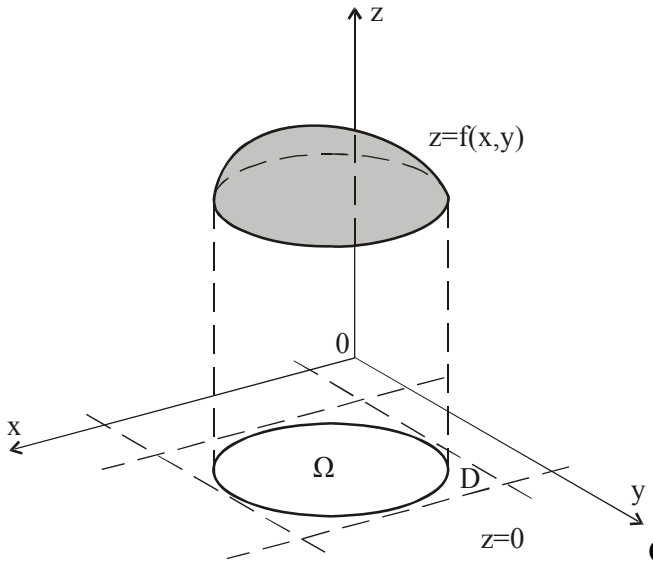
Výklad

V úvodu poznamenejme, že množinu bodů Ω v rovině (v prostoru), ve které lze každé dva body spojit čarou, jejíž všechny body leží v množině Ω, nazýváme ***souvislou***. Souvislá otevřená množina se nazývá ***oblast***. Obsahuje-li oblast všechny své hromadné body, viz [3], [8], nazývá se ***uzavřenou***.

Rozšíříme nyní Riemannovu definici dvojrozměrného integrálu funkce $f(x,y)$ v obdélníku D na uzavřenou oblast Ω. Vnoříme takovou oblast Ω do obdélníku D, tj. $\Omega \subset D$, viz obr. 3, a definujeme novou funkci $f^*(x,y)$ předpisem

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{pro } (x,y) \in \Omega, \\ 0 & \text{pro } (x,y) \in D \setminus \Omega. \end{cases}$$

Pak platí $$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{D} f^*(x,y)dxdy.$$



Obr. 3

Nyní je ***dvojrozměrný integrál v oblasti*** Ω definován pomocí dvojrozměrného integrálu v obdélníku. Problém s nespojitostí funkce $f^*(x,y)$ v obdélníku D lze odstranit zobecněním definice Riemannova integrálu, viz [9].

Věta 1.2.1. (Vlastnosti dvojrozměrného integrálu v oblasti Ω)

1. $$\iint_{\Omega} c\, f(x,y)dxdy = c\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy,$$

2. $$\iint_{\Omega} \big(f(x,y)+g(x,y)\big)dxdy = \iint_{\Omega} f(x,y)dxdy + \iint_{\Omega} g(x,y)dxdy,$$

3. $$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)dxdy,$$

kde funkce $f(x,y), g(x,y)$ jsou spojité v Ω, $c \in R$ a oblasti Ω_1, Ω_2 vzniknou z oblasti Ω jejím rozdělením přímkou rovnoběžnou s osou x, resp. s osou y.

Uvedené vlastnosti vyplývají přímo z definice Riemannova dvojrozměrného integrálu v obdélníku (Definice 1.1.1) a z předcházející úvahy.

Při studiu se dále omezíme pouze na oblasti Ω definované následujícím způsobem:

Definice 1.2.1.

a) **Oblast Ω I. typu** (tzv. **normální vzhledem k ose *x***) je ohraničena přímkami

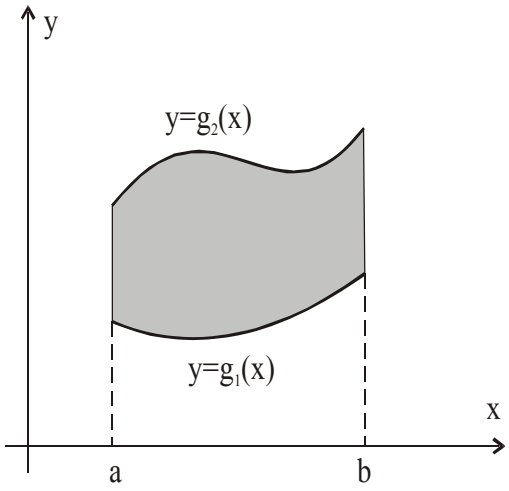
$x = a, x = b,$ kde $a \le b$, a spojitými křivkami $y = g_1(x), \quad y = g_2(x),$

kde $g_1(x) \le g_2(x)$ pro $x \in < a, b >$, viz obr. 4.

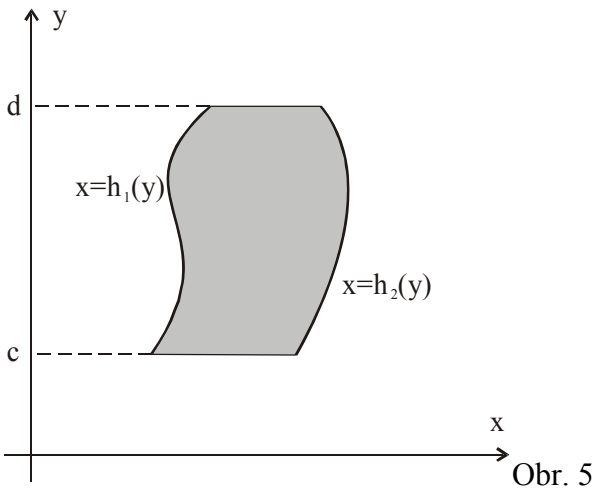
b) **Oblast Ω II. typu** (tzv. **normální vzhledem k ose *y***) je ohraničena přímkami

$y = c, y = d,$ kde $c \le d$, a spojitými křivkami $x = h_1(y), \quad x = h_2(y),$

kde $h_1(y) \le h_2(y),$ pro $y \in < c, d >$, viz obr. 5.



Obr. 4



Obr. 5

Užitím následující věty lze vypočítat dvojrozměrné integrály v oblastech obou typů.

Věta 1.2.1. (Fubiniova)

(a) Jestliže je funkce $f(x, y)$ spojitá v oblasti Ω I. typu, pak platí

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (4a)$$

(b) Jestliže je funkce $f(x, y)$ spojitá v oblasti Ω II. typu, pak platí

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (4b)$$

Větu nebudeme dokazovat. Geometrickou představu si však můžeme pro funkce $f(x,y) \geq 0$ v oblasti Ω vytvořit obdobně jako v úvaze za větou 1.1.1.

Poznámka

Přechod od zápisu dvojnásobného integrálu ve tvaru (4a) *do tvaru* (4b)*, respektive naopak, nazýváme* ***záměna pořadí integrace****.*

$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$ určuje pro $f(x,y) > 0$ objem tělesa, jehož dolní podstavou je oblast Ω a které je shora ohraničeno funkcí $z = f(x,y)$.

Ve vztazích (4a), (4b) vždy pár integračních mezí vnějšího integrálu musí být konstantní, pár integračních mezí vnitřního integrálu mohou být funkce jedné proměnné. Nejdříve počítáme v dvojnásobných integrálech (4a), (4b) zásadně vnitřní integrál s proměnnými mezemi a teprve pak vnější integrál s mezemi konstantními.

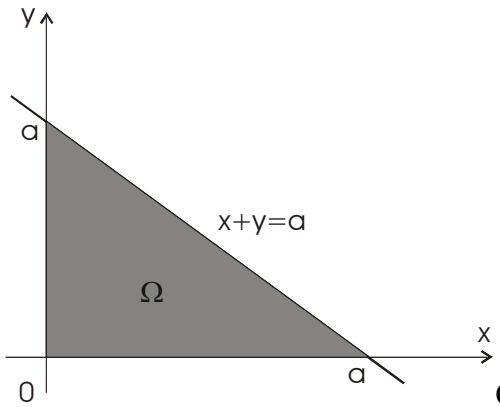
Oblastí, pro niž jsou oba páry mezí konstantní, je vždy jen obdélník (čtverec), jehož strany jsou rovnoběžné s osami souřadnic *x, y,* viz kapitola 1.1.

V následujících příkladech se omezíme pouze na nalezení integračních mezí.

Řešené úlohy

Příklad 1.2.1. Určete nerovnice pro převedení dvojrozměrného integrálu $\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$, kde Ω je trojúhelník o vrcholech $(0,0), (a,0), (0,a), a > 0$, na dvojnásobný.

Řešení: a) Nejprve vyjádříme Ω jako oblast I. typu, normální vzhledem k ose x. Je zřejmé, že oblast Ω ohraničíme zleva a zprava přímkami $x = 0, x = a$, viz obr. 6.



Obr. 6

Ve směru osy y oblast Ω ohraničíme zdola osou x, která má rovnici $y = 0$, a shora přímkou $x + y = a$, jejíž rovnici převedeme na tvar $y = a - x$.

Oblast Ω zapíšeme ve tvaru:

$$\Omega: \quad 0 \le x \le a, \qquad (x \in <0, a>),$$
$$0 \le y \le a - x, \quad (y \in <0, a - x>).$$

b) Nyní vyjádříme Ω jako oblast II. typu, normální vzhledem k ose y. Je zřejmé, že oblast Ω ohraničíme zdola a shora přímkami $y = 0, y = a$. Ve směru osy x oblast Ω ohraničíme zleva osou y, která má rovnici $x = 0$, a zprava přímkou $x + y = a$, jejíž rovnici převedeme na tvar $x = a - y$.

Oblast Ω zapíšeme ve tvaru:

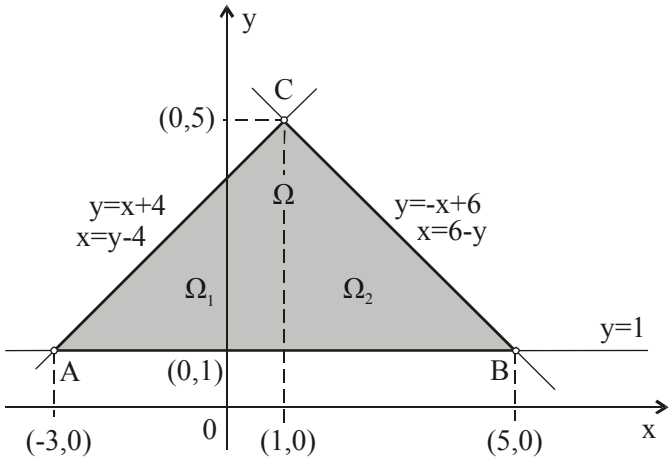
$$\Omega: \quad 0 \le y \le a, \qquad (y \in <0, a>),$$
$$0 \le x \le a - y, \quad (x \in <0, a - y>).$$

Příklad 1.2.2. Určete integrační meze pro $\iint_{\Omega} f(x, y)dxdy$, kde Ω je ΔABC, jehož strany jsou dány rovnicemi $y = 1, y = x + 4, y = 6 - x$.

Řešení: a) Nejprve vyjádříme Ω jako oblast I. typu, normální vzhledem k ose x. Pokud ohraničíme oblast Ω přímkami $x = -3, x = 5$, pak Ω **není shora ohraničena jedinou křivkou** a **je proto nutno rozdělit ji na oblasti** Ω_1, Ω_2 přímkou $x = 1$, viz obr. 7.

Nerovnice pro oblasti Ω_1 a Ω_2 mají pak tvar:

$$\Omega_1: -3 \le x \le 1, \qquad (x \in <-3, 1>), \qquad \Omega_2: 1 \le x \le 5, \qquad (x \in <1, 5>),$$
$$1 \le y \le x + 4, (y \in <1, x + 4>), \qquad 1 \le y \le -x + 6, \quad (y \in <1, -x + 6>).$$



Obr. 7

Podle vlastnosti 3 a vztahu (4a) pak platí:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)dxdy = \int_{-3}^{1} dx \int_{1}^{x+4} f(x,y)dy + \int_{1}^{5} dx \int_{1}^{6-x} f(x,y)dy.$$

b) Nyní zapíšeme Ω jako oblast II. typu, normální vzhledem k ose y. Ohraničíme oblast Ω přímkami $y=1$, $y=5$. Proměnnou x vyjádříme ze zadání příkladu jako funkci proměnné y, tj. $x=y-4$, $x=6-y$.

Nerovnice pro oblast Ω pak mají tvar:

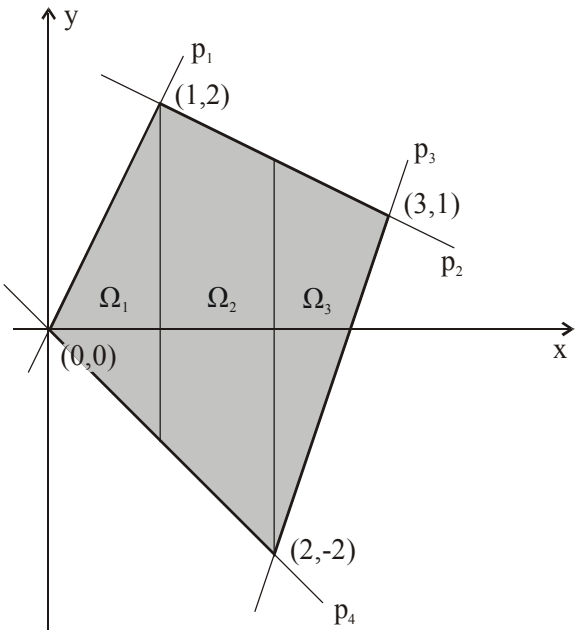
$$\Omega: \quad 1 \le y \le 5, \qquad (y \in <1,5>),$$
$$y-4 \le x \le 6-y, \qquad (x \in < y-4, 6-y >).$$

Podle vztahu (4b) dostáváme $$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_{1}^{5} dy \int_{y-4}^{6-y} f(x,y)dx.$$

Je zřejmé, že druhé řešení je jednodušší, neboť vede k řešení jediného dvojnásobného integrálu.

✖ **Příklad 1.2.3.** Určete nerovnice pro převedení dvojrozměrného integrálu $\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$, kde Ω je čtyřúhelník o vrcholech $(0,0), (1,2), (3,1), (2,-2)$, na dvojnásobný.

Řešení: Určíme rovnice stran čtyřúhelníka (obr. 8):



Obr. 8

Řešení:

$$p_1 \quad : \quad y = 2x,$$
$$p_2 \quad : \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2},$$
$$p_3 \quad : \quad y = 3x - 8,$$
$$p_4 \quad : \quad y = -x.$$

Rozdělením oblasti Ω rovnoběžkami s osou y, resp. s osou x dostaneme vždy tři oblasti. K rozdělení užijeme například přímek $x=1$ a $x=2$, tj. rovnoběžek s osou y. Vyjádříme tedy $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ jako oblasti I. typu, normální vzhledem k ose x.

Dostaneme:

$$\Omega_1: \ 0 \le x \le 1, \qquad -x \le y \le 2x,$$

$$\Omega_2: \ 1 \le x \le 2, \qquad -x \le y \le -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2},$$

$$\Omega_3: \ 2 \le x \le 3, \qquad 3x-8 \le y \le -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}.$$

Podle vlastnosti 3 a vztahu (4a) pak platí:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{2x} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{-x}^{-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}} f(x,y)\,dy + \int_2^3 dx \int_{3x-8}^{-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}} f(x,y)\,dy.$$

Příklad 1.2.4. Stanovte nerovnice určující oblast Ω, která je ohraničena křivkami $y=x^2$ a $y^2=x$.

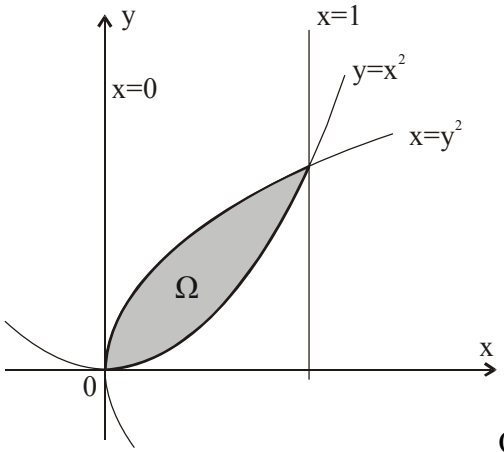
Řešení: a) Nejprve určíme průsečíky křivek o rovnicích $y=x^2$ a $y^2=x$, viz obr. 9.

Vyřešením soustavy dvou rovnic $y=x^2$, $y^2=x$ dostaneme postupně

$x^2=\sqrt{x}$, $x^4-x=0$, $x(x^3-1)=0$.

Reálné kořeny tedy jsou $x_1=0$, $x_2=1$.

Oblast Ω zapíšeme jako oblast I. typu, normální vzhledem k ose x. Proto ji ohraničíme přímkami $x=0, x=1$. Křivka, která ohraničuje Ω shora, má rovnici $y=\sqrt{x}$. Křivka, která ohraničuje Ω zdola, má rovnici $y=x^2$.



Obr. 9

Nerovnice pro oblast Ω mají tvar:

$\Omega: \quad 0 \le x \le 1,$

$x^2 \le y \le \sqrt{x}.$

b) Podobně určíme oblast Ω jako oblast II. typu, normální vzhledem k ose y.

$\Omega: \quad 0 \le y \le 1,$

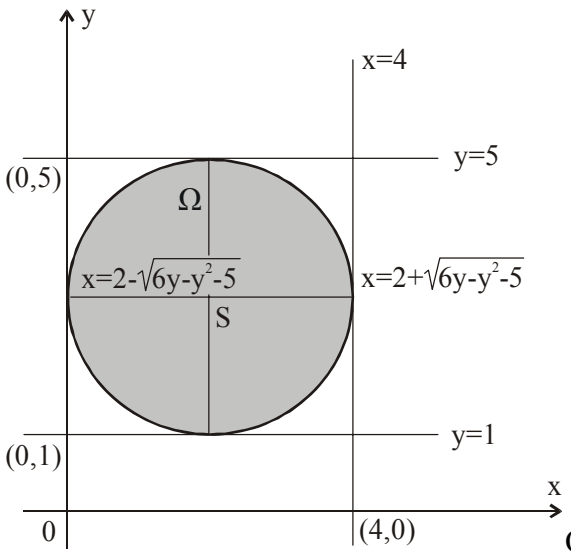
$y^2 \le x \le \sqrt{y}.$

✖ **Příklad 1.2.5.** Zaměňte pořadí integrace pro integrál $\int_0^4 dx \int_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy.$

Řešení: Oblast Ω je zapsána jako oblast I. typu, normální vzhledem k ose x:

$\Omega: \quad 0 \le x \le 4,$

$3-\sqrt{4x-x^2} \le y \le 3+\sqrt{4x-x^2}.$



Obr. 10

Po umocnění horní i dolní proměnné meze (pro y) a po úpravě dostaneme

$(y-3)^2 = 4x - x^2$. Další úpravou (doplněním na čtverec)

$(y-3)^2 = -4 + 4x - x^2 + 4 = -(x-2)^2 + 4$

lze tento vztah převést na tvar $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4,$

což je rovnice kružnice o středu $S = (2,3)$ a poloměru $r = 2.$

Přímky $x = 0, x = 4$ jsou tečnami oblasti Ω a jedná se tedy o integraci v celém kruhu, viz obr. 10.

Vedeme nyní tečny k dané kružnici rovnoběžné s osou x, tj. přímky $y=1, y=5$ a získáme nerovnice $1 \le y \le 5$. Z rovnice kružnice vyjádříme proměnnou x a dostaneme rovnice půlkružnic $x = 2-\sqrt{6y-y^2-5}$, resp. $x = 2+\sqrt{6y-y^2-5}$, které ohraničují oblast Ω zleva, resp. zprava.

Oblast Ω zapíšeme jako oblast II. typu, normální vzhledem k ose y, takto:

$$\Omega: \quad 1 \le y \le 5$$
$$2-\sqrt{6y-y^2-5} \le x \le 2+\sqrt{6y-y^2-5}.$$

Platí: $$\int_0^4 dx \int_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy = \int_1^5 dy \int_{2-\sqrt{6y-y^2-5}}^{2+\sqrt{6y-y^2-5}} f(x,y)dx.$$

Poznámka

Je zřejmé, že vyjádření integračních mezí pro kruh je v kartézských souřadnicích komplikované. Později si ukážeme jednodušší způsob pro určení mezí v případě, kdy integrační oblastí je kruh.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete integrační meze pro $\iint_\Omega f(x,y)dxdy$ jednodušším z obou způsobů, jestliže Ω je

a) čtyřúhelník o vrcholech $(2,1), (6,-2), (6,2), (2,5)$,

b) čtyřúhelník o vrcholech $(2,5), (2,1), (6,-2), (6,7)$,

c) čtyřúhelník o stranách $x=1, x=2, y=x, y=2x$,

d) trojúhelník o stranách $x+2y-3=0, x-y=1, x-4=0$,

e) trojúhelník o stranách $y=0, y=x-2, y=-x-2$,

f) lichoběžník s vrcholy $(1,1), (3,1), (2,2), (1,2)$,

g) rovnoběžník s vrcholy $(0,1), (1,3), (1,6), (0,4)$.

2. Určete integrační meze pro $\iint_\Omega f(x,y)dxdy$ oběma způsoby, jestliže Ω je

a) ohraničena křivkou $x^2+y^2=4$,

b) ohraničena čarami $y^2-x^2=1$ a $x^2+y^2=9$, přičemž obsahuje bod $(0,0)$, ✖

c) ohraničena čarami $y = 2x,\ y = \frac{1}{2}x,\ xy = 2\ (x \geq 0,\ y \geq 0)$.

3. Zaměňte pořadí integrace:

a) $\int_1^2 dy \int_3^4 f(x,y)dx,$

b) $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x,y)dy,$

c) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy,$

d) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy,$

e) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx,$

f) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy,$

g) $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y)dx,$

h) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy,$

i) $\int_0^2 dy \int_1^{e^y} f(x,y)dx,$

j) $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} f(x,y)dy.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $2 \leq x \leq 6; -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \leq y \leq -\frac{3}{4}x + \frac{13}{2}$; **b)** $2 \leq x \leq 6; -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}x + 4$;

c) $1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2x$; **d)** $\frac{5}{3} \leq x \leq 4, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \leq y \leq x - 1$; **e)** $-2 \leq y \leq 0, -y - 2 \leq x \leq y + 2$;

f) $1 \leq y \leq 2,\ 1 \leq x \leq 4 - y$; **g)** $0 \leq x \leq 1,\ 2x + 1 \leq y \leq 2x + 4$.

2. a) $-2 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$ nebo $-2 \leq y \leq 2,\ -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}$;

b) $\Omega_1 : -3 \leq x \leq -2,\ -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$, $\Omega_2 : -2 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{1+x^2} \leq y \leq \sqrt{1+x^2}$,

$\Omega_3 : 2 \leq x \leq 3,\ -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$ nebo $\Omega_1 : -\sqrt{5} \leq y \leq -1,\ \sqrt{y^2 - 1} \leq x \leq \sqrt{9-y^2}$,

$\Omega_2 : -\sqrt{5} \leq y \leq -1,\ -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq -\sqrt{y^2-1},\ \Omega_3 : -1 \leq y \leq 1,\ -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2}$,

$\Omega_4 : 1 \leq y \leq \sqrt{5},\ -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq -\sqrt{y^2-1},\ \Omega_5 : 1 \leq y \leq \sqrt{5},\ \sqrt{y^2-1} \leq x \leq \sqrt{9-y^2}$;

c) $\Omega_1 : 0 \le x \le 1,\ \frac{1}{2}x \le y \le 2x,\ \Omega_2 : 1 \le x \le 2,\ \frac{1}{2}x \le y \le \frac{2}{x}$ nebo

$\Omega_1 : 0 \le y \le 1,\ \frac{1}{2}y \le x \le 2y,\ \Omega_2 : 1 \le y \le 2,\ \frac{1}{2}y \le x \le \frac{2}{y}$.

3. a) $\int_3^4 dx \int_1^2 f(x,y)dy$; **b)** $\int_0^4 dy \int_0^{y/2} f(x,y)dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x,y)dx$; **c)** $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$;

d) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$; **e)** $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$; **f)** $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$;

g) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$; **h)** $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2}^2 f(x,y)dx$; **i)** $\int_1^{e^2} dx \int_{\ln x}^2 f(x,y)dy$; **j)** $\int_{-1}^1 dy \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

Vlastní výpočet dvojrozměrných integrálů si objasníme na příkladech.

Řešené úlohy

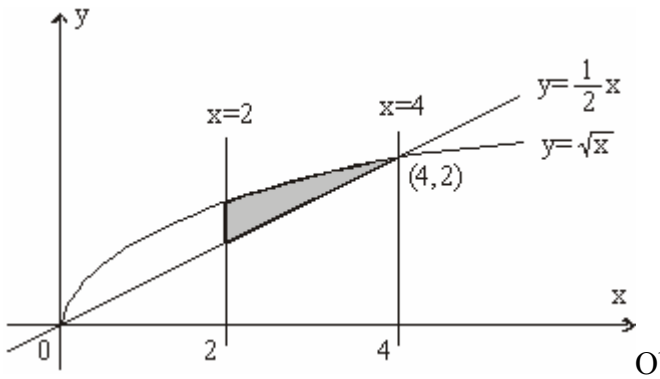
Příklad 1.2.6. Vypočtěte $\iint_\Omega xydxdy$, je-li oblast Ω ohraničena čarami

$y = \frac{1}{2}x,\ y = \sqrt{x}$ a $x = 2, (x \ge 2)$.

Řešení: Zakreslíme oblast Ω, viz obr. 11.

Řešením soustavy rovnic $y = \frac{1}{2}x,\ y = \sqrt{x}$ dostaneme postupně

$\frac{1}{2}x = \sqrt{x},\ x^2 = 4x,\ x^2 - 4x = 0,\ x(x-4) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ y_1 = 0,\ y_2 = 2.$



Obr. 11

Přímka $y=\frac{1}{2}x$ a křivka $y=\sqrt{x}$ (část paraboly v I. kvadrantu) se tedy pro $x\geq 2$ protínají v bodě $(4,2)$. Oblast Ω splňuje požadavky kladené na oblasti obou typů. Vyjádříme ji jako oblast I. typu, normální vzhledem k ose x.

$$\Omega:\quad 2\leq x\leq 4,$$
$$\frac{x}{2}\leq y\leq \sqrt{x}.$$

Nyní můžeme integrál vyřešit:

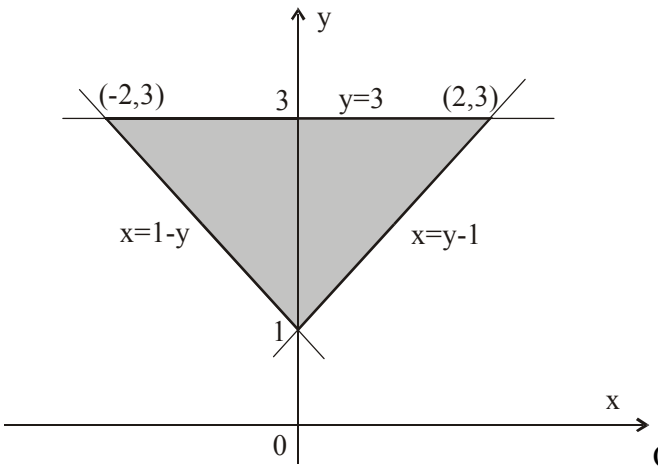
$$\iint_{\Omega} xy\,dxdy=\int_2^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xy\,dy=\int_2^4 xdx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} y\,dy=\int_2^4 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}dx=\int_2^4\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{32}\right]_2^4=\left(\frac{64}{6}-\frac{256}{32}\right)-\left(\frac{8}{6}-\frac{16}{32}\right)=\frac{11}{6}.$$

Proveďte sami záměnu pořadí integrace (oblast Ω zapište jako oblast II. typu, normální vzhledem k ose y).

Příklad 1.2.7. Vypočtěte $\iint_{\Omega}(2x-y^2)dxdy$, je-li oblast Ω ohraničena přímkami $y=1-x$, $y=1+x$ a $y=3$.

Řešení:



Obr. 12

Z obr. 12 je zřejmé, že jednodušší bude vyjádřit oblast Ω jako oblast II. typu, normální vzhledem k ose y. Při zápisu jako oblast I. typu, normální vzhledem k ose x, bychom oblast Ω museli rozdělit na dvě podoblasti přímkou $x=0$, podobně jako v příkladu 1.2.2.

$\Omega: \quad 1 \le y \le 3,$
$1 - y \le x \le y - 1.$

Integrál převedeme na dvojrozměrný integrál podle vztahu (4b):

$$\iint_\Omega (2x - y^2)dxdy = \int_1^3 dy \int_{1-y}^{y-1} (2x - y^2)dx = \int_1^3 \left[x^2 - y^2 x \right]_{1-y}^{y-1} dy =$$

$$= \int_1^3 ((1 - 2y + 2y^2 - y^3) - (1 - 2y + y^3))dy = \int_1^3 (2y^2 - 2y^3)dy = \left[\frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{2} \right]_1^3 = -\frac{68}{3}.$$

Úlohy k samostatnému řešení

4. Vypočtěte dvojrozměrné integrály v oblasti Ω :

a) $\iint_\Omega (5x^2 - 2xy)dxdy$, Ω je ΔABC, $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (0,1)$,

b) $\iint_\Omega x^3 y^2 dxdy$, Ω je dána nerovnicí $x^2 + y^2 \le 4$,

c) $\iint_\Omega (x - y)dxdy$, Ω je ohraničena přímkami $y = 0$, $y = x$, $x + y = 2$,

d) $\iint_\Omega xy\, dxdy$, Ω je dána nerovnicemi $x^2 + 4y^2 \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$,

e) $\iint_\Omega xy\, dxdy$, Ω je ohraničena čarami $y^2 = 2x$, $x = 2$,

f) $\iint_\Omega \frac{x}{y} dxdy$, Ω je dána nerovnicemi $1 \le y \le x \le 2$,

g) $\iint_\Omega e^{\frac{x}{y}} dxdy$, Ω je ohraničena čarami $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$,

h) $\iint_\Omega ye^x dxdy$, Ω je dána nerovnicemi $y^2 \le x \le y + 2$,

i) $\iint_\Omega \frac{x^2}{y^2} dxdy$, Ω je dána nerovnicemi $x \le 3$, $y \le 4x$, $y \ge \frac{1}{x}$,

j) $\iint_\Omega (x^2 + y^2)dxdy$, Ω je dána nerovnicemi $y \le x$, $x \le 1$, $y \ge 0$,

k) $\iint_\Omega \frac{x}{3}\,dxdy$, Ω je ohraničena čarami $x = 2 + \sin y, x = 0, y = 0, y = 2\pi$,

l) $\iint_\Omega \cos(x+y)\,dxdy$, Ω je dána nerovnicemi $y \geq x, x \geq 0, y \leq \pi$,

m) $\iint_\Omega 6xy\,dxdy, \Omega$ je ohraničena čarami $y = 0, x = 2, y = x^2$,

n) $\iint_\Omega x\cos(xy)\,dxdy$, Ω je ohraničena čarami $x = 1, x = 2, y = \frac{\pi}{2}, y = \frac{2\pi}{x}$,

o) $\iint_\Omega x^2 dxdy$, Ω je ohraničena čarami $y = \frac{16}{x}, y = x, x = 8$,

p) $\iint_\Omega x(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dxdy$, Ω je ohraničena čarami $y = x^2, y = 4, x = 0, (x \geq 0)$, ✖

(zvažte pořadí integrace),

q) $\iint_\Omega (3x-2y)dxdy$, $\Omega : x^2 + y^2 \leq 1$,

r) $\iint_\Omega \frac{1}{1+x^2}\,dxdy$, Ω je $\Delta ABC, A = (0,0), B = (1,1), C = (0,1)$,

s) $\iint_\Omega xy\,dxdy$, Ω je ohraničena čarami $y = \sqrt{x}, y = 6 - x, y = 0$,

t) $\iint_\Omega (x-1)dxdy$, Ω je ohraničena čarami $y = x, y = x^3$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

4. **a)** 3; **b)** 0; **c)** $\frac{2}{3}$; **d)** $\frac{1}{2}$; **e)** 0; **f)** $2\ln 2 - \frac{3}{4}$; **g)** $e^2 - \frac{3}{2}$; **h)** $\frac{1}{2}e^4 + \frac{5}{2}e$; **i)** $\frac{1225}{64}$; **j)** $\frac{1}{3}$;

k) $\frac{3\pi}{2}$; **l)** –2; **m)** 32; **n)** $-\frac{2}{\pi}$; **o)** 576; **p)** $\frac{1}{2}(\sqrt{17}-1)$; **q)** 0; **r)** $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$; **s)** $\frac{50}{3}$; **t)** $-\frac{1}{2}$.

Kontrolní otázky

1. Uzavřená oblast je oblast v rovině nebo prostoru, která

a) je souvislá,

b) je souvislá a obsahuje všechny svoje hromadné body,

c) obsahuje všechny svoje hromadné body,

d) obsahuje všechny svoje izolované body.

2. Která z následujících množin je uzavřená oblast?

a) Kruh bez svého středu, b) čtverec bez vrcholů,

c) kruh, d) parabola.

3. Která z následujících oblastí je zapsána jako oblast I. typu, normální vzhledem k ose x ?

a) $\Omega: 0 \le y \le 3,\ 0 \le x \le 3-y,$ b) $\Omega: 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3-x,$

c) $\Omega: 0 \le y \le 3-x,\ 0 \le x \le 3-y,$ d) $\Omega: 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le x+y=3.$

4. Která z následujících oblastí je zapsána jako oblast II. typu, normální vzhledem k ose y ?

a) $\Omega: 0 \le y \le 3,\ 0 \le x \le 3-y,$ b) $\Omega: 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3-x,$

c) $\Omega: 0 \le y \le 3-x,\ 0 \le x \le 3-y,$ d) $\Omega: 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le x+y=3$

5. Záměna pořadí integrace v $\int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx$ znamená řešit tento integrál ve tvaru

a) $\int_c^d dx \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dy,$ b) $\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \int_c^d dy,$

c) $\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \int_c^d f(x,y)dy,$ d) $\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$

6. Převést dvojrozměrný integrál $\iint_\Omega f(x,y)dxdy$, přičemž oblast Ω je I. typu, normální

vzhledem k ose x, na dvojnásobný, znamená zapsat jej ve tvaru

a) $\int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx,$ b) $\int_c^d f(x,y)dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx,$

c) $\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy,$ d) $\int_a^b f(x,y)dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy.$

7. Který z následujících výrazů je správným zápisem dvojnásobného integrálu na oblasti Ω I. typu?

a) $\iint_{\Omega} xydxdy$,

b) $\iint_{\Omega} (x+y)dxdy$,

c) $\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} ydy$,

d) $\int_c^d ydy + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} xdx$.

8. Jaký geometrický význam má $\iint_{\Omega} (x^2+y^2)dxdy$?

a) Obsah oblasti Ω,

b) obvod oblasti Ω,

c) objem tělesa, jehož spodní podstavou je oblast Ω, které je shora ohraničeno funkcí $z = x^2 + y^2$,

d) povrch tělesa, jehož spodní podstavou je oblast Ω, které je shora ohraničeno funkcí $z = x^2 + y^2$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. c); 3. b); 4. a); 5. d); 6. c); 7. c); 8. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je potřeba prostudovat kapitolu 1.2 znovu.

Kontrolní test

1. Zaměňte pořadí integrace v integrálu $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} ydy$.

a) $\int_0^2 ydx \int_0^{2-x} xdy$,

b) $\int_0^{2-x} ydy \int_0^2 xdx$,

c) $\int_0^2 ydy \int_0^{2-y} xdx$,

d) $\int_0^{2-y} xdx \int_0^2 ydy$.

2. Vypočítejte integrál $\iint_{\Omega} dxdy,\ \Omega = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\right\}$.

a) 4π, b) 4,

c) 1, d) $\frac{\pi}{4}$.

3. Vypočítejte integrál $\iint_{\Omega} xdxdy,$ je-li oblast Ω ohraničena čarami $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$.

a) 6, b) $\frac{1}{6}$,

c) $\frac{1}{3}$, d) 3.

4. Vypočítejte integrál $\iint_{\Omega} ydxdy,$ je-li oblast Ω ohraničena čarami $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$.

a) 6, b) $\frac{1}{6}$,

c) $\frac{1}{3}$, d) 3.

5. Vypočítejte integrál $\iint_{\Omega} dxdy,$ je-li oblast Ω ohraničena čarami $x = 0,\ x - y = 1,\ x + y = 1$.

a) 1, b) 2,

c) 3, d) 4.

6. Vypočítejte integrál $\iint_{\Omega} \frac{x^2}{y^2} dxdy,$ je-li oblast Ω ohraničena čarami $x = 2,\ y = x,\ xy = 1$.

a) 9, b) $\frac{9}{4}$,

c) $\frac{4}{9}$, d) 4.

7. Vypočítejte integrál $\iint_{\Omega} (x^2 + y)dxdy,$ je-li oblast Ω ohraničena čarami $y = x^2,\ x = y^2$.

a) 33, b) $\frac{140}{33}$,

c) $\frac{33}{140}$, d) 140.

8. Vypočítejte integrál $\iint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy$, je-li oblast Ω ohraničena čarami

$x=0,\ y=0,\ x+y=1.$

a) 9, b) $\frac{1}{4}$,

c) $\frac{1}{6}$, d) 4.

9. Vypočítejte integrál $\iint_{\Omega}y^2dxdy$, je-li oblast Ω ohraničena čarami

$x=0,\ y=0,\ 2x+3y=12.$

a) 28, b) 42,

c) 12 d) 32.

10. Vypočítejte integrál $\iint_{\Omega}(4-y^2)dxdy$, je-li oblast Ω ohraničena čarami $y=2,\ 2y=x^2.$

a) $\frac{256}{7}$, b) $\frac{256}{21}$,

c) $\frac{56}{21}$, d) $\frac{156}{21}$.

Výsledky testu

1. c); 2. a); 3. b); 4. b); 5. a); 6. b); 7. c); 8. c); 9. d); 10. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je potřeba prostudovat kapitolu 1.2 znovu.

Shrnutí lekce

V této kapitole jste se naučili vypočítat dvojrozměrný integrál v uzavřené oblasti Ω. Oblast Ω je k určení mezí nutno zapsat jako oblast I. typu, normální vzhledem k ose x, kterou obecně popisují nerovnice $a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)$, nebo jako oblast II. typu, normální vzhledem k ose y, kterou obecně popisují nerovnice $c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)$. Teprve pak

můžeme dvojrozměrný integrál v uzavřené oblasti Ω převést na integrál dvojnásobný, ve kterém vnější integrál vždy musí mít konstantní meze:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy,$$

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx.$$

Důležitým předpokladem pro výpočet úloh je opět znalost základních integračních metod. Navíc je nutno zopakovat si pro určení integračních mezí analytickou geometrii v rovině (rovnice přímky a rovnice kuželoseček).

1.3. Transformace v dvojrozměrném integrálu

Průvodce studiem

V příkladu 1.2.5 jsme ukázali, že vyjádření integrační oblasti, kterou tvoří kruh nebo jeho část, je v kartézských souřadnicích obtížné. Použijeme-li v takovém případě k řešení polární souřadnice, stává se vyjádření oboru integrace mnohem snadnějším a rovněž výpočet dvojnásobného integrálu se obvykle značně zjednoduší.

Cíle

V této kapitole se naučíme počítat dvojrozměrné integrály v případech, kdy integrační oblastí je kruh nebo jeho část, případně elipsa nebo její část.

Předpokládané znalosti

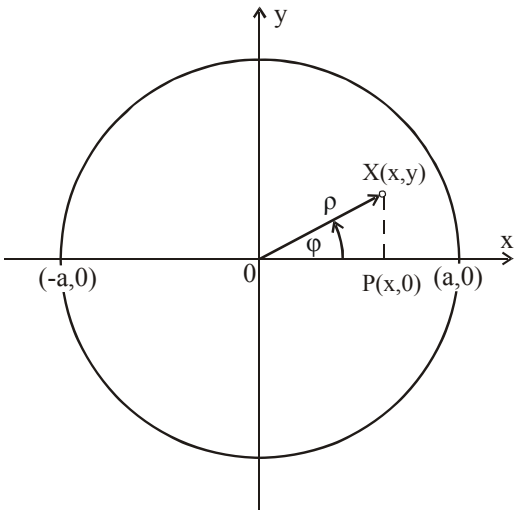
Stejně jako v předchozích kapitolách budeme potřebovat znalost základních integračních metod.

K vyjádření integračního oboru je zapotřebí tentokrát zopakovat zejména rovnice přímky, kružnice a elipsy.

Použijeme vše, co jsme se naučili v předchozích kapitolách.

Výklad

Dvojrozměrné integrály, jejichž integrační oblastí je kruh, případně část kruhu, lze jednoduše vyřešit ***transformací do polárních souřadnic.***



Obr. 13

Kartézské souřadnice x, y bodu nahradíme polárními souřadnicemi $\rho, \varphi,$ v nichž ρ znamená vzdálenost bodu o souřadnicích (x, y) od počátku soustavy souřadnic ($\rho \geq 0$) a φ označuje orientovaný úhel, měřený od kladné části osy x po průvodič bodu (x, y) v kladném smyslu, viz obr. 13.

Transformační rovnice odvodíme v prvním kvadrantu z trojúhelníka OPX (viz obr. 13), v němž platí:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho}.$$

Odtud pro $\rho \neq 0$ platí $\quad x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$

Platnost posledních dvou rovnic lze dokázat i ve zbývajících kvadrantech.

Transformační rovnice při přechodu z kartézských souřadnic do polárních souřadnic mají tvar

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{5}$$

Součin diferenciálů $dxdy$ v dvojrozměrném integrálu nahradíme výrazem $|J|\,d\rho\,d\varphi$,

v němž se výraz $J = J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$

nazývá ***jakobián transformace***.

Pro dvojrozměrný integrál pak platí

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\varphi\, d\rho.$$

Oblast Ω^* je obrazem oblasti Ω v polárních souřadnicích. Například kruh se středem v počátku a poloměrem a, $\Omega: \left\{(x,y): x^2 + y^2 \leq a^2\right\}$, se zobrazí na obdélník o délkách stran ρ a 2π, $\Omega^*: \{(\rho,\varphi): \rho \in (0, a>, \varphi \in <0, 2\pi)\}$.

Poznámka

Transformace do polárních souřadnic je speciálním případem zobrazení oblasti Ω do oblasti Ω^*, který pro zájemce o bližší pochopení uvádíme dále.

Transformace v dvojrozměrném integrálu, kterou zavedeme obecně rovnicemi

$$x = u(r,s) \qquad y = v(r,s), \quad \text{kde } r, s \text{ jsou nové proměnné,} \tag{6}$$

zobrazí uzavřenou oblast Ω^* do množiny Ω, která nemusí být nutně oblastí.

Jestliže každým dvěma různým bodům $A^* = (r_1, s_1), B^* = (r_2, s_2)$ z oblasti Ω^* jsou rovnicemi (6) přiřazeny opět dva různé body $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ množiny Ω, mluvíme o ***prostém*** neboli ***injektivním zobrazení oblasti*** Ω^* ***na množinu*** Ω, resp. ***do množiny*** Ω podle toho, zda všechny body z množiny Ω mají, resp. nemají vzor v oblasti Ω^*. Prosté zobrazení oblasti Ω^* na množinu Ω se nazývá ***vzájemně jednoznačné*** nebo ***bijektivní***.

Jsou-li přitom funkce $u(r,s), v(r,s)$ spojité na oblasti Ω^*, mluvíme o ***spojitém zobrazení obou množin***.

Mají-li tyto funkce na oblasti Ω^* spojité parciální derivace prvního řádu, mluvíme o ***diferenciabilním zobrazení***. Přitom se determinant tvaru

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{\partial u}{\partial s} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} & \dfrac{\partial v}{\partial s} \end{vmatrix} \tag{7}$$

nazývá jakobián tohoto zobrazení.

Lze dokázat, že je-li v některém bodě $P_0 = (r_0, v_0)$ jakobián $J \neq 0$, pak zobrazení určitého okolí bodu P_0 do oblasti Ω je prosté.

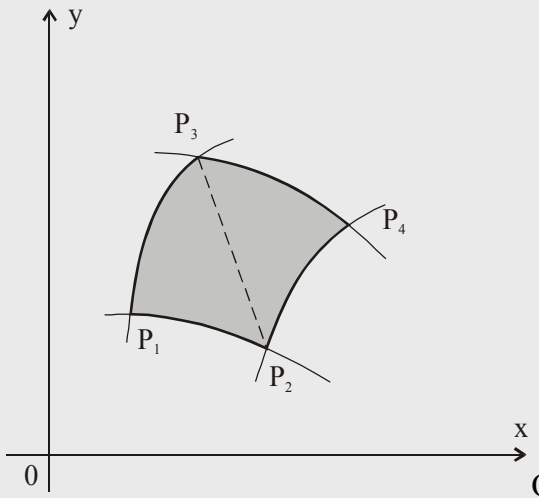
Věta 1.3.1.

1. Nechť se vnitřek oblasti Ω^* zobrazí pomocí rovnic $x = u(r,s), y = v(r,s)$ vzájemně jednoznačně na oblast Ω, zatímco zobrazení hraniční křivky oblasti Ω^* nemusí být prosté.
2. Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá a ohraničená na uzavřené oblasti Ω a funkce $u(r,s), v(r,s)$ mají spojité parciální derivace prvního řádu na oblasti $\Omega^\bullet$, v níž leží oblast Ω^* i se svou hraniční křivkou.

3. Nechť všude uvnitř oblasti Ω^* je jakobián zobrazení nenulový, tj. $J(u,v) \neq 0$.

Pak platí $$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega^*} f(u(r,s),v(r,s))\,|J(u,v)|\,drds. \qquad (8)$$

Důkaz uvedené věty nebudeme uvádět. Vysvětlíme jen, proč je *dxdy* nahrazeno výrazem $|J(u,v)|\,drds$.



Obr. 14

Transformací $x = u(r,s), y = v(r,s)$ se oblast Ω^* zobrazí na oblast Ω. Element *drds* oblasti Ω^* přejde v element oblasti Ω, viz obr. 14. Pro tuto oblast s vrcholy $P_i = (x_i, y_i), i = 1,2,3,4,$ platí $x_1 = u(r,s)$. Podle věty o střední hodnotě diferenciálního počtu (Lagrangeovy), viz [3], [8], dostaneme $u(r+dr,s) - u(r,s) = u'_r.\,(r+dr-r)$, odtud pak $x_2 = u(r+dr,s) = u(r,s) + u'_r.dr$. Podobně $x_3 = u(r,s+ds) = u(r,s) + u'_s ds$, $y_1 = v(r,s)$, $y_2 = v(r+dr,s) = v(r,s) + v'_r dr$ a $y_3 = v(r,s+ds) = v(r,s) + v'_s ds$. Obsah $\Delta\Omega$ oblasti Ω můžeme pro velmi malé přírůstky $|dr|, |ds|$ určit jako dvojnásobek obsahu trojúhelníka o vrcholech P_1, P_2, P_3. Obsah $\Delta\Omega$ určíme jako objem rovnoběžnostěnu se čtyřúhelníkovou podstavou $P_1 = (x_1, y_1, 0)$, $P_2 = (x_2, y_2, 0)$, $P_3 = (x_3, y_3, 0)$, $P_4 = (x_4, y_4, 0)$

a vrcholem horní podstavy $P'_1 = (x_1, y_1, 1)$, tj. výškou v = 1. Užijeme vlastnosti smíšeného součinu vektorů $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P'_1}$ a dostaneme

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\overrightarrow{P_1P_3}\times\overrightarrow{P_1P'_1})=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)=$$

$$=(x_2y_3-x_3y_2)-(x_1y_3-x_3y_1)+(x_1y_2-x_2y_1)=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & u & v\\ 1 & u+u'_r.dr & v+v'_r.dr\\ 1 & u+u'_s.ds & v+v'_s.ds\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & u & v\\ 0 & u'_r.dr & v'_r.dr\\ 0 & u'_s.ds & v'_s.ds\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}u'_r & u'_s\\ v'_r & v'_s\end{vmatrix}drds=J(u,v)\,drds$$

Je tedy $\Delta\Omega=|J(u,v)|\,drds.$

Poznámka

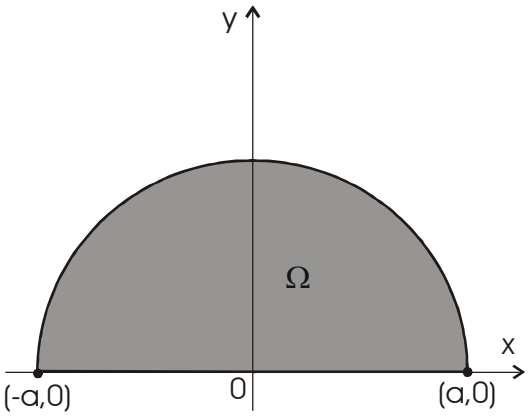
Předchozí úvahu lze využít při transformaci do polárních souřadnic ve dvojrozměrném integrálu a při transformacích do cylindrických a sférických souřadnic v trojrozměrném integrálu. Jak v transformaci do polárních souřadnic tak v transformacích do cylindrických a sférických souřadnic nastávají problémy s jednoznačností zobrazení na hranicích oblastí Ω, Ω^*. Může se stát, že po transformaci nebude oblast uzavřená, a proto intervaly pro ohraničení proměnných nebudou vždy uzavřené. Pro výpočet zadaných integrálů však tato skutečnost nemá praktický význam.

Řešené úlohy

Příklad 1.3.1. Proveďte transformaci do polárních souřadnic a vypočítejte integrál

$$\iint_{\Omega} y\,dxdy,\ \Omega: x^2+y^2\le a^2,\ y\ge 0.$$

Řešení: Oblast Ω tvoří horní polovina kruhu se středem v počátku a poloměrem a (souřadnice y je nezáporná v prvním a druhém kvadrantu). Pro každý bod (x,y) oblasti Ω při transformaci do polárních souřadnic platí $0<\rho\le a,\ 0\le\varphi<\pi$, viz obr. 15. Uvedené nerovnice určují oblast Ω^*, integrační meze obou proměnných jsou konstantní, proto integrujeme na obdélníku a dosazením podle (5) dostaneme



Obr. 15

$$\iint_{\Omega} y\,dx\,dy = \iint_{\Omega^*} \rho\sin\varphi\ \rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^a \rho^2 d\rho \int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^a \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{a^3}{3}\left[-(-1)-(-1)\right] = \frac{2a^3}{3}.$$

Příklad 1.3.2. Určete nerovnice pro polární souřadnice, je-li oblast Ω ohraničena kružnicí

$x^2 + y^2 = 2ax.$

Řešení: Rovnici kružnice nejprve upravíme doplněním na čtverec:

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0, \qquad (x^2 - 2ax + a^2) + y^2 = 0 + a^2, \qquad (x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

To je rovnice kružnice se středem $S = (a, 0)$ a poloměrem a, která celá leží v prvním a čtvrtém kvadrantu, tedy $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, viz obr. 16.

Z vlastností zakresleného pravoúhlého trojúhelníka plyne $\cos\varphi = \frac{\rho}{2a}, \quad \rho = 2a\cos\varphi,$

tj. délka ρ se mění v závislosti na úhlu φ.

Meze pro proměnnou ρ lze určit rovněž dosazením transformačních rovnic (5) do hranice oblasti Ω:

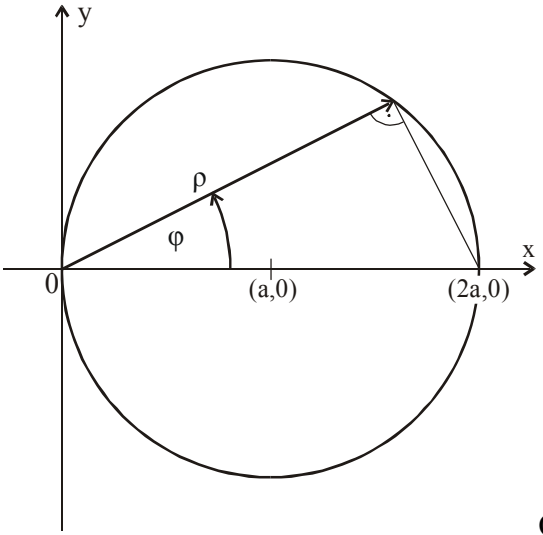
$$x^2 + y^2 = 2ax,\ \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 2a\rho\cos\varphi,\ \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2a\rho\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = 2a\rho\cos\varphi,\ \rho^2 - 2a\rho\cos\varphi = 0,\ \rho(\rho - 2a\cos\varphi) = 0$$

a odtud $\rho_1 = 0,\ \rho_2 = 2a\cos\varphi.$

Oblast Ω^* je určena nerovnicemi

$$\Omega^*: \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$
$$0 < \rho \le 2a\cos\varphi.$$



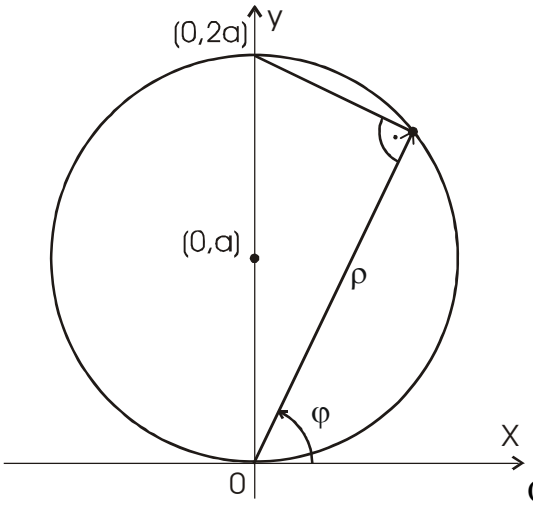
Obr. 16

Příklad 1.3.3. Určete nerovnice pro polární souřadnice, je-li oblast Ω ohraničena kružnicí $x^2 + y^2 = 2ay.$

Řešení: Rovnici kružnice nejprve upravíme doplněním na čtverec:

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0, \qquad x^2 + (y^2 - 2ay + a^2) = 0 + a^2, \qquad x^2 + (y-a)^2 = a^2.$$

To je rovnice kružnice se středem $S = (0, a)$ a poloměrem a, která celá leží v prvním a druhém kvadrantu, tedy $0 \le \varphi \le \pi$, viz obr. 17.



Obr. 17

Z vlastností pravoúhlého trojúhelníka plyne $\sin\varphi = \frac{\rho}{2a}$, $\rho = 2a\sin\varphi$, tj. délka ρ se opět mění v závislosti na úhlu φ.

Meze pro proměnnou ρ lze určit rovněž dosazením transformačních rovnic (5) do hranice oblasti Ω:

$$x^2+y^2=2ay,\ \ \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=2a\rho\sin\varphi,\ \ \rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=2a\rho\sin\varphi,$$

$$\rho^2=2a\rho\sin\varphi,\ \ \rho^2-2a\rho\sin\varphi=0,\ \ \rho(\rho-2a\sin\varphi)=0$$

a odtud $\rho_1=0,\ \ \rho_2=2a\sin\varphi.$

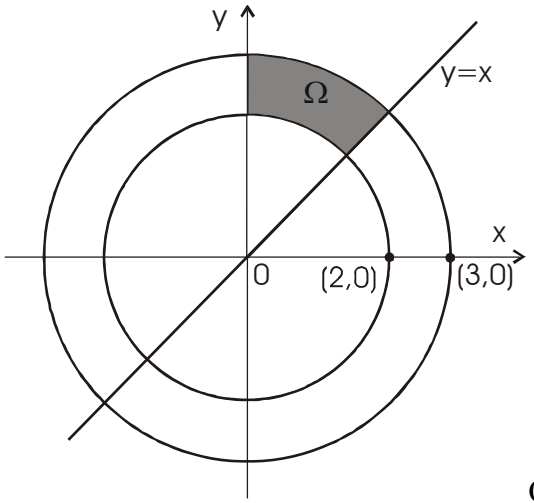
Oblast Ω^* je určena nerovnicemi

$$\Omega^*:\ \begin{array}{l}0\le\ \varphi\le\pi,\\ 0<\rho\le 2a\sin\varphi.\end{array}$$

Příklad 1.3.4. Proveďte transformaci do polárních souřadnic a vypočítejte integrál

$$\iint_\Omega xdxdy,\quad \Omega: x^2+y^2\ge 4,\ \ x^2+y^2\le 9,\ y\ge x,\ \ x\ge 0.$$

Řešení: Oblast Ω je ohraničena dvěma soustřednými kružnicemi (o poloměru $a_1=2, a_2=3$), přímkou $y=x$ (která je osou prvního a třetího kvadrantu a svírá tedy s kladným směrem osy x úhel $\varphi=\frac{\pi}{4}$) a osou y, viz obr. 18.



Obr. 18

Pro oblast Ω^* v polárních souřadnicích platí

$$\Omega^*:\ \begin{array}{l}\frac{\pi}{4}\le\ \varphi\le\frac{\pi}{2},\\ 2\le\rho\le 3.\end{array}$$

Je zřejmé, že integrace v polárních souřadnicích (5) je jednodušší než v kartézských souřadnicích, protože nyní integrujeme na obdélníku.

$$\iint_{\Omega^*} \rho\cos\varphi\ \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_2^3 \rho^2 d\rho = \left[\sin\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_2^3 = \frac{19}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Příklad 1.3.5. Vypočtěte dvojrozměrný integrál

$$\iint_{\Omega} \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\, dxdy,\ \ \Omega: 1 \le x^2+y^2 \le e.$$

Řešení: Oblast Ω je mezikruží ohraničené kružnicemi $x^2+y^2=1$ a $x^2+y^2=e.$ Užijeme proto transformaci do polárních souřadnic (5). Pro transformovanou oblast Ω^* platí nerovnice $\Omega^*:\ 1 \le \rho \le \sqrt{e},\ 0 \le \varphi < 2\pi$.

$$\iint_{\Omega^*} \frac{\ln(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi)}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\ \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_1^{\sqrt{e}} \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\ln(\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi))}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln\rho^2}{\rho}\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln\rho}{\rho}\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\left[\frac{\ln^2\rho}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi\ln^2\sqrt{e} = 2\pi(\frac{1}{2}\ln e)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Při řešení jsme použili vztah $\ln\rho^2 = 2\ln\rho$.

Vnější integrál jsme vyřešili substitucí $\ln\rho = t,\ \frac{1}{\rho}d\rho = dt$.

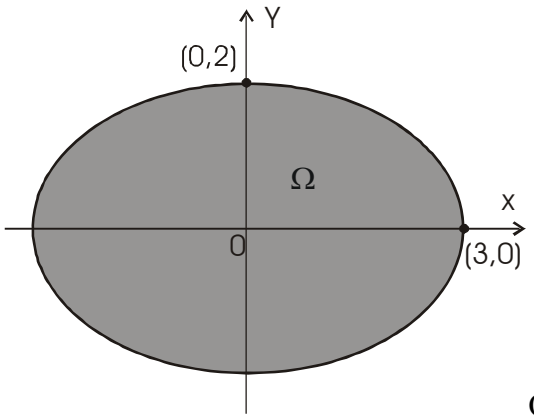
Příklad 1.3.6. Vypočtěte dvojrozměrný integrál

$$\iint_{\Omega} \sqrt{4-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}\, dxdy,$$ je-li integrační oblast Ω ohraničena křivkou $4x^2+9y^2=36.$

Řešení: Rovnici hranice oblasti Ω upravíme na tvar $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,$ ze kterého je vidět, že jde o elipsu se středem v počátku a poloosami o délkách $a=3, b=2,$ viz obr. 19.

V takovém případě ke zjednodušení výpočtu s výhodou používáme tzv. ***zobecněné polární souřadnice***, které mají obecně tvar

$$x = a\rho\cos\varphi,\quad y = b\rho\sin\varphi\,. \qquad (9)$$



Obr. 19

Pro jakobián transformace snadno odvodíme vztah

$$J = J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

V našem případě platí (pro $a = 3, b = 2$):

$x = 3\rho\cos\varphi, \quad y = 2\rho\sin\varphi, \quad J = 2.3\rho = 6\rho.$

Z obr. 19 je zřejmé, že platí $0 \le \varphi < 2\pi$. Meze pro ρ zjistíme dosazením transformačních rovnic do analytického vyjádření hranice oblasti Ω.

$4(3\rho\cos\varphi)^2 + 9(2\rho\sin\varphi)^2 = 36,$ odtud po úpravě dostaneme $\rho^2 = 1, \rho = 1\,(\rho > 0).$

Proto platí $0 < \rho \le 1.$ Transformovaná oblast Ω^* tedy představuje obdélník:

$$\Omega^*: \begin{array}{l} 0 \le \varphi < 2\pi, \\ 0 < \rho \le 1. \end{array}$$

Zadaný integrál nyní snadno vyřešíme.

$$\iint_{\Omega} \sqrt{4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}\, dxdy = \iint_{\Omega^*} \sqrt{4 - \frac{(3\rho\cos\varphi)^2}{9} - \frac{(2\rho\sin\varphi)^2}{4}}\, 6\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \iint_{\Omega} \sqrt{4-\rho^2}\, 6\rho\, d\rho\, d\varphi = 6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{4-\rho^2}\,\rho\, d\rho = 6.2\pi.(-\frac{1}{2})\left[\frac{(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= 4\pi(8 - 3\sqrt{3}).$$

Integrál v proměnné ρ jsme vyřešili substitucí

$$4 - \rho^2 = t, \; -2\rho\, d\rho = dt, \; \rho\, d\rho = -\frac{1}{2}dt\,.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte dané dvojrozměrné integrály v oblasti Ω transformací do polárních souřadnic:

a) $\iint\limits_{\Omega}(1-2x-3y)dxdy,\ \Omega: x^2+y^2\le 2,$

b) $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy,\ \Omega:(x-4)^2+y^2\le 16,$

c) $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy,\ \Omega: x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,$

d) $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy,\ \Omega: x^2+y^2\le 2x,$

e) $\iint\limits_{\Omega}e^{-(x^2+y^2)}dxdy,\ \Omega: x\ge 0,\ x^2+y^2\le 9,$

f) $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy,\ \Omega: x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1,$

g) $\iint\limits_{\Omega}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\ \Omega:\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2,$

h) $\iint\limits_{\Omega}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy,\ \Omega: x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,$

i) $\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy,\ \Omega: x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0,\ y\le x,$

j) $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\ \Omega:(x-1)^2+y^2\le 1,\ y\ge 0.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 2π ; **b)** 384π ; **c)** $\frac{1}{6}\pi$; **d)** $\frac{8}{9}(3\pi-4)$; **e)** $\frac{\pi}{2}(1-e^{-9})$; **f)** $\frac{\pi}{8}(\pi-2)$; **g)** $-6\pi^2$; **h)** $\frac{\pi^2}{16}$; **i)** $\frac{\pi}{8}\ln 5$; **j)** $\frac{16}{9}$.

Kontrolní otázky

1. Polární souřadnice s výhodou používáme v případě, kdy integrační oblastí dvojného integrálu je:

a) Obdélník, b) kruh,

c) kosočtverec, d) oblast ohraničená parabolou a úsečkou.

2. Polární poloměr ρ může nabývat hodnot:

a) Jen celočíselných, b) jen kladných,

c) jen záporných, d) reálných.

3. Transformační rovnice z kartézské do polární soustavy souřadnic mají tvar:

a) $x = \rho + \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi$, b) $x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho + \sin\varphi$,

c) $x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi$, d) $x = \rho \sin\varphi,\ y = \rho \cos\varphi$.

4. Kruh se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem a popisují v polární soustavě souřadnic nerovnice:

a) $0 < \rho \le a, 0 \le \varphi < 2\pi$, b $-a \le \rho \le a, 0 \le \varphi < 2\pi$,

c) $0 < \rho \le a, 0 \le \varphi \le \pi$, d) $0 < \rho \le a, 0 < \varphi \le a$.

5. Kruh se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem a se zobrazí v polární soustavě souřadnic jako:

a) Kosočtverec b) kruh,

c) obdélník, d) oblast ohraničená parabolou a úsečkou.

6. Integrand $x^2 + y^2$ nahradíme v polárních souřadnicích výrazem:

a) ρ, b) φ,

c) ρ^2, d) φ^2.

7. Součin diferenciálů $dxdy$ nahradíme v polárních souřadnicích výrazem:

a) $\rho^2 d\rho\, d\varphi$, b) $(\rho + \varphi) d\rho\, d\varphi$,

c) $\rho\varphi\, d\rho\, d\varphi$, d) $\rho\, d\rho\, d\varphi$.

8. Nerovnice pro polární souřadnice, je-li oblast Ω ohraničena kružnicí $x^2 + y^2 = 6y$, mají tvar:

a) $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 < \rho \le 6\cos\varphi,$ b) $-\pi \le \varphi \le \pi,\ 0 < \rho \le 36\sin\varphi,$

c) $0 \le \varphi \le \pi,\ 0 < \rho \le 12\sin\varphi,$ d) $0 \le \varphi \le \pi,\ 0 < \rho \le 6\sin\varphi.$

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. b); 3. c); 4. a); 5. c); 6. c); 7. d); 8. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 1.3 znovu.

Kontrolní test

1. Integrál $\iint_{\Omega} x dxdy,\ \Omega:\ 4 \le x^2 + y^2 \le 16,\ x \ge 0$, je roven

a) 3, b) 112,

c) $\frac{3}{112}$, d) $\frac{112}{3}$.

2. Integrál $\iint_{\Omega} (x+y) dxdy,\ \Omega:\ 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge x,\ y \ge -x$, je roven

a) 26, b) $\sqrt{2}$,

c) $\frac{26}{3}\sqrt{2}$, d) $\frac{26}{3}$.

3. Integrál $\iint_{\Omega} (2x+y) dxdy,\ \Omega:\ 4x^2 + y^2 \le 16,\ y \ge x,\ y \ge 0$, je roven

a) 32, b) $32\sqrt{2}$,

c) $\frac{32}{3}\sqrt{2}$, d) $\frac{32}{3}$.

4. Integrál $\iint_{\Omega} \ln(1+x^2+y^2) dxdy,\ \Omega:\ x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,$ je roven

a) $\frac{5\pi}{4}(5\ln 5 - 4)$, b) $\frac{\pi}{4}(5\ln 5 - 4)$,

c) $\frac{5\pi}{4}(5\ln 5 + 4)$, d) $\frac{5\pi}{4}(\ln 5 - 4)$.

5. Integrál $\iint_{\Omega} y dxdy,\ \Omega:\ x^2 + y^2 \le 2x,\ y \ge 0,$ je roven

a) 3, b) 2,

c) $\frac{3}{2}$, d) $\frac{2}{3}$.

6. Integrál $\iint_{\Omega} y dxdy,\ \Omega:\ x^2+y^2 \le 2x,\ y \ge -x,$ je roven

a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{5}{6}$,

c) $\frac{1}{6}$, d) $\frac{2}{3}$.

7. Integrál $\iint_{\Omega} (1-2x-2y)dxdy,\ \Omega:\ x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0, y \le x,$ je roven

a) $\frac{5\pi}{4}-4$, b) $\frac{27\pi}{8}-18$,

c) $\frac{27\pi}{4}+4$, d) $\frac{27\pi}{8}$.

8. Integrál $\iint_{\Omega} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} dxdy,\ \Omega:\ 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ 0 \le \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\sqrt{3},$ je roven

a) $\frac{\pi}{6}$, b) $\frac{\pi}{8}+\pi$,

c) $\frac{\pi^2}{4}$, d) $\frac{\pi^2}{6}$.

9. Integrál $\iint_{\Omega} xydxdy,\ \Omega:\ b^2x^2+a^2y^2 \le a^2b^2,\ y \ge x \ge 0,\ a>0,\ b>0,$ je roven

a) $\frac{a^2b^2}{16}$, b) $\frac{a^2b^2}{6}$,

c) $\frac{(ab)^2}{6}$, d) $\frac{a^2b^2}{8}$.

10. Integrál $\iint_{\Omega} xydxdy,\ \Omega:\ x^2+y^2 \le 4y,\ y \ge x \ge 0,$ je roven

a) $\frac{23}{3}$, b) $\frac{25}{3}$,

c) $\frac{28}{3}$, d) $\frac{2}{3}$.

Výsledky testu

1. d); 2. c); 3. d); 4. b); 5. d); 6. c); 7. b); 8. d); 9. a); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je potřeba prostudovat kapitolu 1.3 znovu.

Shrnutí lekce

V polárních souřadnicích počítáme dvojrozměrné integrály, jejichž integrační oblastí je kruh nebo část kruhu. Kartézské souřadnice x, y bodu nahradíme polárními souřadnicemi ρ, φ, kde ρ znamená vzdálenost bodu o souřadnicích (x, y) od počátku soustavy souřadnic a φ označuje orientovaný úhel, měřený od kladného směru osy x po průvodič bodu (x, y) v kladném smyslu. Transformační rovnice při přechodu z kartézských souřadnic do polárních souřadnic mají tvar $x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$. Součin diferenciálů $dxdy$ v dvojrozměrném integrálu nahradíme výrazem $\rho \, d\rho \, d\varphi$, ve kterém ρ je jakobián transformace.

1.4. Aplikace dvojrozměrného integrálu

Průvodce studiem

Zatím jsme se naučili počítat dvojrozměrný integrál na obdélníku a na obecné rovinné oblasti, aniž jsme věděli, k čemu nám naše znalosti budou užitečné. V této kapitole si ukážeme, proč jsme vlastně dvojrozměrný integrál studovali. Poznáme jeho využití v geometrii při výpočtu metrických úloh a ve fyzice při výpočtu fyzikálních veličin, které charakterizují hmotné rovinné oblasti.

Cíle

V této kapitole se naučíme využívat Riemannův dvojrozměrný integrál v geometrii a fyzice. Naučíme se vypočítat objem tělesa nad oblastí Ω, plošný obsah rovinné oblasti Ω a obsah plochy $z = f(x, y)$ nad oblastí Ω. Z fyzikálních aplikací poznáme výpočet hmotnosti a souřadnic těžiště hmotných rovinných oblastí Ω, určení statických momentů a momentů setrvačnosti hmotných rovinných oblastí Ω.

Předpokládané znalosti

Využijeme všechny poznatky, které jsme získali v předchozích kapitolách.

Opět se neobejdeme bez znalosti základních integračních metod a analytického vyjádření přímky a kuželoseček v rovině.

1.4.1. Objem tělesa

Výklad

Jak bylo uvedeno v části 1.1, znamená $\iint_D f(x,y)dxdy$, kde D je obdélník a $f(x,y) \geq 0$, objem hranolu s obdélníkovou podstavou D, který je shora ohraničen plochou $z = f(x,y)$, viz obr. 1. Pokud místo obdélníka D budeme mít oblast Ω, pak $\iint_\Omega f(x,y)dxdy$ znamená objem válcovitého tělesa nad oblastí Ω, které je shora ohraničeno plochou $z = f(x,y)$, viz obr. 3. Definujeme tedy **objem válcovitého tělesa nad oblastí** Ω, které je shora, resp. zdola ohraničeno plochou $z = f(x,y)$, vztahem

$$V = \iint_{\Omega} |f(x,y)|\,dxdy. \qquad (10)$$

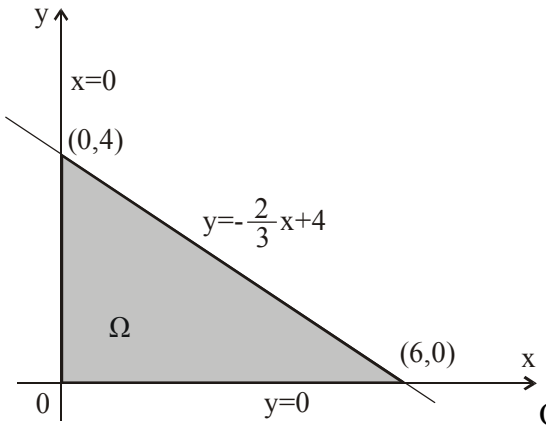
Nyní můžeme například úlohu 4. d) v kapitole 1.2 formulovat takto: Určete objem tělesa, které je ohraničeno plochami $z = xy,\ x^2 + 4y^2 = 4,\ z = 0$ pro $x \geq 0,\ y \geq 0.$

Řešené úlohy

Příklad 1.4.1. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami

$2x + 3y = 12,\ 2z = y^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Řešení: Rovina $z = 0$ je rovina podstavy válcovitého tělesa.



Obr. 20

Roviny $x = 0,\ y = 0,\ 2x + 3y = 12$ protínají rovinu $z = 0$ v přímkách $x = 0,\ y = 0,\ 2x + 3y = 12$, které určují hranice oblasti Ω. Přímku $2x + 3y = 12$ převedeme na úsekový tvar $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$. Odtud je zřejmé, že tato přímka protíná osu x v bodě $(6,0)$ a osu y v bodě $(0,4)$, viz obr. 20.

Plocha $z = \frac{y^2}{2}$ ohraničuje těleso shora. $\frac{y^2}{2} \geq 0$ pro všechny body $(x,y) \in \Omega$. Obvykle je třeba zjistit, zda průniková čára této plochy s rovinou $z = 0$ neprotíná oblast Ω v jejích vnitřních bodech. Položíme tedy $z = 0$ a dostaneme $\frac{y^2}{2} = 0,$ z toho $y = 0,$ a to je rovnice hraniční přímky oblasti Ω.

Integrační oblast Ω zapíšeme jako oblast I. typu, normální vzhledem k ose x.

$\Omega:\ 0 \leq x \leq 6,\quad 0 \leq y \leq 4 - \frac{2x}{3}.$

Podle vztahu (10) vypočítáme:

$$V=\iint_{\Omega}\frac{y^2}{2}\,dxdy=\frac{1}{2}\int_0^6 dx\int_0^{4-\frac{2}{3}x}y^2dy=\frac{1}{2}\int_0^6\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{4-\frac{2}{3}x}dx=\frac{1}{6}\int_0^6(4-\frac{2}{3}x)^3dx=$$

$$=\frac{1}{6}(-\frac{3}{2})\left[\frac{(4-\frac{2}{3}x)^4}{4}\right]_0^6=(-\frac{1}{16})(-256)=16.$$

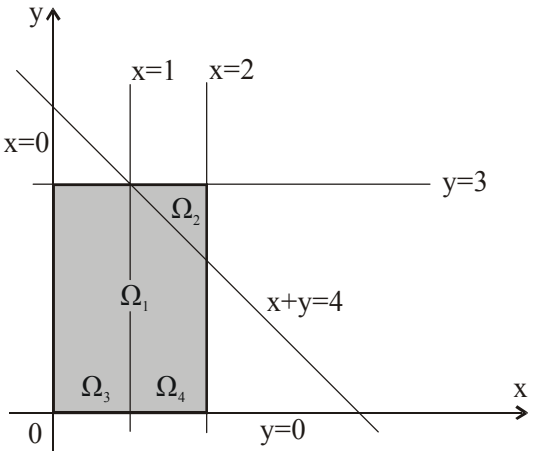
Při výpočtu integrálu lze použít substituci $4-\frac{2}{3}x=t,\ -\frac{2}{3}dx=dt,\ dx=-\frac{3}{2}dt$.

✖ **Příklad 1.4.2.** Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami

$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=2,\ y=3,\ x+y+z=4.$

Řešení: Oblast Ω je ohraničená přímkami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=2,\ y=3$. Rovina $z=4-x-y$ ohraničuje těleso shora, resp. zdola. Položíme $z=0$ a dostaneme $4-x-y=0$, tj. rovnici přímky, která protíná oblast Ω v jejích vnitřních bodech.

Přímka $x+y=4$ (v úsekovém tvaru $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$) rozdělí oblast Ω na oblasti Ω_1,Ω_2, viz obr. 21, přičemž $4-x-y>0$ pro $(x,y)\in\Omega_1$ a $4-x-y<0$ pro $(x,y)\in\Omega_2$.



Obr. 21

Oblast Ω_1 musíme dále rozdělit na oblasti Ω_3,Ω_4. Nyní můžeme zapsat oblasti $\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$ jako oblasti I. typu, normální vzhledem k ose x.

$$\Omega_2: \quad 1 \le x \le 2, \qquad \Omega_3: \quad 0 \le x \le 1, \qquad \Omega_4: \quad 1 \le x \le 2,$$
$$4 - x \le y \le 3, \qquad 0 \le y \le 3, \qquad 0 \le y \le 4 - x.$$

Dostaneme tedy podle (10)

$$V = \iint_{\Omega} |4 - x - y| \, dxdy = \iint_{\Omega_1} (4 - x - y) dxdy - \iint_{\Omega_2} (4 - x - y) dxdy =$$

$$= \iint_{\Omega_3} (4 - x - y) dxdy + \iint_{\Omega_4} (4 - x - y) dxdy - \int_{\Omega_2} (4 - x - y) dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^3 (4 - x - y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{4-x} (4 - x - y) dy - \int_1^2 dx \int_{4-x}^3 (4 - x - y) dy =$$

$$= \int_0^1 \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^3 dx + \int_1^2 \left(\left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{4-x} - \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{4-x}^3 \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{15}{2} - 3x \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{17}{2} - 5x + x^2 \right) dx = \left[\frac{15}{2} x - 3\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{17}{2} x - 5\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{15}{2} - \frac{3}{2} + 17 - 10 + \frac{8}{3} - \frac{17}{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{3} = \frac{28}{3}.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami:

a) $z = 0, x + y + z = 6, y = 0, 3x + 2y = 12$,

b) $x - y + z = 6, x + y = 2, x = y, y = 0, z = 0$,

c) $z = 0, z = x^2 + y^2, y = 1, y = 2x, y = 6 - x$,

d) $z = 0, z = x^2 + y^2, x = 0, y = 0, x + y = 1$,

e) $y = x^2, z = 0, y + z = 2$,

f) $z = 0, y = 1, y = x^2, x + y + z = 4$,

g) $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, x + z = 6$,

h) $z = 0, y = 0, y = \sqrt{x}, x + y = 2, z = xy$,

i) $z = 0, y = \ln x, y = \ln^2 x, y + z = 1$

j) $z = 0, 2y = x^2, z = 4 - y^2$,

k) $z=0, x=3, z=x^2-y^2$,

l) $z=0, y=2, y=-2, z=y^2-x^2$,

m) $z=0, x=0, y=0, 2x+y+z-5=0$,

n) $z=0, x=0, x=3, y=0, y=2, z=9x^2+y^2$,

o) $z=0, x=0, y=0, x+2y=4, x+8y-4z=0$,

p) $x^2+y^2=25, x^2+z^2=25$.

2. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného danými plochami užitím transformace do polárních souřadnic (5):

a) $z=1-x^2-y^2, z=0$ (Ω je průnik tělesa a roviny $z=0$),

b) $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=1$ (část vně válce),

c) $z=0, z=x, x^2+y^2=1$,

d) $z=0, x^2+y^2=2y, z=\sqrt{x^2+y^2}$,

e) $z=0, x^2+y^2-x=0, z=1-x^2-y^2$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 4; **b)** $\frac{16}{3}$; **c)** $\frac{2511}{32}$; **d)** $\frac{1}{6}$; **e)** $\frac{32\sqrt{2}}{15}$; **f)** $\frac{68}{15}$; **g)** $\frac{48\sqrt{6}}{5}$; **h)** $\frac{3}{8}$; **i)** $3e-8$; **j)** $\frac{256}{21}$;

k) 27; **l)** $\frac{32}{3}$; **m)** $\frac{125}{12}$; **n)** 170; **o)** $\frac{20}{3}$; **p)** $\frac{2000}{3}$.

2. a) $\frac{\pi}{2}$; **b)** $4\sqrt{3}\pi$; **c)** $\frac{4}{3}$; **d)** $\frac{32}{9}$; **e)** $\frac{5\pi}{32}$.

1.4.2. Obsah rovinné oblasti normální vzhledem k ose *x*, resp. *y*

Výklad

Jestliže bude $f(x,y)=1$, pak $\iint_\Omega dxdy$ znamená objem válcovitého tělesa nad oblastí Ω, které je shora ohraničeno rovinou $z=1$. Pro **obsah oblasti** Ω, tedy platí vztah

$$P=\iint_\Omega dxdy. \qquad (11)$$

Řešené úlohy

Příklad 1.4.3. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 4 - x^2$.

Řešení: Hranice rovinné oblasti tvoří dvě paraboly, viz obr. 22. Abychom získali souřadnice jejich průsečíků, vyřešíme příslušnou soustavu rovnic:

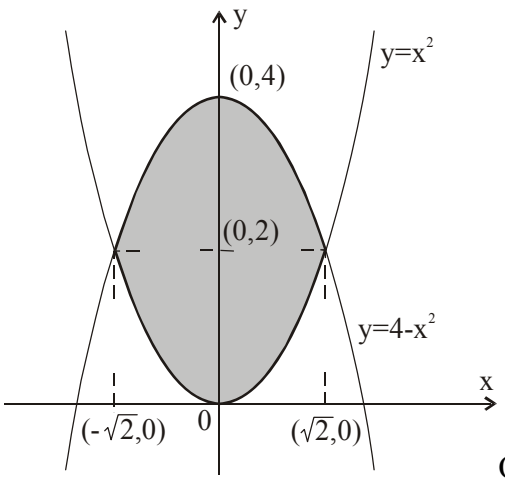
$x^2 = 4 - x^2,\ 2x^2 = 4,\ x^2 = 2,\ x_{1,2} = \pm\sqrt{2},$ tedy $P_1(\sqrt{2}, 2), P_2(-\sqrt{2}, 2)$.

Integrační oblast Ω zapíšeme jako oblast I. typu, normální vzhledem k ose x.

$\Omega : -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2},\quad x^2 \le y \le 4 - x^2.$

$$P = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [y]_{x^2}^{4-x^2}\, dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - x^2 - x^2)dx = \left[4x - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} =$$

$$= 4\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{16}{3}\sqrt{2}.$$



Obr. 22

Příklad 1.4.4. Odvoďte vzorec pro výpočet plošného obsahu elipsy.

Řešení: Aby byl výpočet snadný umístíme střed elipsy do počátku soustavy souřadnic, délky jejích poloos označíme a, b. Rovnice takové elipsy má tvar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Výpočet provedeme v zobecněných polárních souřadnicích (9):

$x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi,\ J = ab\rho.$

Je zřejmé, že pro celou elipsu platí $0 \le \varphi < 2\pi$, dosazením transformačních rovnic do rovnice elipsy určíme meze pro ρ: $\frac{(a\rho\cos\varphi)^2}{a^2} + \frac{(b\rho\sin\varphi)^2}{b^2} = 1,\ \rho^2 = 1,\ \rho = 1.$

Protože v počátku soustavy souřadnic platí $\rho = 0$, jsou hranice transformované oblasti Ω^* určeny nerovnicemi: $0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < \rho \le 1$.

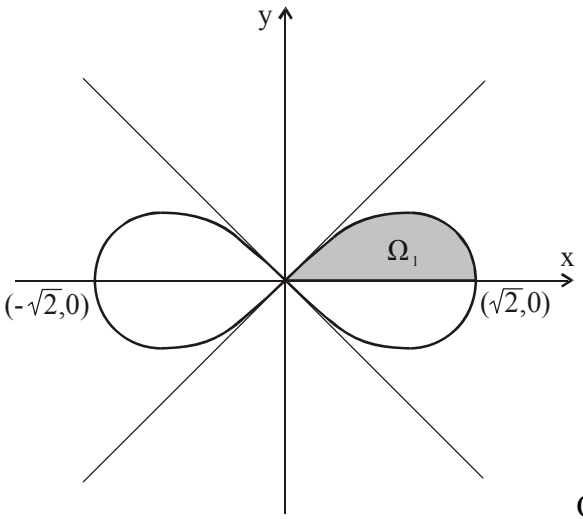
Dosazením do vztahu (11) získáme

$$P = \iint_{\Omega} dxdy = \iint_{\Omega^*} ab\rho\, d\rho\, d\varphi = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho = ab\left[\varphi\right]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = ab.2\pi.\frac{1}{2} = \pi ab.$$

✖ **Příklad 1.4.5.** Transformací do polárních souřadnic určete obsah rovinné oblasti ohraničené lemniskátou $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, viz obr. 23.

Řešení: Dosazením transformačních rovnic (5) $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ J = \rho$ do rovnice křivky dostaneme:

$$(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^2 = 2(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi), \qquad \rho^4 = 2\rho^2\cos 2\varphi,$$
$$\rho^2 = 2\cos 2\varphi, \qquad \rho = \sqrt{2\cos 2\varphi}.$$



Obr. 23

Pro oblast Ω_1 pak platí nerovnice $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ (přímky $y = x,\ y = -x$ jsou tečnami lemniskáty), $0 < \rho \le \sqrt{2\cos 2\varphi}$. Pro obsah celé plochy dostaneme:

$$P = 4\left|\Omega_1\right| = 4\iint_{\Omega_1} dxdy = 4\iint_{\Omega_1^*} \rho\, d\rho\, d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi\, d\varphi = = 4\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2(1-0) = 2.$$

Úlohy k samostatnému řešení

3. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené čarami:

a) $y = x,\ y = 5x,\ x = 1,$

b) $y = x,\ y = x^2,$

c) $y = x^2,\ y = \sqrt{x},$

d) $2x - y = 0,\ 2x - y = 7,\ x - 4y + 7 = 0,\ x - 4y + 14 = 0,$

e) $x = 0,\ y = \sin x,\ y = \cos x,\ x \geq 0,$

f) $y = 2^x,\ y = 2^{-2x},\ y = 4,$

g) $x = 0,\ y = 0,\ x + y - 5 = 0,$

h) $y^2 = 9 - x,\ y^2 = 9 - 9x.$

4. Transformací do polárních souřadnic (5) vypočtěte obsah oblastí ohraničených křivkami:

a) $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3,$

b) $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4,$

c) $(x-1)^2 + y^2 = 1,\ x^2 + (y-1)^2 = 1,$

d) $x^2 + y^2 = 5,\ y = 0$ a tečnou dané kružnice v bodě (1,2),

e) $\rho = 1 - \cos\varphi$ (kardioida),

f) $\rho = 1$ (kružnice), $\rho = \sin 2\varphi,\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (část kružnice)

g) $\rho = 4\sin\varphi$ (kružnice), $\rho = 2$ (kružnice).

Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. a) 2; **b)** $\frac{1}{6}$; **c)** $\frac{1}{3}$; **d)** 7; **e)** $\sqrt{2} - 1$; **f)** $12 - \frac{9}{\ln 4}$; **g)** $\frac{25}{2}$; **h)** 32.

4. a) $\frac{5}{8}\pi$, **b)** $\frac{3}{4}\pi$; **c)** $\frac{\pi}{2} - 1$; **d)** $5 - \frac{5}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$; **e)** $\frac{3\pi}{2}$; **f)** $\frac{\pi}{16}$; **g)** $\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$.

1.4.3. Obsah plochy

Výklad

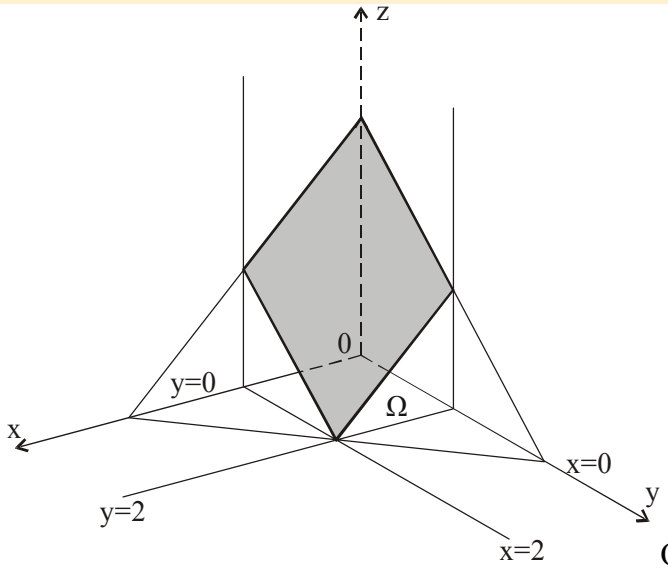
Budeme-li určovat **obsah části plochy** $z = f(x,y)$, která je ohraničena průnikovou křivkou této plochy s válcovou plochou, která má povrchové přímky rovnoběžné s osou z a řídící křivku v hranici elementární oblasti Ω, pak platí

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy\,. \qquad (12)$$

Funkce $f(x,y)$ je spojitá i se svými parciálními derivacemi v Ω. Vztah (11) je speciálním případem vztahu (12) pro $z=1$. Ověření správnosti vztahu (12) nebudeme provádět, lze je nalézt např. v [1], str. 1104 – 1108 nebo v [9], str. 197 – 200.

Řešené úlohy

Příklad 1.4.6. Vypočtěte obsah plochy $x+y+z=4$, která je ohraničena rovinami $x=0,\ y=0,\ x=2,\ y=2,$ viz obr. 24.



Obr. 24

Řešení: Z rovnice plochy vyjádříme $z = 4-x-y,\ z'_x=-1,\ z'_y=-1$.

Oblast Ω je podle zadání určena nerovnicemi: $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2$.

Podle vztahu (12) platí:

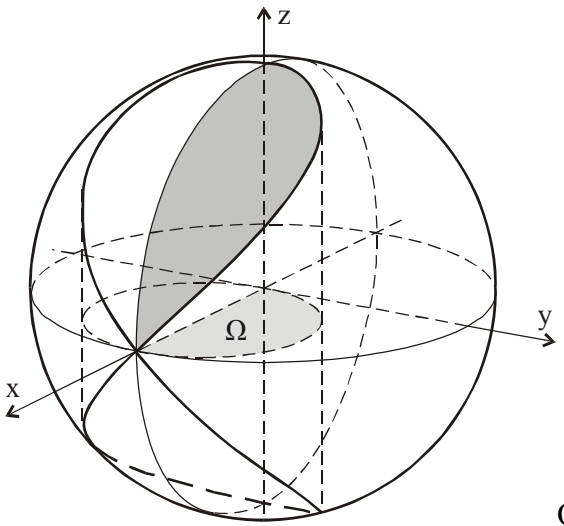
$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy = \sqrt{3}\int_0^2 dx \int_0^2 dy = \sqrt{3}\,[x]_0^2\,[y]_0^2 = 4\sqrt{3}\,.$$

✖ **Příklad 1.4.7.** Vypočtěte obsah plochy, která je na kulové ploše $x^2+y^2+z^2=1$ ohraničena její průnikovou křivkou s válcovou plochou $x^2+y^2=x.$

Řešení: Budeme počítat pouze čtvrtinu obsahu, viz obr. 25.

Z rovnice kulové plochy vypočítáme

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ z'_x=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ z'_y=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$



Obr. 25

Zvlášť si upravíme odmocninu ve vztahu (12):

$$\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-x^2-y^2+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Provedeme transformaci do polárních souřadnic (5) a dostaneme

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi}=\sqrt{1-\rho^2}\ .$$

Oblast Ω je určena nerovnicemi $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0<\rho\le\cos\varphi,$ viz příklad 1.3.2 (porovnejte obr. 25 a obr. 16 pro $a=1$).

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\,\rho\,d\rho = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{1-\rho^2}\right]_0^{\cos\varphi} d\varphi = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{1-\cos^2\varphi}-1)d\varphi =$$

$$-4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\sin^2\varphi}-1)d\varphi = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi-1)d\varphi = 4\left[\cos\varphi+\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4(\frac{\pi}{2}-1) = 2(\pi-2).$$

Vnitřní integrál jsme vyřešili substitucí $1-\rho^2 = t,\ -2\rho\,d\rho = dt,\ \rho\,d\rho = -\frac{1}{2}dt$.

Úlohy k samostatnému řešení

5. Určete obsahy částí ploch:

a) $6x+3y+2z=12$ ohraničené rovinami $x=0, y=0, z=0,$

b) $z^2 = 2xy$ ohraničené rovinami $x=0, x=3, y=0, y=6,$

c) $z^2 = 2xy$ ohraničené rovinami $x=1, y=1, x=2, y=4,$

d) $z = xy$ ohraničené válcovou plochou $x^2+y^2=4$,

e) $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ ohraničené válcovou plochou $x^2+y^2=3$,

f) $y^2+z^2=x^2$ ohraničené válcovou plochou $x^2+y^2=4$, ✖

g) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ jednoho závitu šroubové plochy ohraničené válcovou plochou $x^2+y^2=1$, ✖

h) $y^2+z^2=9$ ohraničené rovinami $x=0, x=2, y=-3, y=3$,

i) $z^2 = 4x^2+4y^2$ ohraničené rovinou $y=x$ a parabolickou válcovou plochou $y=x^2$, ✖

j) $z=1-x^2-y^2$ ohraničené rovinou $z=0$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5. a) 14; **b)** 36; **c)** $12-\frac{16}{3}\sqrt{2}$; **d)** $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$; **e)** $\frac{14}{3}\pi$; **f)** 8π; **g)** $\pi(\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2})$;

h) 6π; **i)** $\frac{\sqrt{5}}{6}$; **j)** $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$.

1.4.4. Fyzikální aplikace

Výklad

Jestliže je v hmotné rovinné oblasti Ω dána hustota v jejím libovolném bodě (x,y) funkcí $\sigma(x,y)$, pak **hmotnost oblasti** Ω je určena vztahem

$$m=\iint_{\Omega}\sigma(x,y)dxdy, \tag{13}$$

statický moment oblasti Ω **vzhledem k ose *x*, resp. *y*** je určen vztahem

$$S_x=\iint_{\Omega} y\sigma(x,y)dxdy, \quad \text{resp.} \quad S_y=\iint_{\Omega} x\sigma(x,y)dxdy, \tag{14}$$

souřadnice těžiště $T=(\xi,\eta)$ **hmotné oblasti** Ω jsou

$$\xi=\frac{S_y}{m}, \qquad \eta=\frac{S_x}{m}, \tag{15}$$

moment setrvačnosti oblasti Ω **při rotaci kolem osy** x, resp. y, resp. z je

$$I_x=\iint_{\Omega} y^2\sigma(x,y)dxdy, \qquad \text{resp.} \quad I_y=\iint_{\Omega} x^2\sigma(x,y)dxdy,$$

$$\text{resp.} \qquad I_z=I_x+I_y=\iint_{\Omega}(x^2+y^2)\sigma(x,y)dxdy. \tag{16}$$

Poznámka

K řešení dvojrozměrných integrálů vedou také různé úlohy z teorie rovinných fyzikálních polí.

Řešené úlohy

Příklad 1.4.8. Vypočtěte hmotnost oblasti Ω ohraničené přímkami $x=1, x=3, y=1, y=2$, jestliže její hustota je dána funkcí $\sigma = \dfrac{1}{(x+2y+1)^2}$.

Řešení: Je stejné jako řešení integrálu B v příkladu 1.1.3 v kapitole 1.1: $m = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{8}$.

Příklad 1.4.9. Vypočtěte statický moment čtverce ohraničeného přímkami $x=0,\ x=1, y=1, y=2$ vzhledem k ose y, je-li $\sigma = x^{y-1}$.

Řešení: Platí $x\,\sigma(x,y) = x\,x^{y-1} = x^y$, a proto úloha vede k řešení integrálu C v příkladu 1.1.4 v kapitole 1.1: $S_y = \ln\dfrac{3}{2}$.

Příklad 1.4.10. Vypočtěte moment setrvačnosti čtverce ohraničeného přímkami $x=0, x=1, y=1, y=2$, který rotuje kolem osy y, je-li $\sigma = x^{y-2}$.

Řešení: Protože $x^2\,\sigma(x,y) = x^2\,x^{y-2} = x^y$, úloha vede opět k řešení integrálu C v příkladu 1.1.4 v kapitole 1.1: $I_y = \ln\dfrac{3}{2}$.

Poznámka

Podobně jako v předchozích příkladech lze upravit i některá další zadání příkladů z kapitol 1.1. *a* 1.2.

Řešené úlohy

Příklad 1.4.11. Vypočtěte souřadnice těžiště T homogenní oblasti Ω, která je ohraničena kružnicí $(x-1)^2 + y^2 = 1$, jestliže $\sigma(x,y) = 1$ pro všechny body $(x,y) \in \Omega$.

Řešení: Provedeme transformaci do polárních souřadnic. Oblast Ω se zobrazí na oblast Ω^*, pro kterou platí: $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 < \rho \le 2\cos\varphi$, viz příklad 1.3.2 a obr. 16 (dosadíme $a=1$).

Podle vztahu (13) po transformaci do polárních souřadnic (5) platí

$$m = \iint_{\Omega^*} \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho \, d\rho = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\rho^2\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi) d\varphi = \left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Podle vztahu (14) vypočítáme po transformaci do polárních souřadnic (5):

$$S_x = \iint_{\Omega^*} \rho \sin\varphi \, \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 \, d\rho = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \left[\rho^3\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \, \sin\varphi \, d\varphi = \frac{8}{3}\left[-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

$$S_y = \iint_{\Omega^*} \rho \cos\varphi \, \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 \, d\rho = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \left[\rho^3\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)^2 d\varphi = \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}+\frac{\cos 4\varphi}{2}) d\varphi = \frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{8}\sin 4\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Dosazením do vztahu (15) získáme:

$$\xi = \frac{\pi}{\pi} = 1, \qquad \eta = \frac{0}{\pi} = 0, \qquad T = (1,0).$$

Poznámka

Správnost výsledku můžeme snadno ověřit, uvědomíme-li si, že střed $S(1,0)$ kružnice je středem symetrie dané oblasti, a tedy $S(1,0) \equiv T(1,0)$.

Úlohy k samostatnému řešení

6. Určete hmotnost oblasti Ω při daném rozložení hustoty:

a) Ω je ohraničena přímkami $x=0, x=1, y=1, y=2$, hustota v bodě $P \in \Omega$ je přímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti bodu P od bodu $(0,1)$,

b) Ω je ohraničena čarami $x=3, y=4x, y=\frac{1}{x}$, hustota je dána funkcí $\sigma=\frac{x^2}{y^2}$.

7. Vypočtěte statický moment homogenní rovinné oblasti Ω, je-li $\sigma=1$,

a) Ω je obdélník o délkách stran $a=1, b=2$ vzhledem ke straně a,

b) Ω je půlkruh o poloměru $r=4$ vzhledem k jeho průměru.

8. Vypočtěte souřadnice těžiště oblasti Ω, kde $\sigma(x,y)=1$, ohraničené čarami:

a) $y=x, y=x^2$,

b) $y=x^2, x+y=2$,

c) $y=x^2, x=4, y=0$,

d) $y=\sin x, y=0, x=\frac{\pi}{4}$,

e) $\rho=1+\cos\varphi$.

9. Vypočtěte moment setrvačnosti oblasti Ω, kde $\sigma(x,y)=1$, ohraničené

a) čarami $y=x, y=x^2$ při rotaci kolem osy x,

b) čarami $y=1+x^2, y=2x, x=0$ při rotaci kolem osy y,

c) stranami $\Delta ABC, A=(0,2), B=(1,0), C=(1,1)$ při rotaci kolem osy y,

d) přímkami $y=\frac{x}{2}, x=1, y=1$ při rotaci kolem osy x.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

6. a) $\frac{2}{3}k$; **b)** $\frac{1225}{64}$. **7. a)** 2; **b)** $\frac{128}{3}$.

8. a) $(\frac{1}{2},\frac{2}{5})$; **b)** $(-\frac{1}{2},\frac{8}{5})$; **c)** $(3,\frac{24}{5})$; **d)** $(\frac{(4-\pi)(\sqrt{2}+1)}{4},\frac{(\pi-2)(\sqrt{2}+2)}{16})$; **e)** $(\frac{5}{6},0)$.

9. a) $\frac{1}{28}$; **b)** $\frac{1}{30}$; **c)** $\frac{1}{4}$; **d)** $\frac{17}{96}$.

Kontrolní otázky

1. Objem válcovitého tělesa pod oblastí Ω, které je zdola ohraničeno plochou $z = f(x,y)$, je určen vztahem:

   a) $\iint_\Omega f(x,y)dxdy$, b) $\iint_\Omega xydxdy$,

   c) $\iint_\Omega |f(x,y)|dxdy$, d) $\iint_\Omega (x+y)dxdy$.

2. Objem válcovitého tělesa pod oblastí Ω, které je ohraničeno plochou $z = -2$, je roven:

   a) $|\Omega|$, b) $2|\Omega|$,

   c) $|\Omega|^2$, d) $|\Omega|+2$.

3. Který z následujících výrazů vyjadřuje obsah rovinné oblasti Ω, normální vzhledem k ose x nebo vzhledem k ose y?

   a) $\iint_\Omega xdxdy$, b) $\iint_\Omega ydxdy$,

   c) $\iint_\Omega |xy|dxdy$, d) $\iint_\Omega dxdy$.

4. Jaký je geometrický význam vztahu $S = \iint_\Omega \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$, v němž $z = f(x,y)$?

   a) Obsah oblasti Ω,

   b) obvod oblasti Ω,

   c) objem tělesa, jehož spodní podstavou je oblast Ω, které je shora ohraničeno funkcí $z = f(x,y)$,

   d) obsah části plochy $z = f(x,y)$, která leží nad oblastí Ω.

5. Jak vypočítáme hmotnost rovinné oblasti Ω, je-li její hustota v jejím libovolném bodě (x,y) určena funkcí $\sigma(x,y)$?

a) $\iint_{\Omega} \sigma(x)\sigma(y)dxdy$, b) $\iint_{\Omega} \sigma(x)ydxdy$,

c) $\iint_{\Omega} \sigma(x,y)dxdy$, d) $\iint_{\Omega} \sigma(x+y)dxdy$.

6. Jak vypočítáme souřadnice těžiště homogenní rovinné oblasti Ω o hmotnosti m, souměrné podle osy x ?

a) $T\left[0,\frac{S_x}{m}\right]$, b) $T\left[\frac{S_y}{m},0\right]$,

c) $T\left[0,\frac{S_y}{m}\right]$, d) $T\left[\frac{S_x}{m},0\right]$.

7. Který z následujících vztahů určuje statický moment vzhledem k ose x hmotné rovinné desky Ω, je-li její hustota v bodě $X(x,y)$ rovna y-ové souřadnici tohoto bodu?

a) $\iint_{\Omega} x^2dxdy$ b) $\iint_{\Omega} x^2y^2dxdy$,

c) $\iint_{\Omega} y^2dxdy$, d) $\iint_{\Omega} xydxdy$.

8. Který z následujících vztahů určuje moment setrvačnosti hmotné rovinné desky Ω rotující kolem osy y, je-li její hustota v bodě $X(x,y)$ rovna y-ové souřadnici tohoto bodu?

a) $\iint_{\Omega} x^2ydxdy$ b) $\iint_{\Omega} x^2y^2dxdy$,

c) $\iint_{\Omega} xy^2dxdy$, d) $\iint_{\Omega} xydxdy$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. c); 2. b); 3. d); 4. d); 5. c); 6. b); 7. c); 8. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 2.4 znovu.

Kontrolní test

1. Objem tělesa ohraničeného rovinou $2x+3y+4z=12$ a souřadnicovými rovinami, je roven

a) 24, b) 12,

c) 72, d) 144.

2. Objem tělesa ohraničeného válcovou plochou $z=9-y^2$ a rovinami $x=0, z=0,$ $3x+4y=12$ je pro $y\geq 0$ roven

a) 15, b) 30,

c) 45, d) 60.

3. Plošný obsah rovinné oblasti Ω, která je ohraničena křivkami $x^2+y^2=2y, x=0, y=x$, je roven

a) $\frac{\pi+2}{4}$, b) $\frac{\pi+3}{4}$,

c) $\frac{\pi+2}{3}$, d) $\frac{\pi+3}{3}$.

4. Plošný obsah rovinné oblasti Ω, která je ohraničena přímkami $x+y=2, x=0, y=0$ je

a) 1, b) 2,

c) 3, d) 4.

5. Plošný obsah části roviny $2x+3y+4z=12$, která leží v prvním oktantu, je roven

a) $\sqrt{29}$, b) $2\sqrt{29}$,

c) $3\sqrt{29}$, d) $4\sqrt{29}$.

6. Kolik činí hmotnost homogenní rovinné oblasti Ω, má-li její hustota konstantní hodnotu 2?

a) $|\Omega|$, b) $2|\Omega|$,

c) $|\Omega|^2$, d) $|\Omega|+2$.

7. Vypočítejte hmotnost rovinné oblasti $D=\{(x,y): x\in<0,1>, y\in<0,2>\}$, je-li její hustota v libovolném bodě rovna vzdálenosti tohoto bodu od osy x.

a) 1, b) 2,

c) 3, d) 4.

8. Určete souřadnice těžiště homogenní rovinné oblasti Ω, která je ohraničena přímkami $x+y=3, x=0, y=0$.

a) (1,1), b) (2,2),

c) (1,2), d) (2,1).

9. Určete souřadnice těžiště homogenní rovinné oblasti Ω, která je ohraničena kružnicí $x^2+y^2=2y$.

a) (1,1), b) (0,1),

c) (1,0), d) (0,0).

10. Vypočítejte moment setrvačnosti rovinné oblasti $D=\{(x,y): x\in<0,3>, y\in<0,1>\}$ při rotaci kolem osy y, je-li její hustota konstantní (označte $\sigma(x,y)=k$).

a) k, b) $3k$,

c) $6k$, d) $9k$.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. a); 4. b); 5. c); 6. b); 7. b); 8. a); 9. b); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je potřeba prostudovat kapitolu 1.4 znovu.

Shrnutí lekce

V této kapitole jsme si ukázali využití dvojrozměrného integrálu v matematice a fyzice. Dvojrozměrný integrál umožňuje vypočítat plošný obsah rovinné oblasti, objem válcovitého tělesa nad oblastí Ω, které je ohraničeno plochou $z=f(x,y)$ a plošný obsah části plochy $z=f(x,y)$, která je ohraničena průnikovou křivkou této plochy s válcovou plochou, která má povrchové přímky rovnoběžné s osou z a řídící křivku v hranici elementární oblasti Ω.

V případě hmotné rovinné oblasti Ω dokážeme dvojrozměrným integrálem jednoduše vypočítat její hmotnost, souřadnice těžiště, statické momenty vzhledem k osám souřadnic a momenty setrvačnost při rotaci oblasti Ω kolem os souřadnic.

2. TROJROZMĚRNÝ (TROJNÝ) INTEGRÁL

Průvodce studiem

Analogicky jako dvojrozměrný integrál zavádíme integrál trojrozměrný nebo také trojný. Dvojrozměrný integrál byl obecně definován pro funkci dvou proměnných $f(x,y)$ na dvojrozměrné oblasti Ω. Rozšířením o jednu integrační proměnnou získáme trojrozměrný integrál, který je obecně definován pro funkci tří proměnných $f(x,y,z)$ na trojrozměrné integrační oblasti Ω.

Cíle

Ve druhé kapitole zavedeme trojrozměrný integrál v kvádru a obecné prostorové oblasti a naučíme se metody jeho výpočtu. Ukážeme si také využití trojrozměrného integrálu v geometrii a fyzice.

Předpokládané znalosti

Stejně jako u dvojrozměrných integrálů je nutno znát integrační metody (základní integrační vzorce, metoda integrace substitucí, metoda per partes), výpočet určitého integrálu (Newton – Leibnizova věta), výpočet dvojrozměrného integrálu a analytickou geometrii lineárních a kvadratických útvarů v prostoru (obecná rovnice roviny a její úsekový tvar, rovnice kvadratických ploch).

2.1. Trojrozměrný integrál v kvádru

Průvodce studiem

Nejjednodušší integrační oblast u dvojrozměrných integrálů tvořil obdélník, jehož strany byly rovnoběžné s osami souřadnic. Podobně u trojrozměrných integrálů je výpočet nejjednodušší v případě, kdy integrační oblastí je kvádr, jehož stěny jsou rovnoběžné se souřadnicovými rovinami.

Cíle

Cílem této kapitoly je objasnit pojem Riemannova trojrozměrného integrálu v kvádru a ukázat způsob jeho výpočtu.

Předpokládané znalosti

K výpočtu integrálu je opět zcela nezbytné znát základní integrační vzorce a základní integrační metody.

Výklad

Definice ***trojrozměrného Riemannova integrálu*** na kvádru G je obdobná definici dvojrozměrného integrálu v obdélníku D.

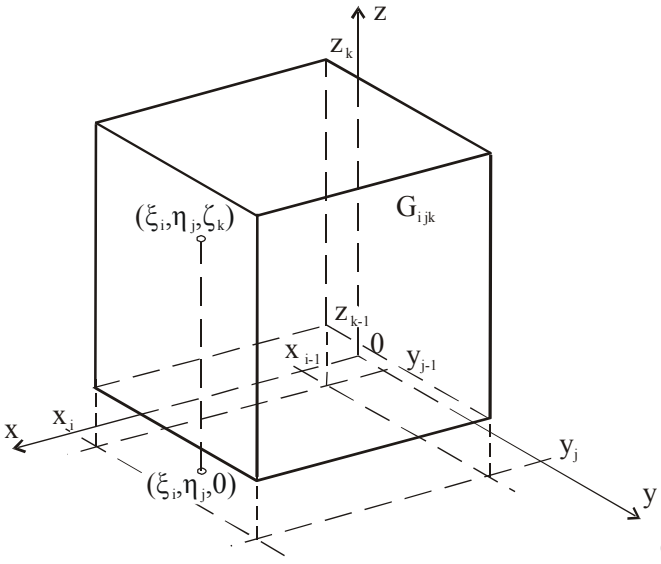
Mějme funkci tří nezávisle proměnných $u = f(x, y, z)$ spojitou a ohraničenou v kvádru $G = \{(x, y, z : x \in < a, b >,\ y \in < c, d >, z \in < e, h >\}$, viz [3], [7], [9]. Rozdělíme intervaly $< a, b >, < c, d >, < e, h >$ třemi posloupnostmi bodů

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b,\ c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = d$ a $e = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_p = h$

na intervaly $< x_{i-1}, x_i >, i = 1, 2, \ldots, m,\ < y_{j-1}, y_j >,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ < z_{k-1}, z_k >, k = 1, 2, \ldots, p.$

Označíme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_j = y_j - y_{j-1},\ \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$

Roviny vedené body x_i, resp. y_j, resp. z_k rovnoběžně se souřadnicovými rovinami os $y, z,$ resp. $x, z,$ resp. x, y rozdělí kvádr G na $m.n.p$ kvádrů G_{ijk}, viz obr. 26, pro jejichž



Obr. 26

objem platí $\Delta G_{ijk} = \Delta x_i . \Delta y_j . \Delta z_k$. V každém kvádru G_{ijk} zvolíme bod (ξ_i, η_j, ζ_k) a vytvoříme součiny $f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k).\Delta G_{ijk} = f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k).\Delta x_i . \Delta y_j . \Delta z_k$, které pro funkci $f(x, y, z) \geq 0$ znamenají objemy čtyřrozměrných těles s podstavou v kvádru G a s výškou

$f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)$ nebo z hlediska fyzikálního znamenají hmotnost kvádru G_{ijk} o hustotě $f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)$. Utvoříme součty $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k).\Delta x_i.\Delta y_j.\Delta z_k$.

Definice 2.1.1.

Jestliže pro $m\to\infty, n\to\infty, p\to\infty$ a $\Delta x_i\to 0, \Delta y_j\to 0, \Delta z_k\to 0$ pro všechna $i=1,2,\ldots,$ $j=1,2,\ldots, k=1,2,\ldots,$ existuje limita

$$\lim_{\substack{m\to\infty,n\to\infty,p\to\infty\\ \Delta x_i\to 0,\Delta y_j\to 0,\Delta z_k\to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k).\Delta x_i.\Delta y_j.\Delta z_k, \tag{17}$$

nazveme ji **trojrozměrným (trojným) integrálem** funkce $f(x,y,z)$ v kvádru G a označíme

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz. \tag{18}$$

Poznámky

1. Pro funkce $f(x,y,z)\geq 0$ v G znamená vztah (18) ***hmotnost kvádru G****, ve kterém je rozložení hustoty dáno funkcí $f(x,y,z)$.*

2. Podobně jako ve dvojrozměrném integrálu platí pro výpočet trojrozměrného integrálu věta, kterou nebudeme dokazovat. Úvaha o správnosti vztahu je analogická úvaze provedené za větou 1.1.1.

Věta 2.1.1. (Dirichletova)

Nechť $G=\{x,y,z): x\in<a,b>, y\in<c,d>, z\in<e,h>\}$ je kvádr. Jestliže $f(x,y,z)$ je spojitá funkce v G, pak

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_e^h f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx. \tag{19}$$

Vztah (19) je možno zapsat záměnou pořadí integrace ještě pěti dalšími způsoby. Trojrozměrný integrál je tak převeden na ***trojnásobný integrál***, na ***trojnásobnou integraci*** integrálů funkcí jedné proměnné.

Poznámka

Trojnásobnou integraci budeme po dohodě opět pro lepší přehlednost zapisovat ve tvaru

$$\int_a^b \Big(\int_c^d \Big(\int_e^h f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^h f(x,y,z)\,dz. \qquad (19a)$$

Výpočet provádíme postupnou integrací. Z definice součtů ve vztahu (17) přímo vyplývají následující vlastnosti:

Věta 2.1.2. (Vlastnosti trojrozměrného integrálu na kvádru *G*)

1. $\iiint_G c\, f(x,y,z)\,dxdydz = c \iiint_G f(x,y,z)\,dxdydz,$

2. $\iiint_G (f(x,y,z)+g(x,y,z))\,dxdydz = \iiint_G f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_G g(x,y,z)\,dxdydz,$

3. $\iiint_G f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{G_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_{G_2} f(x,y,z)\,dxdydz,$

kde $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ jsou spojité v G, $c \in R$ a G_1, G_2 jsou kvádry, které vzniknou z kvádru G jeho rozdělením rovinou rovnoběžnou s některou ze souřadnicových rovin.

Řešené úlohy

Příklad 2.1.1. Vypočtěte trojrozměrný integrál

$$A = \iiint_G \ln x^{y\,z}\,dxdydz, \quad G = \{(x,y,z) : x \in <1,2>,\ y \in <0,1>,\ z \in <0,1>\}.$$

Řešení: $$A = \int_1^2 dx \int_0^1 dy \int_0^1 y\,z \ln x\,dz = \int_1^2 dx \int_0^1 y \ln x \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 dy = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^2 \ln x dx = = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\left(\left[x \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 dx\right) = \frac{1}{4}\left[x \ln x - x\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(2\ln 2 - 2 + 1) = \frac{1}{4}(\ln 4 - 1).$$

Poznámky

1. Jestliže integrand lze zapsat ve tvaru součinu tří funkcí jedné nezávisle proměnné $f(x,y,z) = f_1(x).f_2(y).f_3(z)$,

pak v kvádru $G = \{(x,y,z) : x \in < a,b >, y \in < c,d >, z \in < e,h >\}$ *platí*

$$\iiint_G f_1(x).f_2(y).f_3(z)dxdydz = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy \int_e^h f_3(z)dz. \qquad (19b)$$

2. Obecně nezáleží na pořadí integrace. V některých případech ale daný trojrozměrný integrál může být snadno řešitelný jedním způsobem, jiný způsob však může být komplikovaný v závislosti na tvaru integrované funkce.

Řešené úlohy

Příklad 2.1.2. Vypočtěte užitím vztahu (19b) integrál A z předcházejícího příkladu.

Řešení: $$A = \int_1^2 \ln x dx \int_0^1 y dy \int_0^1 z dz = \left[x(\ln x - 1)\right]_1^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= (2\ln 2 - 1).\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\ln 4 - 1).$$

Výklad

Nelze-li funkci $f(x,y,z)$ rozložit na součin tří funkcí jedné nezávisle proměnné, musíme při integraci postupovat podle vztahu (19a), tedy jako v příkladu 2.1.1.

Řešené úlohy

Příklad 2.1.3. Vypočtěte trojrozměrný integrál

$$\iiint_G \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}\right) dxdydz, \quad G = \{(x,y,z) : x \in < 1,2 >, y \in < 1,2 >, z \in < 1,2 >\}.$$

Řešení: Příklad vyřešíme převedením na trojnásobný integrál podle vztahu (19a) a pak postupnou integrací.

$$\iiint_G \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right) dxdydz = \int_1^2 dx \int_1^2 dy \int_1^2 \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right) dz = \int_1^2 dx \int_1^2 dy \left[\frac{z}{x}+\frac{2z}{y}+3\ln z\right]_1^2 =$$

$$= \int_1^2 dx \int_1^2 dy \left[\left(\frac{2}{x}+\frac{4}{y}+3\ln 2\right)-\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+3\ln 1\right)\right] = \int_1^2 dx \int_1^2 \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+3\ln 2\right) dy =$$

$$= \int_1^2 dx \left[\frac{y}{x}+2\ln y+3y\ln 2\right]_1^2 = \int_1^2 dx \left[\left(\frac{2}{x}+2\ln 2+6\ln 2\right)-\left(\frac{1}{x}+2\ln 1+3\ln 2\right)\right] =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x}+5\ln 2\right) dx = \left[\ln x+5x\ln 2\right]_1^2 = \left(\ln 2+10\ln 2\right)-\left(\ln 1+5\ln 2\right) = 6\ln 2.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte daný trojrozměrný integrál v kvádru G užitím vztahu (19b):

a) $\iiint_G xy^2 z\,dxdydz,\ G=\{(x,y,z): x\in<0,2>,\ y\in<1,3>,\ z\in<1,2>\}$,

b) $\iiint_G dxdydz,\ G=\{(x,y,z): x\in<0,2>,\ y\in<0,3>,\ z\in<0,5>\}$,

c) $\iiint_G xy^2\sqrt{z}\,dxdydz,\ G=\{(x,y,z): x<-2,1>,\ y<1,3>,\ z<2,4>\}$,

d) $\iiint_G e^{3x+2y+z} dxdydz,\ G=\{(x,y,z): x\in<0,1>,\ y\in<0,1>,\ z\in<0,1>\}$,

e) $\iiint_G y^2 z\cos x\,dxdydz,\ G=\{(x,y,z): x\in<0,2\pi>,\ y\in<0,1>,\ z\in<-1,1>\}$,

f) $\iiint_G 12xy^2z^3 dxdydz,\ G=\{(x,y,z): x\in<-1,2>,\ y\in<0,3>,\ z\in<-1,2>\}$.

2. Vypočtěte trojrozměrné integrály v kvádru G postupem podle věty 2.1.1.

a) $\iiint_G (4x^2+4xy+y^2-8x-4y+1)dxdydz,\ G=\{(x,y,z): x\in<0,1>,\ y\in<0,2>,$

$z\in<0,3>\}$,

b) $\iiint_G (x+y)dxdydz,\ G=\{(x,y,z): x\in<0,1>,\ y\in<0,2>,\ z\in<0,3>\}$,

c) $\iiint_G \frac{1}{1-x-y}dxdydz,\ G=\{(x,y,z): x\in<0,1>,\ y\in<2,5>,\ z\in<2,4>\}$,

d) $\iiint_G (\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})dxdydz,\ G=\{(x,y,z): x\in<1,2>,\ y\in<1,2>,\ z\in<1,2>\}$,

e) $\iiint_G (x^2+y^2+z^2)dxdydz,\ G=\{(x,y,z): x\in<-1,1>,\ y\in<0,2>,\ z\in<0,1>\}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 26; **b)** 30; **c)** $\frac{52}{3}(\sqrt{2}-4)$; **d)** $\frac{1}{6}(e^3-1)(e^2-1)(e-1)$; **e)** 0; **f)** $\frac{1215}{2}$.

2. a) –14; **b)** 9; **c)** $10\ln\frac{4}{5}$; **d)** $3\ln 2$; **e)** 8.

Kontrolní otázky

1. Jaká musí být funkce $f(x,y,z)$, abychom ji mohli integrovat v kvádru *G?*

a) Kladná, b) spojitá,

c) monotónní, d) periodická.

2. Jaký geometrický útvar určuje množina $\{(x,y,z): x\in<a,b>,\ y\in<a,b>,\ z\in<c,d>\}$?

a) Kouli, b) čtverec,

c) krychli, d) hranol.

3. Jakou polohu má kvádr $G=\{(x,y,z: x\in<a,b>,\ y\in<c,d>,\ z\in<e,h>\}$ v souřadnicovém systému *Oxy*?

a) Libovolnou,

b) jeho stěny jsou rovnoběžné se souřadnicovými rovinami,

c) jeden vrchol kvádru musí být v počátku soustavy souřadnic a jeho stěny jsou rovnoběžné se souřadnicovými rovinami,

d) jeden vrchol kvádru musí být v počátku soustavy souřadnic.

4. Který z následujících výrazů je správným zápisem trojrozměrného integrálu?

a) $\int_a^b f_1(x).f_2(y)dx \int_c^d dy \int_e^h f_3(z)dz$, b) $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \int_e^h f_3(z)dz$,

c) $\int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^h f(x,y,z)dz$, d) $\iiint_G f(x,y,z)dxdydz$.

5. Který z následujících výrazů je správným zápisem trojnásobného integrálu?

a) $\int_a^b f_1(x).f_2(y)dx \int_c^d dy \int_e^h f_3(z)\,dz$, b) $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \int_e^h f_3(z)\,dz$,

c) $\int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^h f(x,y,z)\,dz$, d) $\iiint_G f(x,y,z)dxdydz$.

6. Jaké je obecně pořadí výpočtu jednotlivých integrálů v trojnásobném integrálu funkce $f(x,y,z)$?

a) Nejprve počítáme vnější integrál, nakonec počítáme vnitřní integrál,

b) na pořadí nezáleží,

c) nejprve počítáme vnitřní integrál, nakonec počítáme vnější integrál,

d) všechny tři integrály počítáme současně.

7. Jaký tvar musí mít funkce $f(x,y,z)$, abychom mohli v kvádru G integrovat současně všechny tři integrály (podle proměnné *x, y* i *z*)?

a) $f_1(x,y).f_2(y).f_3(z)$, b) $f_1(x).f_2(y).f_3(z)$,

c) $f_1(x).f_2(y,z)$, d) $f_1(x)+f_2(y)+f_3(z)$.

8. Jaký význam má $\iiint_G f(x,y,z)dxdydz$ pro $f(x,y,z)>0$?

a) Hmotnost kvádru *G*, b) obsah oblasti *G*,

c) objem kvádru *G*, d) povrch kvádru *G*.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. d); 3. b); 4. d); 5. c); 6. c); 7. b); 8. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je potřeba prostudovat kapitolu 2.1 znovu.

Kontrolní test

1. Vypočítejte integrál $\iiint_G dxdydz, G = \{(x,y,z) : x \in <0,2>, y \in <1,3>, z \in <1,2>\}$.

a) 2, b) 4,

c) 6, d) 8.

2. Vypočítejte integrál $\iiint_G xyzdxdydz, G = \{(x,y,z) : x \in <0,2>, y \in <1,3>, z \in <1,3>\}$.

a) 32, b) 23,

c) 33, d) 42.

3. Vypočítejte integrál

$\iiint_G (x+y+z)dxdydz, G = \{(x,y,z) : x \in <0,1>, y \in <0,2>, z \in <0,3>\}$.

a) 15, b) 16,

c) 17, d) 18.

4. Vypočítejte integrál $\iiint_G \sqrt{xyz}dxdydz, G = \{(x,y,z) : x \in <0,1>, y \in <0,9>, z \in <0,16>\}$.

a) 411, b) 512,

c) 613, d) 514.

5. Vypočítejte integrál

$\iiint_G \sin^2 x \sin^2 y\, z\, dxdydz, G = \{(x,y,z) : x \in <0,\pi>, y \in <0,\pi>, z \in <0,\pi>\}$.

a) $\frac{\pi}{4}$, b) $\frac{\pi^2}{4}$,

c) $\frac{\pi^4}{8}$, d) $\frac{\pi^3}{8}$.

6. Vypočítejte integrál $\iiint_G e^{x+y+z}dxdydz, G = \{(x,y,z) : x \in <0,1>, y \in <0,1>, z \in <0,1>\}$.

a) e^3, b) e^3-1,

c) $(e-1)^3$, d) e^3+1.

7. Vypočítejte integrál $\iiint_G \frac{x^2z^3}{y^2+1}dxdydz, G=\{(x,y,z): x\in<0,1>, y\in<0,1>, z\in<0,1>\}$.

a) $\frac{\pi}{48}$, b) $\frac{\pi^2}{48}$,

c) 48π, d) $48-\pi$.

8. Vypočítejte integrál

$$\iiint_G (x^2+\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+2z)dxdydz, G=\left\{(x,y,z): x\in<0,1>, y\in<0,\frac{1}{2}>, z\in<0,1>\right\}$$

a) $\frac{\pi+6}{6}$, b) $\frac{\pi^2+6}{6}$,

c) $\frac{\pi+4}{4}$, d) $\frac{\pi+4}{6}$.

9. Vypočítejte integrál

$$\iiint_K (x-2z)\sin(x+y)dxdydz,\ G=\left\{(x,y,z): x\in<0,\pi>, y\in<0,\frac{\pi}{2}>, z\in<0,2>\right\}.$$

a) $\frac{\pi}{12}-2$, b) $\frac{\pi}{12}+2$,

c) $2\pi-12$, d) $12\pi-2$.

10. Vypočítejte integrál

$\iiint_K (x^2+y^2+z^2)dxdydz, G=\{(x,y,z): x\in<0,1>, y\in<0,2>, z\in<0,3>\}$.

a) 28, b) 26,

c) 30, d) 32.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. d); 4. b); 5. c); 6. c); 7. a); 8. d); 9. c); 10. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 2.1 znovu.

Shrnutí lekce

Trojrozměrný nebo také trojný integrál $\iiint_G f(x,y,z)dxdydz$ funkce $f(x,y,z)$ v kvádru $G=\{(x,y,z): x\in<a,b>,\ y\in<c,d>, z\in<e,h>\}$ vypočítáme převedením na integrál trojnásobný $\int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^h f(x,y,z)dz$, případně $\int_a^b dx\int_e^h dz\int_c^d f(x,y,z)dy$, atd., tedy trojnásobnou integrací funkcí jedné proměnné. Důležitým předpokladem pro výpočet příkladů je znalost základních integračních metod a znalost metod výpočtu dvojnásobného integrálu.

2.2. Trojrozměrný integrál v obecné uzavřené oblasti

Průvodce studiem

V předchozí kapitole jsme se naučili počítat trojrozměrný integrál v případech, kdy oborem integrace byl jednoduchý trojrozměrný geometrický útvar - kvádr, jehož stěny byly rovnoběžné se souřadnicovými rovinami. Nyní rozšíříme své znalosti trojrozměrného integrálu na případy, kdy integračním oborem je obecná prostorová oblast. Naučíme se vyjádřit analyticky hranice oblasti v takovém tvaru, aby mohly být použity jako integrační meze.

Cíle

Cílem této kapitoly je objasnit pojem Riemannova trojrozměrného integrálu v obecné uzavřené prostorové oblasti a ukázat způsob jeho výpočtu.

Předpokládané znalosti

Opět budeme potřebovat znalost základních integračních metod.

K vyjádření integračního oboru je třeba zopakovat analytickou geometrii v prostoru, především rovnice roviny a kvadratických ploch.

Výklad

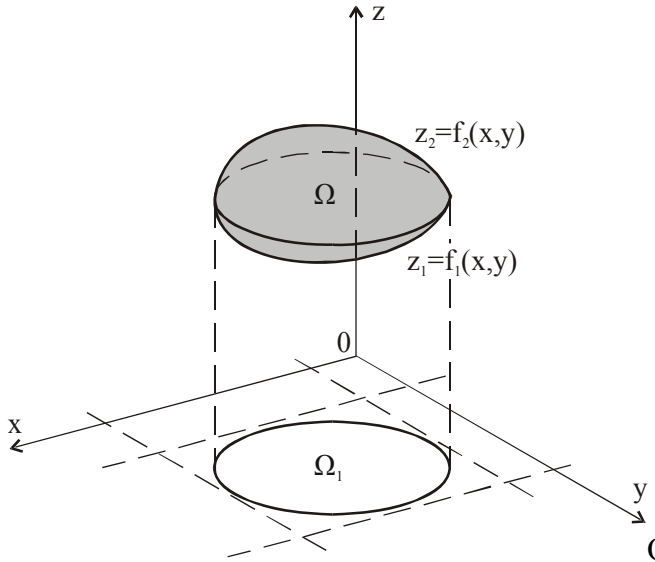
Výpočet trojrozměrného integrálu v kvádru můžeme obdobně jako v dvojrozměrném integrálu rozšířit na výpočet trojrozměrného integrálu v trojrozměrné oblasti Ω, která je ohraničena uzavřenou plochou. Tato plocha sama sebe neprotíná, přičemž rovnoběžky s osou z, vedené jejími vnitřními body, ji protínají ve dvou bodech. Takovou ***oblast*** nazveme ***normální*** vzhledem k souřadnicové rovině os x, y. Určení oblasti nerovnicemi provedeme následujícím způsobem.

Určíme-li pravoúhlý průmět výše popsané uzavřené plochy do roviny os x, y, pak dotyková válcová plocha rozdělí danou uzavřenou plochu na dvě části, které lze vyjádřit rovnicemi $z = f_1(x, y)$ a $z = f_2(x, y)$, viz obr. 27. Platí zřejmě $f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)$, tj. $z \in < f_1(x, y), f_2(x, y) >$. Pravoúhlým průmětem dané uzavřené plochy do souřadnicové roviny os x, y je rovinná oblast Ω_1, která je I. typu (normální vzhledem k ose x) nebo II. typu

(normální vzhledem k ose *y*). Způsobem uvedeným v části 1.2 lze stanovit nerovnice, které vyjadřují oblast Ω_1 jako normální vzhledem k ose *x*, respektive ose *y*.

$$x_1 \le x \le x_2, (x \in < x_1, x_2 >), \qquad g_1(x) \le y \le g_2(x), \ (y \in < g_1(x), g_2(x) >),$$

resp. $$y_1 \le y \le y_2, (y \in < y_1, y_2 >), \qquad h_1(y) \le x \le h_2(y), \ (x \in < h_1(y), h_2(y) >).$$



Obr. 27

Pravoúhlé průměty oblasti Ω je možno provést také do souřadnicových rovin os *y*, *z*, resp. *x*, *z*. Situace je obdobná, nebudeme se však těmito případy zabývat. Jestliže je funkce $f(x,y,z)$ spojitá v elementární prostorové oblasti Ω, pak platí:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{\Omega_1} \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz, \quad (20a)$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{\Omega_1} \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \quad (20b)$$

Ze vztahů (20a, b) vyplývá, že nejdříve musí být provedena integrace podle proměnné $z \in < f_1(x,y), f_2(x,y) >$, jejíž meze jsou funkcemi dvou proměnných (při pravoúhlém průmětu Ω do souřadnicové roviny os *x*, *y* jsou to proměnné *x*, *y*). Po provedení integrace podle proměnné *z* se jedná již o řešení dvojrozměrného integrálu jako v části 1.2.

Pro trojrozměrný integrál v obecné uzavřené oblasti Ω platí obdobné vlastnosti jako pro trojrozměrný integrál v kvádru *G*:

Věta 2.2.1. (Vlastnosti trojrozměrného integrálu na oblasti Ω)

1. $\iiint\limits_{\Omega} c\ f(x,y,z)dxdydz = c\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz,$

2. $\iiint\limits_{\Omega} (f(x,y,z)+g(x,y,z))dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)dxdydz,$

3. $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)dxdydz,$

kde $f(x,y,z), g(x,y,z)$ jsou spojité v Ω, $c \in R$ a Ω_1, Ω_2 vzniknou z Ω rozdělením rovinou rovnoběžnou s některou ze souřadnicových rovin.

Řešené úlohy

Příklad 2.2.1. Stanovte nerovnice určující body oblasti Ω, která je ohraničena plochou $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Řešení: Jedná se o oblast ohraničenou kulovou plochou. Z rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ vyjádříme z: $z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

To jsou rovnice horní poloviny ($z = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$)

a dolní poloviny ($z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$) kulové plochy. Dostaneme tedy

$-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (z \in <-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}>).$

Obrysová válcová plocha, která promítá oblast Ω kolmo do souřadnicové roviny os x, y má rovnici $x^2 + y^2 = a^2$.

V rovině os x, y tato rovnice znamená rovnici kružnice, která je hranicí průmětu Ω_1 plochy Ω do roviny os x, y. V tomto případě je také průnikovou křivkou dané kulové plochy a roviny os x, y. Určení zbývajících nerovnic bylo provedeno v části 1.2.

Oblast Ω_1 I. typu (normální vzhledem k ose x):

$-a \le x \le a, \quad (x \in <-a, a>),$

$-\sqrt{a^2 - x^2} \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (y \in <-\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 - x^2}>).$

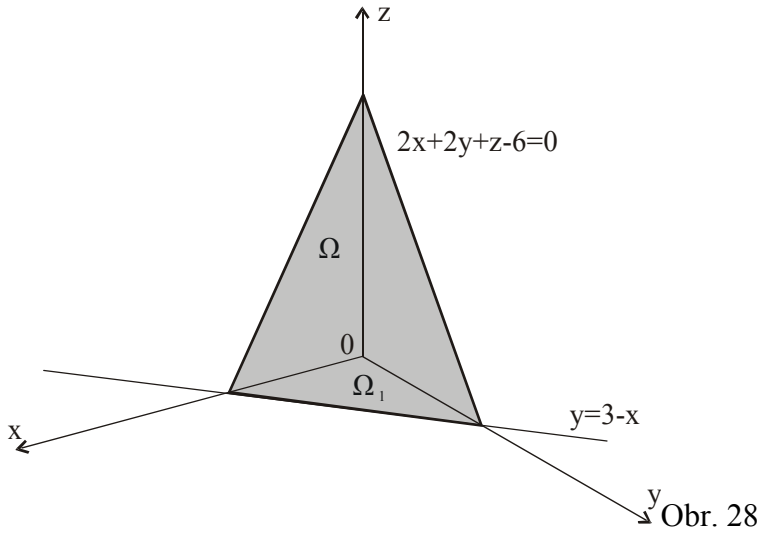
resp. oblast Ω_1 II. typu (normální vzhledem k ose y):

$-a \le y \le a, \quad (y \in <-a, a>).$

$-\sqrt{a^2 - y^2} \le x \le \sqrt{a^2 - y^2}, \quad (x \in <-\sqrt{a^2 - y^2}, \sqrt{a^2 - y^2}>).$

Příklad 2.2.2. Stanovte nerovnice určující prostorovou oblast Ω, která je ohraničena rovinami $x = 0, y = 0, z = 0, \; 2x + 2y + z - 6 = 0.$

Řešení: Pro body oblasti Ω, viz obr. 28, zřejmě platí $0 \le z \le 6 - 2x - 2y.$



Obr. 28

Nyní určíme pravoúhlý průmět oblasti Ω do roviny $z = 0$. Oblast Ω_1 je trojúhelník v rovině $z = 0$, jehož strany jsou přímky $x = 0, y = 0, y = 3 - x.$ Poslední rovnici získáme tak, že v rovnici roviny $2x + 2y + z - 6 = 0$ položíme $z = 0$.

Určení zbývajících nerovnic je již známo z příkladů o dvojrozměrném integrálu.

Oblast Ω_1 I. typu (normální vzhledem k ose x):

$0 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 3 - x$

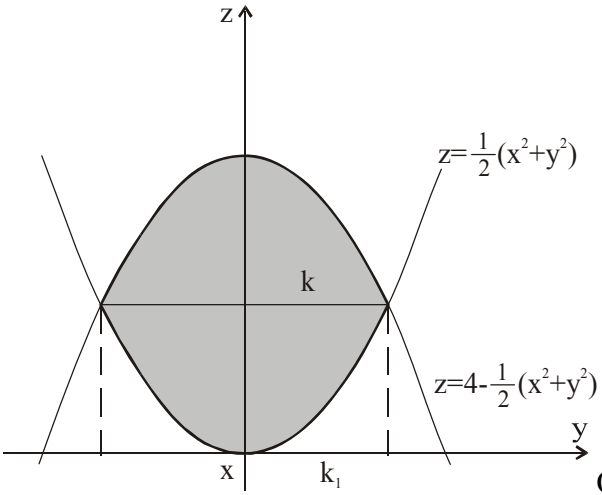
nebo oblast Ω_1 II. typu (normální vzhledem k ose y):

$0 \le y \le 3, \quad 0 \le x \le 3 - y.$

Příklad 2.2.3. Stanovte nerovnice pro oblast Ω, která je ohraničena plochami dvou paraboloidů $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \; z = 4 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$

Řešení: Ze zadání je zřejmé, že proměnná z je určena nerovnicemi

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \le z \le 4 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$



Obr. 29

Určíme nyní rovnici kolmého průmětu společné křivky k obou ploch, viz obr. 29. Platí

$\frac{1}{2}(x^2+y^2)=4-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, po úpravě $x^2+y^2=4$.

To je rovnice kružnice k_1 se středem v počátku a poloměrem $a=2$ v rovině $z=0$.

Pro určení oblasti Ω_1 ohraničené kružnicí k_1 pak platí:

Oblast Ω_1 I. typu (normální vzhledem k ose x):

$-2\le x\le 2,\quad -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}$,

nebo oblast Ω_1 II. typu (normální vzhledem k ose y):

$-2\le y\le 2,\quad -\sqrt{4-y^2}\le x\le\sqrt{4-y^2}$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Stanovte nerovnice pro body prostorové oblasti, která je ohraničena plochami:

a) $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=4$,

b) $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2-z^2=0$ pro $z\ge 0$ uvnitř kužele,

c) $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$,

d) $x=0, y=0, z=0, z=3, x^2+y^2=4$ v prvním oktantu,

e) $z=x^2+y^2, x+y=1$ v prvním oktantu,

f) $z=\frac{1}{2}y^2, 2x+3y=12$ v prvním oktantu,

g) $x^2+y^2=4,\ z=x+1,\ z=\dfrac{x}{2}$ v prvním oktantu

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $1\le x\le 5,\ -\sqrt{4-(x-3)^2}+4\le y\le\sqrt{4-(x-3)^2}+4,$

$6-\sqrt{6x+8y-x^2-y^2-21}\le z\le 6+\sqrt{6x+8y-x^2-y^2-21}$ nebo

$2\le y\le 6,\ -\sqrt{4-(y-4)^2}+3\le x\le\sqrt{4-(y-4)^2}+3,$

$6-\sqrt{6x+8y-x^2-y^2-21}\le z\le 6+\sqrt{6x+8y-x^2-y^2-21};$

b) $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2},\ -\sqrt{2-x^2}\le y\le\sqrt{2-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2};$

c) $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y;$

d) $0\le x\le 2,\ 0\le y\le\sqrt{4-x^2},\ 0\le z\le 3;$

e) $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le x^2+y^2;$

f) $0\le x\le 6,\ 0\le y\le 4-\dfrac{2}{3}x,\ 0\le z\le\dfrac{1}{2}y^2;$

g) $0\le x\le 2,\ 0\le y\le\sqrt{4-x^2},\ \dfrac{x}{2}\le z\le x+1.$

Řešené úlohy

Příklad 2.2.4. Vypočtěte integrál $B=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dxdydz,$ kde Ω je ohraničena plochami

$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=2,\ x+y-z=0.$

Řešení: Ze dvou rovnic v zadání obsahujících proměnnou z dostaneme nerovnice $0\le z\le x+y.$ Pro určení pravoúhlého průmětu Ω_1 do roviny $z=0$ zůstaly rovnice $x=0,\ y=0,\ x+y=2.$

Pro body oblasti Ω_1 vyjádřené jako oblast I. typu (normální vzhledem k ose x) platí:

$0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 2-x.$

Podle vztahu (20a) vypočítáme:

$$B=\int_0^2 dx\int_0^{2-x} dy\int_0^{x+y}(x^2+y^2)dz=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(x^2+y^2)\left[z\right]_0^{x+y}dy=$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(x^2+y^2)(x+y)dy=\int_0^2\left[x^3y+x^2\frac{y^2}{2}+x\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right]_0^{2-x}dx=$$

$$=\int_0^2\left(x^3(2-x)+\frac{1}{2}x^2(2-x)^2+\frac{1}{3}x(2-x)^3+\frac{1}{4}(2-x)^4\right)dx=\frac{64}{15}.$$

Úlohy k samostatnému řešení

2. Vypočtěte daný trojrozměrný integrál v oblasti Ω:

a) $\iiint_\Omega xdxdydz, \Omega: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le x+y,$

b) $\iiint_\Omega xyzdxdydz, \Omega: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x,\ 0\le z\le xy,$

c) $\iiint_\Omega x^3y^2zdxdydz, \Omega: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x,\ 0\le z\le xy,$

d) $\iiint_\Omega \frac{1}{(x+y+z+1)^2}dxdydz, \Omega: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y,$

e) $\iiint_\Omega z\sin xdxdydz, \Omega: 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \frac{\pi}{2},\ 0\le z\le \sqrt{\sin x\sin y},$

f) $\iiint_\Omega xzdxdydz, \Omega: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le \sqrt{1-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{2-x^2-y^2},$

g) $\iiint_\Omega \frac{1}{x+y+1}dxdydz, \Omega: x\ge 0, y\ge 0,\ z\ge 0, x+y+z\le 1,$

h) $\iiint_\Omega z^2dxdydz, \Omega: x^2+y^2+z^2\le 1, x^2+y^2+z^2\le 2z,$

i) $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz, \Omega: y^2+z^2-x^2\le 0, x^2+y^2+z^2\le 1, x\ge 0.$

3. Vypočtěte trojrozměrný integrál, je-li oblast Ω ohraničena danými plochami:

a) $\iiint_\Omega (2x+3y-z)dxdydz, \Omega: z=0, z=1, x=0, y=0, x+y=2,$

b) $\iiint_{\Omega} \frac{1}{(1+z)^3} dxdydz, \Omega: x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1,$

c) $\iiint_{\Omega} \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dxdydz, \Omega: x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1,$

d) $\iiint_{\Omega} y\cos(x+z)dxdydz, \Omega: y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ x+z=\frac{\pi}{2},$

e) $\iiint_{\Omega} xydxdydz, \Omega: x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=1,\ z=x^2+y^2+1,$

f) $\iiint_{\Omega} x^2yz^3dxdydz, \Omega: x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=xy,\ y=x,\ y=1,$

g) $\iiint_{\Omega} \frac{x+y}{4+z} dxdydz, \Omega: x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=4,\ x+y=3,$

h) $\iiint_{\Omega} dxdydz, \Omega: z=3x^2+3y^2,\ z=1-x^2-y^2.$

2. a) $\frac{1}{8}$; **b)** $\frac{1}{64}$; **c)** $\frac{1}{110}$; **d)** $\frac{3}{4}-\ln 2$; **e)** $\frac{\pi}{4}$; **f)** $\frac{2}{15}$; **g)** $\frac{3}{2}-2\ln 2$; **h)** $\frac{59\pi}{480}$; **i)** $\frac{\pi}{5}(2-\sqrt{2})$.

3. a) $\frac{17}{3}$; **b)** $\frac{1}{4}(\ln 4-1)$; **c)** $\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8})$; **d)** $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$; **e)** $\frac{7}{120}$; **f)** $\frac{1}{364}$; **g)** $9\ln 2$; **h)** $\frac{1}{8}\pi$.

Kontrolní otázky

1. Jaká musí být funkce $f(x,y,z)$, abychom ji mohli integrovat v obecné uzavřené prostorové oblasti Ω?
   a) Spojitá, b) kladná,
   c) monotónní, d) periodická.
2. Která z následujících množin není uzavřená oblast?
   a) Koule, b) kvádr,
   c) krychle, d) krychle bez vrcholů.
3. Který z následujících zápisů vyjadřuje oblast Ω normální vzhledem k souřadnicové rovině os x, z?

a) $f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)$, přičemž $(x,y) \in \Omega_1$, kde Ω_1 je pravoúhlý průmět oblasti Ω do souřadnicové roviny os x, y,

b) $f_1(x,y,z) \le z \le f_2(x,y,z)$, přičemž $(x,y) \in \Omega_1$, kde Ω_1 je pravoúhlý průmět oblasti Ω do souřadnicové roviny os x, y,

c) $f_1(x,z) \le y \le f_2(x,z)$, přičemž $(x,z) \in \Omega_2$, kde Ω_2 je pravoúhlý průmět oblasti Ω do souřadnicové roviny os x, z,

d) $f_1(x) \le z \le f_2(x)$, přičemž $x \in R$.

4. Který z následujících výrazů je správným zápisem trojnásobného integrálu funkce $f(x,y,z) = xyz$ na oblasti Ω, která je normální vzhledem k souřadnicové rovině os x, y?

a) $\iiint_{\Omega} xyz\,dxdydz$,

b) $\iiint_{\Omega} (x+y+z)\,dxdydz$,

c) $\int_a^b xdx \int_x^{2x} ydy \int_{x+y}^{x^2+y^2} zdz$,

d) $\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} xdx \int_c^d ydy \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} zdz$.

5. Který z následujících výrazů je správným zápisem trojnásobného integrálu funkce $f(x,y,z) = xyz$ na oblasti Ω, která je normální vzhledem k souřadnicové rovině os x, z?

a) $\iiint_{\Omega} xyz\,dxdydz$,

b) $\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz$,

c) $\int_a^b xdx \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} zdz \int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} ydy$,

d) $\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} xdx \int_c^d ydy \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} zdz$.

6. Jaké je obecně pořadí výpočtu jednotlivých integrálů v trojnásobném integrálu funkce $f(x,y,z)$ na oblasti Ω?

a) Nejprve počítáme vnější integrál, nakonec počítáme vnitřní integrál,

b) na pořadí nezáleží,

c) nejprve počítáme vnitřní integrál, nakonec počítáme vnější integrál,

d) všechny tři integrály počítáme současně.

7. Jaký tvar musí mít funkce $f(x,y,z)$, abychom mohli v oblasti $\Omega: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le x+y$ integrovat současně všechny tři integrály (podle proměnné x, y i z)?

a) $f_1(x,y).f_2(y).f_3(z)$,

b) $f_1(x).f_2(x,y).f_3(z)$,

c) $f_1(x).f_2(y,z)$,

d) v dané oblasti Ω nelze integrovat současně všechny tři integrály.

8. Jaký význam má $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ pro $f(x,y,z)>0$?

a) Hmotnost oblasti Ω, b) obsah oblasti Ω,

c) objem oblasti Ω, d) povrch oblasti Ω.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. a); 2. d); 3. c); 4. c); 5. c); 6. c); 7. d); 8. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 2.2 znovu.

Kontrolní test

1. Vypočítejte integrál $\iiint_\Omega dxdydz$, $\Omega=\{(x,y,z): x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1\}$.

a) 1, b) 6,

c) $\frac{7}{3}$, d) $\frac{1}{6}$.

2. Vypočítejte integrál
$\iiint_\Omega (2x+3y-z)dxdydz$, $\Omega=\{(x,y,z): x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=1,\ x+y=2\}$

a) 17, b) 33,

c) $\frac{17}{3}$, d) $\frac{3}{17}$.

3. Vypočítejte integrál
$\iiint_\Omega xyzdxdydz$, $\Omega=\{(x,y,z): x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=x,\ z=xy\}$

a) $\frac{1}{40}$, b) $\frac{1}{64}$,

c) $\frac{11}{8}$, d) $\frac{59}{10}$.

4. Vypočítejte integrál $\iiint_{\Omega} xyzdxdydz$, $\Omega = \{(x,y,z) : x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=x,\ z=y\}$.

a) $\frac{1}{40}$, b) $\frac{1}{110}$,

c) $\frac{1}{48}$, d) $\frac{1}{19}$.

5. Vypočítejte integrál $\iiint_{\Omega} (x+z)dxdydz$, $\Omega = \{(x,y,z) : x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=x,\ z=0,\ z=y\}$.

a) $\frac{5}{4}$, b) $\frac{5}{2}$,

c) $\frac{5}{8}$, d) $\frac{5}{6}$.

6. Vypočítejte integrál $\iiint_{\Omega} xydxdydz$, $\Omega = \{(x,y,z) : x=0,\ y=0,\ z\geq 0,\ x+y=1,\ z=xy\}$.

a) $\frac{1}{180}$, b) $\frac{1}{110}$,

c) $\frac{1}{148}$, d) $\frac{1}{190}$.

7. Vypočítejte integrál $\iiint_{\Omega} xdxdydz$, $\Omega = \{(x,y,z) : x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+2y+3z=6\}$.

a) 12, b) 6,

c) 9, d) 3.

8. Vypočítejte integrál

$\iiint_{\Omega} (x^2+y^2)dxdydz$, $\Omega = \{(x,y,z) : x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=2, x+y=z\}$

a) $\frac{65}{14}$, b) $\frac{64}{15}$,

c) $\frac{65}{8}$, d) $\frac{65}{6}$.

9. Vypočítejte integrál $\iiint_{\Omega} \frac{x+z}{4+y} dxdydz$, $\Omega = \{(x,y,z) : x=0,\ y=0,\ z=0,\ y=4,\ x+z=3\}$

a) $9-\ln 2$, b) $9+\ln 2$,

c) $9\ln 2$, d) $2-\ln 9$.

10. Vypočítejte integrál

$$\iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)dxdydz, \Omega = \{(x,y,z) : x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=2,\ 2x+3y=6\}$$

.

a) 20, b) 21,

c) 22, d) 23.

Výsledky testu

1. d); 2. c); 3. b); 4. c); 5. b); 6. a); 7. c); 8. b); 9. c); 10. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 2.2 znovu.

Shrnutí lekce

V této kapitole jste se naučili vypočítat trojrozměrný integrál v obecné uzavřené trojrozměrné oblasti Ω. Integrál $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ funkce $f(x,y,z)$ v oblasti Ω vypočítáme převedením na integrál trojnásobný $\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, případně $\int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, atd. Oblast Ω je tedy pro převedení na trojnásobný integrál nutno analyticky vyjádřit v takovém tvaru, aby meze vnějšího integrálu byly konstantní, meze prostředního integrálu mohou obecně být funkcí jedné proměnné a meze vnitřního integrálu mohou obecně být funkcí dvou proměnných. Obvykle postupujeme tak, že nejprve vyjádříme meze proměnné z. Pak určíme pravoúhlý průmět Ω_1 integrační oblasti Ω do souřadnicové

roviny os x, y. Oblast Ω_1 nakonec vyjádříme jako oblast I. typu, normální vzhledem k ose x nebo jako oblast II. typu, normální vzhledem k ose y, viz kapitola 1.2.

Důležitým předpokladem pro výpočet úloh je opět znalost základních integračních metod. Navíc je zapotřebí si pro určení integračních mezí zopakovat analytickou geometrii v prostoru.

2.3. Transformace v trojrozměrném integrálu

Průvodce studiem

V příkladu 2.2.1 jsme ukázali, že vyjádření integrační oblasti, kterou tvoří válec nebo koule, je v kartézských souřadnicích obtížné. Použijeme-li v takovém případě k řešení válcové nebo sférické souřadnice, stává se vyjádření oboru integrace mnohem snadnějším a rovněž výpočet trojnásobného integrálu se obvykle značně zjednoduší.

Cíle

V této kapitole se naučíme počítat trojrozměrné integrály v případech, kdy integrační oblastí je rotační (nebo eliptický) válec nebo jeho část, případně koule nebo její část (elipsoid nebo jeho část).

Předpokládané znalosti

Opět budeme potřebovat znalost základních integračních metod a k vyjádření integračního oboru analytickou geometrii v prostoru, především rovnice roviny a kvadratických ploch.

Výklad

Obecně jsou transformace v trojrozměrných integrálech dány rovnicemi

$x = u(r,s,t),\ \ y = v(r,s,t),\ \ \ z = w(r,s,t),$

kde funkce $u(r,s,t),\ v(r,s,t),\ w(r,s,t)$, zobrazující oblast Ω^* do oblasti Ω, jsou spojitě diferencovatelné v Ω^*. Obecnou úvahu o transformaci v dvojrozměrném integrálu, kterou jsme provedli v části 1.3, můžeme analogicky použít pro trojrozměrné integrály.

Věta 2.3.1.

V trojrozměrném integrálu platí

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f(u(r,s,t), v(r,s,t), w(r,s,t))\,|J|\,drdsdt,$$

kde jakobián $J = \begin{vmatrix} u'_r & u'_s & u'_t \\ v'_r & v'_s & v'_t \\ w'_r & w'_s & w'_t \end{vmatrix}$ $(\neq 0 \text{ v } \Omega^*)$.

Budeme se zabývat pouze transformacemi do tzv. válcových (cylindrických) a kulových (sférických) souřadnic.

2.3.1. Transformace do válcových souřadnic

Výklad

Transformace do válcových souřadnic je určena zejména pro trojrozměrné integrály, kde integrační oblastí Ω je válec nebo jeho část, nebo v případech, kdy pravoúhlým průmětem Ω_1 oblasti Ω do roviny $z = 0$ je kruh či jeho část.

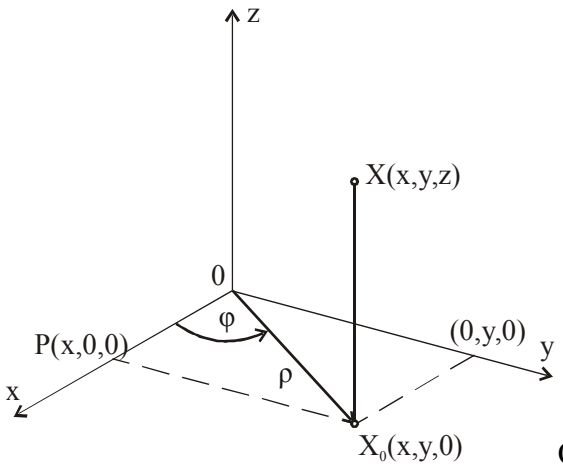
Trojici kartézských souřadnic x, y, z nahradíme trojicí válcových souřadnic ρ, φ, z. Z obr. 30 je zřejmé, že význam válcových souřadnic ρ a φ je stejný jako v případě polárních souřadnic u dvojrozměrných integrálů, třetí souřadnice z se nemění.

V trojúhelníku OPX_0 platí $\cos\varphi = \frac{x}{\rho}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\rho}$.

Odtud pro $\rho \neq 0$ platí $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Transformace do válcových souřadnic je dána transformačními rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \\ y &= \rho\sin\varphi, \\ z &= z. \end{aligned} \qquad (21)$$



Obr. 30

Pro jakobián transformace platí $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$

Věta 2.3.2. (Transformace do válcových souřadnic)

Pro trojrozměrný integrál platí

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\ \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz, \qquad (22)$$

kde Ω^* je integrační oblast vyjádřená ve válcových souřadnicích.

Poznámky

1. Válec s osou v ose z, výškou v a poloměrem a se ve válcových souřadnicích zobrazí na kvádr $0 < \rho \le a,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 \le z \le v.$

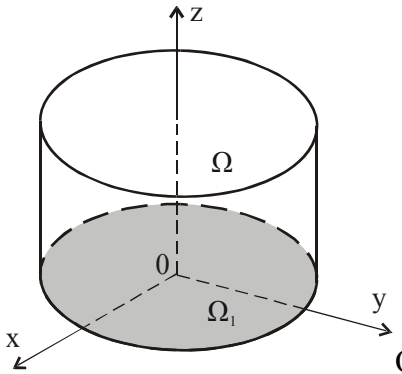
2. Jak jste poznali v kapitole 3.1, *je výpočet trojrozměrného integrálu na kvádru jednodušší než na obecné uzavřené oblasti* Ω

Řešené úlohy

Příklad 2.3.1. Vypočtěte integrál $C = \iiint_{\Omega} dxdydz,$ kde Ω je ohraničená plochami

$$x^2 + y^2 = 1,\ \ z = 0,\ \ z = 1.$$

Řešení: Oblast Ω je válec s osou v ose z, poloměrem podstavy 1 a výškou 1 (obr. 26).



Obr. 31

Zřejmě je $0 \le z \le 1$. Určení nerovnic pro ρ a φ je stejné jako při transformaci do polárních souřadnic, viz integrál *A* v příkladu 1.3.1 v části 1.3.

Pro transformovanou oblast Ω^* proto platí: $\Omega^*: \ 0 < \rho \le 1, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \ 0 \le z \le 1.$

Podle (22) platí

$$C = \iiint_{\Omega^*} \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho dz = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz = \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 [\varphi]_0^{2\pi} [z]_0^1 = \pi.$$

Poznámka

Vzhledem k tomu, že geometrickým významem integrálu C je objem integrační oblasti Ω, můžeme snadno ověřit správnost výpočtu: $V = \pi r^2 v = \pi . 1^2 . 1 = \pi.$

Příklad 2.3.2. Vypočtěte integrál $D = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dxdydz$, Ω je ohraničena parabolickou plochou $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ a rovinou $z = 2.$

Řešení: Průmětem Ω do roviny $z = 0$ je kruh $x^2 + y^2 \le 4.$ Použijeme proto transformace do válcových souřadnic (22).

Souřadnice z je zdola ohraničena parabolickou plochou $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ a shora rovinou $z = 2.$ Podle vztahu (22) dostaneme

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) = \frac{1}{2}\rho^2 .$$

Pro transformovanou oblast Ω^* tedy platí

$$\Omega^*: \ \frac{1}{2}\rho^2 \le z \le 2, \quad 0 < \rho \le 2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Dále platí:

$$D = \iiint_{\Omega^*} (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi).\rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^2 \rho dz =$$

$$= \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^2 dz = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^3 [z]_{\frac{1}{2}\rho^2}^2 \, d\varphi = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^3 (2 - \frac{1}{2}\rho^2) d\varphi =$$

$$= \int_0^2 \rho^3 (2 - \frac{1}{2}\rho^2)[\varphi]_0^{2\pi} \, d\rho = 2\pi \int_0^2 (2\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^5) d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{12} \right]_0^2 =$$

$$= \pi(16 - \frac{32}{3}) = \frac{16}{3}\pi.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Transformací do válcových souřadnic vypočtěte:

a) $\iiint_\Omega z dx dy dz, \Omega : -2 \le x \le 2, 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}, 0 \le z \le 2,$

b) $\iiint_\Omega z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \Omega : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2}, 0 \le z \le 1,$

c) $\iiint_\Omega z(x^2 + y^2) dx dy dz, \Omega : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}, 0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2},$

d) $\iiint_\Omega dx dy dz, \Omega : x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, 0 \le z \le 6.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 4π; **b)** $\frac{8}{9}$; **c)** $\frac{\pi}{48}$; **d)** 3π.

2.3.2. Transformace do sférických souřadnic

Výklad

Transformace do sférických souřadnic je určena zejména pro trojrozměrné integrály, kde integrační oblastí Ω je koule nebo její část (elipsoid nebo jeho část), nebo v případech, kdy pravoúhlým průmětem Ω_1 oblasti Ω do roviny $z = 0$ je kruh či jeho část.

Trojici kartézských souřadnic x, y, z nahradíme trojicí sférických souřadnic ρ, φ, ϑ, viz obr. 32. Souřadnice ρ znamená vzdálenost bodu $X(x, y, z)$ od počátku soustavy souřadnic $(\rho \ge 0)$. Souřadnice φ označuje orientovaný úhel měřený v souřadnicové rovině os *x, y* od kladného směru osy *x* po průvodič bodu $(x, y, 0)$ v kladném smyslu. Souřadnice ϑ označuje orientovaný úhel měřený v souřadnicové rovině os *y, z* od kladného směru osy *z* po průvodič bodu (x, y, z) v kladném smyslu.

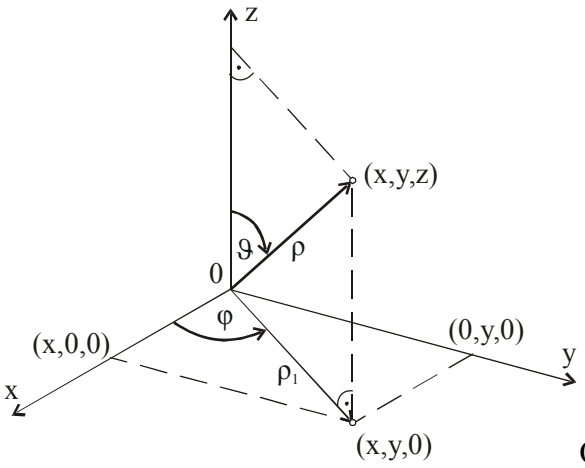
Transformační rovnice pro transformaci do sférických souřadnic odvodíme pomocí obr. 32. Poznamenejme, že ρ_1 je pravoúhlý průmět ρ do roviny $z = 0$. V trojúhelníku s vrcholy $(0,0,0), (x,0,0), (x,y,0)$ platí:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho_1}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho_1}$$

a odtud pro $\rho_1 \neq 0$ platí $\qquad x = \rho_1 \cos\varphi, \;\; y = \rho_1 \sin\varphi.$ (23)

V trojúhelníku s vrcholy $(0,0,0), (x,y,0), (x,y,z)$ platí $\quad \sin\vartheta = \frac{\rho_1}{\rho}, \;\; \cos\vartheta = \frac{z}{\rho}$

a odtud pro $\rho \neq 0$ platí $\qquad \rho_1 = \rho\sin\vartheta, \;\; z = \rho\cos\vartheta.$



Obr. 32

Po dosazení za ρ_1 do vztahu (23) získáme transformační rovnice pro transformaci do sférických souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\sin\vartheta, \\ y &= \rho\sin\varphi\sin\vartheta, \\ z &= \rho\cos\vartheta. \end{aligned} \qquad (24)$$

Pro jakobián transformace platí

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\sin\vartheta & \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -\rho\sin\vartheta \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\vartheta.$$

Věta 2.3.3. (Transformace do sférických souřadnic)

Pro trojrozměrný integrál platí

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f(\rho\cos\varphi\sin\vartheta,\ \rho\sin\varphi\sin\vartheta,\ \rho\cos\vartheta)\rho^2\sin\vartheta\, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta, \quad (25)$$

kde Ω^* je integrační oblast vyjádřená ve sférických souřadnicích.

Poznámky

1. Koule se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem a se ve sférických souřadnicích zobrazí na kvádr $0 < \rho \le a,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 \le \vartheta \le \pi.$

2. Jak jste poznali v kapitole 3.1, je výpočet trojrozměrného integrálu na kvádru jednodušší než na obecné uzavřené oblasti Ω.

Řešené úlohy

Příklad 2.3.3. Vypočtěte integrál

$$E = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)dxdydz,\ \ \Omega : x^2+y^2+z^2 \le 4,\ \ x^2+y^2+z^2 \ge 1.$$

Řešení: Oblast Ω je ohraničena dvěma kulovými plochami se středem v počátku soustavy souřadnic o poloměrech $a = 1$ a $b = 2$. Použijeme transformace do sférických souřadnic (24).

Oblast Ω^* je určena nerovnicemi: $1 \le \rho \le 2,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 \le \vartheta \le \pi.$

Pro integrál po dosazení podle vztahu (25) platí:

$$E = \iiint_{\Omega^*} (\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \rho^2\cos^2\vartheta)\,\rho^2\sin\vartheta\, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta =$$

$$= \int_1^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \rho^4\sin\vartheta\, d\vartheta = \int_1^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \rho^4\sin\vartheta d\vartheta = \int_1^2 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^2 .[\varphi]_0^{2\pi} .[-\cos\vartheta]_0^{\pi} = \frac{31}{5}.2\pi.2 = \frac{124}{5}\pi.$$

Výklad

Ukážeme nyní příklad použití transformace do sférických souřadnic, kdy Ω nebude ani koule, ani její část.

Příklad 2.3.4. Vypočtěte integrál $F = \iiint_{\Omega} dxdydz$, kde Ω je ohraničena plochou $(x^2+y^2+z^2)^3 = (x^2+y^2)^2$ pro $z \geq 0$. ✖

Řešení: Provedeme transformaci do sférických souřadnic.

Nejprve převedeme rovnici plochy do sférických souřadnic dosazením transformačních rovnic (24):

$x^2+y^2+z^2 = \rho^2$ (protože pro vzdálenost bodu $X(x,y,z)$ od počátku platí $|OX| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho$),

$x^2+y^2 = (\rho\cos\varphi\sin\vartheta)^2 + (\rho\sin\varphi\sin\vartheta)^2 = (\rho\sin\vartheta)^2(\cos\varphi^2+\sin\varphi^2) = \rho^2\sin^2\vartheta,$

tedy po dosazení do rovnice plochy $(\rho^2)^3 = \rho^4\sin^4\vartheta$, z toho $\rho = \sin^2\vartheta$.

Oblast Ω^* je určena nerovnicemi: $0 < \rho \leq \sin^2\vartheta,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, (z \geq 0).$

Pro integrál po dosazení podle vztahu (25) platí

$$F = \iiint_{\Omega^*} \rho^2\sin\vartheta\, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\sin^2\vartheta} \rho^2\sin\vartheta\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sin^2\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\vartheta\sin\vartheta d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{3}[\varphi]_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\vartheta)^3 \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-3\cos^2\vartheta+3\cos^4\vartheta-\cos^6\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta =$$

$$= \left|\begin{matrix}\cos\vartheta = t & \vartheta = 0, & t = 1 \\ \sin\vartheta\, d\vartheta = -dt & \vartheta = \frac{\pi}{2}, & t = 0\end{matrix}\right| = \frac{2}{3}\pi\int_0^1 (1-3t^2+3t^4-t^6)dt =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left[t - t^3 + \frac{3}{5}t^5 - \frac{t^7}{7}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi.\frac{16}{35} = \frac{32}{105}\pi.$$

Úlohy k samostatnému řešení

2. Transformací do sférických souřadnic vypočtěte:

a) $\iiint_{\Omega} z\,dxdydz,\ \Omega:\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x^2+y^2+z^2\leq 4,$

b) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,\ \Omega:\ x^2+y^2+z^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,$

c) $\iiint_{\Omega} z(x^2+y^2)\,dxdydz,\ \Omega: 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq \sqrt{1-x^2},\ 0\leq z\leq \sqrt{1-x^2-y^2},$

d) $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\,dxdydz,\ \Omega: z\geq 0,\ 4\leq x^2+y^2+z^2\leq 9,$

e) $\iiint_{\Omega} dxdydz,\ \Omega: z\geq 0, x^2+y^2\leq 2x,\ x^2+y^2+z^2\leq 4,$ ✖

f) $\iiint_{\Omega} dxdydz,\ \Omega$ je ohraničena plochou $(x^2+y^2+z^2)^2=3x.$ ✖

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. a) π; **b)** $\frac{\pi}{8}$; **c)** $\frac{\pi}{48}$; **d)** $\frac{844}{15}\pi$; **e)** $\frac{16}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$; **f)** π.

Kontrolní otázky

1. Válcové souřadnice s výhodou používáme v případě, kdy integrační oblastí trojného integrálu je:

a) Kvádr, b) kruh,

c) válec, d) elipsa.

2. Souřadnice ρ ve válcových nebo sférických souřadnicích může nabývat hodnot:

a) Jen celočíselných, b) jen kladných,

c) jen záporných, d) reálných.

3. Transformační rovnice do válcové soustavy souřadnic mají tvar:

a) $x=\rho+\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=\rho+\varphi,$ b) $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho+\sin\varphi,\ z=\rho,$

c) $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z,$ d) $x=\rho\sin\varphi,\ y=\rho+\cos\varphi,\ z=z.$

4. Rotační válec s osou v ose z, výškou v a poloměrem a popisují ve válcových souřadnicích nerovnice:

a) $0 < \rho \le a, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le z \le v$,

b) $-a \le \rho \le a, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le z \le v$,

c) $0 < \rho \le a, 0 \le \varphi \le \pi, -v \le z \le v$,

d) $0 < \rho \le a, 0 < \varphi \le a, -\frac{v}{2} \le z \le \frac{v}{2}$.

5. Rotační válec s osou v ose z, výškou v a poloměrem a se zobrazí ve válcových souřadnicích jako:

a) Krychle,

b) koule,

c) obdélník,

d) kvádr.

6. Součin diferenciálů $dxdydz$ nahradíme ve válcových souřadnicích výrazem:

a) $\rho^2 d\rho\, d\varphi\, dz$,

b) $\rho\, d\rho\, d\varphi\, \mathrm{dz}$,

c) $\rho \sin\vartheta\, \varphi\, d\rho\, d\varphi\, dz$,

d) $\rho \cos\vartheta\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

7. Sférické souřadnice s výhodou používáme v případě, kdy integrační oblastí trojného integrálu je:

a) Kvádr,

b) koule,

c) válec,

d) elipsa.

8. Polokoule se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem a, $z \ge 0$ se zobrazí ve sférických souřadnicích jako:

a) Kvádr,

b) koule,

c) válec,

d) kruh.

9. Integrand $x^2 + y^2 + z^2$ nahradíme ve sférických souřadnicích výrazem:

a) ρ,

b) φ,

c) ρ^2,

d) φ^2.

10. Součin diferenciálů $dxdy$ nahradíme ve sférických souřadnicích výrazem:

a) $\rho^2 d\rho\, d\varphi\, d\vartheta$,

b) $\rho^2 \sin\vartheta\, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta$,

c) $\rho \sin\vartheta\, \varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta$,

d) $\rho \cos\vartheta\, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. c); 2. b); 3. c); 4. a); 5. d); 6. b); 7. b); 8. a); 9. c); 10. b.

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 2.3 znovu.

Kontrolní test

1. Integrál $\iiint_{\Omega} dxdydz,\ \Omega:\ 4 \le x^2 + y^2 \le 16,\ 0 \le z \le 1$, je roven

a) $\frac{\pi}{16}$, b) 12π,

c) $\frac{\pi^2}{14}$, d) $\frac{\pi}{6}$.

2. Integrál $\iiint_{\Omega} (x+y)dxdydz,\ \Omega:\ 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge x,\ y \ge -x, 0 \le z \le a$, je roven

a) $26a$, b) $a^2\sqrt{2}$,

c) $\frac{26}{3}a\sqrt{2}$, d) $\frac{26}{3}a$.

3. Integrál $\iiint_{\Omega} (2x+y-z)dxdydz,\ \Omega:\ 4x^2 + y^2 \le 16,\ y \ge x,\ x \ge 0, 0 \le z \le a$, je roven

a) $\frac{a}{3}(64-3\pi a)$, b) $\frac{a}{2}(64+3\pi a)$,

c) $\frac{a}{6}(64-3\pi a)$, d) $\frac{a}{6}(64+3\pi a)$.

4. Integrál $\iiint_{\Omega} zdxdydz,\ \Omega:\ x^2 + y^2 \le 9,\ x \le y \le x\sqrt{3}, 0 \le z \le 4$ je roven

a) $\frac{5\pi}{4}$, b) $\frac{3\pi}{4}$,

c) 3π, d) 5π.

5. Integrál $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz,\ \Omega:\ x^2 + y^2 \le 2x, y \ge 0, 0 \le z \le v$ je roven

a) $\frac{9v^2}{8}$, b) $\frac{v^2}{6}$,

c) $\frac{v^2}{6}$, d) $\frac{8v^2}{9}$.

6. Integrál $\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{1+x^2+y^2+z^2}$, $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 4, 0 \le x \le y \le x\sqrt{3}, z \ge 0$ je roven

a) $\frac{\pi}{12}(2-\operatorname{arctg} 2)$, b) $\frac{\pi}{6}(1+\operatorname{arctg} 2)$,

c) $2\operatorname{arctg} 2$, d) $\frac{\pi}{12}$.

7. Integrál $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$, $\Omega: x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,$ je roven

a) $\frac{215\pi}{4}$, b) $\frac{211\pi^2}{30}$,

c) $\frac{211\pi}{30}$, d) $\frac{27\pi}{8}$.

8. Integrál $\iiint_\Omega xyzdxdydz$, $\Omega: x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x^2+y^2+z^2 \le a^2, a > 0$ je roven

a) $\frac{a^3}{48}$, b) $\frac{a^2}{48}$,

c) $\frac{a^6}{48}$, d) $\frac{a^5}{48}$.

9. Integrál $\iiint_\Omega zdxdydz$, $\Omega: x \ge 0, z \ge 0, x^2+y^2+z^2 \le 1,$ je roven

a) $\frac{\pi}{2}$, b) $\frac{\pi}{4}$,

c) $\frac{\pi}{6}$, d) $\frac{\pi}{8}$.

10. Integrál $\iiint_\Omega (x^2+y^2)dxdydz$, $\Omega: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9} \le 1,$ je roven

a) $\frac{96\pi}{5}$, b) $\frac{106\pi}{5}$,

c) $\frac{116\pi}{5}$, d) $\frac{126\pi}{5}$.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. c); 4. c); 5. d); 6. a); 7. c); 8. c); 9. d); 10. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je potřeba prostudovat kapitolu 2.3 znovu.

Shrnutí lekce

Ve ***válcových (cylindrických) souřadnicích*** počítáme obvykle trojrozměrné integrály, jejichž integrační oblastí je válec, případně část válce, nebo rotační kužel, případně jeho část. Kartézské souřadnice x, y, z bodu nahradíme válcovými souřadnicemi ρ, φ, z, kde ρ znamená vzdálenost průmětu $(x, y, 0)$ bodu (x, y, z) do souřadnicové roviny os *x, y* od počátku soustavy souřadnic. φ označuje orientovaný úhel, měřený od kladného části osy *x* po průvodič bodu $(x, y, 0)$ v kladném smyslu. Souřadnice z se nemění. Transformační rovnice při přechodu z kartézských souřadnic do válcových souřadnic mají tvar $x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$ Součin diferenciálů *dxdydz* v trojrozměrném integrálu nahradíme výrazem $\rho \, d\rho \, d\varphi \, dz.$

Ve ***sférických (kulových) souřadnicích*** počítáme trojrozměrné integrály, jejichž integrační oblastí je koule, případně část koule, nebo rotační kužel, případně jeho část. Kartézské souřadnice x, y, z bodu nahradíme sférickými souřadnicemi ρ, φ, ϑ. ρ znamená vzdálenost bodu o souřadnicích (x, y, z) od počátku soustavy souřadnic. φ označuje orientovaný úhel, měřený od kladného směru osy *x* po průvodič bodu $(x, y, 0)$ v kladném smyslu (v horizontální rovině). ϑ označuje orientovaný úhel, měřený od kladného směru osy *z* po průvodič bodu (x, y, z) v kladném smyslu (ve vertikální rovině). Transformační rovnice při přechodu z kartézských souřadnic do sférických souřadnic mají tvar $x = \rho \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = \rho \cos \vartheta.$ Součin diferenciálů *dxdydz* nahradíme výrazem $|J| \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta = \rho^2 \sin \vartheta \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta.$

2.4. Aplikace trojrozměrného integrálu

Průvodce studiem

Zatím jsme se naučili počítat trojrozměrný integrál na kvádru a na obecné prostorové uzavřené oblasti, aniž jsme věděli, k čemu tyto znalosti můžeme využívat. Nyní si ukážeme, proč jsme vlastně trojrozměrný integrál studovali. Poznáme jeho využití v geometrii při výpočtu metrických úloh a ve fyzice při výpočtu fyzikálních veličin, které charakterizují hmotné prostorové oblasti.

Cíle

V této kapitole se naučíme používat Riemannův trojrozměrný integrál v geometrii a fyzice. Seznámíme se s výpočtem objemu tělesa. Z fyzikálních aplikací poznáme výpočet hmotnosti a souřadnic těžiště hmotných prostorových oblastí Ω, určení statických momentů a momentů setrvačnosti hmotných prostorových oblastí Ω.

Předpokládané znalosti

Využijeme všechny poznatky, které jsme získali v předchozích kapitolách.

Opět se neobejdeme bez znalosti základních integračních metod a analytické geometrie.

2.4.1. Objem tělesa

Výklad

Jak bylo v části 2.1 uvedeno, znamená trojrozměrný integrál z funkce $f(x,y,z) \geq 0$ v oblasti Ω hmotnost oblasti Ω, přičemž rozložení hustoty v bodech oblasti Ω je dáno funkcí $\sigma = f(x,y,z)$. Jestliže $\sigma = 1$, pak uvedený trojrozměrný integrál znamená **objem tělesa** a platí

$$V = \iiint_{\Omega} dxdydz. \qquad (26)$$

Řešené úlohy

Příklad 2.4.1. Vypočtěte objem válce, jehož podstavu tvoří kruh o poloměru $r = 1$ a který má výšku $v = 1$.

Řešení: Odpovídá výpočtu integrálu C v příkladu 2.3.1 v kapitole 2.3: $V = \pi$.

Příklad 2.4.2. Vypočtěte objem tělesa, které je ohraničeno válcovými plochami $z = 5 - y^2$, $z = y^2 + 3$ a rovinami $x = 0, x = 2$.

Řešení: Ze zadání jsou zřejmé meze pro proměnnou *x* a proměnnou z. Abychom určili meze pro proměnnou *y*, musíme znát rovnici průsečnic válcových ploch. Získáme je vyřešením rovnice $5 - y^2 = y^2 + 3, \quad 2y^2 = 2, \quad y^2 = 1, \quad y = \pm 1$.

Pro integrační oblast proto platí nerovnice

$\Omega: \ 0 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 1, \quad y^2 + 3 \le z \le 5 - y^2$.

Objem zadané oblasti vypočítáme podle vztahu (26):

$$V = \iiint_{\Omega} dxdydz = \int_0^2 dx \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2+3}^{5-y^2} dz = \int_0^2 dx \int_{-1}^{1} dy \left[z\right]_{y^2+3}^{5-y^2} = \int_0^2 dx \int_{-1}^{1} (2 - 2y^2) dy =$$

$$= 2\int_0^2 dx \int_0^1 2(1 - y^2) dy = = 2.2\int_0^2 dx \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = 4.\frac{2}{3}\left[x\right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Příklad 2.4.3. Vypočtěte objem trojosého elipsoidu, jehož délky poloos jsou postupně $a, b, c, a > 0, b > 0, c > 0$.

Řešení: Střed elipsoidu umístíme do počátku soustavy souřadnic. Rovnice elipsoidu má v takovém případě tvar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Pro řešení použijeme ***zobecněné sférické souřadnice***, které vzniknou ze sférických souřadnic (24) doplněním jednotlivých délek poloos do příslušné transformační rovnice:

$$\begin{aligned} x &= a\rho\cos\varphi\sin\vartheta, \\ y &= b\rho\sin\varphi\sin\vartheta, \\ z &= c\rho\cos\vartheta. \end{aligned} \qquad (27)$$

Jakobián transformace je určen vztahem $J = -abc\rho^2\sin\vartheta$.

Elipsoid se transformuje na kvádr Ω^*: $0 < \rho \le 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \vartheta \le \pi$. Meze pro proměnné φ a ϑ určíme z geometrického názoru (analogicky jako u koule), meze pro proměnnou ρ zjistíme dosazením transformačních rovnic do rovnice elipsoidu:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{a^2\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta}{a^2}+\frac{b^2\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta}{b^2}+\frac{c^2\rho^2\cos^2\vartheta}{c^2}=1,$$

$$\rho^2\left[\sin^2\vartheta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\cos^2\vartheta\right]=1, \quad \rho^2=1, \quad \rho=1.$$

Podle vztahu (26) platí:

$$V=\iiint_{\Omega} dxdydz = abc\iiint_{\Omega^*}\rho^2\sin\vartheta\, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta = abc\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1[\varphi]_0^{2\pi}[-\cos\vartheta]_0^{\pi},$$

$$V=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami:

a) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=2,\ y=3,\ x+y+z=4,\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$,

b) $x-y+z=6,\ x+y=2,\ x=y,\ y=0,\ z=0$,

c) $6x-9y+5z=0,\ 3x-2y=0,\ 4x-y=0,\ x+y=5,\ z=0$,

d) $z=x^2+y^2,\ z=y$,

e) $y=x^2,\ z=0,\ y+z=2$,

f) $y=\ln x,\ y=\ln^2 x,\ z=0,\ y+z=1$,

g) $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=3z$, ✖

h) $2z=x^2+y^2,\ y+z=4$,

i) $x^2 = y, x^2 = 4 - 3y, z = 0, z = 9,$

j) $z = x^2 + y^2, z = 0, y = 1, y = 2x, y = 6 - x,$

k) $x^2 + y^2 + z^3 = 1, z \geq -1,$ ✖

l) $x^2 + y^2 + z^4 = 1,$ ✖

m) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x,$ ✖

n) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = x^2 + y^2,$ ✖

o) $z = \cos x.\cos y, x = 0, y = 0, z = 0, x + y = \frac{\pi}{2},$

p) $x^2 + y^2 + z^2 = 12,\ 4z = x^2 + y^2,$ ✖

q) $z = xy, x^2 + y^2 = 2x,\ z = 0.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{55}{6}$; **b)** $\frac{16}{3}$; **c)** $\frac{15}{2}$; **d)** $\frac{\pi}{32}$; **e)** $\frac{32\sqrt{2}}{15}$; **f)** $3e - 8$; **g)** $\frac{19}{6}\pi$; **h)** $\frac{81}{4}\pi$; **i)** 16; **j)** $\frac{2511}{32}$;

k) 2π; **l)** $\frac{8}{5}\pi$; **m)** $\frac{1}{12}\pi$; **n)** $\frac{64}{105}\pi$; **o)** $\frac{\pi}{4}$; **p)** $\frac{8\pi}{3}(6\sqrt{3} - 5)$; **q)** $\frac{2}{3}$.

2.4.2 Fyzikální aplikace

Výklad

Mějme hmotnou oblast Ω, přičemž hustota v každém bodě $X(x, y, z)$ oblasti Ω je dána funkcí $\sigma = \sigma(x, y, z)$.

Pak **hmotnost tělesa**, které je určeno oblastí Ω, je určena vztahem

$$m = \iiint_{\Omega} \sigma(x, y, z)dxdydz, \qquad (28)$$

statický moment tělesa S_{xy}, resp. S_{yz}, resp. S_{xz}, **vzhledem k souřadnicové rovině os** x, y, resp. y, z, resp. x, z je

$$S_{xy} = \iiint_{\Omega} z\sigma(x,y,z)dxdydz\ , \tag{29a}$$

$$S_{yz} = \iiint_{\Omega} x\sigma(x,y,z)dxdydz\ , \tag{29b}$$

$$S_{xz} = \iiint_{\Omega} y\sigma(x,y,z)dxdydz\ , \tag{29c}$$

souřadnice těžiště $T = (\xi, \eta, \zeta)$ tělesa jsou

$$\xi = \frac{S_{yz}}{m}, \qquad \eta = \frac{S_{xz}}{m}, \qquad \zeta = \frac{S_{xy}}{m}, \tag{30}$$

moment setrvačnosti tělesa rotujícího kolem osy x, resp. y, resp. z je

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\sigma(x,y,z)dxdydz, \tag{31a}$$

$$I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2)\sigma(x,y,z)dxdydz, \tag{31b}$$

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)\sigma(x,y,z)dxdydz. \tag{31c}$$

Řešené úlohy

Příklad 2.4.4. Vypočtěte hmotnost tělesa ohraničeného kulovými plochami $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, přičemž jeho hustota v bodě $X(x,y,z)$ je $\sigma(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Řešení: Odpovídá řešení integrálu E v příkladu 2.3.3: v kapitole 2.3.

$$m = \frac{124}{5}\pi.$$

Příklad 2.4.5. Určete hmotnost polokoule $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, je-li její hustota v libovolném bodě přímo úměrná páté mocnině vzdálenosti tohoto bodu od středu polokoule a v bodě $A(1,0,0)$ nabývá hodnoty 2.

Řešení: Podle zadání je hustota určena vztahem $\sigma = k(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5$, kde $k \in R$ je konstanta úměrnosti. V bodě A platí: $2 = k(\sqrt{1^2+0^2+0^2})^5$, odtud konstanta úměrnosti $k = 2$ a pro hustotu koule tedy platí $\sigma = 2(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5$.

Vzhledem ke tvaru integrační oblasti použijeme transformaci do sférických souřadnic (24). Pro hustotu pak platí $\sigma = 2\rho^5$, neboť proměnná ρ je definována jako vzdálenost bodu $X(x,y,z)$ od počátku soustavy souřadnic ($\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$).

Integrační oblast je určena nerovnicemi $\Omega^*: \ 0 < \rho \le 2, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$.

Podle vztahu (28) pro hmotnost koule platí:

$$m = \iiint_{\Omega} 2(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5 \, dxdydz = 2\iiint_{\Omega^*} \rho^5 \rho^2 \sin\vartheta \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta =$$

$$= 2\int_0^2 \rho^7 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \, d\vartheta = 2\left[\frac{\rho^8}{8}\right]_0^2 [\varphi]_0^{2\pi} \left[-\cos\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 128\pi.$$

Úlohy k samostatnému řešení

2. Vypočtěte hmotnost tělesa ohraničeného danými plochami, jestliže hustota v každém bodě $X(x,y,z)$ je dána funkcí $\sigma = \sigma(x,y,z)$:

a) $x^2+y^2+z^2 = 4, \ \sigma = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

b) $x^2+y^2+z^2 = 1, \ \sigma = \dfrac{2}{x^2+y^2+z^2}$,

c) $x^2 = 2y, \ y+z = 1, \ 2y+z = 2, \ \sigma = y$,

d) $x^2+y^2+z^2 = 4, \ x^2+y^2 = 3z, \ \sigma = z$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. a) 16π; **b)** 8π; **c)** $\frac{8}{35}\sqrt{2}$; **d)** $\frac{13\pi}{4}$.

Řešené úlohy

Příklad 2.4.6. Určete statický moment tělesa, které je ohraničeno válcovou plochou $z = \sqrt{x}$ a rovinami $x = 3,\ y = 0,\ y = 2,\ z = 0$, vzhledem k souřadnicové rovině os x, y. Hustota tělesa v libovolném bodě je přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od souřadnicové roviny os x, z.

Řešení: Podle zadání je hustota určena vztahem $\sigma = ky$, kde k je konstanta úměrnosti.

Ze zadání vyplývají pro integrační oblast nerovnice:

$\Omega:\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2, 0 \le z \le \sqrt{x}.$

Podle vztahu (29a) pro požadovaný statický moment platí:

$$S_{xy} = \iiint_{\Omega} z.ky dx dy dz = k\int_0^3 dx \int_0^2 y dy \int_0^{\sqrt{x}} z dz = k\int_0^3 dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{x}} = k\int_0^3 x dx = \frac{9k}{2}.$$

Úlohy k samostatnému řešení

3. Vypočtěte statické momenty daných těles, je-li jejich hustota konstantní (bez újmy na obecnosti položíme $\sigma = 1$):

a) Tělesa $x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ vzhledem k rovině $z = 0$,

b) kvádru o délkách hran $a = 1, b = 2, c = 3$ vzhledem k jeho stěnám,

c) rotačního kužele s poloměrem $r = 3$ a výškou $v = 2$ vzhledem k rovině procházející vrcholem rovnoběžně s podstavou.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. a) $\frac{\pi}{16}$; **b)** $3, 6, 9$; **c)** 9π.

Řešené úlohy

Příklad 2.4.7. Určete těžiště homogenního tělesa, které je ohraničeno rovinami $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, x + y + z = 2.$

Řešení: Bez újmy na obecnosti položíme $\sigma = 1$. Nejprve určíme hranice integrační oblasti Ω. Ze zadání vyplývá, že pravoúhlým průmětem oblasti Ω do souřadnicové roviny os x, y je čtverec $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$. Zdola je oblast Ω ohraničena souřadnicovou rovinou $z = 0$ a shora rovinou $x + y + z = 2$. Platí proto: $\Omega:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 2 - x - y.$

K určení těžiště potřebujeme podle vztahu (30) vypočítat hmotnost tělesa (vztah 28) a statické momenty vzhledem k jednotlivým souřadnicovým rovinám (vztahy 29a, b, c).

$$m = \iiint_{\Omega} dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{2-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^1 (2-x-y)dy = \int_0^1 \left[(2-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - x\right)dx = \left[\frac{3}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1,$$

$$S_{xy} = \iiint_{\Omega} zdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{2-x-y} zdz = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^1 (2-x-y)^2 dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{(2-x-y)^3}{-3} \right]_0^1 dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 \left[\left[(1-x)^3 - (2-x)^3 \right] \right] dx = -\frac{1}{6}\left[\frac{(1-x)^4}{-4} - \frac{(2-x)^4}{-4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}(-1^4 - 1^4 + 2^4) = \frac{7}{12},$$

$$S_{xz} = \iiint_{\Omega} ydxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 ydy \int_0^{2-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^1 y(2-x-y)dy = \int_0^1 \left[\frac{(2-x)y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (4-3x)dx = \frac{1}{6}\left[4x - \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{12},$$

$$S_{yz} = \iiint_{\Omega} xdxdydz = \int_0^1 xdx \int_0^1 dy \int_0^{2-x-y} dz = \int_0^1 xdx \int_0^1 (2-x-y)dy = \int_0^1 x\left[(2-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (3x - 2x^2)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{5}{12}.$$

Pro souřadnice těžiště tedy podle vztahu (30) platí

$$\xi = \frac{\frac{5}{12}}{1} = \frac{5}{12}, \qquad \eta = \frac{\frac{5}{12}}{1} = \frac{5}{12}, \qquad \zeta = \frac{\frac{7}{12}}{1} = \frac{7}{12}.$$

Úlohy k samostatnému řešení

4. Určete souřadnice těžiště daných těles, je-li jejich hustota konstantní (bez újmy na obecnosti položíme $\sigma = 1$):

a) Hranolu ohraničeného rovinami $z = 0, x = 0, y = 0, x = 2, y = 4, \ x + y + z = 8,$

b) jehlanu ohraničeného rovinami $x = 0, y = 0, z = 0, x + 2y + 3z = 1,$

c) tělesa ohraničeného plochami $z^2 = xy, x = 1, y = 2, z = 0,$

d) tělesa ohraničeného plochami $2z = x^2 + y^2, x + y - z = 0,$ ✖

e) tělesa ohraničeného plochami $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z.$ ✖

Výsledky úloh k samostatnému řešení

4. a) $(\frac{14}{15}, \frac{26}{15}, \frac{8}{3})$; **b)** $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12})$; **c)** $(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9\sqrt{2}}{32})$; **d)** $(1, 1, \frac{5}{3})$; **e)** $(0, 0, \frac{9}{10})$.

Řešené úlohy

Příklad 2.4.8. Stanovte moment setrvačnosti tělesa ohraničeného plochami $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 2, \ x + y - z = 0$ při rotaci kolem osy *z*, je-li jeho hustota konstantní.

Řešení: Bez újmy na obecnosti položíme $\sigma = 1$. Řešení úlohy odpovídá řešení integrálu *B* v příkladu 2.2.4 v kapitole 2.2:

$$I_z = \frac{64}{15}.$$

Poznámka

Podobně lze formulovat řadu úloh z předcházejících částí.

Řešené úlohy

Příklad 2.4.9. Určete moment setrvačnosti trojosého elipsoidu, jehož délky poloos jsou postupně $a, b, c, a > 0, b > 0, c > 0$, vzhledem k jeho osám. Hustota elipsoidu je konstantní.

Řešení: Bez újmy na obecnosti položíme $\sigma = 1$. Střed elipsoidu umístíme do počátku soustavy souřadnic. Rovnice elipsoidu má v takovém případě tvar $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Pro řešení použijeme zobecněné sférické souřadnice (27). Elipsoid se transformuje na kvádr Ω^*: $0<\rho\le 1,\ \ 0\le\varphi<2\pi,\ \ 0\le\vartheta\le\pi$, viz příklad 2.4.3. K výpočtu momentů setrvačnosti použijeme vztahy (30a, b, c).

$$I_x=\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=abc\iiint_{\Omega^*}(b^2\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta+c^2\rho^2\cos^2\vartheta)\,\rho^2\sin\vartheta\,d\rho\,d\varphi\,d\vartheta=$$

$$=abc\int_0^1\rho^4 d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}(b^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta+c^2\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta=$$

$$=abc\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\left[b^2\sin^2\varphi(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta+c^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta\right]d\vartheta=$$

(zavedeme substituci $\cos\vartheta=t,\ -\sin\vartheta\,d\vartheta=dt,\ \sin\vartheta\,d\vartheta=-dt$)

$$=\frac{1}{5}abc\int_0^{2\pi}d\varphi\left[b^2\sin^2\varphi(-\cos\vartheta+\frac{\cos^3\vartheta}{3})-c^2\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{5}abc\int_0^{2\pi}(\frac{4}{3}b^2\sin^2\varphi+\frac{2}{3}c^2)d\varphi=\frac{1}{5}abc\int_0^{2\pi}(\frac{4}{3}b^2\frac{1-\cos 2\varphi}{2}+\frac{2}{3}c^2)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{5}abc\left[\frac{2}{3}(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2})+\frac{2}{3}c^2\varphi\right]_0^{2\pi}=\frac{2}{15}abc(2\pi b^2+2\pi c^2)=\frac{4\pi}{15}abc(b^2+c^2).$$

Analogicky vypočítáme

$$I_y=\iiint_{\Omega}(x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\frac{4\pi}{15}abc(a^2+c^2),$$

$$I_z=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2).$$

Úlohy k samostatnému řešení

5. Vypočtěte moment setrvačnosti daných těles, je-li jejich hustota konstantní (bez újmy na obecnosti položíme $\sigma=1$):

a) Kvádru o délkách hran $a=1, b=2, c=3$ při rotaci kolem hran,

b) jehlanu ohraničeného rovinami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+2y+3z=1$ při rotaci kolem souřadnicových os,

c) kužele $x^2+y^2+z^2,\ z=1$ při rotaci kolem osy kužele,

d) tělesa ohraničeného plochami $z^2=2x,\ z=0,\ x^2+y^2=x$ při rotaci kolem osy z, ✖

e) tělesa ohraničeného plochami $x^2+y^2+z^2=2,\ x^2+y^2=z^2,\ z\geq 0$ při rotaci kolem osy z. ✖

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5. a) $I_a=26,\ I_b=20,\ I_c=10$; **b)** $I_x=\frac{1}{12960},\ I_y=\frac{1}{324},\ I_z=\frac{1}{288}$; **c)** $\frac{1}{10}\pi$; **d)** $\frac{32\sqrt{2}}{135}$;

e) $\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5)$.

Kontrolní otázky

1. Objem tělesa, které je určeno uzavřenou prostorovou oblastí Ω, je dán vztahem:

a) $\iiint_\Omega dxdydz$, b) $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$,

c) $\iiint_\Omega |f(x,y,z)|dxdydz$, d) $\iiint_\Omega xyzdxdydz$.

2. Objem tělesa, které je ohraničeno souřadnicovými rovinami a částí roviny $x+y+z=1$ v prvním oktantu, je roven

a) 6, b) 1,

c) $\frac{1}{6}$, d) $\frac{1}{3}$.

3. Objem tělesa, které je ohraničeno rovinami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=2,\ z=3,$ je roven

a) 6, b) 1,

c) $\frac{1}{6}$, d) $\frac{1}{3}$.

4. Jak vypočítáme hmotnost uzavřené prostorové oblasti Ω, je-li hustota v jejím libovolném bodě (x,y,z) určena funkcí $\sigma(x,y,z)$?

a) $\iiint_{\Omega} dxdydz,$ b) $\iiint_{\Omega} \sigma(x,y,z)dxdydz,$

c) $\iiint_{\Omega} (x+y+z)dxdydz,$ d) $\iiint_{\Omega} \sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)dxdydz\,.$

5. Hmotnost homogenní uzavřené prostorové oblasti Ω (bez újmy na obecnosti položíme $\sigma = 1$) je rovna

a) jejímu objemu,

b) jejímu povrchu,

c) obsahu jejího půdorysu,

d) jejímu momentu setrvačnosti při rotaci kolem osy *z*.

6. Jak vypočítáme souřadnice těžiště homogenní uzavřené prostorové oblasti Ω o hmotnosti *m*, souměrné kolem osy *z*, jejíž statický moment vzhledem k souřadnicové rovině os *x, y* je S_{xy}?

a) $T\left[0,0,\frac{S_{xy}}{m}\right],$ b) $T\left[0,\frac{S_{xy}}{m},0\right],$

c) $T\left[0,0,\frac{S_{xz}}{m}\right],$ d) $T[0,0,0].$

7. Který z následujících vztahů určuje statický moment vzhledem k souřadnicové rovině os *x, y* hmotné prostorové oblasti Ω, je-li její hustota v bodě $X(x,y,z)$ rovna *y*-ové souřadnici tohoto bodu $(y > 0)$?

a) $\iiint_{\Omega} ydxdydz,$ b) $\iiint_{\Omega} zdxdydz,$

c) $\iiint_{\Omega} xyzdxdydz,$ d) $\iiint_{\Omega} yzdxdydz\,.$

8. Který z následujících vztahů určuje moment setrvačnosti hmotné prostorové oblasti Ω rotující kolem osy *y*, je-li její hustota v bodě $X(x,y,z)$ rovna *y*-ové souřadnici tohoto bodu, $(y > 0)$?

a) $\iiint_{\Omega} yz^2 dxdydz,$ b) $\iiint_{\Omega} y(x^2+z^2)dxdydz,$

c) $\iiint_{\Omega} (xyz)^2 dxdydz,$ d) $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)dxdydz\,.$

Odpovědi na kontrolní otázky

1. a); 2. c); 3. a); 4. b); 5. a); 6. a); 7. d); 8. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 2.4 znovu.

Kontrolní test

1. Objem tělesa ohraničeného rovinou $2x+2y+z=6$ a souřadnicovými rovinami, je roven

a) 27, b) 18,

c) 9, d) 3.

2. Objem tělesa ohraničeného válcovou plochou $y=x^2$ a rovinami $y+z=2, z=0$ je roven

a) $\frac{32}{15}\sqrt{2}$, b) $\frac{8}{35}\sqrt{2}$,

c) $\frac{8}{35}$, d) $\frac{32}{15}$.

3. Objem tělesa ohraničeného válcovou plochou $x^2+y^2=1$, rovinou $z=0$ a plochou $z=e^{-x^2-y^2}$ je roven

a) $\pi(1+\frac{1}{e})$, b) $\pi(1-e)$,

c) $\pi(1-\frac{1}{e})$, d) $\pi(1+e)$.

4. Objem tělesa ohraničeného parabolickou plochou $x^2+y^2=z$ a rovinou $z=4$ je roven

a) 2π, b) 4π,

c) 6π, d) 8π.

5. Určete hmotnost koule o poloměru *r*, jestliže její hustota v libovolném bodě je přímo úměrná třetí mocnině vzdálenosti tohoto bodu od středu koule a v bodě o vzdálenosti 1 nabývá hodnoty *a*.

a) $\frac{4}{3}\pi ar^6$, b) $\frac{2}{3}\pi ar^6$,

c) $\frac{2}{3}\pi ar^3$, d) $\frac{2}{3}\pi a^3 r^6$.

6. Určete hmotnost koule o poloměru r, jestliže její hustota v libovolném bodě je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti tohoto bodu od středu koule.

a) $4k\pi r$, b) $3k\pi r$,

c) $2k\pi r$, d) $k\pi r$.

7. Vypočtěte statické momenty kvádru o velikosti hran a, b, c vzhledem k jeho stěně určené hranami b, c, je-li jeho hustota konstantní (bez újmy na obecnosti položte $\sigma = 1$).

a) $\frac{1}{2}ab^2c$, b) $\frac{1}{2}a^2bc$,

c) $\frac{1}{2}abc^2$, d) $\frac{1}{2}(abc)^2$.

8. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního čtyřstěnu, který je ohraničen rovinou $2x + 2y + z = 6$ a souřadnicovými rovinami.

a) $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4})$, b) $(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2})$,

c) $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5})$, d) $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2})$.

9. Vypočtěte moment setrvačnosti hmotné krychle s délkou hrany a rotující kolem hrany, je-li její hustota konstantní (bez újmy na obecnosti položte $\sigma = 1$).

a) $\frac{2}{3}a^4$, b) $\frac{2}{5}a^5$,

c) $\frac{2}{3}a^5$, d) $\frac{4}{3}a^5$.

10. Vypočtěte moment setrvačnosti hmotné oblasti $\Omega : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ rotující kolem osy z, je-li její hustota konstantní (bez újmy na obecnosti položte $\sigma = 1$).

a) $\frac{248\pi}{15}$, b) $\frac{248\pi}{15}\sqrt{2}$,

c) $\frac{248\pi}{35}$, d) $\frac{328\pi}{15}$.

Výsledky testu

1. c); 2. a); 3. c); 4. d); 5. b); 6. a); 7. b); 8. d); 9. c); 10. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě doporučujeme prostudovat kapitolu 2.4 znovu.

Shrnutí lekce

V této kapitole jsme si ukázali využití trojrozměrného integrálu v matematice a fyzice. Trojrozměrný integrál umožňuje určit objem těles, jejichž hranice tvoří obecně plochy $f(x,y,z)=0$.

V případě hmotné prostorové oblasti Ω, jejíž hustota se spojitě mění a v bodě $X(x,y,z)$ nabývá hodnoty $\sigma(x,y,z)$, dokážeme pomocí trojrozměrných integrálů jednoduše vypočítat její hmotnost, souřadnice těžiště, statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám a momenty setrvačnosti při rotaci oblasti Ω kolem os souřadnic.

3. VEKTOROVÁ ANALÝZA

Průvodce studiem

Při řešení mnoha úloh technické praxe je výhodné použití vektorového počtu. Vektorová algebra studuje vlastnosti vektorů, jejichž souřadnice jsou konstantní, viz [4], [7], [8]. Vektorová analýza zkoumá vektory, jejichž souřadnice jsou funkcemi jednoho či více argumentů. Nazývají se proměnné vektory nebo vektorové funkce. Vektorové funkce jsou základním pojmem pro významnou fyzikální aplikaci – vektorové pole. Seznámíte se s dalším typem fyzikálního pole – skalárním polem.

Protože vektorová analýza pracuje jak s vektory tak s funkcemi, je spojením analytické geometrie s matematickou analýzou.

Cíle

Cílem této kapitoly je vysvětlit pojem vektorová funkce, ukázat, jak se s vektorovou funkcí pracuje a jaké jsou její vlastnosti.

Předpokládané znalosti

Vektorová algebra, zejména skalární, vektorový a smíšený součin vektorů.

Diferenciální počet funkcí jedné a více proměnných.

Integrační metody.

3.1. Vektorová funkce

Průvodce studiem

V prvním ročníku jste se seznámili s vektorovou algebrou, ve které jste poznali skalární, vektorový a smíšený součin vektorů. V této kapitole rozšíříte své vědomosti o kvalitativně nový typ vektorů – o proměnné vektory, jejichž souřadnice jsou funkcemi jednoho či více argumentů.

Cíle

Cílem této kapitoly je objasnit pojem vektorové funkce, její vlastnosti a význam.

Předpokládané znalosti

Protože se neobejdeme bez základních poznatků vektorové algebry, připomeneme si nejdůležitější pojmy.

Jsou-li dány tři vektory, $\overline{u}(u_1,u_2,u_3), \overline{v}(v_1,v_2,v_3), \overline{w}(w_1,w_2,w_3)$, pak

- **skalární součin vektorů** $\overline{u},\overline{v}$ je roven součtu součinů jejich souřadnic:

$$\overline{u}.\overline{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3,$$

- **vektorový součin vektorů** $\overline{u},\overline{v}$ vypočítáme pomocí determinantu

$$\overline{u}\times\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

- **smíšený součin vektorů** $\overline{u},\overline{v},\overline{w}$ vypočítáme pomocí determinantu

$$(\overline{u},\overline{v},\overline{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Dále budeme potřebovat diferenciální počet funkcí jedné a více proměnných.

Výklad

Definice 3.1.1.

Nechť D je podmnožina množiny reálných čísel. Je-li každému reálnému číslu $t \in D$ přiřazen jediný vektor

$$\overline{f}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k} = (x(t),\, y(t),\, z(t)),$$

říkáme, že v množině D je definována **vektorová funkce** $\overline{f}(t)$ **jednoho reálného argumentu** ***t***. Množinu D se nazývá definiční obor vektorové funkce $\overline{f}(t)$; její složky $x(t), y(t), z(t)$ jsou reálné funkce argumentu t.

Z geometrického hlediska představuje vektorová funkce $\overline{f}(t)$ množinu bodů v trojrozměrném prostoru o souřadnicích $(x(t), y(t), z(t)),\ t \in D,$ která se nazývá **hodograf vektorové funkce**.

Jsou-li funkce $x(t), y(t), z(t)$ spojité v množině $D,$ pak spojitá vektorová funkce $\overline{f}(t)$ je rovnicí prostorové křivky, jejíž parametrické vyjádření má tvar $x = x(t),$ $y = y(t), z = z(t), t \in D.$ V tom spočívá geometrický význam vektorové funkce.

Z fyzikálního hlediska představuje vektorová funkce trajektorii pohybujícího se hmotného bodu.

Pro vektorové funkce lze zavést všechny základní pojmy matematické analýzy (limitu, spojitost, derivaci, neurčitý a určitý integrál) analogicky jako v diferenciálním a integrálním počtu funkce jedné proměnné, viz [4], [5], [6]. Výpočet provádíme v případě vektorových funkcí po jednotlivých složkách.

Dosadíme-li do vektorové funkce $\overline{f}(t)$ číslo t z jejího definičního oboru D, dostaneme konstantní vektor. Můžeme tedy na vektorové funkce rozšířit všechny operace zavedené ve vektorové algebře – součet, rozdíl, skalární, vektorový a smíšený součin, viz [4], [7], [8].

Řešené úlohy

Příklad 3.1.1. Načrtněte hodograf vektorové funkce

a) $\overline{f}(t) = (1+t)\overline{i} + (2-t)\overline{j},\ t \in <0,1>,$

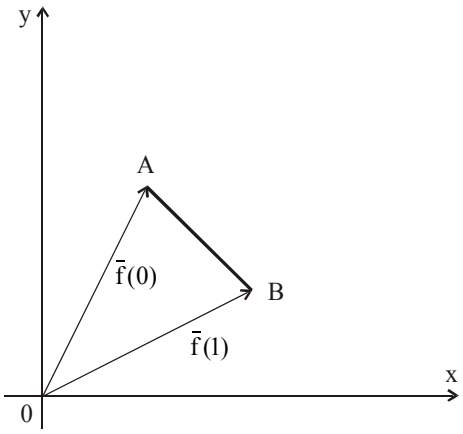
b) $\overline{f}(t) = 3\cos t\ \overline{i} + 3\sin t\ \overline{j},\ t \in <0, 2\pi>,$

c) $\overline{f}(t) = \cos t\ \overline{i} + \sin t\ \overline{j} + t\overline{k},\ t \in <0, +\infty).$

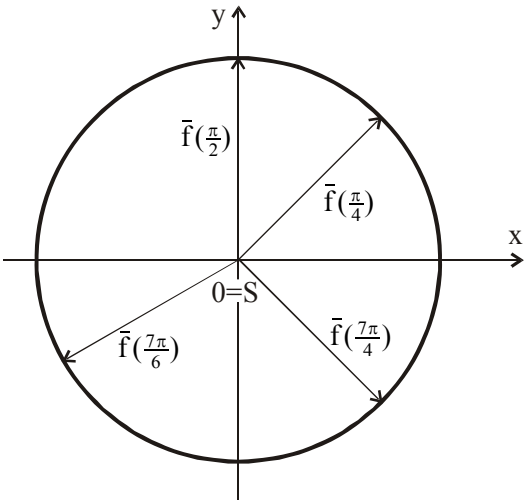
Řešení: Všechny tři vektorové funkce jsou ve svém definičním oboru spojité, proto jejich hodografem bude křivka v rovině v případech a), b) a prostorová křivka v případě c).

a) *Parametrické rovnice křivky* $x = x(t) = 1+t,\ y = y(t) = 2-t,\ t \in <0,1>$

jsou rovnicemi úsečky s krajními body $A = (x(0), y(0)) = (1+0, 2-0) = (1,2)$ a $B = (x(1), y(1)) = (1+1, 2-1) = (2,1),$ viz obr. 33a.



Obr. 33a



Obr. 33b

b) *Parametrické rovnice křivky*

$x = x(t) = 3\cos t,\ y = y(t) = 3\sin t,\ t =< 0, 2\pi >$

umocníme na druhou $x^2 = 9\cos^2 t,\ y^2 = 9\sin^2 t$

a sečteme: $x^2 + y^2 = 9\cos^2 t + 9\sin^2 t = 9(\cos^2 t + \sin^2 t) = 9.$

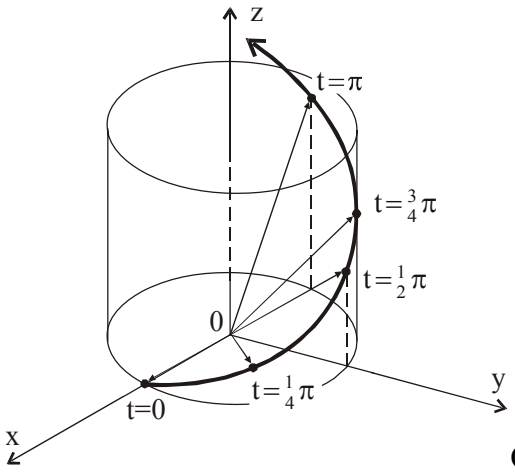
Rovnice $x^2 + y^2 = 9$ je rovnicí kružnice se středem $S = (0,0)$ a poloměrem $r = 3$, viz obr. 33b.

c) *Parametrické rovnice křivky*

$x = x(t) = \cos t,\ y = y(t) = \sin t,\ z = z(t) = t,\ t \in < 0, \infty)$

určují šroubovici s počátkem v bodě $(1,0,0)$ na válcové ploše $x^2 + y^2 = 1$.

Umocněním prvních dvou rovnic na druhou a jejich sečtením analogicky jako v případě b) získáme rovnici řídicí kružnice $x^2 + y^2 = 1$ válcové plochy, viz obr. 33c.



Obr. 33c

Úlohy k samostatnému řešení

1. Načrtněte hodograf vektorové funkce:

a) $\overline{f}(t) = t\,\overline{i} + t\,\overline{j},\ t \in <0,1>,$

b) $\overline{f}(t) = (1+t)\,\overline{i} + t\,\overline{j},\ t \in (-\infty,\infty),$

c) $\overline{f}(t) = 2\cos t\,\overline{i} + 3\sin t\,\overline{j},\ t \in <0,2\pi),$

d) $\overline{f}(t) = t^2\overline{i} + t\,\overline{j},\ t \in (-\infty,+\infty),$

e) $\overline{f}(t) = (1-t)\,\overline{i} + (1+2t)\overline{j} + (2+3t)\overline{k},\ t \in <0,\infty).$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) Úsečka $y = x$ od $O = (0,0)$ do $A = (1,1)$; **b)** přímka $x - y - 1 = 0$; **c)** elipsa $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;

d) parabola $y^2 = x$; **e)** polopřímka s počátečním bodem $(1,1,2)$ a směrovým vektorem $(-1,2,3)$.

Řešené úlohy

Příklad 3.1.2. Je dána vektorová funkce $\overline{f}(t) = e^{2t}\overline{i} + e^{-2t}\overline{j} + t\overline{k}, t \in R.$ Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{t\to 0} \overline{f}(t),$

b) derivaci $\overline{f}'(t),$

c) určitý integrál $\int_0^1 \overline{f}(t)dt.$

d) Zjistěte, zda je funkce $\overline{f}(t)$ v bodě $t_0 = 0$ spojitá.

Řešení: Všechny předepsané operace provedeme tak, že je budeme postupně aplikovat na jednotlivé složky vektorové funkce.

a) $\lim\limits_{t\to 0} \overline{f}(t) = \lim\limits_{t\to 0}(e^{2t}\overline{i} + e^{-2t}\overline{j} + t\overline{k}) = \overline{i}\lim\limits_{t\to 0} e^{2t} + \overline{j}\lim\limits_{t\to 0} e^{-2t} + \overline{k}\lim\limits_{t\to 0} t =$

$= \overline{i}.1 + \overline{j}.1 + \overline{k}.0 = (1,1,0).$

b) $\overline{f}'(t) = (e^{2t}\overline{i} + e^{-2t}\overline{j} + t\overline{k})' = \overline{i}(e^{2t})' + \overline{j}(e^{-2t})' + \overline{k}(t)' = 2e^{2t}\overline{i} - 2e^{-2t}\overline{j} + \overline{k}.$

c) $$\int_0^1 \bar{f}(t)dt = \int_0^1 (e^{2t}\bar{i} + e^{-2t}\bar{j} + t\bar{k})dt = \bar{i}\int_0^1 e^{2t}dt + \bar{j}\int_0^1 e^{-2t}dt + \bar{k}\int_0^1 t dt =$$

$$= \bar{i}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1 + \bar{j}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^1 + \bar{k}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[(e^2-1)\bar{i} - (e^{-2}-1)\bar{j} + \bar{k}\right].$$

d) Protože platí

$\bar{f}(0) = 1\bar{i} + 1\bar{j} + 0\bar{k} = (1,1,0) = \lim_{t\to 0}\bar{f}(t)$, je funkce $\bar{f}(t)$ v bodě $t_0 = 0$ spojitá.

Úlohy k samostatnému řešení

2. Vypočítejte limity vektorové funkce $\bar{f}(t)$ v daném bodě t_0:

a) $\bar{f}(t) = (2t+1)\bar{i} + \frac{1}{2t+1}\bar{j} + \cos t\,\bar{k},\ t_0 = 0,$

b) $\bar{f}(t) = \ln(t+1)\bar{i} + e^{2t}\bar{j} + \frac{\sin t}{t}\bar{k},\ t_0 = 0,$

c) $\bar{f}(t) = 5\bar{i} + e^{\frac{1}{t}}\bar{j} + \ln^2 t\,\bar{k},\ t_0 = 1,$

d) $\bar{f}(t) = 2t\bar{i} - 3t^2\bar{j} + \frac{2\sin t}{t}\bar{k},\ t = 0.$

3. Rozhodněte, zda jsou dané vektorové funkce spojité v bodě $t_0 = 0$.

a) $\bar{f}(t) = (t^2 + t + 1)\bar{i} + t\cos t\,\bar{j} + \sin t\,\bar{k},$

b) $\bar{f}(t) = 5\bar{i} - 3t\,\bar{j} + \frac{\sin t}{t}\bar{k}.$

4. Derivujte vektorové funkce:

a) $\bar{f}(t) = (2t-5)\bar{i} + (4t^2 - 6t)\bar{j} + 9t\,\bar{k},$

b) $\bar{f}(t) = e^{2t}\bar{j} + e^{-2t}\bar{k},$

c) $\bar{f}(t) = \frac{t}{1+t}\bar{i} + \frac{1}{\sin t}\bar{j} + \sin^2 t\,\bar{k},$

d) $\bar{f}(t) = \ln(2t+1)\bar{i} + \operatorname{tg} t\,\bar{j} + \cos 2t\,\bar{k},$

e) $\bar{f}(t) = \arcsin 2t\,\bar{i} + \operatorname{arctg} 3t\,\bar{k},$

f) $\bar{f}(t) = (t+1)\bar{i} + (t^2 - 1)\bar{j} + (t^3 + t)\,\bar{k},$

g) $\overline{f}(t) = \ln t^2 \overline{i} + \ln 2t \overline{j} + \ln^2 t \, \overline{k}$,

h) $\overline{f}(t) = \sin 2t \, \overline{i} + \cos(3t+1)\overline{j} + \operatorname{tg} t \, \overline{k}$,

i) $\overline{f}(t) = e^{2t}\overline{i} + \operatorname{arctg} 2t \, \overline{j} + \dfrac{t+1}{t-1}\overline{k}$.

5. Integrujte vektorové funkce:

a) $\overline{f}(t) = (t^2 + t + 1)\,\overline{i} + t\cos t \, \overline{j} + \sin t \, \overline{k}$,

b) $\overline{f}(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t}\overline{i} + \dfrac{4}{1+t^2}\overline{j} + \dfrac{1}{t+1}\overline{k}$,

c) $\overline{f}(t) = \dfrac{1}{2t+5}\overline{i} + \dfrac{1}{(t+1)^2}\overline{j} + \dfrac{t+1}{\sqrt{t}}\overline{k}$,

d) $\overline{f}(t) = \sqrt{t}\,\overline{i} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}\overline{j} + 3\,\overline{k}$.

6. Vypočítejte:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t \, \overline{i} + \sin 2t \, \overline{j})dt$,

b) $\displaystyle\int_0^1 (t\,\overline{i} + e^t \overline{j} + e^{-t}\overline{k})dt$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. a) $\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$; **b)** $\overline{j} + \overline{k}$; **c)** $5\overline{i} + e\overline{j}$; **d)** $2\overline{k}$.

3. a) ano; **b)** ne.

4. a) $2\overline{i} + (8t-6)\overline{j} + 9\overline{k}$; **b)** $2e^{2t}\overline{j} - 2e^{2t}\overline{k}$; **c)** $\dfrac{t}{(1+t)^2}\overline{i} - \dfrac{\cos t}{\sin^2 t}\overline{j} + 2\sin t\cos t\,\overline{k}$;

d) $\dfrac{2}{2t+1}\overline{i} + \dfrac{1}{\cos^2 t}\overline{j} - 2\sin 2t\,\overline{k}$; **e)** $\dfrac{2}{\sqrt{1-4t^2}}\overline{i} + \dfrac{3}{1+9t^2}\overline{k}$; **f)** $\overline{i} + 2t\,\overline{j} + (3t^2+1)\overline{k}$;

g) $\dfrac{2}{t}\overline{i} + \dfrac{1}{t}\overline{j} + \dfrac{2\ln t}{t}\overline{k}$; **h)** $2\cos 2t\,\overline{i} - 3\cos(3t+1)\overline{j} + \dfrac{1}{\cos^2 t}\overline{k}$;

i) $2e^{2t}\overline{i} + \dfrac{2}{1+4t^2}\overline{j} - \dfrac{2}{(t-1)^2}\overline{k}$.

5. a) $(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t)\,\bar{i}+(t\sin t+\cos t)\bar{j}-\cos t\,\bar{k}+\bar{c}$; **b)** $tgt\,\bar{i}+4\operatorname{arctg} t\,\bar{j}+\ln|t+1|\,\bar{k}+\bar{c}$;

c) $\frac{1}{2}\ln|2t+5|\,\bar{i}-\frac{1}{t+1}\bar{j}+(\frac{2}{3}\sqrt{t^3}+2\sqrt{t})\bar{k}+\bar{c}$; **d)** $\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\bar{i}+2\sqrt{t}\bar{j}+3t\bar{k}+\bar{c}$.

6. a) $\bar{j}$; **b)** $\frac{1}{2}\bar{i}+(e-1)\bar{j}+(1-\frac{1}{e})\bar{k}$.

Řešené úlohy

Příklad 3.1.3. Pohyb hmotného bodu je určen vektorovou funkcí $\bar{f}(t)=e^{\omega t}\bar{i}+e^{-\omega t}\bar{j}$.

Vypočítejte jeho rychlost a zrychlení v čase $t=2s$.

Řešení: Z fyziky si pamatujete, že pro vektor rychlosti platí

$\bar{v}(t)=\dot{\bar{f}}(t)=\omega(e^{\omega t}\bar{i}-e^{-\omega t}\bar{j})$.

V čase $t=2$ je $\bar{v}(2)=\omega(e^{2\omega}\bar{i}-e^{-2\omega}\bar{j})$.

Pro vektor zrychlení platí

$\bar{a}(t)=\ddot{\bar{f}}(t)=\dot{\bar{v}}(t)=(\omega(e^{\omega t}\bar{i}-e^{-\omega t}\bar{j})\dot{})=\omega^2(e^{\omega t}\bar{i}+e^{-\omega t}\bar{j})=\omega^2\bar{f}(t)$.

V čase $t=2$ je $\bar{a}(2)=\omega^2(e^{2\omega}\bar{i}+e^{-2\omega}\bar{j})$.

Poznámka

Derivaci podle času t bývá zvykem značit $\dot{f}(t)$.

Úlohy k samostatnému řešení

7. Určete vektory rychlosti a zrychlení pohybu hmotného bodu, který je dán vektorovou funkcí $\bar{f}(t)=(t+1)\,\bar{i}+(t^2+4)\,\bar{j}+t\,\bar{k}$ a určete vektory rychlosti a zrychlení v čase $t=3s$.

8. Pohyb hmotného bodu je určen vektorovou funkcí $\bar{f}(t)=\cos\omega t\,\bar{i}+\sin\omega t\,\bar{j}$. Dokažte, že platí $\ddot{\bar{f}}(t)+\omega^2\bar{f}(t)=0$. Vypočítejte rychlost a zrychlení hmotného bodu.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

7. $\bar{v}(t)=\bar{i}+2t\,\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{a}(t)=2\bar{j}$, $\bar{v}(3)=\bar{i}+6\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{a}(3)=2\bar{j}$.

8. $\bar{v}(t)=\omega(-\sin\omega t\bar{i}+\cos\omega t\,\bar{j})$, $\bar{a}(t)=-\omega^2(\cos\omega t\,\bar{i}+\sin\omega t\,\bar{j})$.

Řešené úlohy

Příklad 3.1.4. Jsou dány vektorové funkce $\overline{f}(t) = t\cos t\,\overline{i} + \sin t\,\overline{j}$, $\overline{g}(t) = -t\sin t\,\overline{i} + \cos t\,\overline{j}$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Vypočítejte skalární součin $\overline{f}(t).\overline{g}(t)$ a vektorový součin $\overline{f}(t) \times \overline{g}(t)$.

Řešení:

$$\overline{f}(t).\overline{g}(t) = (t\cos t, \sin t).(-t\sin t, \cos t) = -t^2 \sin t\cos t + \sin t\cos t = \sin t\cos t(1-t^2),$$

$$\overline{f}(t) \times \overline{g}(t) = (t\cos t, \sin t, 0) \times (-t\sin t, \cos t, 0) =$$

$$= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ t\cos t & \sin t & 0 \\ -t\sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix} = \overline{k}(t\cos^2 t + t\sin^2 t) = t\,\overline{k} = (0, 0, t).$$

Úlohy k samostatnému řešení

9. Jsou dány vektorové funkce $\overline{f}(t) = t\,\overline{i} + (2+t)\overline{j} + e^t\overline{k}$, $t \in (-\infty, \infty)$ a $\overline{g}(t) = 3\,\overline{i} + 2t\,\overline{j} + \ln t\,\overline{k}$, $t \in (0, +\infty)$. Vypočítejte

a) $\overline{f}(t) + \overline{g}(t)$,

b) $2\overline{f}(t) - 3\overline{g}(t)$,

c) $\overline{f}(t).\overline{g}(t)$,

d) $\overline{f}(t) \times \overline{g}(t)$,

e) $\overline{g}(t) \times \overline{f}(t)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

9. a) $(t+3)\overline{i} + (2+3t)\overline{j} + (e^t + \ln t)\overline{k}$, $t \in (0, +\infty)$;

b) $(2t-9)\overline{i} + (4-4t)\overline{j} + (2e^t - 3\ln t)\overline{k}$, $t \in (0, +\infty)$; **c)** $7t + 2t^2 + e^t \ln t, t \in (0, +\infty)$;

d) $(2\ln t + t\ln t - 2te^t)\overline{i} + (3e^t - t\ln t)\overline{j} + (2t^2 - 3t - 6)\overline{k}$, $t \in (0, +\infty)$;

e) $(2te^t - 2\ln t - t\ln t)\overline{i} + (t\ln t - 3e^t)\overline{j} + (6 + 3t - 2t^2)\overline{k}$, $t \in (0, +\infty)$.

Řešené úlohy

Příklad 3.1.5. Určete definiční obor vektorové funkce

$$\bar{f}(t) = (2\arcsin\frac{2t-4}{3}+3)\,\bar{i} + 3\arccos\frac{t-4}{3}\,\bar{j} + t\,\bar{k}.$$

Řešení: Definiční obor určíme jako průnik definičních oborů reálných funkcí

$$x(t) = 2\arcsin\frac{2t-4}{3}+3,\quad y(t) = 3\arccos\frac{t-4}{3},\quad z(t) = t.$$

Funkce $x(t) = 2\arcsin\frac{2t-4}{3}+3$ musí splňovat podmínku

$$\begin{aligned} -1 &\le \frac{2t-4}{3} \le 1,\\ -3 &\le 2t-4 \le 3,\\ 1 &\le 2t \le 7,\\ \frac{1}{2} &\le t \le \frac{7}{2}. \end{aligned} \qquad D_1 = <\frac{1}{2};\frac{7}{2}>$$

Funkce $y(t) = 3\arccos\frac{t-4}{3}$ je definována pro

$$\begin{aligned} -1 &\le \frac{t-4}{3} \le 1,\\ -3 &\le t-4 \le 3,\\ 1 &\le t \le 7. \end{aligned} \qquad D_2 = <1;7>$$

Funkce $z(t) = t$ je definována pro všechna reálná čísla, $D_3 = R$.

Definičním oborem vektorové funkce $\bar{f}(t)$ je $D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = <1;\frac{7}{2}>$.

Úlohy k samostatnému řešení

10. Určete definiční obor vektorové funkce :

a) $\bar{f}(t) = \frac{1}{t}\bar{i} + \ln t\,\bar{j} + e^t\bar{k}$,

b) $\bar{f}(t) = \sqrt{1+t}\,\bar{i} + \sqrt{1-t}\,\bar{j} + \sqrt{1+t^2}\,\bar{k}$,

c) $\bar{f}(t) = \frac{1}{t^2-4t+3}\bar{i} + \ln(2t-5)\bar{j}$,

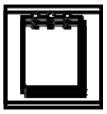
d) $\overline{f}(t) = \arcsin\frac{t-2}{3}\,\overline{i} + \arccos\frac{t}{2}\,\overline{j} + t\overline{k}$,

e) $\overline{f}(t) = \frac{1}{t+1}\,\overline{i} + e^{t+1}\,\overline{j} + \sqrt{t+1}\,\overline{k}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

10. a) $D = (0, +\infty)$; **b)** $D = <-1,1>$; **c)** $D = (\frac{5}{2}, 3) \cup (3, +\infty)$; **d)** $D = <-1,2>$;

e) $D = (-1, +\infty)$.



Poznámka

Pojem vektorové funkce jedné proměnné t rozšíříme na vektorovou funkci dvou a více proměnných. Je-li dána libovolná množina bodů $\Omega \subset E_2$, *pak vektorovou funkcí dvou proměnných x, y nazýváme funkci, která každému bodu* $(x, y) \in \Omega$ *přiřadí jediný vektor* $\overline{f}(x, y) = P(x, y)\overline{i} + Q(x, y)\overline{j} + R(x, y)\overline{k} = (P(x, y), Q(x, y), R(x, y))$.

Analogicky vektorovou funkcí tří proměnných x, y, z nazýváme funkci, která každému bodu $(x, y, z) \in \Omega$, $\Omega \subset E_3$, *přiřadí jediný vektor*

$\overline{f}(x, y, z) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

Stručněji můžeme psát $\overline{f}(X) = P(X)\overline{i} + Q(X)\overline{j} + R(X)\overline{k}$, ***kde*** $X = (x, y)$ ***pro funkci dvou proměnných, resp.*** $X = (x, y, z)$ ***pro funkci tří proměnných.***

Kontrolní otázky

1. Který z následujících zápisů je správným zápisem vektorové funkce jedné nezávisle proměnné?

   $\overline{f}(t) = (1+2t) + (1-2t) + (2-t),\ t \in <0, \infty)$,

   $\overline{f}(t) = (1+2t)\,\overline{i} + (1-2t)\overline{j} + (2-t)\overline{k},\ t \in <0, \infty)$,

   $\overline{f}(t) = (1+2t), (1-2t), (2-t),\ t \in <0, \infty)$,

   $\overline{f}(t) = ((1+2t\overline{i}) + (1-2t)\overline{j} + (2-t)\overline{k}),\ t \in <0, \infty)$

2. Jaký geometrický útvar určuje vektorová funkce jedné nezávisle proměnné
$\overline{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, kde funkce $x(t), y(t), z(t)$ jdou spojité v D?

a) Křivku v prostoru,

b) křivku v rovině,

c) plochu v prostoru,

d) rovinný obrazec.

3. Jaký fyzikální význam má vektorová funkce $\overline{f}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}$?

a) Je to zrychlení pohybujícího se hmotného bodu,

b) je to rychlost pohybujícího se hmotného bodu,

c) je to dráha pohybujícího se hmotného bodu,

d) je to hmotnost pohybujícího se hmotného bodu.

4. Co je to hodograf vektorové funkce $\overline{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$?

a) Množina bodů v trojrozměrném prostoru o souřadnicích $(x(t), y(t), z(t)),\ t \in D$,

b) rovnice tělesa,

c) rovnice plochy,

d) rovnice rovinného obrazce.

5. Co získáme, dosadíme-li do vektorové funkce $\overline{f}(t)$ číslo t z jejího definičního oboru D?

a) Proměnný vektor,

b) nic,

c) rovnici křivky,

d) konstantní vektor.

6. Jak vypadá správný zápis vektorové funkce dvou proměnných x, y?

a) $\overline{f}(x,y) = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j} + R(x,y)\overline{k} = (P(x,y), Q(x,y), R(x,y))$.

b) $\overline{f}(x,y) = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$,

c) $\overline{f}(x,y) = P(x,y) + Q(x,y) + R(x,y)$,

d) $\overline{f}(x,y) = (P(x,y) \pm Q(x,y) \pm R(x,y))$.

7. Jak derivujeme vektorovou funkci $\overline{f}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}$?

a) $\overline{f}'(t) = x'(t) + y'(t) + z'(t)$,

b) $\overline{f}'(t) = x'(t)\overline{i} + y'(t)\overline{j} + z'(t)\overline{k}$

c) $\overline{f}'(t) = x(t)\overline{i}' + y(t)\overline{j}' + z(t)\overline{k}'$,

d) vektorovou funkci nelze derivovat.

8. Jak vypočítáme definiční obor vektorové funkce $\overline{f}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}$?

a) Vektorová funkce nemá definiční obor,

b) je to sjednocení definičních oborů jednotlivých složek,

c) je to vždy definiční obor funkce $x(t)$,

d) je to průnik definičních oborů jednotlivých složek.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. c); 4. a); 5. d); 6. a); 7. b); 8. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte dále.

V opačném případě doporučujeme prostudovat kapitolu 3.1 znovu.

Kontrolní test

1. Co je hodografem vektorové funkce $\overline{f}(t) = 3\cos t\,\overline{i} + 4\sin t\,\overline{j},\ t \in <0, \pi>$?

a) Polovina kružnice o poloměru $r = 3$,

b) čtvrtina kružnice o poloměru $r = 4$,

c) polovina elipsy o poloosách délky 3 a 4,

d) čtvrtina elipsy o poloosách délky 3 a 4.

2. Vypočítejte derivaci vektorové funkce $\overline{f}(t) = e^{2t}\overline{i} + e^{-2t}\overline{j} + t\overline{k}$ v bodě $t_0 = 0$.

a) je to vektor $2\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$,

b) je to vektor $2\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$,

c) je to vektor $\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$,

d) je to číslo 1.

3. Vypočítejte integrál $\int_0^2 (8e^{2t}\,\bar{i} + 3e^{3t}\bar{j} - e^{-t}\bar{k})dt$.

a) $4(e^4 - 1)\,\bar{i} + (e^6 - 1)\bar{j} + (e^{-2} - 1)\bar{k}$,

b) $4(e^4 - 1)\,\bar{i} + (e^{-2} - 1)\bar{k}$,

c) $(e^6 - 1)\bar{j} + (e^{-2} - 1)\bar{k}$,

d) $16e^4\,\bar{i} - (e^6 - 1)\bar{j} + (e^{-2} - 1)\bar{k}$.

4. Určete definiční obor funkce $\bar{f}(t) = 8t^3e^{2t}\,\bar{i} + 3e^{3t}\bar{j} - e^{-t}\bar{k}$?

a) Všechna reálná čísla s výjimkou čísla 0,

b) všechna reálná čísla,

c) prázdná množina,

d) všechna kladná reálná čísla.

5. Rozhodněte, zda je vektorová funkce $\bar{f}(t) = 8t^3e^{2t}\,\bar{i} + 3e^{3t}\bar{j} - e^{-t}\bar{k}$ spojitá v bodech $t_1 = 0,\ t_2 = 1.$

a) V bodě $t_1 = 0$ ano, v bodě $t_2 = 1$ ne,

b) v bodě $t_1 = 0$ ne, v bodě $t_2 = 1$ ano,

c) je spojitá v obou bodech,

d) není spojitá ani v jednom bodě.

6. Pohyb hmotného bodu je určen vektorovou funkcí $\bar{f}(t) = e^{2t}\bar{i} + e^{-2t}\bar{j}$. Vypočítejte jeho rychlost v čase $t = 1s$.

a) $\bar{v}(1) = e^2\,\bar{i} + e^{-2}\,\bar{j}$,

b) $\bar{v}(1) = 0$,

c) $\bar{v}(1) = e^2\,\bar{i} - e^{-2}\,\bar{j}$,

d) $\bar{v}(1) = 2e^2\,\bar{i} - 2e^{-2}\,\bar{j}$.

7. Pohyb hmotného bodu je určen vektorovou funkcí $\bar{f}(t) = e^{2t}\bar{i} + e^{-2t}\bar{j}$. Vypočítejte jeho zrychlení v čase $t = 1s$.

a) $\overline{a}(1) = e^2\,\overline{i} + e^{-2}\,\overline{j}$,

b) $\overline{a}(1) = 0$,

c) $\overline{a}(1) = 4e^2\,\overline{i} + 4e^{-2}\,\overline{j}$,

d) $\overline{a}(1) = 2e^2\,\overline{i} + 2e^{-2}\,\overline{j}$.

8. Jsou dány vektorové funkce $\overline{f}(t) = (2t+3)\,\overline{i} + (2-t)\overline{j} + t\overline{k},\ t \in (-\infty, \infty)$ a $\overline{g}(t) = 3t\,\overline{i} + 3\ln(t+2)\,\overline{j} + \overline{k},\ t \in (-2, +\infty)$. Vypočítejte součet $4\overline{f}(t) + 2\overline{g}(t)$.

a) $(14t+14)\,\overline{i} + (8+4t+6\ln(t+2))\,\overline{j} - (4t+2)\overline{k},\ t \in (-2, +\infty)$,

b) $(14t+12)\,\overline{i} + (8-4t+6\ln(t+2))\,\overline{j} + (4t+2)\overline{k},\ t \in (-2, +\infty)$,

c) $(14t+12)\,\overline{i} + (8-4t+6\ln(t+2))\,\overline{j} + (4t+2)\overline{k},\ t \in (0, +\infty)$,

d) $(14t+12)\,\overline{i} + (8-4t+6\ln(t+2))\,\overline{j} + (4t+2)\overline{k},\ t \in (-\infty, +\infty)$.

9. Jsou dány vektorové funkce $\overline{f}(t) = 2t\overline{i} + \overline{j} + t^2\overline{k},\ t \in (-\infty, \infty)$ a $\overline{g}(t) = 3\,\overline{i} + \sin t\,\overline{j} - \cos t\,\overline{k},\ t \in (-\infty, +\infty)$. Vypočítejte skalární součin $\overline{f}(t).\overline{g}(t)$.

a) $6t + \sin t - t^2 \cos t,\ t \in (-\infty, +\infty)$,

b) 0,

c) $6t\,\overline{i} - \sin t\,\overline{j} + t^2 \cos t\,\overline{k},\ t \in (-\infty, +\infty)$,

d) $6t\,\overline{i} + \sin t\,\overline{j} - t^2 \cos t\,\overline{k},\ t \in (0, +\infty)$.

10. Jsou dány vektorové funkce $\overline{f}(t) = 2t\overline{i} + \overline{j} + t^2\overline{k},\ t \in (-\infty, \infty)$ a $\overline{g}(t) = 3\,\overline{i} + \sin t\,\overline{j} - \cos t\,\overline{k},\ t \in (-\infty, +\infty)$. Vypočítejte vektorový součin $\overline{f}(t) \times \overline{g}(t)$ v bodě $t_0 = 0$.

a) $-\overline{i} - 3\,\overline{k}$,

b) $\overline{o}$,

c) $\overline{i} + 3\,\overline{k}$,

d) $-\overline{i} + \overline{j} - 3\,\overline{k}$

Výsledky testu

1. c); 2. b); 3. a); 4. b); 5. c); 6. d); 7. c); 8. b); 9. a); 10. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte dále.

V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 3.1 znovu.

Shrnutí lekce

V této kapitole jste pochopili, že vektorová funkce nebo také proměnný vektor je spojením pojmů vektor a funkce. Je to vektor, jehož souřadnice jsou funkcemi jedné (dvou, tří nebo více) nezávisle proměnné. Právě proto, že jde o spojení pojmů vektor a funkce, můžeme s vektorovými funkcemi provádět operace známé z vektorové algebry (skalární, vektorový a smíšený součin) a z matematické analýzy (limita, derivace, integrál, …).

3.2. Skalární pole

Průvodce studiem

Dobře víte, že fyzikální veličiny dělíme na skaláry, vektory a tenzory. Skalární fyzikální veličiny vytvářejí skalární pole. Tato pole se nyní naučíme popisovat.

Cíle

Cílem této kapitoly je objasnit pojem skalárního pole, jeho základní vlastnosti a charakteristiky.

Předpokládané znalosti

Parciální derivace funkce více proměnných.

Skalární součin vektorů.

Výklad

Definice 3.2.1.

Skalární pole v oblasti $\Omega \subset E_3$ je určeno libovolnou funkcí

$$u = u(x, y, z),$$

která je v oblasti Ω definována.

Skalární pole tedy přiřazuje každému bodu oblasti Ω jediné reálné číslo (skalár).

Hladinou skalárního pole $u = u(x, y, z)$ nebo také **skalární hladinou** nazýváme plochu vyjádřenou rovnicí $u(x, y, z) = C, C \in R.$ Na dané skalární hladině proto nabývá skalární pole konstantní hodnoty (z praxe všichni známe izotermy, izobary, vrstevnice…). Mírou změny skalárního pole $u(x, y, z)$ ve směru vektoru $\bar{s}$ je derivace ve směru.

Definice 3.2.2.

Nechť je v oblasti Ω dáno skalární pole $u = u(x, y, z),$ bod $A = (a_1, a_2, a_3)$ a jednotkový vektor $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3).$

Derivací skalárního pole $u(x,y,z)$ **v bodě** A **ve směru** $\bar{s}$ nazýváme limitu

$$\lim_{t\to 0_+}\frac{u(A+t.\bar{s})-u(A)}{t} \qquad \text{a značíme ji} \qquad \frac{du(A)}{d\bar{s}}.$$

Věta 3.2.1.

Je-li funkce $u=u(x,y,z)$ diferencovatelná v bodě A, pak pro derivaci skalárního pole u v bodě A ve směru $\bar{s}$ platí

$$\frac{du(A)}{d\bar{s}}=\frac{\partial u(A)}{\partial x}s_1+\frac{\partial u(A)}{\partial y}s_2+\frac{\partial u(A)}{\partial z}s_3. \qquad (32)$$

Poznámky

1. Je-li směr $\bar{s}$ *určen směrovými kosiny* $\bar{s}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, *platí*

$$\frac{du(A)}{d\bar{s}}=\frac{\partial u(A)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u(A)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u(A)}{\partial z}\cos\gamma.$$

2. Derivace skalárního pole $u(x,y,z)$ *v bodě A ve směru* $\bar{s}$ *určuje přírůstek skalárního pole* $u(x,y,z)$ *v bodě A ve směru vektoru* $\bar{s}$ *neboli rychlost růstu skalárního pole* $u(x,y,z)$ *v bodě A ve směru vektoru* $\bar{s}$.

Směr největšího růstu (největší spád) skalárního pole $u(x,y,z)$ určuje gradient skalárního pole.

Definice 3.2.3.

Gradientem skalárního pole $u(x,y,z)$ nazýváme vektorovou funkci

$$grad\ u=\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\bar{k}=\left(\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right). \qquad (33)$$

Poznámky

1. Zavedeme-li Hamiltonův operátor (operátor nabla)

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

můžeme gradient skalárního pole $u(x,y,z)$ *zapsat ve tvaru*

$$grad\ u = \nabla u.$$

2. *Pro derivaci skalárního pole* $u(x,y,z)$ *ve směru* $\bar{s}$ *podle* (32) *platí*

$$\frac{du}{d\bar{s}} = \frac{\partial u}{\partial x} s_1 + \frac{\partial u}{\partial y} s_2 + \frac{\partial u}{\partial z} s_3,$$

po rozepsání

$$\frac{du}{d\bar{s}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right).(s_1, s_2, s_3) = grad\ u\ .\ \bar{s}\ . \qquad (34)$$

Derivace skalárního pole $u(x,y,z)$ ve směru jednotkového vektoru $\bar{s}$ tedy je rovna skalárnímu součinu gradientu skalárního pole $u(x,y,z)$ a jednotkového vektoru směru $\bar{s}$.

Věta 3.2.2. (Vlastnosti gradientu)

1. Gradient skalárního pole $u(x,y,z)$ je v každém bodě kolmý k hladině tímto bodem procházející.
2. Ve směru gradientu roste skalární pole $u(x,y,z)$ nejrychleji, ve směru opačném nejrychleji klesá.
3. Maximální rychlost růstu skalárního pole $u(x,y,z)$ má velikost $|v| = |\ grad\ u\ |$.

Důkaz: 1. K důkazu užijeme rovnici hladiny skalárního pole $u(x,y,z) = C$ a vytvoříme její totální diferenciál: $du = dC$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0.$$

Levou stranu zapíšeme ve tvaru skalárního součinu dvou vektorů:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z} \right).(dx, dy, dz) = 0,$$

$$grad\ u\ .\ d\bar{r} = 0.$$

Z kritéria kolmosti dvou vektorů, viz [5], [7], [8], plyne, že vektory $grad\ u$ a proměnný vektor $d\bar{r}$, ležící v tečné rovině k hladině skalárního pole, jsou vzájemně kolmé. Gradient skalárního pole má tedy směr normály ke skalární hladině.

2. Podle vztahu () platí $\frac{du}{d\bar{s}} = grad\ u\ .\ \bar{s} = |\ grad\ u\ |\ .\ |\ \bar{s}\ |\ .\cos\alpha,$

kde α je odchylka vektorů $grad\, u$ a $\bar{s}$.

Protože vždy $|\bar{s}|=1$ (vektor směru je jednotkový), platí:

$$\frac{du}{d\bar{s}}=|grad\, u|.1.\cos\alpha=|grad\, u|.\cos\alpha.$$

Derivace pole u ve směru $\bar{s}$ je maximální pro $\cos\alpha=1$, tedy $\alpha=0$, což znamená, že směr $\bar{s}$ je souhlasně rovnoběžný se směrem vektoru $grad\, u$.

Derivace pole u ve směru $\bar{s}$ je minimální pro $\cos\alpha=-1$, tedy $\alpha=\pi$, což znamená, že směr $\bar{s}$ je nesouhlasně rovnoběžný se směrem vektoru $grad\, u$.

3. Podle předchozího platí

$$|v|=\frac{du}{d\bar{s}}=grad\, u\,.\,\bar{s}=|grad\, u|.|\bar{s}|.\cos\alpha=|grad\, u|.1.1=|grad\, u|.$$

Řešené úlohy

Příklad 3.2.1. Vypočítejte derivaci skalárního pole $u(x,y,z)=3x^2-4y^3+2z^4$ v bodě $A=(1,2,1)$ ve směru $\bar{s}$, který je určen vektorem $\overrightarrow{AB}$, $B=(4,6,6)$.

Řešení: Podle vztahu (32) musíme určit hodnotu parciálních derivací skalárního pole $u(x,y,z)$ v bodě A:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-12y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=8z^3,$$

$$\frac{\partial u(A)}{\partial x}=6,\quad \frac{\partial u(A)}{\partial y}=-48,\quad \frac{\partial u(A)}{\partial z}=8.$$

Abychom určili souřadnice jednotkového vektoru směru $\bar{s}$, vypočítáme postupně:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(3,4,5),$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2},$$

$$\bar{s}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\left(\frac{3}{5\sqrt{2}},\frac{4}{5\sqrt{2}},\frac{5}{5\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{10},\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Po dosazení do vztahu (32) platí:

$$\frac{du(A)}{d\bar{s}}=6.\frac{3\sqrt{2}}{10}-48.\frac{2\sqrt{2}}{5}+8.\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{67}{5}\sqrt{2}.$$

Příklad 3.2.2. Určete gradient skalárního pole $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy+2xz+2yz$, jednotkový směr maximálního růstu pole v bodě $A=(1,2,1)$ a největší hodnotu derivace skalárního pole $u(x,y,z)$ v bodě A.

Řešení: Podle vztahu (33) určíme $grad\ u=(2x-2y+2z,\ 2y-2x+2z,\ 2z+2x+2y)$.

Protože podle vlastnosti 2 roste skalární pole nejrychleji ve směru gradientu, platí postupně v bodě A:

$grad\ u(A)=(0,4,8)$,

$|grad\ u(A)|=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$,

$$\overline{s}=\frac{grad\ u(A)}{|grad\ u(A)|}=(0,\frac{4}{4\sqrt{5}},\frac{8}{4\sqrt{5}})=(0,\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}).$$

Derivaci $\frac{du(A)}{d\overline{s}}$ vypočítáme použitím vztahu (34):

$$\frac{du(A)}{d\overline{s}}=grad\ u(A).\overline{s}=(0,4,8).\left(0,\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=0+\frac{4\sqrt{5}}{5}+\frac{16\sqrt{5}}{5}=4\sqrt{5}.$$

Porovnáním výsledků $|grad\ u(A)|$ a $\frac{du(A)}{d\overline{s}}$ zjistíme, že v případě směru maximálního růstu pole platí $\frac{du(A)}{d\overline{s}}=|grad\ u(A)|$, což potvrzuje vlastnost 3.

Příklad 3.2.3. Určete množinu bodů, v nichž je velikost gradientu skalárního pole $u(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2)^3}$ rovna 12.

Řešení: Podle vztahu (33) je $grad\ u(x,y)=3x\sqrt{(x^2+y^2)}\overline{i}+3y\sqrt{x^2+y^2}\,\overline{j}$.

Pro jeho velikost platí

$$|grad\ u|=\sqrt{9x^2(x^2+y^2)+9y^2(x^2+y^2)}=\sqrt{9(x^2+y^2)(x^2+y^2)}=3(x^2+y^2).$$

Podle zadání je $|grad\ u(x,y)|=12=3(x^2+y^2)$, tedy $x^2+y^2=4$.

Řešením je množina všech bodů kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem 2.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete hladiny daných skalárních polí

a) $u(x,y)=x^2+y^2$,

b) $u(x,y)=4x^2-y^2,\ u(x,y)>0$,

c) $u(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

d) $u(x,y,z)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z}}$.

2. Určete derivace skalárního pole $u(X)$ ve směru $\bar{s}$ v bodě A:

a) $u(x,y)=5x^4-4xy+2y-7,\ \bar{s}=-\bar{i},\ A=(1,1)$,

b) $u(x,y)=4x^2-5x^2y^2+10y^5,\ \bar{s}\|\overrightarrow{AB},\ A=(0,1),\ B=(3,4)$,

c) $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\ \bar{s}\|(4\bar{i}-3\bar{j}),\ A=(3,4)$,

d) $u(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$, směr $\bar{s}$ svírá s osou x úhel 60^0 a s osou y úhel 45^0, $A=(1,0,1)$.

3. Určete body, v nichž je derivace skalárního pole $u(x,y)=x^3+y^3+3xy$ v libovolném směru nulová.

4. Vypočítejte derivaci skalárního pole $u=\dfrac{z}{3}-x^2-\dfrac{y^2}{4}$ v bodě $A=(1,2,3)$ ve směru průvodiče bodu A.

5. Vypočítejte gradient skalárního pole $u(X)$ v bodě A:

a) $u(x,y)=2x^2+3y^2,\ A=(2,1)$,

b) $u(x,y)=\sqrt{4+x^2+y^2},\ A=(1,2)$,

c) $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz,\ A=(0,1,1)$,

d) $u(x,y,z)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}+\dfrac{4}{xyz},\ A=(1,1,1)$.

6. Stanovte body, v nichž je gradient skalárního pole $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xyz$ kolmý k ose x.

7. Určete směr, ve kterém je derivace skalárního pole $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ v bodě $A=(0,-2,1)$ maximální.

8. Ve kterém směru roste skalární pole $u(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ v bodě $A=(1,-1,1)$ s největší rychlostí ?

9. S jakou největší rychlostí klesá skalární pole $u(x,y,z)=\ln(x^2-y^2+z^2)$ v bodě $A=(1,1,1)$?

10. Ve kterém bodě skalárního pole $u(x,y,z)=x^2+2xy+4y^2+z^2-4z$ je gradient roven nulovému vektoru ?

11. Ve kterém bodě skalárního pole $u(x,y,z)=x^2-4y^2-4z^2-3xy-5x$ je gradient roven vektoru $\overline{a}=-3\overline{i}-3\overline{j}+24\overline{k}$?

12. Určete úhel gradientů skalárního pole $u=\ln(x+\ln y)$ v bodech $A=(1,1)$, $B=(5,1)$.

13. Které ze skalárních polí $u(x,y)=x^2+y$ a $v(x,y)=x+y^2$ klesá v bodě $A=(2,1)$ ve směru vektoru $3\overline{j}-\overline{i}$ rychleji ?

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) kružnice: $S=(0,0)$, $r=\sqrt{c}$, $c>0$; **b)** hyperboly: $S=(0,0)$, $a=\frac{\sqrt{c}}{2}$, $b=\sqrt{c}$, $c>0$;

c) kulové plochy: $S=(0,0,0)$, $c>0$, $r=c$; **d)** plochy rotačních paraboloidů: $V=(0,0,\frac{16}{c^2})$, $c\neq 0$.

2. a) $\frac{du(A)}{d\overline{s}}=-16$; **b)** $\frac{du(A)}{d\overline{s}}=25\sqrt{2}$; **c)** 0; **d)** $\frac{du(A)}{d\overline{s}_1}=3$, $\frac{du(A)}{d\overline{s}_2}=0$.

3. $A=(0,0)$, $B=(-1,-1)$.

4. $\frac{du(A)}{d\overline{s}}=-\frac{3\sqrt{14}}{14}$.

5. a) $grad\ u=8\overline{i}+6\overline{j}$; **b)** $grad\ u=\frac{1}{3}\overline{i}+\frac{2}{3}\overline{j}$; **c)** $grad\ u=-3\overline{i}+2\overline{j}+2\overline{k}$;

d) $grad\ u=-5\overline{i}-6\overline{j}-7\overline{k}$.

6. $x=yz$.

7. $\overline{s}=\frac{\sqrt{5}}{5}(-2\overline{j}+\overline{k})$.

8. $\overline{s}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\overline{i}+\overline{k})$.

9. $v=2\sqrt{3}$.

10. $A=(0,0,2)$.

11. $A=(1,0,-3)$.

12. $\varphi=0$.

13. $v(x,y)$.

Kontrolní otázky

1. Skalární pole v oblasti $\Omega \subset E_3$ je obecně definováno funkcí:

   a) $\overline{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, b) $u = u(x, y, z)$,

   c) $u = u(x + y + z)$, d) $\overline{f}(t) = x(t) + y(t) + z(t)$.

2. Hladina skalárního pole $u = u(x, y, z)$ je určena rovnicí

   a) $u(x, y, z) = C$, b) $u(x, y, z) = x$,

   c) $u(x, y, z) = y$, d) $u(x, y, z) = z$.

3. Derivace skalárního pole $u(x, y, z)$ ve směru $\overline{s}$ v bodě A přesně určuje:

   a) Jak se mění skalární pole $u(x, y, z)$ ve směru $\overline{s}$,

   b) jak se mění skalární pole $u(x, y, z)$ v bodě A,

   c) jak se mění skalární pole $u(x, y, z)$,

   d) jak se mění skalární pole $u(x, y, z)$ ve směru $\overline{s}$ v bodě A.

4. Hamiltonův operátor (nabla) znamená:

   a) Skalár tvaru $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$,

   b) skalár tvaru $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} . \frac{\partial}{\partial y} . \frac{\partial}{\partial z}$,

   c) vektor tvaru $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$,

   d) vektor tvaru $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

5. Gradient skalárního pole $u(x, y, z)$ určuje obecně svým směrem

   a) Směr, ve kterém je pole $u(x, y, z)$ konstantní,

   b) směr největšího růstu pole $u(x, y, z)$,

   c) směr největšího klesání pole $u(x, y, z)$,

   d) neurčuje nic.

6. Derivace skalárního pole $u(x, y, z)$ ve směru $\overline{s}$ je určena:

a) Vektorovým součinem $\frac{du}{d\overline{s}} = grad\ u \times \overline{s}$,

b) součtem vektorů $\frac{du}{d\overline{s}} = grad\ u + \overline{s}$,

c) skalárním součinem $\frac{du}{d\overline{s}} = grad\ u\ .\ \overline{s}$,

d) rozdílem vektorů $\frac{du}{d\overline{s}} = grad\ u - \overline{s}$.

7. Ve kterém směru roste skalární pole $u(x, y, z)$ v bodě A největší rychlostí?

a) Ve směru gradientu $grad\ u(A)$,

b) ve směru opačném ke gradientu $grad\ u(A)$,

c) ve směru vektoru $\overline{OA}$,

d) ve směru vektorového součinu $grad\ u(A) \times \overline{s}$,

8. Čím je určena velikost maximální rychlosti růstu skalárního pole $u(x, y, z)$ v bodě A?

a) Gradientem $grad\ u(A)$,

b) velikostí gradientu $|grad\ u(A)|$,

c) skalárním součinem $grad\ u\ (A).\overline{s}$,

d) velikostí vektoru $|u\ (A)|$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. d); 4. d); 5. b); 6. c); 7. a); 8. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte dále.

V opačném případě doporučujeme prostudovat kapitolu 3.2 znovu.

Kontrolní test

1. Hladiny skalárního pole $u = x + y + z$ jsou určeny rovnicí:

a) $\sqrt{x + y + z} = C$,

b) $xyz = C$,

c) $x + y + z = C$,

d) $grad(x + y + z) = C$.

2. Vypočítejte gradient skalárního pole $u(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ v bodě $A = (1,1,1)$.

a) $grad\ u(A) = (3,3,3)$, b) $grad\ u(A) = 3 + 3 + 3$,

c) $grad\ u(A) = (2,2,2)$, d) $grad\ u(A) = 9$.

3. Vypočítejte derivaci skalárního pole $u(x, y, z) = 4xyz$ ve směru $\overline{s} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ v bodě $A = (1,1,1)$.

a) $\frac{2\sqrt{14}}{7}$, b) $\frac{12\sqrt{14}}{7}$,

c) $\frac{2\sqrt{14}}{17}$, d) $\frac{27\sqrt{14}}{7}$.

4. Určete směr, ve kterém je derivace skalárního pole $u(x, y, z) = x^3 + y^2 + z + 2xy$ v bodě $A = (0,0,1)$ maximální.

a) $(0,0,1)$, b) $(1,1,1)$,

c) $(0,0,0)$, d) $(1,0,1)$.

5. Určete směr, ve kterém je derivace skalárního pole $u(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ v bodě $A = (1,2,3)$ minimální.

a) $(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7})$, b) $(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7})$,

c) $(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7})$, d) $-(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7})$.

6. Ve kterém bodě skalárního pole $u(x, y, z) = 2xy + yz + 3xz$ je gradient roven nulovému vektoru ?

a) $A = (0,0,1)$, b) $B = (1,1,1)$,

c) $O = (0,0,0)$, d) $C = (1,0,1)$.

7. Vypočítejte derivaci skalárního pole $u(x, y, z) = \frac{x^5}{5} - y^2 + \frac{z^4}{4}$ v bodě $A = (2,0,0)$ ve směru průvodiče bodu A.

a) 32, b) 16,

c) 8. d) 4.

8. Určete úhel gradientů skalárního pole $u = \sin x \cos y$ v bodech $A = (\pi, 0)$ a $B = (0, \pi)$.

a) $\varphi = \pi$, b) $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

c) $\varphi = \frac{\pi}{4}$, d) $\varphi = 0$.

9. Které ze skalárních polí $u(x, y, z) = x^2 + yz$ a $v(x, y, z) = xz + y^2$ se mění v bodě $A = (2,1,3)$ ve směru vektoru $\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ rychleji?

a) pole $v(x, y, z)$, b) $u(x, y, z)$,

c) obě pole se mění stejně, d) ani jedno pole se nemění.

10. Stanovte body, v nichž je gradient skalárního pole $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + x^2 - 2x - 2y - 2z$ kolmý k ose x.

a) všechny body roviny $x = 1$, b) všechny body roviny $y = 1$,

c) všechny body roviny $z = 1$, d) všechny body roviny $x + y + z = 1$.

Výsledky testu

1. c); 2. a); 3. b); 4. a); 5. d); 6. c); 7. b); 8. d); 9. b); 10. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte dále.

V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 3.2 znovu.

Shrnutí lekce

V této kapitole jsme se seznámili se skalárním polem, které je v trojrozměrné oblasti Ω určeno funkcí tří nezávisle proměnných $u(x, y, z)$.

K popisu skalárního pole slouží hladiny skalárního pole o rovnici $u(x, y, z) = C$, na nichž skalární pole nabývá konstantních hodnot (ekvipotenciály, vrstevnice, izobary, …).

Důležitými charakteristikami skalárního pole jsou derivace ve směru a gradient. Derivace ve směru je skalární veličina, která určuje míru změny skalárního pole v daném směru. Gradient skalárního pole je vektor, který určuje směr největšího růstu skalárního pole.

3.3. Vektorové pole

Průvodce studiem

K popisu fyzikálních jevů velmi často užíváme vektorová pole. V této kapitole si uvedeme definici vektorového pole, poznáme jeho základní typy a veličiny, kterými vektorové pole popisujeme.

Cíle

Cílem této kapitoly je objasnit pojem vektorového pole a jeho základní charakteristiky.

Předpokládané znalosti

Parciální derivace funkce více proměnných.

Neurčitý integrál, integrační metody.

Skalární a vektorový součin vektorů.

Výklad

Definice 3.3.1.

Vektorové pole v oblasti $\Omega \subset E_3$ je určeno vektorovou funkcí

$$\bar{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k},$$

která je definována v oblasti Ω.

Vektorové pole tedy přiřazuje každému bodu $X = (x,y,z)$ oblasti Ω jediný vektor $\bar{f}(x,y,z)$, jehož složky tvoří funkce $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$.

Definice 3.3.2.

Jsou-li funkce $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ spojité v oblasti Ω a Pfaffova forma $P(X)dx + Q(X)dy + R(X)dz$ je totálním diferenciálem kmenové funkce $\phi(x,y,z)$, nazývá se tato kmenová funkce **potenciál vektorového pole** $\bar{f}(x,y,z)$ a platí

$$\bar{f}(x,y,z) = \left(\frac{\partial \phi(X)}{\partial x}, \frac{\partial \phi(X)}{\partial y}, \frac{\partial \phi(X)}{\partial z} \right) = grad\ \phi(x,y,z). \qquad (35)$$

Funkce $\overline{f}(x,y,z)$ se nazývá **gradient potenciálu** a vektorové pole (35) určené potenciálem $\phi(x,y,z)$ se nazývá **konzervativní** nebo také **potenciálové vektorové pole**.

K popisu vektorového pole slouží vektorové čáry (siločáry, indukční čáry, proudnice). Jsou to křivky, jichž se vektor $\overline{f}(X)$ v každém bodě dotýká, viz obr. 34 a, b, c.

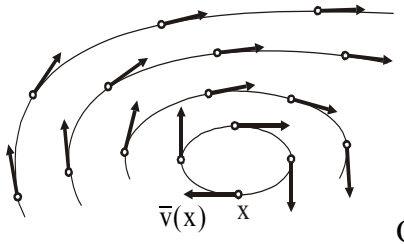
Pro ilustraci uvažujme skalární elektrostatické pole. Jeho skalární hladiny se nazývají ekvipotenciální plochy. Z předchozí kapitoly víme, že gradient skalárního pole je vektorová veličina. Gradient elektrostatického pole tedy určuje potenciálové vektorové pole, které charakterizuje intenzitu daného pole.

Na obr. 34 jsou načrtnuta vektorová pole

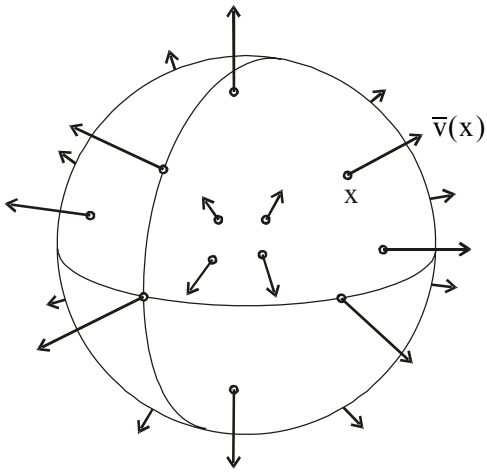
a) obvodové rychlosti rotačního pohybu tuhého tělesa,

b) centrálního silového pole,

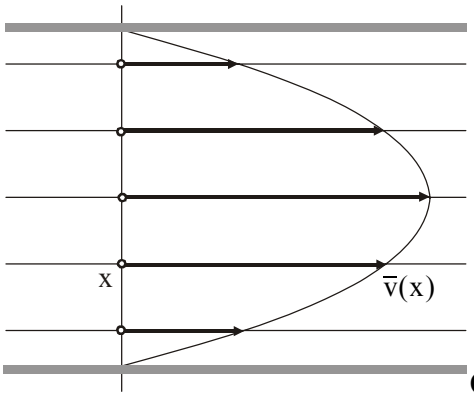
c) rychlosti laminárního proudění kapaliny.



Obr. 34a



Obr. 34b



Obr. 34c

Základní vlastnosti vektorového pole určují divergence a rotace vektorového pole.

Definice 3.3.3.

Nechť je vektorové pole určeno vektorovou funkcí

$\overline{f}(X) = P(X)\overline{i} + Q(X)\overline{j} + R(X)\overline{k}$, přičemž funkce $P(X), Q(X), R(X)$ jsou spojité a diferenciabilní v oblasti Ω.

1. **Divergencí vektorového pole** $\overline{f}(X)$ je skalární pole

$$div\ \overline{f}(X) = \frac{\partial P(X)}{\partial x} + \frac{\partial Q(X)}{\partial y} + \frac{\partial R(X)}{\partial z} = \nabla.\overline{f}(X). \qquad (36)$$

2. **Vektorové pole**, v jehož každém bodě platí $div\ \overline{f}(X) = 0,$ se nazývá **nezřídlové** (solenoidální).

Body, v nichž platí $div\ \overline{f}(X) > 0,$ se nazývají **zřídla** a body, v nichž platí $div\ \overline{f}(X) < 0,$ se nazývají **nory**.

3. **Rotací vektorového pole** $\overline{f}(X)$ je vektorové pole

$$rot\ \overline{f}(X) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(X) & Q(X) & R(X) \end{vmatrix} = \nabla \times \overline{f}(X). \qquad (37)$$

4. **Vektorové pole**, v jehož každém bodě platí $rot\ \overline{f}(X) = \overline{o},$ se nazývá **nevírové** (bez vírů, laminární).

Význam divergence a rotace vektorového pole si objasníme na vektorovém poli rychlosti $\overline{v}(x, y, z)$ stacionárního proudění kapaliny.

Divergence vektorového pole $\overline{v}$ v bodě A je skalár, určující objemové množství kapaliny, které vyteče za jednotku času z jednotkového objemu v okolí bodu A, neboli vydatnost zřídla jednotkového objemu.

Rotace vektorového pole $\overline{v}$ v bodě A je vektor, jehož směr určuje osu, kolem které kapalina v malém okolí bodu A rotuje jako celek.

Věta 3.3.1.

Vektorové pole $\overline{f}(X) = P(X)\overline{i} + Q(X)\overline{j} + R(X)\overline{k}$ je v oblasti Ω potenciálové (konzervativní) právě tehdy, když je v Ω nevírové, tj. platí $rot\ \overline{f}(X) = \overline{o}$.

Důkaz: a) Je-li pole potenciálové, má potenciál $\phi(X)$ a platí

$$d\phi(X) = P(X)dx + Q(X)dy + R(X)dz,$$

proto $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \tag{38}$$

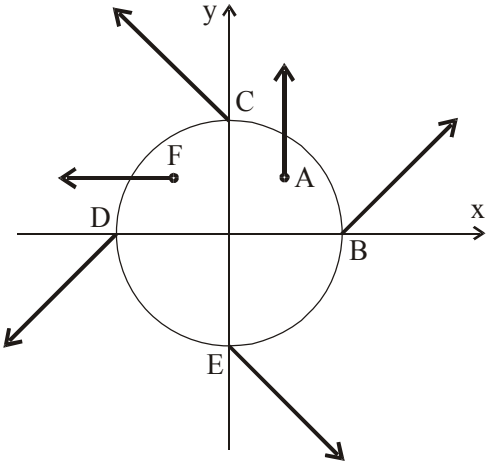
odkud plyne ze vztahu (37) $rot\ \overline{f}(X) = \overline{o}$.

b) Obráceně, je-li pole nevírové, $rot\ \overline{f}(X) = \overline{o}$, musí platit vztah (38) a proto Pfaffova forma $P(X)dx + Q(X)dy + R(X)dz$ je totálním diferenciálem funkce $\phi(X)$. Pole je tedy potenciálové (konzervativní).

Řešené úlohy

Příklad 3.3.1. Znázorněte vektorové pole $\overline{f}(x,y) = (x-y)\overline{i} + (x+y)\overline{j}$, které je zadáno na oblasti $\Omega : x^2 + y^2 \le 4$.

Řešení: Zvolíme v oblasti Ω několik bodů a vypočítáme příslušné vektory $\overline{f}$, které jsou těmto bodům přiřazeny, viz obr. 35.



$A = (1,1) \to \overline{f}(1,1) = 0\overline{i} + 2\overline{j},$
$B = (2,0) \to \overline{f}(2,0) = 2\overline{i} + 2\overline{j},$
$C = (0,2) \to \overline{f}(0,2) = -2\overline{i} + 2\overline{j},$
$D = (-2,0) \to \overline{f}(-2,0) = -2\overline{i} - 2\overline{j},$
$E = (0,-2) \to \overline{f}(0,-2) = 2\overline{i} - 2\overline{j},$
$F = (-1,1) \to \overline{f}(-1,1) = -2\overline{i} + 0\overline{j}.$

Obr. 35

Příklad 3.3.2. Rozhodněte, zda vektorové pole $\overline{f}(x,y,z) = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$ je a) nezřídlové, b) nevírové. c) Určete jeho potenciál, pokud existuje.

Řešení: V daném vektorovém poli je

$$P = x^2, Q = y^2, R = z^2, \frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y, \frac{\partial R}{\partial z} = 2z.$$

a) Podle vztahu (36) platí

$div\ \overline{f}(x,y,z) = 2x + 2y + 2z,$ vektorové pole je proto zřídlové.

Například v bodě $A = (1,1,1)$ platí $div\ \overline{f}(A) = 6,$ tedy v bodě A je zřídlo, v bodě $B = (-1,-1,-1),$ kde platí $div\ \overline{f}(B) = -6,$ je naopak nor.

b) Podle vztahu (37) určíme

$$rot\ \overline{f}(X) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \overline{i}\left(\frac{\partial z^2}{\partial y} - \frac{\partial y^2}{\partial z}\right) + \overline{j}\left(\frac{\partial x^2}{\partial z} - \frac{\partial z^2}{\partial x}\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial y^2}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y}\right) = \overline{o},$$

dané pole je tedy nevírové. Proto je podle věty 3.3.1 potenciálové, a má tedy potenciál.

c) K určení potenciálu vypočítáme integrály:

$$\int P(X)dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1,$$

$$\int Q(X)dy = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + C_2,$$

$$\int R(X)dy = \int z^2 dy = \frac{z^3}{3} + C_3.$$

Uvědomíme si, že neurčitý integrál je definován jako množina primitivních funkcí. Potenciál určíme jako sjednocení těchto funkcí. Znamená to tedy, že žádná funkce se ve výsledku nesmí opakovat.

$$\phi(X) = \int P(X)dx \cup \int Q(X)dy \cup \int R(X)dz = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} + C = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} + C.$$

Příklad 3.3.3. Vektorové pole síly $\overline{F}$ směřuje do počátku soustavy souřadnic a jeho velikost v libovolném bodě $X(x,y,z)$ je rovna převrácené hodnotě čtverce vzdálenosti bodu $X(x,y,z)$ od počátku. Určete, zda toto pole je potenciálové.

Řešení: Síla $\overline{F}$ má směr polohového vektoru bodu X: $\overrightarrow{OX} = X - O = (x,y,z),$ ale opačnou orientaci: $\overline{F} = (-cx, -cy, -cz),$ kde $c \in R$ je konstanta úměrnosti.

Pro její velikost platí $|\overline{F}| = \sqrt{c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2} = c\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$

vzdálenost bodu $X(x,y,z)$ od počátku je $|OX| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

Podle zadání je $$|\bar{F}| = \frac{1}{|OX|^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2},$$

Porovnáním zjistíme $$c\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

a určíme $$c = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Vektorové pole má proto složky

$$\bar{F}(X) = P(X)\bar{i} + Q(X)\bar{j} + R(X)\bar{k} =$$

$$= -\frac{x\bar{i}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{y\bar{j}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{z\bar{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Podle vztahu (37) vypočítáme

$$rot\ \bar{F}(X) = \bar{i}\left(\frac{3yz(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} - \frac{3yz(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right) +$$

$$+\bar{j}\left(\frac{3xz(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} - \frac{3xz(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right) +$$

$$+\bar{k}\left(\frac{3xy(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} - \frac{3xy(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right) = \bar{o}.$$

Vektorové pole je proto nevírové a podle věty 3.3.1 je také potenciálové.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete divergenci a rotaci daného vektorového pole:

a) $\bar{f}(x,y,z) = 2x\bar{i} + 3y\bar{j} + 4z\bar{k}$,

b) $\bar{f}(x,y,z) = x^2yz\bar{i} + xy^2z\bar{j} + xyz^2\bar{k}$,

c) $\bar{f}(x,y,z) = (\sin y + z)\bar{i} + (x\cos y - z)\bar{j}$,

d) $\bar{f}(x,y,z) = grad(x^3+y^3+z^3)$.

2. Rozhodněte, zda dané vektorové pole je nezřídlové, nevírové, potenciálové. Určete potenciál, pokud existuje.

a) $\bar{f}(x,y,z) = (x^2+yz)\bar{i} + (y^2+xz)\bar{j} + (z^2+xy)\bar{k}$,

b) $\bar{f}(x,y,z) = (y+z)\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (x+y)\bar{k}$,

c) $\bar{f}(x,y,z) = x\,\bar{i} - z^2\bar{j} + y^2\bar{k}$,

d) $\overline{f}(x,y,z) = grad(xyz).$

3. Je proudění o rychlosti $\overline{v} = (\frac{1}{y} + z)\overline{i} - \frac{x}{y^2}\overline{j} + x\overline{k}$ laminární ?

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $div\ \overline{f} = 9, rot\ \overline{f} = \overline{o}$; **b)** $div\ \overline{f} = 6xyz,\ \ rot\ \overline{f} = \overline{i}x(z^2 - y^2) + \overline{j}y(x^2 - z^2) + \overline{k}z(y^2 - x^2)$;

c) $div\ \overline{f} = -x\sin y, rot\ \overline{f} = \overline{i} + \overline{j}$; **d)** $div\ \overline{f} = 6x + 6y + 6z, rot\ \overline{f} = \overline{o}.$

2. **a)** zřídlové, nevírové, potenciálové, $\phi(x,y,z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} + xyz + C$;

b) nezřídlové, nevírové, potenciálové, $\phi(x,y,z) = xy + xz + yz + C$;

c) zřídlové, vírové, není potenciálové, nemá potenciál;

d) nezřídlové, nevírové, potenciálové, $\phi(x,y,z) = xyz + C.$

3. Ano.

Kontrolní otázky

1. Vektorové pole v trojrozměrné oblasti Ω je obecně definováno funkcí:

a) $\overline{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$,

b) $u = u(x,y,z),$

c) $\overline{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$,

d) $\overline{f}(x,y,z) = P(x,y,z) + Q(x,y,z) + R(x,y,z).$

2. Divergence vektorového pole $\overline{f}(x,y,z)$ je pole:

a) Vektorové, b) skalární,

c) není to žádné pole, d) tenzorové.

3. Vektorové pole $\overline{f}(x,y,z)$, v jehož každém bodě platí $div\ \overline{f}(x,y,z) = 0,$ se nazývá:

a) Potenciálové, b) nevírové,

c) nezřídlové, d) rotační.

4. Divergence vektorového pole $\overline{f}(x,y,z)$ je dána vztahem:

a) $div\ \overline{f}(x,y,z) = \nabla.\overline{f}(x,y,z)$,

b) $div\ \overline{f}(x,y,z) = \nabla : \overline{f}(x,y,z)$,

c) $div\ \overline{f}(x,y,z) = \nabla \times \overline{f}(x,y,z)$,

d) $div\ \overline{f}(x,y,z) = \nabla + \overline{f}(x,y,z)$.

5. Rotace vektorového pole $\overline{f}(x,y,z)$ je pole:

a) Vektorové, b) skalární,

c) není to žádné pole, d) tenzorové.

6. Vektorové pole $\overline{f}(x,y,z)$, v jehož každém bodě platí $rot\ \overline{f}(x,y,z) = \overline{o}$, se nazývá:

a) Skalární, b) nevírové,

c) nezřídlové, d) rotační.

7. Rotace vektorového pole $\overline{f}(x,y,z)$ je dána vztahem:

a) $rot\ \overline{f}(x,y,z) = \nabla . \overline{f}(x,y,z)$,

b) $rot\ \overline{f}(x,y,z) = \nabla : \overline{f}(x,y,z)$,

c) $rot\ \overline{f}(x,y,z) = \nabla \times \overline{f}(x,y,z)$,

d) $rot\ \overline{f}(x,y,z) = \nabla + \overline{f}(x,y,z)$.

8. Vektorové pole $\overline{f}(x,y,z)$ je potenciálové právě tehdy, když je:

a) Skalární, b) nevírové,

c) nezřídlové, d) rotační.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. c); 2. b); 3. c); 4. a); 5. a); 6. b); 7. c); 8. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte dále.

V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 3.3 znovu.

Kontrolní test

1. Vypočítejte divergenci vektorového pole $\overline{f}(x,y,z) = e^x yz\overline{i} + xe^y z\overline{j} + xye^z \overline{k}$.

a) $div\ \overline{f}(x,y,z) = e^x yz\overline{i} + xe^y z\overline{j} + xye^z \overline{k}$,

b) $div\ \overline{f}(x,y,z) = (e^x yz, xe^y z, xye^z)$,

c) $div\ \overline{f}(x,y,z) = xyze^{x+y+z}$,

d) $div\ \overline{f}(x,y,z) = e^x yz + xe^y z + xye^z$.

2. Vypočítejte divergenci vektorového pole $\overline{f}(x,y,z) = e^x yz\overline{i} + xe^y z\overline{j} + xye^z\overline{k}$ v bodě $A = (1,0,0)$.

a) $div\ \overline{f}(A) = (0,0,0)$, b) $div\ \overline{f}(A) = (1,0,0)$,

c) $div\ \overline{f}(A) = 1$, d) $div\ \overline{f}(A) = 0$.

3. Vypočítejte rotaci vektorového pole $\overline{f}(x,y,z) = yze^x\overline{i} + xze^y\overline{j} + xye^z\overline{k}$.

a) $rot\ \overline{f}(x,y,z) = x(e^z - e^y)\overline{i} + y(e^x - e^z)\overline{j} + z(e^y - e^x)\overline{k}$,

b) $rot\ \overline{f}(x,y,z) = x(e^z - e^y) + y(e^x - e^z) + z(e^y - e^x)$,

c) $rot\ \overline{f}(x,y,z) = x(e^z + e^y)\overline{i} + y(e^x + e^z)\overline{j} + z(e^y + e^x)\overline{k}$,

d) $rot\ \overline{f}(x,y,z) = xy(e^z - e^y)\overline{i} + yz(e^x - e^z)\overline{j} + xz(e^y - e^x)\overline{k}$.

4. Vypočítejte rotaci vektorového pole $\overline{f}(x,y,z) = yze^x\overline{i} + xze^y\overline{j} + xye^z\overline{k}$ v bodě $A = (1,0,0)$.

a) $rot\ \overline{f}(A) = (0,0,0)$, b) $rot\ \overline{f}(A) = (1,0,0)$,

c) $rot\ \overline{f}(A) = 1$, d) $rot\ \overline{f}(A) = 0$.

5. Rozhodněte, jaké je vektorové pole $\overline{f}(x,y,z) = e^x yz\overline{i} + xe^y z\overline{j} + xye^z\overline{k}$.

a) Nevírové a nezřídlové,

b) nevírové a zřídlové,

c) vírové a nezřídlové,

d) vírové a zřídlové.

6. Určete potenciál vektorového pole $\overline{f}(x,y,z) = e^x\overline{i} + e^y\overline{j} + e^z\overline{k}$, pokud existuje.

a) $\phi(x,y,z) = e^x\overline{i} + e^y\overline{j} + e^z\overline{k} + C$,

b) $\phi(x,y,z) = e^x + e^y + e^z + C$,

c) $\phi(x,y,z) = e^{x+y+z} + C$,

d) potenciál neexistuje.

7. Určete potenciál vektorového pole $\overline{f}(x,y,z) = grad(x+y+z)$, pokud existuje.

a) $\phi(x,y,z) = x + yz + C$, b) $\phi(x,y,z) = xy + z + C$,

c) $\phi(x,y,z) = x + y + z + C$, d) potenciál neexistuje.

8. Je proudění o rychlosti $\overline{v} = (y+z)\overline{i} + (x+z)\overline{j} + (x+y)\overline{k}$ laminární ?

a) Ano, b) ne,

c) jen na ose x, d) jen v počátku soustavy souřadnic.

9. Určete, zda je vektorové pole $\overline{f}(x,y,z) = grad\ (\ln(x+y+z))$ nezřídlové.

a) Ano, b) ne,

c) jen na ose x, d) jen v počátku soustavy souřadnic.

10. Určete, zda je vektorové pole $\overline{f}(x,y,z) = grad\ (\ln(x+y+z))$ nevírové.

a) Ano, b) ne,

c) jen na ose z, d) jen v počátku soustavy souřadnic.

Výsledky testu

1. d); 2. d); 3. a); 4. a); 5. d; 6. b); 7. c); 8. a); 9. b); 10. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte dále.

V opačném případě je potřeba prostudovat kapitolu 3.3 znovu.

Shrnutí lekce

V této kapitole jsme se seznámili s vektorovým polem, které je v trojrozměrné oblasti Ω určeno vektorovou funkcí tří nezávisle proměnných

$$\overline{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}\ .$$

Vektorové pole můžeme ilustrovat vektorovými čarami (z fyzikálních pokusů na základní škole si jistě pamatujete tvar magnetických indukčních čar).

Významnými charakteristikami vektorového pole jsou divergence a rotace.

Divergence vektorového pole je skalární veličina, určená vztahem

$$div\ \bar{f}(X) = \frac{\partial P(X)}{\partial x} + \frac{\partial Q(X)}{\partial y} + \frac{\partial R(X)}{\partial z} = \nabla . \bar{f}(X).$$

Vektorové pole, v jehož každém bodě je divergence nulová, nemá zřídla ani nory, proto se nazývá nezřídlové.

Rotace vektorového pole je vektorová veličina, určená vztahem

$$rot\ \bar{f}(X) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(X) & Q(X) & R(X) \end{vmatrix} = \nabla \times \bar{f}(X).$$

Vektorové pole, v jehož každém bodě je rotace rovna nulovému vektoru, nevytváří víry, proto se nazývá nevírové.

3.4. Operace druhého řádu

Průvodce studiem

V předchozích kapitolách jste poznali operaci gradient skalárního pole, jejímž výsledkem je pole vektorové. Výsledkem divergence vektorového pole je pole skalární. Rotace vektorového pole je opět vektorové pole. Můžeme tedy všechny tři operace znovu provádět s nově vzniklými poli. Tak získáme operace druhého řádu.

Cíle

Cílem této kapitoly je objasnit opakované použití operací gradient skalárního pole, divergence a rotace vektorového pole.

Předpokládané znalosti

Parciální derivace funkce více proměnných.

Neurčitý integrál, integrační metody.

Skalární a vektorový součin vektorů.

Výklad

Je dáno skalární pole $u(x,y,z)$ a vektorové pole $\overline{f}(x,y,z)=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+$ $+R(x,y,z)\overline{k}$, přičemž funkce $u(x,y,z), P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ jsou dvakrát spojitě diferenciabilní v oblasti Ω.

Operace $grad\ u(x,y,z)=\nabla u(x,y,z)$, (33), $div\ \overline{f}(x,y,z)=\nabla.\overline{f}(x,y,z)$ (36) a $rot\ \overline{f}(x,y,z)=\nabla\times\overline{f}(x,y,z)$ (37) nazýváme operacemi prvního řádu. Výsledkem operací $grad\ u(X)$ a $rot\ \overline{f}(X)$ jsou vektorová pole, výsledkem $div\ \overline{f}(X)$ je pole skalární. Jestliže na tato pole znovu aplikujeme operace gradient, divergence a rotace, můžeme vytvořit pět operací druhého řádu:

$$div\ grad\ u(X)=\nabla.\nabla u=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u,$$

přičemž operátor $$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (39)$$

se nazývá Laplaceův operátor,

$$rot\ grad\ u=\nabla\times\nabla u=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=$$

$$=\overline{i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)+\overline{j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)+\overline{k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)=\overline{o},$$

$$div\ rot\ \overline{f}=\nabla.(\nabla\times\overline{f})=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right).\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}=0,$$

$$grad\ div\ \bar{f} = \nabla(\nabla .\bar{f}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).(P,Q,R)\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z},\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}\right) =$$

$$= grad\frac{\partial P}{\partial x} + grad\frac{\partial Q}{\partial y} + grad\frac{\partial R}{\partial z}, \qquad (40)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} gradP + \frac{\partial}{\partial y} gradQ + \frac{\partial}{\partial z} gradR,$$

$rot\ rot\ \bar{f} = \nabla \times (\nabla \times \bar{f}) = grad\ div\ \bar{f} - \nabla \bar{f}$ dokážeme analogicky.

Poznámky

1. Protože $rot\ grad\ u = \bar{o}$ *pro každé skalární pole u a* $dif\ rot\ \bar{f} = 0$ *pro každé vektorové pole* $\bar{f}$*, je zřejmé, že tyto dva operátory druhého řádu nemají praktický význam.*

2. Teoreticky lze další aplikací operací $grad\ u = \nabla u$, $div\ \bar{f} = \nabla .\bar{f}$ *a* $rot\ \bar{f} = \nabla \times \bar{f}$ *vytvořit celkem devět operací druhého řádu. Operace* $grad\ grad\ u$, $grad\ rot\ \bar{f}$, $div\ div\ \bar{f}$, $rot\ div\ \bar{f}$ *však nelze vytvoři:*

Výsledkem operace $grad\ u$ *je vektorové pole* $\bar{f}$*, proto na ně nelze znovu aplikovat gradient (je definován výhradně pro pole skalární).*

Výsledkem operace $rot\ \bar{f}$ *je vektorové pole* $\bar{g}$*, proto na ně nelze znovu aplikovat gradient (je definován výhradně pro pole skalární).*

Výsledkem operace $div\ \bar{f}$ *je skalární pole u, proto na ně nelze znovu aplikovat divergenci (je definována výhradně pro pole vektorové).*

Výsledkem operace div $\bar{f}$ je skalární pole u, proto na ně nelze znovu aplikovat rotaci (je definována výhradně pro pole vektorové).

3. Shrneme-li předchozí poznámky, vidíme, význam mají pouze tři operace druhého řádu. Nejdůležitější z nich je Laplaceův operátor $\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = div\ grad\ u(X) = \nabla.\nabla u$.

4. Skalární pole $u(x,y,z)$, *v jehož každém bodě platí* $\Delta u(x,y,z) = 0$, *se nazývá Laplaceovo pole.*

Řešené úlohy

Příklad 3.4.1. Vypočítejte Δu, kde $u = u(x,y,z) = 3x^2 + 4y^3 - 2z^4$.

Řešení: Podle vztahu (39) musíme vypočítat všechny druhé čisté parciální derivace funkce $u(x,y,z)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 12y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 24y, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -8z^3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -24z^2.$$

Platí tedy $\Delta u = 6 + 24y - 24z^2$. Pole $u = 3x^2 + 4y^3 - 2z^4$ tedy není Laplaceovo.

Příklad 3.4.2. Vypočítejte operace *grad div* $\bar{f}$, kde $\bar{f} = \bar{f}(x,y,z) = xyz\bar{i} + xyz\bar{j} + xyz\bar{k}$.

Řešení: Použijeme vztah (40).

$$P = xyz = Q = R, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = xy,$$

$$grad\ \frac{\partial P}{\partial x} = (0,z,y), \quad grad\ \frac{\partial Q}{\partial y} = (z,0,x), \quad grad\ \frac{\partial R}{\partial z} = (y,x,0),$$

$$grad\ div\ \bar{f} = (0,z,y) + (z,0,x) + (y,x,0) = (y+z, x+z, x+y).$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočítejte Δu, je-li dáno:

a) $u(x,y) = x^2 + y^2$,

b) $u(x,y) = 4x^2 - y^2$,

c) $u(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

d) $u(x,y,z)=\dfrac{4}{\sqrt{x+y+z}}$.

2. Rozhodněte, zda dané vektorové pole $u(X)$ je Laplaceovo:

a) $u(x,y)=2x^2+3y^2$,

b) $u(x,y)=\sqrt{4+x^2+y^2}$,

c) $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz$,

d) $u(x,y,z)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}$,

e) $u(x,y,z)=x+y+z-3$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\Delta u=4$; **b)** $\Delta u=6$; **c)** $\Delta u=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; **d)** $\Delta u=\dfrac{9}{\sqrt{(x+y+z)^5}}$.

2. a) není; **b)** není; **c)** není; **d)** není; **e)** je.

Shrnutí lekce

V této kapitole jsme se naučili skládat operace gradient skalárního pole, divergence a rotace vektorového pole. Výsledkem skládání jsou operace druhého řádu. Ukázali jsme si, které operace druhého řádu lze provést a jaký je jejich výsledek. Zdůvodnili jsme, proč některé operace druhého řádu neexistují.

Největší význam v praxi má operace *div grad* $u(X)$, jejímž výsledkem je Laplaceův operátor $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

4. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

Průvodce studiem

V prvním ročníku jste se seznámili s integrálním počtem funkce jedné proměnné, v první a druhé kapitole tohoto textu jste poznali vícenásobné integrály – dvojrozměrný a trojrozměrný. Nyní rozšíříme pojem integrál ještě dále na integrál křivkový, jehož integrační oblastí je křivka v rovině nebo prostoru.

Cíle

V této kapitole poznáme rovnice křivky a její orientaci, zavedeme křivkový integrál I. a II. druhu a naučíme se tyto integrály počítat různými metodami. Nakonec se seznámíme s využitím křivkových integrálů v geometrii a ve fyzice.

Předpokládané znalosti

Integrační metody (základní integrační vzorce, metoda integrace substitucí, metoda per partes), výpočet určitého integrálu (Newton – Leibnizova věta).

Dvojrozměrný integrál a jeho výpočet.

Analytická geometrie lineárních útvarů (obecná rovnice přímky, její směrnicový a úsekový tvar, parametrické rovnice přímky) a kvadratických útvarů v rovině (kuželosečky).

Analytická geometrie lineárních útvarů v prostoru.

Vektorová algebra (skalární součin vektorů).

Vektorová funkce jedné a více nezávisle proměnných.

4.1. Křivka a její orientace

Průvodce studiem

Abychom mohli studovat křivkový integrál, musíme vyjádřit analyticky jeho integrační oblast (křivku v rovině či prostoru) a také zavést orientaci křivky.

Cíle

Cílem této kapitoly je poznat rovnice křivky a zavést její orientaci.

Předpokládané znalosti

Analytická geometrie lineárních útvarů (obecná rovnice přímky, její směrnicový a úsekový tvar, parametrické rovnice přímky) a kvadratických útvarů v rovině (kuželosečky)

Analytická geometrie lineárních útvarů v prostoru.

Vektorová funkce jedné nezávisle proměnné.

Výklad

V kapitole 3.1.1 jsme uvedli, že vektorovou funkcí jedné nezávisle proměnné t

$$\overline{f}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k},\ t \in < a,b >$$

je určena křivka k, pokud jsou funkce $x(t), y(t), z(t)$ spojité v $< a,b >$. Připomeňme ekvivalentní zápis křivky k ve tvaru parametrických rovnic s parametrem t

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \ t \in < a,b > .$$

Definice 4.1.1.

1. **Křivka k** o rovnici $\overline{f}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k},\ t \in < a,b >$ se nazývá **kladně (souhlasně) orientovaná v** $< a,b >$ **vzhledem k parametru *t*** právě tehdy, když jsou její body uspořádány tak, že pro libovolné hodnoty $t_1, t_2 \in < a,b >,\ t_1 < t_2$, leží bod $M_1 = (x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ před bodem $M_2 = (x(t_2), y(t_2), z(t_2))$:

$$\forall t_1, t_2 \in < a,b >:\ \ t_1 < t_2 \Leftrightarrow M_1 \prec M_2.$$

Platí-li naopak

$$\forall t_1, t_2 \in < a,b >:\ \ t_1 < t_2 \Leftrightarrow M_2 \prec M_1,$$

nazývá se **křivka k záporně (nesouhlasně) orientovaná v** $< a,b >$ **vzhledem k parametru *t***.

2. Je-li křivka k kladně orientována v $< a,b >$ vzhledem k parametru t , pak body

$$A = (x(a), y(a), z(a)) \text{ a } B = (x(b), y(b), z(b))$$

jsou její krajní body, přičemž **bod *A*** se nazývá **počáteční bod** a **bod *B* koncový bod** křivky k.

3. Platí-li $A \equiv B$, nazývá se křivka k **uzavřená**.

4. Křivka k se nazývá **hladká** v $< a,b >$, existuje-li spojitá derivace $\bar{f}'(t)$ v $< a,b >$, která je různá od $\bar{o}$ pro $\forall t \in < a,b >$.

. Křivka k se nazývá **jednoduchá** v $< a,b >$, jestliže sama sebe neprotíná, tj.

$$\forall t_1, t_2 \in < a,b >: \; t_1 \neq t_2 \Leftrightarrow M_1 \neq M_2.$$

Poznámky

1. Symbol $\prec$ znamená předchází, leží před.

2. Křivku kladně orientovanou značíme k_+, záporně orientovanou k_-.

3. Hladkou křivku si intuitivně představíme jako křivku „oblého tvaru“, tedy křivku bez bodů zlomu či zvratu, v jejímž každém nekrajním bodě lze sestrojit tečnu.

4. Podle bodu 4 v definici 4.1.1 je křivka k hladká v $< a,b >$, jestliže v $< a,b >$ existují spojité derivace $x'(t), y'(t), z'(t)$, které nejsou současně nulové

Řešené úlohy

Příklad 4.1.1. Napište parametrické rovnice

a) úsečky s krajními body $A = (a_1, a_2, a_3)$ a $B = (b_1, b_2, b_3)$,

b) kružnice $x^2 + y^2 = r^2, \; r > 0$,

c) kružnice $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2, \; r > 0$,

d) elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; a > 0, \; b > 0$,

e) elipsy $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1, \; a > 0, \; b > 0$.

Řešení: a) Z analytické geometrie víme, že parametrické rovnice úsečky, určené dvěma body A a B, mají symbolický tvar

$$X = A + t(B - A), \; t \in < 0,1 >. \qquad (41)$$

Po rozepsání do souřadnic platí

$x = a_1 + t(b_1 - a_1),\ y = a_2 + t(b_2 - a_2),\ z = a_3 + t(b_3 - a_3),\ t \in <0,1>$.

b) Parametrické rovnice kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem r mají tvar

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ t \in <0, 2\pi). \qquad (42)$$

Snadno se o tom přesvědčíme umocněním rovnic na druhou

$x^2 = r^2\cos^2 t,\ y^2 = r^2\sin^2 t$

a jejich sečtením

$x^2 + y^2 = r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2.1 = r^2$.

c) Analogicky pro kružnici se středem v bodě $S = (m, n)$ a poloměrem r platí

$x = m + r\cos t,\ y = n + r\sin t,\ t \in <0, 2\pi).$

Po úpravě

$x - m = r\cos t,\ y - n = r\sin t$

rovnice opět umocníme na druhou

$(x-m)^2 = r^2\cos^2 t,\ (y-n)^2 = r^2\sin^2 t$

a sečteme

$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2$.

d) Parametrické rovnice elipsy se středem v počátku a poloosami a, b mají tvar

$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in <0, 2\pi).$

Snadno se o tom přesvědčíme po úpravě

$\frac{x}{a} = \cos t,\ \frac{y}{b} = \sin t$

opět umocněním rovnic na druhou $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \cos^2 t,\ \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sin^2 t$

a jejich sečtením

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

e) Parametrické rovnice elipsy se středem v bodě $S = (m, n)$ a poloosami a, b mají tvar

$x = m + a\cos t,\ y = n + b\sin t,\ t \in <0, 2\pi).$

Opět se o tom přesvědčíme po úpravě

$x-m=a\cos t,\ y-n=b\sin t,\ t\in<0,2\pi),$

$\frac{x-m}{a}=\cos t,\ \frac{y-n}{b}=\sin t.$

Umocněním rovnic na druhou dostaneme $\left(\frac{x-m}{a}\right)^2=\cos^2 t,\ \left(\frac{y-n}{b}\right)^2=\sin^2 t$

a po jejich sečtení platí:

$\left(\frac{x-m}{a}\right)^2+\left(\frac{y-n}{b}\right)^2=\cos^2 t+\ \sin^2 t=1.$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Napište parametrické rovnice

a) úsečky s krajními body $A=(1,2,3)$ a $B=(3,2,1),$

b) kružnice $x^2+y^2=9,$

c) půlkružnice $x^2+y^2=3,\ y>0$

d) kružnice $x^2+y^2-4x=0,$

e) kružnice $x^2+y^2+16y=5,$

f) kružnice $x^2+y^2-6x+10y=2,$

g) elipsy $4x^2+9y^2=36,\ x\geq 0,$

h) elipsy $9x^2+4y^2-36x-16y+16=0.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $x=1+2t,\ y=2,\ z=3-2t,\ t\in<0,1>;$

b) $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ t\in<0,2\pi);$

c) $x=\sqrt{3}\cos t,\ y=\sqrt{3}\sin t,\ t\in<0,\pi>;$

d) $x=2+2\cos t,\ y=2\sin t,\ t\in<0,2\pi);$

e) $x=\sqrt{69}\cos t,\ y=-8+\sqrt{69}\sin t,\ t\in<0,2\pi);$

f) $x=3+6\cos t,\ y=-5+6\sin t,\ t\in<0,2\pi);$

g) $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in <-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}>$;

h) $x = 2 + 2\cos t,\ y = 2 + 3\sin t,\ t \in <0, 2\pi)$.

Řešené úlohy

Příklad 4.1.2. Napište vektorovou funkci, která je rovnicí

a) úsečky s krajními body $A = (a_1, a_2, a_3)$ a $B = (b_1, b_2, b_3)$,

b) kružnice $x^2 + y^2 = r^2,\ r > 0$

c) kružnice $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2,\ r > 0$,

d) elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0$,

e) elipsy $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0$.

Řešení: Stačí zapsat výsledky příkladu 4.1.1 ve tvaru vektorové funkce:

a) $\overline{f}(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1))\overline{i} + (a_2 + t(b_2 - a_2))\overline{j} + (a_3 + t(b_3 - a_3))\overline{k},\ \ t \in <0,1>$,

b) $\overline{f}(t) = r\cos t\ \overline{i} + r\sin t\ \overline{j},\ t \in <0, 2\pi)$,

c) $\overline{f}(t) = (m + r\cos t)\overline{i} + (n + r\sin t)\ \overline{j},\ t \in <0, 2\pi)$,

d) $\overline{f}(t) = a\cos t\ \overline{i} + b\sin t\ \overline{j},\ t \in <0, 2\pi)$,

e) $\overline{f}(t) = (m + a\cos t)\ \overline{i} + (n + b\sin t)\overline{j},\ t \in <0, 2\pi)$.

Úlohy k samostatnému řešení

2. Napište vektorovou funkci, která je rovnicí

a) úsečky s krajními body $A = (1, 2, 3)$ a $B = (3, 2, 1)$,

b) kružnice $x^2 + y^2 = 9$,

c) kružnice $x^2 + y^2 = 3,\ y \geq 0$

d) kružnice $x^2 + y^2 - 4x = 0$,

e) kružnice $x^2 + y^2 + 16y = 0$,

f) kružnice $x^2 + y^2 - 6x + 10y = 0$,

g) elipsy $4x^2+9y^2=36,\ x\geq 0$,

h) elipsy $9x^2+4y^2-36x-16y+16=0$,

i) elipsy $4x^2+9y^2-8x-36y=104$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. a) $\overline{f}(t)=(1+2t)\overline{i}+2\overline{j}+(3-2t)\overline{k},\ t\in<0,1>$;

b) $\overline{f}(t)=3\cos t\,\overline{i}+3\sin t\,\overline{j},\ t\in<0,2\pi)$;

c) $\overline{f}(t)=\sqrt{3}\cos t\,\overline{i}+\sqrt{3}\sin t\,\overline{j},\ t\in<0,\pi>$;

d) $\overline{f}(t)=(2+2\cos t)\overline{i}+2\sin t\,\overline{j},\ t\in<0,2\pi)$;

e) $\overline{f}(t)=\sqrt{69}\cos t\,\overline{i}+(-8+\sqrt{69}\sin t)\overline{j},\ t\in<0,2\pi)$;

f) $\overline{f}(t)=(3+6\cos t)\overline{i}+(-5+6\sin t)\overline{j},\ t\in<0,2\pi)$;

g) $\overline{f}(t)=3\cos t\,\overline{i}+2\sin t\,\overline{j},\ t\in<-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}>$;

h) $\overline{f}(t)=(2+2\cos t)\overline{i}+(2+3\sin t)\overline{j},\ t\in<0,2\pi)$,

i) $\overline{f}(t)=(1+6\cos t)\overline{i}+(2+4\sin t)\overline{j},\ t\in<0,2\pi)$.

Kontrolní otázky

1. Který z následujících zápisů vyjadřuje křivku v rovině formou parametrických rovnic?

a) $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t\in<a,b>$,

b) $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in<a,b>$, funkce $x(t),\ y=y(t)$ spojité v $<a,b>$,

c) $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in<a,b>$,

d) $\overline{f}(t)=x(t)\overline{i}+y(t)\overline{j}+z(t)\overline{k},\ t\in<a,b>$.

2. Která z následujících rovnic vyjadřuje křivku v prostoru formou vektorové funkce?

a) $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t\in<a,b>$,

b) $\overline{f}(t)=x(t)\overline{i}+y(t)\overline{j},\ t\in<a,b>$, funkce $x(t),\ y=y(t)$ spojité v $<a,b>$,

c) $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in<a,b>$,

d) $\overline{f}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}$, $t \in < a,b >$, funkce $x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ spojité v $< a,b >$.

3. Jaké musí být funkce $x(t)$, $y(t)$, aby vektorová funkce $\overline{f}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j}$, $t \in < a,b >$ vyjadřovala křivku v rovině?

a) Kladné, b) spojité,

c) monotónní, d) periodické.

4. Parametrické rovnice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t = 1$ vyjadřují:

a) Křivku v rovině, b) křivku v prostoru,

c) bod v rovině, d) bod v prostoru.

5. Kružnice $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$ má parametrické rovnice:

a) $\overline{f}(t) = (a + r\cos t)\overline{i} + (b + r\sin t)\,\overline{j}$, $t \in < 0, 2\pi)$,

b) $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in < 0, 2\pi)$,

c) $\overline{f}(t) = r\cos t\,\overline{i} + r\sin t\,\overline{j}$, $t \in < 0, 2\pi)$,

d) $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in < 0, \pi)$.

6. Parametrické rovnice úsečky s krajními body $A = (a_1, a_2)$ a $B = (b_1, b_2)$ vyjadřují rovnice:

a) $x = a_1 + t(b_1 - a_1)$, $y = a_2 + t(b_2 - a_2)$, $t \in < 0,1 >$,

b) $x = a_1 + t(b_1 - a_1)$, $y = a_2 + t(b_2 - a_2)$, $z = a_3 + t(b_3 - a_3)$, $t \in < 0,1 >$,

c) $\overline{f}(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1))\overline{i} + (a_2 + t(b_2 - a_2))\overline{j} + (a_3 + t(b_3 - a_3))\overline{k}$, $t \in < 0,1 >$,

d) $\overline{f}(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1))\overline{i} + (a_2 + t(b_2 - a_2))\overline{j}$, $t \in < 0,1 >$.

7. Výraz $\overline{f}(t) = a\cos t\,\overline{i} + b\sin t\,\overline{j}$, $a > 0$, $b > 0$, $t \in < 0, \pi >$ vyjadřuje:

a) Horní polovinu elipsy se středem v počátku,

b) dolní polovinu elipsy se středem v počátku,

c) elipsu se středem v počátku,

d) horní polovinu elipsy se středem v bodě $S = (a,b)$.

8. Rovnice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in < \pi, 2\pi)$ popisují:

a) Kružnici se středem v počátku a poloměrem 2,

b) horní polovinu kružnice se středem v počátku a poloměrem 2,

c) dolní polovinu kružnice se středem v počátku a poloměrem 2,

d) horní polovinu kružnice se středem v počátku a poloměrem 4.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. d); 3. b); 4. d); 5. b); 6. a); 7. a); 8. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte dále. V opačném případě doporučujeme prostudovat kapitolu 4.1 znovu.

Kontrolní test

1. Určete parametrické rovnice úsečky s krajními body $A=(1,3)$ a $B=(-3,2)$.

a) $x=1-4t,\ y=3+t,\ t\in<0,1>$,

b) $x=1-4t,\ y=3-t,\ t\in<0,1>$,

c) $x=1+4t,\ y=3-t,\ t\in<0,+\infty)$,

d) $x=1-4t,\ y=3-t,\ t\in<0,+\infty)$.

2. Určete krajní body úsečky $x=2+t,\ y=-3,\ z=6t,\ t\in<0,1>$.

a) $A=(-2,-3,0), B=(3,-3,6),$ b) $A=(2,3,0), B=(3,-3,6),$

c) $A=(2,-3,0), B=(3,-3,6),$ d) $A=(2,-3,6), B=(3,-3,0)$.

3. Kružnice $x=2\sqrt{2}\cos t,\ y=2\sqrt{2}\sin t,\ t\in<0,2\pi)$ má poloměr

a) $r=2\sqrt{2}$, b) $r=\sqrt{2}$,

c) $r=2$, d) $r=8$.

4. Napište vektorovou funkci, která je rovnicí pravé půlkružnice se středem $S=(-1,1)$ a poloměrem $r=8$.

a) $\overline{f}(t)=(-1+8\cos t)\overline{i}+(1+8\sin t)\overline{j},\ t\in<0,2\pi)$,

b) $\overline{f}(t)=(-1+8\cos t)\overline{i}+(1+8\sin t)\overline{j},\ t\in<\pi,2\pi)$,

c) $\overline{f}(t)=(1+8\cos t)\overline{i}+(1-8\sin t)\overline{j},\ t\in<-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}>$,

d) $\bar{f}(t) = (-1+8\cos t)\,\bar{i} + (1+8\sin t)\,\bar{j},\ t \in <-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}>$.

5. Určete parametrické rovnice levé poloviny elipsy se středem v počátku a poloosami $a = 4,\ b = 1$.

a) $x = 4\cos t,\ y = \sin t,\ t \in <\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}>$,

b) $x = 4\cos t,\ y = 4\sin t,\ t \in <\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}>$,

c) $x = \cos t,\ y = 4\sin t,\ t \in <-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}>$,

d) $x = 4\cos t,\ y = \sin t,\ t \in <\frac{\pi}{2}, \pi>$.

6. Vektorová funkce $\bar{f}(t) = (-2+2\cos t)\,\bar{i} + (1+4\sin t)\,\bar{j},\ t \in <0, \frac{\pi}{2}>$ je rovnicí

a) Části elipsy $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$,

b) části elipsy $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1,\ x \leq 0,\ y \leq 0$,

c) části kružnice $x^2 + y^2 = 16,\ x \geq 0,\ y \geq 0$,

d) části kružnice $x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0$.

7. Kružnice $x = 2 + \sqrt{2}\cos t,\ y = -2 + \sqrt{2}\sin t,\ t \in <0, 2\pi)$ má středovou rovnici:

a) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2$,

b) $(x-2)^2 - (y+2)^2 = 2$,

c) $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 2$,

d) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$.

8. Průměr kružnice $x^2 + y^2 - 10x = 0$, který leží na ose x, lze vyjádřit například vektorovou funkcí:

a) $\bar{f}(t) = 10t\,\bar{j},\ t \in <0,1>$,

b) $\bar{f}(t) = 10t\,\bar{i} + 10t\,\bar{j},\ t \in <0,1>$,

c) $\overline{f}(t) = 10t\,\overline{i}\,,\ t \in <0,1>,$

d) $\overline{f}(t) = 10t\,\overline{i} + \overline{j},\ t \in <0,1>.$

9. Vektorová funkce $\overline{f}(t) = \cos t\,\overline{i} + \sin t\,\overline{j} + t\,\overline{k},\ t \in <0,10\pi>$ vyjadřuje křivku s parametrickými rovnicemi:

a) $x = \sin t\,,\ y = \sin t,\ z = t,\ t \in <0,10\pi>,$

b) $x = \cos t\,,\ y = \sin t,\ z = t,\ t \in <0,10\pi>,$

c) $x = \cos t\,,\ y = \sin t,\ z = t,\ t \in <0,2\pi>,$

d) $x = \cos t\,,\ y = \sin t,\ z = t\sin t,\ t \in <0,10\pi>.$

10. Parametrické rovnice křivky $x = t\,,\ y = \frac{1}{t},\ t \in <1,10>$ lze zapsat vektorovou funkcí:

a) $\overline{f}(t) = t\,\overline{i} - \frac{1}{t}\overline{j},\ t \in <1,10>,$

b) $\overline{f}(t) = -t\,\overline{i} + \frac{1}{t}\overline{j},\ t \in <1,10>,$

c) $\overline{f}(t) = t\,\overline{i} + \frac{1}{t}\overline{j},\ t \in <1,10>,$

d) $\overline{f}(t) = t\,\overline{i} + \frac{1}{10t}\overline{j},\ t \in <1,10>.$

Odpovědi na kontrolní test

1. b); 2. c); 3. a); 4. d); 5. a); 6. a); 7. a); 8. c); 9. b); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte dále. V opačném případě je zapotřebí prostudovat kapitolu 4.1 znovu.

Shrnutí lekce

V této kapitole jsme se naučili vyjádřit analyticky křivku v rovině nebo v prostoru formou parametrických rovnic a ve tvaru vektorové funkce. Také jsme zjistili, jak se převádí

parametrické rovnice křivky na vektorovou funkci a naopak. Zopakovali jsme parametrické rovnice úsečky, která je dána krajními body, parametrické rovnice kružnice a elipsy.

Definovali jsme orientaci křivky vzhledem k rostoucímu parametru t. Poznali jsme, kdy se křivka nazývá jednoduchá a kdy hladká.

4.2. Zavedení křivkového integrálu

Průvodce studiem

V prvním ročníku jste zavedli určitý integrál metodou dělení intervalu $< a,b >$. Křivkový integrál zavedeme na základě analogie – rozdělíme křivku k na dílčí křivky. Musíme však rozlišovat, zda je křivka k orientovaná nebo neorientovaná.

Cíle

Cílem této kapitoly je objasnit pojem křivkového integrálu I. a II. druhu.

Předpokládané znalosti

Riemannův určitý integrál, normální posloupnost dělení.

Vektorová funkce jedné a více proměnných.

Vektorová algebra (skalární součin vektorů).

Rovnice křivky a její orientace.

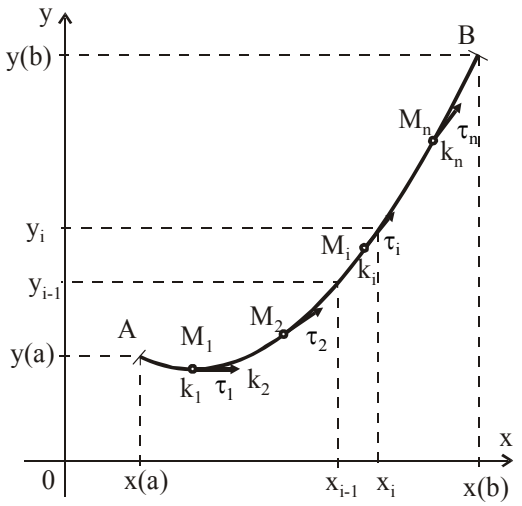
Výklad

Křivkový integrál je jistým zobecněním pojmu určitý integrál, viz [4], [5], [7]. Pro naše potřeby se omezíme na jednoduchou hladkou křivku k o rovnici

$$\overline{f}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\,\overline{j} + z(t)\overline{k},\ t \in < a,b >,$$

kladně orientovanou vzhledem k parametru t.

Interval $< a,b >$ rozdělíme posloupností bodů $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ na dílčí intervaly. Tomuto dělení odpovídá rozdělení křivky k na n jednoduchých dílčích hladkých křivek $k_1, k_2, \ldots, k_n$, viz obr. 36. Označíme Δs_i délku i-té dílčí křivky, $i = 1,2,\ldots,n$. Na každé dílčí křivce k_i, $i = 1,2,\ldots,n$, libovolně zvolíme bod $M_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$, $i = 1,2,\ldots,n$, kterému odpovídá hodnota parametru t_i. V každém bodě M_i, $i = 1,2,\ldots,n$ sestrojíme jednotkový tečný vektor $\overline{\tau}_i = \overline{\tau}(M_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$, který orientujeme souhlasně s křivkou k.



Obr. 36

V oblasti Ω, v níž leží křivka k, jsou definované, ohraničené a spojité:

- skalární funkce $u = u(x, y, z) = u(X)$,
- vektorová funkce $\overline{F} = \overline{F}(x, y, z) = \overline{F}(X) = P(X)\,\overline{i} + Q(X)\overline{j} + R(X)\overline{k}$.

V bodech M_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ nabývají tyto funkce hodnoty $u(M_i) = u(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ a

$$\overline{F}(M_i) = \overline{F}(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) = P(M_i)\,\overline{i} + Q(M_i)\overline{j} + R(M_i)\overline{k} =$$

$$= P(x(t_i), y(t_i), z(t_i))\,\overline{i} + Q(x(t_i), y(t_i), z(t_i))\overline{j} + R(x(t_i), y(t_i), z(t_i))\overline{k}\ .$$

Vytvoříme

- součiny $u(M_i)\,\Delta s_i$
- skalární součiny $\overline{F}(M_i).\overline{\Delta s_i}$, kde vektor $\overline{\Delta s_i} = \Delta s_i \overline{\tau}_i$.

Nyní vytvoříme integrální součty

- $$\sum_{i=1}^{n} u(M_i)\,\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} u(x(t_i), y(t_i), z(t_i))\Delta s_i\,, \qquad (43)$$
- $$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}(M_i).\overline{\Delta s_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}(x(t_i), y(t_i), z(t_i)).\overline{\tau}_i \Delta s_i. \qquad (44)$$

Definice 4.2.1.

1. Existuje-li pro $n \to \infty$ a $\Delta s_i \to 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$ limita výrazu (43), pak tuto limitu nazveme **křivkovým integrálem I. druhu funkce** $u(x, y, z)$ **po křivce** k a zapíšeme

$$\int_k u(x, y, z)ds.$$

2. Existuje-li pro $n \to \infty$ a $\Delta s_i \to 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$ limita výrazu (44), pak tuto limitu nazveme **křivkovým integrálem II. druhu** vektorové **funkce** $\overline{F}(x, y, z)$ **po křivce** k_+ a zapíšeme

$$\int_{k_+} \overline{F}(x, y, z).d\overline{s}.$$

Poznámky

1. Křivkový integrál I. druhu nezávisí na orientaci křivky, protože délky dílčích křivek Δs_i *ve vztahu* (43) *jsou vždy kladné. Proto se mu také říká* ***neorientovaný****.*

2. Křivkový integrál II. druhu závisí na orientaci křivky k, protože souřadnice jednotkového tečného vektoru $\overline{\tau}_i$ *ve vztahu* (44) *jsou závislé na orientaci křivky. Říká se mu proto také* ***orientovaný****.*

Shrnutí lekce

Integrační oblastí křivkového integrálu je rovinná nebo prostorová křivka.

Křivku *k* jsme rozdělili na dílčí křivky normální posloupností dělení. Na každé dílčí křivce jsme zvolili libovolný bod a v něm jsme sestrojili jednotkový tečný vektor, orientovaný shodně s křivkou *k*. Křivkové integrály I. a II. druhu jsme zavedli jako limity integrálních součtů.

Pokud nezáleží na orientaci křivky, jde o křivkový integrál I. druhu nebo také neorientovaný, který značíme $\int_k u(x, y, z)ds$. Je definován pro (skalární) funkci $u(x, y, z)$.

Pokud záleží na orientaci křivky, jde o křivkový integrál II. druhu nebo také orientovaný, který značíme $\int_{k_+} \overline{F}(x, y, z).d\overline{s}$. Je definován pro vektorovou funkci $\overline{F}(x, y, z)$.

4.3. Výpočet a vlastnosti křivkových integrálů

Průvodce studiem

Počítat křivkové integrály podle definice 4.2.1 by bylo velmi pracné a také zdlouhavé. Existuje několik metod, jak tyto integrály počítat. Nyní se seznámíme se základními metodami výpočtu křivkového integrálu I. a II. druhu.

Cíle

Cílem této kapitoly je objasnit metody výpočtu a vlastnosti křivkového integrálu I. a II. druhu.

Předpokládané znalosti

Integrační metody (základní integrační vzorce, metoda integrace substitucí, metoda per partes), výpočet určitého integrálu (Newton – Leibnizova věta).

Analytická geometrie lineárních útvarů (obecná rovnice přímky, její směrnicový a úsekový tvar, parametrické rovnice přímky) a kvadratických útvarů v rovině (kuželosečky).

Analytická geometrie lineárních útvarů v prostoru.

Vektorová algebra (skalární součin vektorů).

Vektorová funkce jedné a více nezávisle proměnných.

Výklad

Křivkový integrál I. a II. druhu vypočítáme převedením na určitý integrál.

Věta 4.3.1.

Nechť je dána jednoduchá hladká křivka k vektorovou funkcí

$$\overline{f}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}, \quad t \in < a,b >,$$

orientovaná vzhledem k parametru t. Jsou-li skalární funkce $u(x,y,z)$ a vektorová funkce $\overline{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$ spojité a ohraničené v oblasti Ω, v níž leží křivka k, pak pro křivkový integrál I. druhu platí:

$$\int_k u(x,y,z)ds = \int_a^b u(x(t),\, y(t),\, z(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt \qquad (45)$$

a pro křivkový integrál II. druhu platí:

$$\int_k \bar{F}(x,y,z).d\bar{s} = \varepsilon\int_a^b P(x(t),\, y(t),\, z(t))\dot{x}(t)dt + \varepsilon\int_a^b Q(x(t),\, y(t),\, z(t))\dot{y}(t)dt +$$

$$+\varepsilon\int_a^b R(x(t),\, y(t),\, z(t))\dot{z}(t)dt, \qquad (46)$$

kde $\varepsilon = +1$ v případě kladné orientace křivky *k* vzhledem k parametru *t,*

resp. $\varepsilon = -1$ v případě záporné orientace křivky *k* vzhledem k parametru *t*.

Výraz (45) pochopíme, uvědomíme-li si, že element délky křivky *ds* v prostoru tvoří vlastně tělesovou uhlopříčku kvádru o délkách stran dx, dy, dz. Pro jeho délku proto platí

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} = \sqrt{(\dot{x}(t)dt)^2+(\dot{y}(t)dt)^2+(\dot{z}(t)dt)^2} = \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt\,. \qquad (47)$$

K odvození výrazu (46) je nutno nejprve provést skalární součin

$$\bar{F}(x,y,z).d\bar{s} = (P(X), Q(X), R(X)).(dx, dy, dz) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

a pak vypočítat diferenciály $dx = \dot{x}(t)dt,\ dy = \dot{y}(t)dt,\ dz = \dot{z}(t)dt.$

Vlastnosti křivkových integrálů přímo vyplývají z definice součtů (43) a (44).

Věta 4.3.2. (Vlastnosti křivkových integrálů)

1. $\int_k c\,u(X)\,ds = c\int_k u(X)\,ds, \quad \int_{k_+} c\,\bar{F}(X).d\bar{s} = c\int_{k_+} \bar{F}(X).d\bar{s},$

2. $\int_k (u(X)+v(X))\,ds = \int_k u(X)\,ds + \int_k v(X)\,ds,$

   $\int_{k_+} (\bar{F}(X)+\bar{G}(X)).d\bar{s} = \int_{k_+} \bar{F}(X).d\bar{s} + \int_{k_+} \bar{G}(X).d\bar{s},$

3. $\int_k u(X)\,ds = \int_{k_1} u(X)\,ds + \int_{k_2} u(X)\,ds,$

$$\int_{k_+} \bar{F}(X).d\bar{s} = \int_{k_{1+}} \bar{F}(X).d\bar{s} + \int_{k_{2+}} \bar{F}(X).d\bar{s},$$

4. $$\int_{k_+} \bar{F}(X).d\bar{s} = -\int_{k_-} \bar{F}(X).d\bar{s},$$

přičemž skalární funkce $u(X)$, $v(X)$ a vektorové funkce $\bar{F}(X)$, $\bar{G}(X)$ jsou spojité a ohraničené v oblasti Ω, v níž leží křivka k, $c \in R$.

Křivky k_1 a k_2 vzniknou rozdělením křivky k na dvě části.

Poznámky

1. První a druhou vlastnost můžeme vyjádřit takto: Křivkový integrál I. a II. druhu je ***lineární operátor****.*

2. Třetí vlastnost vyjadřujeme takto: Křivkový integrál I. a II. druhu je ***aditivní funkcí*** *integračního oboru.*

3. Čtvrtá vlastnost se týká výhradně křivkového integrálu II. druhu: Změníme-li orientaci křivky k na opačnou, změní se znaménko křivkového integrálu II. druhu. Tato vlastnost plyne přímo ze vztahu (46).

Praktický výpočet křivkového integrálu závisí na způsobu, jakým je zadána křivka k.

a) **<u>Křivka *k* je určena parametricky</u>** (nebo ekvivalentní vektorovou funkcí).

$$k: \quad x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \ t \in <a,b>,\ \ (\bar{f}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k},\ \ t \in <a,b>).$$

Křivkový integrál I. druhu vypočítáme dosazením do vztahu (45). Je výhodné dodržovat při výpočtu následující postup:

1. Vypočítáme derivace $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$.

2. Dosazením do vztahu (47) vypočítáme $ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\ dt$.

3. Dosadíme do zadání podle vztahu (45) za $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ a ds.

4. Známými integračními metodami vypočítáme takto získaný určitý integrál.

Řešené úlohy

Příklad 4.3.1. Vypočítejte integrál $F = \int_k (x^2 + y + 3z)ds$, kde křivka k je úsečka OA, $O = (0,0,0)$, $A = (a,0,0)$, $a > 0$.

Řešení: Křivku k vyjádříme podle vztahu (41) parametricky

$x = at,\ y = 0,\ z = 0,\ t \in <0,1>,$

vypočítáme derivace $\dot{x} = a,\ \dot{y} = \dot{z} = 0,$

podle vztahu (47) určíme $ds = \sqrt{a^2 + 0^2 + 0^2}\,dt = a\,dt$

a dosadíme do vztahu (45): $F = \int_0^1 (a^2t^2 + 0 + 3.0)a\,dt = a^3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}a^3.$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočítejte křivkové integrály po prostorových křivkách:

a) $\int_k (x+z)ds,\ k:$ úsečka $AB,\ A = (1,2,3),\ B = (3,2,1),$

b) $\int_k xz\,ds,\ k: x = t,\ y = \frac{2}{3}\sqrt{2t^3},\ z = \frac{1}{2}t^2,\ t \in <0,1>,$

c) $\int_k (x^2 + y^2 + z^2)ds,\ k:$ první závit šroubovice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at,\ a > 0,$

d) $\int_k \frac{z^2}{x^2 + y^2}\,ds,\ k:$ první závit šroubovice $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,$

e) $\int_k z\,ds,\ k: x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ t \in <0,1>,$

f) $\int_k (z + \sqrt{x^2 + y^2})ds,\ k:\ x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ t \in <0,1>.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $8\sqrt{2}$; **b)** $\frac{9}{40}$; **c)** $2\pi a^3\sqrt{2}\left(\frac{4}{3}\pi^2+1\right)$; **d)** $\frac{8}{3}\pi^3\sqrt{2}$; **e)** $\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$;

f) $\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$.

Poznámka

Pokud je křivka k zadána pouze v rovině, tj.

$k:\ x=x(t),\ y=y(t),\ t\in<a,b>$ *(nebo* $\overline{f}(t)=x(t)\overline{i}+y(t)\overline{j},\ t\in<a,b>$*)*

výrazy (45) *a* (47) *se zjednoduší:*

$$\int_k u(x,y)ds=\int_a^b u(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt, \qquad (45a)$$

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt. \qquad (47a)$$

Řešené úlohy

Příklad 4.3.2. Vypočítejte integrál $G=\int_k \frac{ds}{x-y}$, kde k je úsečka KL, $K=(0,-1)$, $L=(2,0)$.

Řešení: Úsečku KL vyjádříme podle vztahu (41) parametricky

$x=2t,\ y=-1+t,\ t\in<0,1>$,

vypočítáme derivace $\dot{x}=2,\ \dot{y}=1$

a podle vztahu (47a) je $ds=\sqrt{2^2+1^2}dt=\sqrt{5}dt$.

Dosadíme do vztahu (45a): $G=\int_0^1 \frac{\sqrt{5}dt}{2t-(-1+t)}=\sqrt{5}\int_0^1 \frac{dt}{t+1}=\sqrt{5}\left[\ln|t+1|\right]_0^1=\sqrt{5}\ln 2.$

Příklad 4.3.3. Vypočítejte integrál $H=\int_k ds$, jestliže křivka k je první oblouk cykloidy

$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ t\in<0,2\pi>$.

Řešení: Abychom mohli dosadit do vztahu (47a), musíme vypočítat derivace

$\dot{x} = a(1-\cos t),\ \dot{y} = a\sin t$.

Po dosazení do vztahu (47a) dostaneme:

$$ds = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt = a\sqrt{2-2\cos t} =$$

$$= a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt = a\sqrt{2}.\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

(při úpravě jsme použili vztah $\sin\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}$).

Po dosazení do vztahu (45a) platí

$$H = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = -4a(-1-1) = 8a.$$

Úlohy k samostatnému řešení

2. Vypočítejte křivkové integrály po rovinných křivkách k:

a) $\int_k xds$, k : úsečka, spojující body O=(0,0), $B=(1,2)$,

b) $\int_k (x^2+y^2)ds$, k : kružnice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ a>0,\ t \in <0, 2\pi>$,

c) $\int_k \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}$, k : půlkružnice $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ t \in <0, \pi>$,

d) $\int_k ds$, k : úsečka AB, kde $A=(-2,-4)$, $B=(6,12)$,

e) $\int_k \frac{ds}{x+y}$, k : úsečka AB, kde $A=(2,4)$, $B=(3,1)$,

f $\int_k x^2 ds$, k : horní polovina kružnice $x^2+y^2=a^2$, $a>0$,

g) $\int_k \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, $k: x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t),\ a>0,\ t \in <0, 2\pi>$,

h) $\int_k \sqrt{2y}ds$, k : první oblouk cykloidy $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ a>0$,

i) $\int_k xyds, k:$ strany obdélníka, které leží na přímkách $x=0, y=0, x=4, y=2,$

j) $\int_k (x+y)ds, k:$ strany trojúhelníka ABC, $A=(1,-1), B=(2,-1), C=(1,0),$

k) $\int_k x^2 yds, k:$ oblouk kružnice $x^2+y^2=a^2$ mezi body $A=(a,0), B=(0,a), a>0,$

l) $\int_k x^2 ds, k:$ oblouk asteroidy $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, a>0, t\in<0,\frac{\pi}{2}>,$

m) $\int_k (xy+x+y-1)ds,$ $\alpha)$ $k:$ úsečka AB, $A=(1,2,), B=(-2,1)$,

$\beta)$ $k:$ úsečka spojující průsečíky křivek $y=x^2, x=y^2,$

$\gamma)$ $k:$ průměr kružnice $x^2+2x+y^2=0$ ležící na ose x.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. a) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; **b)** $2\pi a^3$; **c)** π; **d)** $8\sqrt{5}$; **e)** $\frac{\sqrt{10}}{2}\ln\frac{3}{2}$; **f)** $\frac{1}{2}\pi a^3$; **g)** $\frac{a^2}{3}\left[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1\right]$;

h) $4\pi a\sqrt{a}$; **i)** 24; **j)** $1+\sqrt{2}$; **k)** $\frac{1}{3}a^4$; **l)** $\frac{3}{8}a^3$; **m)** $\alpha)-\frac{1}{2}\sqrt{10}, \beta)\frac{1}{3}\sqrt{2}, \gamma)-4.$

Úmluva

1. Pokud v následujících příkladech nebude uvedena orientace integrační cesty, předpokládáme, že křivka je orientována kladně vzhledem k parametru t.

2. V zápisu křivkového integrálu II. druhu $\int_{k_+} \bar{F}(x,y,z).d\bar{s}$ *provedeme předepsaný skalární součin a budeme ho psát ve tvaru* $\int_{k_+} P(X)dx+Q(X)dy+R(X)dz.$

Řešené úlohy

Příklad 4.3.4. Vypočítejte integrál $I = \int_k x\,dx + y\,dy + z\,dz$, kde k je první závit šroubovice

$x = 2\cos t,\ y = 2\sin t, z = 3t.$

Řešení: Pro derivace platí $\dot{x} = -2\sin t, \dot{y} = 2\cos t, \dot{z} = 3.$ Pro první závit je $t \in < 0, 2\pi >$ a po dosazení do vztahu (46) platí

$$I = 1.\int_0^{2\pi} 2\cos t(-2\sin t)dt + 1.\int_0^{2\pi} 2\sin t.2\cos t dt + 1.\int_0^{2\pi} 3t.3dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4\sin t\cos t + 4\sin t\cos t + 9t)dt = 9\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 18\pi^2.$$

Úlohy k samostatnému řešení

3. Vypočítejte křivkové integrály po prostorových křivkách k:

a) $\int_k yz\,dx - xz\,dy$, k: první závit šroubovice $x = a\cos t, y = a\sin t, z = kt, a > 0, k > 0,$

b) $\int_k x\,dx - y\,dy + z\,dz$, k: orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$, $A = (1,1,1), B = (4,3,2),$

c) $\int_k (x + y + z)dx$, k: strany trojúhelníka ABC, $A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,0,1),$

d) $\int_k \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, k: orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$, $A = (0,0,a), B = (0,b,0), 0 < a < b,$

e) $\int_k yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, k: první závit šroubovice $x = \cos t, y = \sin t, z = t,$

f) $\int_k x\,dz + y\,dx + z\,dy$, k: lomená čára $OABC$,

$O = (0,0,0), A = (a,0,0,), B = (a,a,0), C = (a,a,a), a > 0.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. a) $-2k\pi^2a^2$; **b)** 5; **c)** 0; **d)** b - a; **e)** 0; **f)** a^2.

Poznámka

Pokud křivka k leží pouze v rovině, vztah (46) *se zjednoduší a platí*

$$\int_k \bar{F}(x,y).d\bar{s} = \varepsilon\int_a^b P(x(t),y(t))\dot{x}(t)dt + \varepsilon\int_a^b Q(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)dt. \qquad (46a)$$

Řešené úlohy

Příklad 4.3.5. Vypočítejte integrál $J = \int_k \frac{xdx - ydy}{(x^2+y^2)^3}$, kde k je kladně orientovaná čtvrtkružnice $x^2 + y^2 = 4$ v prvním kvadrantu.

Řešení: Parametrické rovnice čtvrtkružnice mají podle vztahu (42) tvar

$$x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in <0, \frac{\pi}{2}>.$$

Pro derivace platí $\dot{x} = -2\sin t,\ \dot{y} = 2\cos t$ a podle vztahu (46a) je

$$J = 1.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos t(-2\sin t)dt}{(4\cos^2 t + 4\sin^2 t)^3} - 1.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin t.2\cos t dt}{(4\cos^2 t + 4\sin^2 t)^3} = -\frac{4.2}{64}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t dt =$$

$$= -\frac{1}{8}\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{16}.$$

Úlohy k samostatnému řešení

4. Vypočítejte křivkové integrály po rovinných křivkách k:

a) $\int_k ydx + xdy,\ k:$ čtvrtkružnice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ a > 0,\ t \in <0, \frac{\pi}{2}>,$

b) $\int_k (x-y)dx + (x+y)dy,\ k:$ orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB},\ A = (2,3),\ B = (3,5),$

c) $\int_k xdy$, k : orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$, $A=(a,0), B=(0,a), a>0$,

d) $\int_k (x^2-2xy)dy$, k : horní polovina kružnice $x^2+y^2=a^2, a>0$,

e) $\int_k (x^2+y^2)dy$, k : strany čtyřúhelníka $ABCD$,

$A=(0,0), B=(2,0), C=(4,4), D=(0,4)$,

f) $\int_k y^2dx-x^2dy$, k : úsečka $\overrightarrow{AB}$, $A=(0,1), B=(1,0)$,

g) $\int_k xdy-ydx$, $\alpha)$ k : první oblouk cykloidy $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), a>0$,

$\beta)$ k : oblouk asteroidy $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, a>0$,

$\gamma)$ k : smyčka Descartova listu $x=\frac{3at}{1+t^3}, y=\frac{3at^2}{1+t^3}, a>0$,

h) $\int_k (xy-1)dx+x^2ydy$, k : oblouk elipsy $x=\cos t, y=2\sin t$ od bodu $A=(1,0)$

do bodu $B=(0,2)$,

i) $\int_k xydx+(y-x)dy$, k : část paraboly $y=x^2$ od bodu $O=(0,0)$ do bodu $B=(1,1)$,

j) $\int_k (2x+y)dx+(x+2y)dy$, k : čtvrtkružnice $x^2+y^2=4$ v prvním kvadrantu.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

4. a) 0; **b)** $\frac{23}{2}$; **c)** $\frac{1}{2}a^2$; **d)** $-\frac{4}{3}a^3$; **e)** $\frac{112}{3}$; **f)** $\frac{2}{3}$; **g)** $\alpha)-6\pi a^2$, $\beta)$ $\frac{3}{4}\pi a^2$, $\gamma)$ $3a^2$; **h)** $\frac{4}{3}$;

i) $\frac{1}{12}$; **j)** 0.

Výklad

b) **Rovinná křivka *k* je vyjádřena explicitně** vztahem $y = y(x),\ x \in < a, b >$.

V tomto případě můžeme rovnici křivky převést na parametrický tvar (například parametrizací $x = t,\ y = y(t),\ t \in < a, b >$) a dále pokračovat podle vztahů (45a) u křivkového integrálu I. druhu, resp. (46a) u křivkového integrálu II. druhu.

Jiný způsob výpočtu křivkového integrálu I. druhu spočívá ve vyjádření diferenciálu *ds* pomocí nezávisle proměnné *x*:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{dx^2 + (y'(x)dx)^2} = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \qquad (47b)$$

Vztah (45) má potom tvar

$$\int_k u(x,y)ds = \int_a^b u(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \qquad (45b)$$

Řešené úlohy

Příklad 4.3.5. Vypočítejte integrál $K = \int_k y ds$, kde *k* je část kubické paraboly

$y = x^3,\ x \in < 0,1 >$.

Řešení: Pro derivaci platí $y' = 3x^2$. Podle vztahu (47b) je

$ds = \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,dx = \sqrt{1 + 9x^4}\,dx$ a podle vztahu (45b) je

$$K = \int_0^1 x^3\sqrt{1 + 9x^4}\,dx = \left| \begin{array}{ll} 1 + 9x^4 = m & m_1 = 1 + 9.0^4 = 1 \\ 36x^3dx = dm & m_2 = 1 + 9.1^4 = 10 \\ x^3dx = \frac{1}{36}dm & \end{array} \right| = \frac{1}{36}\int_1^{10} \sqrt{m}\,dm =$$

$$= \frac{1}{36}.\frac{2}{3}\left[\sqrt{m^3}\right]_1^{10} = \frac{1}{54}(10\sqrt{10} - 1).$$

Úlohy k samostatnému řešení

5. Vypočítejte křivkové integrály I. druhu po křivkách k:

a) $\int_k (x^2+y^2)ds$, k : úsečka AB, $A=(a,-a)$, $B=(b,-b)$, $0<a<b$,

b) $\int_k \frac{ds}{x+y}$, k : úsečka AB, $A=(a,a)$, $B=(b,b)$, $0<a<b$,

c) $\int_k x^2 ds$, $k: y=\ln x$, $x\in<1,3>$,

d) $\int_k x ds$, k : oblouk paraboly $y=x^2$ mezi body $A=(2,4)$, $B=(1,1)$,

e) $\int_k y ds$, k : oblouk paraboly $y^2=2x$, ohraničený parabolou $x^2=2y$,

f) $\int_k x ds$, k : úsečka OB, $O=(0,0)$, $B=(1,2)$,

g) $\int_k xy ds$, k : strany obdélníka, které leží na přímkách $x=0$, $y=0$, $x=4$, $y=2$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5. a) $\frac{2}{3}\sqrt{2}(b^3-a^3)$; **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{b}{a}\right|$; **c)** $\frac{1}{3}(10\sqrt{10}-2\sqrt{2})$; **d)** $\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$; **e)** $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$;

f) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; **g)** 24.

Výklad

Rovněž křivkový integrál II. druhu můžeme počítat integrací podle nezávisle proměnné x, pokud ve vztahu (46a) nahradíme $dy=y'(x)dx$ a $y=y(x)$:

$$\int_k \bar{F}(x,y).ds = \varepsilon\int_a^b P(x,y(x))dx + \varepsilon\int_a^b Q(x,y(x))y'(x)dx. \qquad (46b)$$

Řešené úlohy

Příklad 4.3.6. Vypočítejte integrál $L=\int_k (x+y)dx+(x-y)dy$, kde k je část rovnoosé hyperboly $y=\frac{1}{x}$, $x\in<2,3>$.

Řešení: Pro derivaci funkce $y=\frac{1}{x}$ platí $y'=-\frac{1}{x^2}$ a podle vztahu (46b) určíme:

$$L=1.\int_2^3 (x+\frac{1}{x})dx+1.\int_2^3 (x-\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2}dx=\int_2^3 (x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}\right]_2^3=$$

$$=\frac{9}{2}-\frac{1}{18}-(2-\frac{1}{8})=\frac{185}{72}.$$

Úlohy k samostatnému řešení

6. Vypočítejte křivkové integrály II. druhu po křivkách k:

a) $\int_k xydx+(y-x)dy$,

$\alpha)$ k : orientovaná úsečka $\overrightarrow{OA}$, $O=(0,0)$, $A=(2,2)$,

$\beta)$ k : oblouk paraboly $y=x^2$ od bodu $O=(0,0)$ do bodu $B=(2,4)$,

$\gamma)$ k : oblouk paraboly $y^2=x$ od bodu $O=(0,0)$ do bodu $C=(1,1)$,

$\delta)$ k : oblouk kubické paraboly $y=x^3$ od bodu $O=(0,0)$ do bodu $D=(2,8)$,

b) $\int_k (x^2-y^2)dx$,

$\alpha)$ k : oblouk paraboly $y=x^2$ od bodu $O=(0,0)$ do bodu $A=(1,1)$,

$\beta)$ k : orientovaná úsečka $\overrightarrow{OA}$, $O=(0,0)$, $A=(1,1)$,

$\gamma)$ k : oblouk kubické paraboly $y=x^3$ od bodu $O=(0,0)$ do bodu $A=(1,1)$,

$\delta)$ k : oblouk paraboly $y^2=x$ od bodu $O=(0,0)$ do bodu $A=(1,1)$,

c) $\int_k \frac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$, k : orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$, $A=(1,1)$, $B=(2,2)$,

d) $\int_k (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, k : oblouk paraboly $y=x^2$ od bodu $A=(-1,1)$ do bodu $B=(1,1)$,

e) $\int_k 2xydx+x^2dy$ od bodu $O=(0,0)$ do bodu $B=(1,1)$,

α) k : úsečka $y=x$,

β) k : oblouk paraboly $y=x^2$,

γ) k : oblouk paraboly $y^2=x$,

δ) k : oblouk kubické paraboly $y=x^3$,

f) $\int_k xydx$, k : část sinusoidy $y=\sin x$, $x\in<0,\pi>$,

g) $\int_k 4x\sin^2 y\,dx+y\cos^2 2x\,dy$, k : orientovaná úsečka $\overrightarrow{OA}$, $O=(0,0)$, $A=(3,6)$,

h) $\int_k (xy+1)dy+(xy-1)dx$,

α) k : úsečka $\overrightarrow{CD}$, kde C,D jsou průsečíky přímky $2x+3y=6$ s osou y a osou x,

β) k : úsečka $\overrightarrow{AB}$, $A=(1,1)$, $B=(3,3)$,

γ) k : část paraboly $y=x^2$, $x\in<0,1>$,

δ) k : část kubické paraboly $y=x^3$, $x\in<-1,1>$,

i) $\int_k (2x+y)dx+(x+2y)dy$,

α) k : úsečka $\overrightarrow{OB}$, $O=(0,0)$, $B=(1,1)$,

β) k : část paraboly $y^2=x$ od bodu $O=(0,0)$ do bodu $B=(1,1)$,

γ) k : část hyperboly $y=\frac{2}{x}$, $x\in<\frac{1}{2},2>$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

6. a) $\alpha)\ \frac{8}{3}$, $\beta)\ \frac{20}{3}$, $\gamma)\ \frac{17}{30}$, $\delta)\ \frac{132}{5}$; **b)** $\alpha)\ \frac{2}{15}$, $\beta)\ 0$, $\gamma)\ \frac{4}{21}$, $\delta)\ -\frac{1}{6}$; **c)** $\ln 2$; **d)** $-\frac{14}{15}$;

e) $\alpha)\ 1$, $\beta)\ 1$, $\gamma)\ 1$, $\delta)\ 1$; **f)** π; **g)** 18; **h)** $\alpha)\ -4$, $\beta)\ \frac{52}{3}$, $\gamma)\ \frac{13}{20}$, $\delta)\ \frac{44}{35}$;

i) $\alpha)\ 3,\ \beta)\ 3,\ \gamma)\ -\frac{45}{4}.$

Výklad

c) **Rovinná křivka *k* je vyjádřena v polárních souřadnicích** rovnicí $\rho = \rho(\varphi),$ $\varphi \in <\alpha, \beta>.$

Použijeme transformační rovnice do polárních souřadnic (5), do kterých dosadíme $\rho = \rho(\varphi)$: $x = \rho(\varphi)\cos\varphi,\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi,\ \varphi \in <\alpha, \beta>.$

Tím jsme získali parametrické rovnice křivky k s parametrem φ a pro výpočet křivkového integrálu I. druhu, resp. II. druhu použijeme vztahy (45a), resp. (46a). Pro délkový element ds můžeme použít také vztah**,** viz [7], [9],

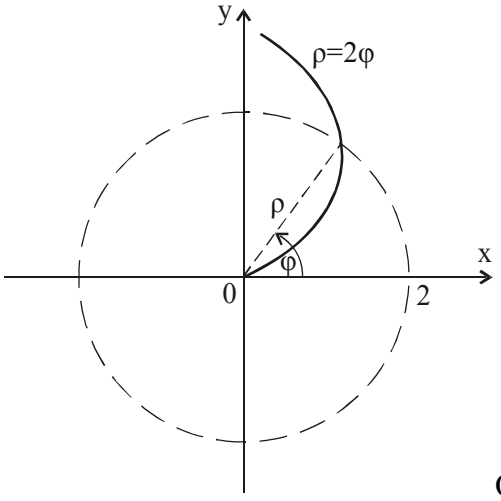
$$ds = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi, \quad \text{kde} \quad \rho'(\varphi) = \frac{d\rho(\varphi)}{d\varphi}. \tag{47c}$$

Řešené úlohy

Příklad 4.3.7. Vypočítejte integrál $M = \int_k \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,ds,$ kde k je část Archimedovy spirály $\rho = 2\varphi$ ležící uvnitř kruhu $x^2 + y^2 \le 4,$ viz obr. 37**.**

Řešení: Parametrické rovnice Archimedovy spirály mají tvar

$x = 2\varphi\cos\varphi,\ y = 2\varphi\sin\varphi.$



Obr. 37

Integrand upravíme: $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{2\varphi\sin\varphi}{2\varphi\cos\varphi} = \operatorname{arctg}\,\operatorname{tg}\varphi = \varphi.$

Vypočítáme derivaci $\rho' = 2$.

Podle vztahu (47c) platí: $ds = \sqrt{(2\varphi)^2 + 2^2}\,d\varphi = 2\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi.$

Horní mez φ je určena poloměrem kruhu, v němž spirála leží:

$\rho = 2$, tedy $2\varphi = 2$ a odtud $\varphi = 1$.

Dostaneme: $M = \int_0^1 \varphi.2\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi = \left[\frac{2}{3}(\varphi^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$

Integrál vypočítáme substitucí $\varphi^2 + 1 = t,\ 2\varphi\,d\varphi = dt$.

Úlohy k samostatnému řešení

7. Vypočítejte křivkové integrály zavedením polárních souřadnic:

a) $\int_k \frac{ds}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, k : křivka $\rho = \frac{1}{\varphi}$, $\varphi \in <1,3>$,

b) $\int_k xyds$, k : čtvrtkružnice $x^2 + y^2 = r^2$ v prvním kvadrantu,

c) $\int_k x\sqrt{x^2-y^2}\,ds$, k : polovina lemniskáty $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ pro $x \geq 0$, $a > 0$,

viz obr. 23.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

7. a) $\frac{2}{3}(5\sqrt{10}-\sqrt{2})$; **b)** $\frac{1}{2}r^3$; **c)** $\frac{2}{3}\sqrt{2}a^3$.

Poznámka

Teoreticky je tedy možno vypočítat křivkový integrál po rovinné křivce k třemi způsoby v závislosti na tvaru, v jakém vyjádříme křivku k (parametrickými rovnicemi, explicitní rovnicí, v polárních souřadnicích).

Řešené úlohy

Příklad 4.3.8. Vypočítejte integrál $N = \int_k \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$, kde k je horní polovina kružnice o poloměru r a středu v počátku soustavy souřadnic.

Řešení: a) Integrační cestu vyjádříme podle vztahu (42) parametricky:

$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \ t \in <0, \pi>$

a vypočítáme derivace $\dot{x} = -r\sin t, \ \dot{y} = r\cos t.$

Určíme podle vztahu (47a) diferenciál $ds = \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = r dt$.

Podle vztahu (45a) platí

$$N = \int_0^{\pi} \sqrt{(r\cos t)^2 + (r\sin t)^2}\, r dt = r^2 \int_0^{\pi} dt = \pi r^2.$$

b) Integrační cestu vyjádříme explicitně: $x^2 + y^2 = r^2$, tedy $y^2 = r^2 - x^2$.

Odtud pro horní polovinu kružnice platí $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in <-r, r>$.

Vypočítáme derivaci $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

a určíme podle vztahu (47b) diferenciál $ds = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx.$

Podle vztahu (45b) vypočítáme

$$N = \int_{-r}^{r} \sqrt{x^2 + r^2 - x^2}\, \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r^2 \int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r^2 \left[\arcsin \frac{x}{r} \right]_{-r}^{r} =$$

$$= r^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \pi r^2.$$

c) V polárních souřadnicích má daná půlkružnice rovnici $\rho = r, \ \varphi \in <0, \pi>$.

Tedy platí $x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi, \ \dfrac{d\rho}{d\varphi} = 0$

a podle vztahu (47c) je $ds = \sqrt{r^2 + 0^2}\, d\varphi = r d\varphi.$

Podle vztahu (45a) dostaneme $N = \int_0^{\pi} \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}\, r d\varphi = r^2 \int_0^{\pi} d\varphi = \pi r^2.$

Kontrolní otázky

1. V čem spočívá rozdíl mezi křivkovým integrálem I. a II. druhu?

   a) Integrál I. druhu závisí na orientaci křivky, integrál II. druhu nezávisí na orientaci křivky,

   b) integrál I. druhu je definován pro křivku orientovanou kladně, integrál II. druhu pro křivku orientovanou záporně,

   c) není mezi nimi rozdíl,

   d) integrál I. druhu nezávisí na orientaci křivky, integrál II. druhu závisí na orientaci křivky.

2. Který z následujících zápisů vyjadřuje obecně křivkový integrál I. druhu?

   a) $\int_k u(x,y,z) + ds$, b) $\int_k u(x,y,z)ds$,

   c) $\int_k \overline{f}(x,y,z).\overline{ds}$, d) $\int_k u(x+y+z)ds$.

3. Který z následujících zápisů vyjadřuje obecně křivkový integrál II. druhu?

   a) $\int_k \overline{f}(x,y,z) + \overline{ds}$, b) $\int_k u(x,y,z)ds$,

   c) $\int_k \overline{f}(x,y,z).\overline{ds}$, d) $\int_k u(x+y+z)ds$.

4. Podle jakého vztahu vypočítáme integrál $\int_k u(x,y,z)ds$?

   a) $\int_k u(x,y,z)ds = \int_a^b u(x(t), y(t), z(t))ds$,

   b) $\int_k u(x,y,z)ds = \int_a^b u(x(t) + y(t) + z(t))ds$,

   c) $\int_k u(x,y,z)ds = \int_a^b (x(t) + y(t) + z(t))ds$,

d) $\int_k u(x,y,z)ds = \int_a^b u(x(t), y(t), z(t))du$.

5. Podle kterého vztahu vypočítáme diferenciál *ds*?

a) $ds = \sqrt{x(t) + y(t) + z(t)}dt$,

b) $ds = \sqrt{\dot{x}(t) + \dot{y}(t) + \dot{z}(t)}dt$,

c) $ds = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}dt$,

d) $ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}dt$.

6. Jak vypočítáme křivkový integrál I. nebo II. druhu součtu funkcí?

a) Je roven součtu integrálů, b) je roven součinu integrálů,

c) je roven rozdílu integrálů, d) je roven podílu integrálů.

7. Jak se změní křivkový integrál II. druhu, zaměníme-li orientaci křivky?

a) Nezmění se, b) výsledek se zdvojnásobí,

c) má opačné znaménko, d) je roven 0.

8. Podle jakého vztahu vypočítáme integrál $\int_k \overline{F}(x,y).d\overline{s}$?

a) $\int_k \overline{F}(x,y).d\overline{s} = \int_a^b P(x(t), y(t))\dot{x}(t)dt + \int_a^b Q(x(t), y(t))\ \dot{y}(t)dt$,

b) $\int_k \overline{F}(x,y).d\overline{s} = \varepsilon\int_a^b P(x(t), y(t))\dot{x}(t)dt + \varepsilon\int_a^b Q(x(t), y(t))\ \dot{y}(t)dt$,

c) $\int_k \overline{F}(x,y).d\overline{s} = \varepsilon\int_a^b (x(t), y(t))x(t)dt + \varepsilon\int_a^b (x(t), y(t))\ y(t)dt$,

d) $\int_k \overline{F}(x,y).d\overline{s} = \varepsilon\int_a^b P(x(t) + y(t))\dot{x}(t)dt + \varepsilon\int_a^b Q(x(t) + y(t))\ \dot{y}(t)dt$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. d); 2. b); 3. c); 4. a); 5. d); 6. a); 7. c); 8. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je potřeba prostudovat kapitolu 4.3 znovu.

Kontrolní test

1. Vypočítejte integrál $\int_k (y-2z)ds$, k : úsečka AB, $A=(1,0,-1)$, $B=(-2,2,0)$.

a) $\sqrt{14}$, b) $2\sqrt{14}$,

c) $3\sqrt{14}$, d) $4\sqrt{14}$.

2. Vypočítejte integrál $\int_k (x^3-2y)ds$, k : úsečka AB, kde A, B jsou průsečíky přímky $2x+3y-6=0$ s osami souřadnic.

a) $\frac{9}{4}\sqrt{13}$, b) $\frac{9}{4}\sqrt{14}$,

c) $\frac{19}{4}\sqrt{13}$, d) $\frac{19}{4}\sqrt{14}$.

3. Vypočítejte integrál $\int_k \frac{z^4}{x^2+y^2}ds$, k : první závit šroubovice $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=t$.

a) $\frac{8}{5}\pi^5\sqrt{5}$, b) $\frac{28}{5}\pi^5\sqrt{5}$,

c) $\frac{5}{8}\pi^5\sqrt{5}$, d) $\frac{8}{3}\pi^5\sqrt{5}$.

4. Vypočítejte integrál $\int_k (x^2+y^2+z^2)ds$, $k: x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$, $t\in<0,1>$.

a) $\frac{2}{3}\sqrt{3}(e^3-1)$, b) $\frac{4}{3}\sqrt{3}(e^3-1)$,

c) $\frac{2}{5}\sqrt{3}(e^3-1)$, d) $\frac{2}{3}\sqrt{3}(e^6-1)$.

5. Vypočítejte integrál $\int_k (x+y^2)ds$, k : oblouk kružnice $x^2+y^2=9$ ve druhém kvadrantu.

a) $3(\frac{3\pi}{4}-1)$, b) $9(\frac{3\pi}{4}-2)$,

c) $9(\frac{3\pi}{4}-3)$, d) $9(\frac{3\pi}{4}-1)$.

6. Vypočítejte integrál $\int_k xdx + y^2dy + z^3dz, k:$ orientovaná úsečka $\overrightarrow{OB}$, $O=(0,0,0)$,

$B=(4,3,2)$.

a) 20, b) 21,

c) 22, d) 23.

7. Vypočítejte integrál $\int_k (x^2+y^2)dx + 2xydy, k_+:$ dolní polovina kružnice $x^2+y^2=1$.

a) $\frac{2}{5}$, b) $\frac{2}{3}$,

c) $\frac{4}{5}$, d) $\frac{4}{3}$.

8. Vypočítejte integrál $\int_k (x^2-y^2)dx, k:$ obvod trojúhelníka ABC, $A=(2,0)$, $B=(4,4)$,

$C=(0,4)$ v kladném smyslu.

a) $\frac{128}{7}$, b) $\frac{128}{5}$,

c) $\frac{128}{3}$, d) 128.

9. Vypočítejte integrál $\int_k xydx + (2y-x)dy, k_+:$ část hyperboly $y=\frac{1}{x}$, $x \in <1,2>$.

a) $\frac{1}{4}-\ln 2$, b) $\frac{1}{4}+\ln 2$,

c) $-\frac{1}{4}-\ln 2$, d) $-\frac{1}{4}+\ln 2$.

10. Vypočítejte integrál $\int_k xdx + ydy, k_-:$ část elipsy $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ v prvním kvadrantu.

a) $-\frac{7}{3}$, b) $\frac{7}{3}$,

c) $-\frac{7}{2}$, d) $\frac{7}{2}$.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. a); 4. a); 5. d); 6. b); 7. b); 8. c); 9. b); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 4.3 znovu.

Shrnutí lekce

Pro výpočet křivkových integrálů je vždy vhodné křivku vyjádřit parametricky. Pro křivkový integrál I. druhu pak platí:

$$\int_k u(x,y,z)ds = \int_a^b u(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt\,.$$

Pro křivkový integrál II. druhu pak platí:

$$\int_k \bar{F}(x,y,z).d\bar{s} = \varepsilon\int_a^b P(x(t),y(t),z(t))\dot{x}(t)dt + \varepsilon\int_a^b Q(x(t),y(t),z(t))\dot{y}(t)dt +$$

$$+\varepsilon\int_a^b R(x(t),y(t),z(t))\dot{z}(t)dt,$$

při čemž $\varepsilon = \pm 1$ v závislosti na orientaci křivky.

4.4. Greenova věta

Průvodce studiem

Výpočet křivkového integrálu II. druhu po rovinné uzavřené křivce se zjednoduší, převedeme-li ho za splnění jistých podmínek na integrál dvojrozměrný. Urychlí to výpočet zejména v případě, kdy integrační oblastí je uzavřená lomená čára. Pak musíme počítat tolik křivkových integrálů II. druhu, z kolika čar se skládá lomená čára. Použijeme-li však Greenovu větu, počítáme pouze jediný dvojrozměrný integrál.

Cíle

Cílem této kapitoly je vysvětlit výpočet křivkového integrálu II. druhu po rovinné uzavřené křivce pomocí Greenovy věty.

Předpokládané znalosti

Integrační metody (základní integrační vzorce, metoda integrace substitucí, metoda per partes).

Křivkový integrál II. druhu.

Dvojrozměrný integrál a jeho výpočet.

Analytická geometrie lineárních útvarů (obecná rovnice přímky, její směrnicový a úsekový tvar, parametrické rovnice přímky) a kvadratických útvarů v rovině (kuželosečky).

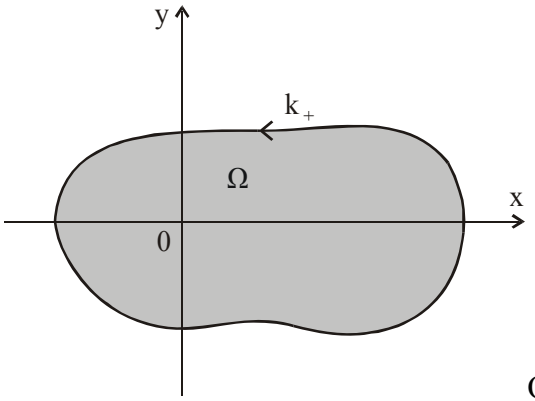
Vektorová funkce jedné a více nezávisle proměnných.

Výklad

Greenova věta vyjadřuje vztah mezi křivkovým integrálem II. druhu po uzavřené rovinné křivce a dvojrozměrným integrálem.

Definice 4.4.1.

Nechť jednoduchá uzavřená křivka k ohraničuje oblast Ω. **Křivka k je orientována kladně vzhledem k oblasti** Ω právě tehdy, když při pohybu po křivce k ve směru orientace zůstává oblast Ω stále po levé ruce, viz obr. 38.



Obr. 38

Poznámka

Je zřejmé, že orientace uzavřené křivky zavedená v definici 4.4.1 je v souladu s fyzikou:

Kladná orientace znamená pohyb proti směru hodinových ručiček, záporná orientace pohyb po směru hodinových ručiček.

Úmluva

Křivkový integrál II. druhu po uzavřené křivce označíme symbolem $\oint_k$.

Věta 4.4.1. (Greenova)

Předpoklady:

1. Nechť vektorová funkce dvou proměnných $\overline{F}(x,y) = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j}$ je spojitě diferenciabilní v oblasti Ω.
2. Nechť oblast Ω je ohraničená, rovinná a normální vzhledem k ose *x* i vzhledem k ose *y*.
3. Nechť hranicí oblasti Ω je jednoduchá hladká uzavřená křivka *k*, kladně orientovaná vzhledem k oblasti Ω.

Tvrzení:

$$\oint_k P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Omega \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right] dxdy. \qquad (48)$$

Poznámka

Je zřejmé, že Greenova věta převádí křivkový integrál II. druhu v rovině po jednoduché uzavřené křivce k na dvojrozměrný integrál po rovinné oblasti Ω, kterou křivka k ohraničuje (při splnění uvedených předpokladů).

Řešené úlohy

Příklad 4.4.1. Vypočítejte integrál $O = \oint_k (2xy - 5y)dx + (x^2 + y)dy,$ kde křivka *k* je kružnice se středem $S(0,0)$ a poloměrem *r*.

Řešení: Kruh $x^2 + y^2 \le r^2$ je rovinná oblast, která je normální vzhledem k oběma souřadnicovým osám. Kružnice *k* je jednoduchá a uzavřená, orientujeme ji kladně vzhledem k Ω.

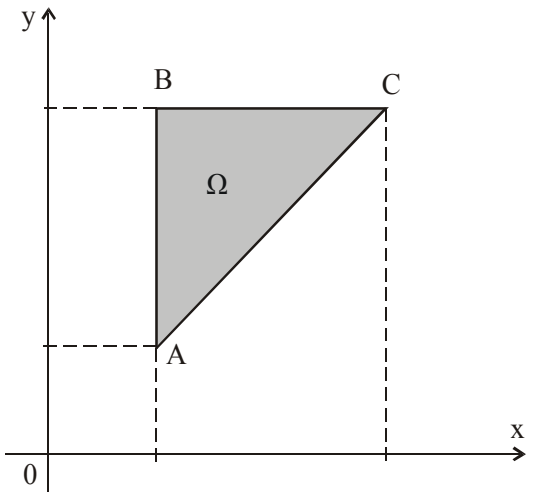
Funkce $P(x,y) = 2xy - 5y$ a $Q(x,y) = x^2 + y$ splňují podmínky Greenovy věty.

Určíme $P'_y = 2x - 5, \quad Q'_x = 2x$

a podle vztahu (48) vypočítáme $O = \iint_\Omega (2x - (2x-5))dxdy = \iint_\Omega 5dxdy = 5\,|\,\Omega\,| = 5\pi r^2.$

Příklad 4.4.2. Vypočítejte integrál $S = \oint_k (x^2 + y^2)\,dx + (x+y)^2 dy,$ jestliže křivku *k* tvoří strany trojúhelníka $ABC,\ A = (1,1), B = (1,3), C = (3,3),$ viz obr. 39.

Řešení: Všechny předpoklady Greenovy věty jsou splněny.



Obr. 39

$$P(x,y)=x^2+y^2, \qquad Q(x,y)=(x+y)^2,$$

$$P'_y=2y, \qquad Q'_x=2(x+y).$$

Vymezíme oblast Ω jako normální vzhledem k ose x: $1\le x\le 3,\ x\le y\le 3.$

Podle vztahu (48) dostaneme:

$$S=\iint_{\Omega}(2x+2y-2y)dxdy=2\iint_{\Omega}xdxdy=2\int_1^3 xdx\int_x^3 dy=2\int_1^3 xdx\,[y]_x^3=2\int_1^3(3x-x^2)dx=$$

$$=2\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^3=2\left(\frac{27}{2}-9-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{20}{3}.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočítejte křivkové integrály užitím Greenovy věty:

a) $\oint_k (x^2+y^2)dy$, k : strany obdélníka ležící na přímkách $x=0,\ y=0,\ x=2,\ y=4,$

b) $\oint_k xdy$, k : strany trojúhelníka OAB, $O=(0,0),\ A=(2,0),\ B=(0,3),$

c) $\oint_k 2ydx-(x+y)dy$, k : strany trojúhelníka, ležící na přímkách $x=0,\ y=0,\ x+2y=4,$

d) $\oint_k (x+y)dx-2xdy$, k : hranice oblasti ohraničené křivkami $x=0,\ y=0,\ x^2+y^2=4$

v prvním kvadrantu,

e) $\oint_k (x+y)dx-(x-y)dy$, k : elipsa $4x^2+9y^2=36,$

f) $\oint_k xy^2dy-x^2y\,dx$, k : kružnice $x^2+y^2=1,$

g) $\oint_k y^2dx+xdy$, $\alpha)$ k : strany čtverce ležící na přímkách $x=2,\ x=-2,\ y=2,\ y=-2,$

$\beta)$ k : kružnice $x^2+y^2=4,$

h) $\oint_k (1+xy)e^{xy}dx + x^2(1+e^{xy})dy$, k : strany obdélníka $ABCD$,

$A=(0,0), B=(2,0), C=(2,1), D=(0,1)$,

i) $\oint_k (e^x \sin y - 16y)dx + (e^x \cos y + 16)dy$, k : kružnice $x^2+y^2=2x$,

j) $\oint_k \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dx + \frac{2}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}dy$, k : hranice oblasti ohraničené křivkami

$x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=x$, $y=x\sqrt{3}$ v prvním kvadrantu.

k) $\oint_k e^x(1-\cos y)dx - e^x(y-\sin y)dy$, k : hranice oblasti $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \sin x$,

l) $\oint_k (x-y^2)dx + (x^2+y)dy$, hranice kruhové výseče o poloměru r a středovém úhlu

$\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 16; **b)** 3; **c)** -12; **d)** -3π; **e)** -12π; **f)** $\frac{\pi}{2}$; **g)** $\alpha)$ 16, $\beta)$ 4π; **h)** 4; **i)** 16π; **j)** $\frac{\pi}{12}\ln 2$;

k) $\frac{1}{5}(1-e^{\pi})$; **l)** $\frac{2}{3}r^3(\sqrt{3}-1)$.

Kontrolní otázky

1. V čem spočívá podstata Greenovy věty?
   a) Převádí křivkový integrál I. druhu na křivkový integrál II. druhu,
   b) převádí křivkový integrál II. druhu na křivkový integrál I. druhu,
   c) převádí křivkový integrál I. druhu na dvojrozměrný integrál,
   d) převádí křivkový integrál II. druhu na dvojrozměrný integrál.
2. Jaká musí být křivka k, abychom k řešení křivkového integrálu II. druhu mohli použít Greenovu větu?
   a) Uzavřená, jednoduchá, hladká, kladně orientovaná, rovinná,
   b) uzavřená, jednoduchá, hladká, kladně orientovaná,

c) uzavřená, hladká, kladně orientovaná, rovinná,

d) jednoduchá, hladká, kladně orientovaná, rovinná.

3. Jaké podmínky musí splňovat integrační oblast Ω v Greenově větě?

a) Musí být rovinná, ohraničená a normální vzhledem k ose x,

b) musí být rovinná, ohraničená a normální vzhledem k ose y,

c) musí být rovinná, ohraničená a normální vzhledem k oběma osám,

d) musí být normální vzhledem k oběma osám.

4. Jaké podmínky musí splňovat vektorová funkce $\overline{F}(X)$ v Greenově větě?

a) $\overline{F}(x,y,z)$ musí být spojitě diferenciabilní v Ω,

b) $\overline{F}(x,y,z)$ musí být spojitě diferenciabilní v $R \times R$,

c) $\overline{F}(x,y)$ musí být spojitá v Ω,

d) $\overline{F}(x,y)$ musí být spojitě diferenciabilní v Ω.

5. Jak je definována orientace uzavřené křivky k?

a) Shodně jako u křivky neuzavřené,

b) kladný směr znamená pohyb proti směru hodinových ručiček,

c) kladný směr znamená pohyb po směru hodinových ručiček,

d) záporný směr znamená pohyb proti směru hodinových ručiček.

6. Který z následujících výrazů je tvrzením Greenovy věty?

a) $\oint_k P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Omega \left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \right] dxdy$,

b) $\oint_k P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Omega \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right] dxdy$,

c) $\oint_k P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Omega \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} \right] dxdy$,

d) $\oint_k P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Omega \left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right] dxdy$.

7. Splňuje křivka tvaru ∞ podmínky Greenovy věty?

a) Ano,

b) ne, není jednoduchá a orientovaná,

c) ne, není jednoduchá,

d) ne, není orientovaná.

8. Co musíme doplnit na křivce tvaru O , aby splňovala podmínky Greenovy věty?

a) Nic,

b) orientaci po směru hodinových ručiček,

c) musíme ji rozdělit na levou a pravou část,

d) orientaci proti směru hodinových ručiček.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. d); 2. a); 3. c); 4. d); 5. b); 6. b); 7. b); 8. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je potřeba prostudovat kapitolu 4.4 znovu.

Kontrolní test

1. Vypočítejte integrál $\oint_k (x-y)dx+(x+y)dy,\ k_+ :\ x^2+y^2=36$.

a) 9π , b) 18π ,

c) 36π , d) 72π .

2. Vypočítejte integrál $\oint_k (x-2y^3)dy,\ k_+$:strany ΔABC , který je ohraničen přímkami

$2x+3y-6=0,\ x=0,\ y=0$.

a) 3, b) 6,

c) 9, d) 12.

3. Vypočítejte integrál $\oint_k (x-y^2)dy-(x^2+y)dx,\ k_+ :\ x=2\cos t,\ y=2\sin t$.

a) 9π , b) 8π ,

c) 7π , d) 6π .

4. Vypočítejte integrál $\oint_k xy^2dx+(x^2+y^2)dy,\ k_+$: strany obdélníka ležící na přímkách

$x=1,\ y=2,\ x=4,\ y=3$.

a) $\frac{42}{5}$, b) $\frac{42}{5}$,

c) $-\frac{42}{5}$, d) $-\frac{45}{2}$.

5. Vypočítejte integrál $\oint_k y^2dx+x^2dy,\ k_+ :$ hranice oblasti, která je ohraničena křivkami

$y=\frac{1}{x},\ x=2,\ x=4,\ y=0$.

a) $\frac{5}{4}$, b) $\frac{15}{8}$,

c) $\frac{15}{4}$, d) $\frac{17}{4}$.

6. Vypočítejte integrál $\oint_k x^2dx+y^2dy,\ k_+ :$ hranice oblasti, která je ohraničena křivkami

$y=\ln x,\ x=0,\quad y=e$.

a) 0, b) e ,

c) $\ln 2$, d) e^2 .

7. Vypočítejte integrál $\int_k (y^2-2x^2)dx+2xydy,\ k_+ :$ asteroida $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ a>0$.

a) $\frac{4}{5}$, b) 0,

c) $\frac{4}{7}$, d) $\frac{4}{3}$.

8. Vypočítejte integrál $\oint_k (x^2 - y^2)dx$, k : obvod trojúhelníka ABC, $A = (2,0)$, $B = (4,4)$, $C = (0,4)$ v kladném smyslu.

a) $\frac{128}{7}$, b) $\frac{128}{5}$,

c) $\frac{128}{3}$, d) 128.

9. Vypočítejte integrál $\oint_k xydx - (2y - x^2)dy$, k_+ : hranice menší z oblastí $y = \sqrt{16 - x^2}$, $y = 0$, $y = x$.

a) $\frac{64\sqrt{2}}{3}$, b) $\frac{34\sqrt{2}}{3}$,

c) $\frac{30\sqrt{2}}{3}$, d) $\frac{32\sqrt{2}}{3}$.

10. Vypočítejte integrál $\int_k xdy - ydx$, k_+ : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

a) 24π, b) 12π,

c) 6π, d) 3π.

Výsledky testu

1. d); 2. a); 3. b); 4. d); 5. c); 6. a); 7. b); 8. c); 9. d); 10. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 4.4 znovu.

Shrnutí lekce

Křivkový integrál II. druhu po uzavřené rovinné křivce k_+ můžeme za splnění určitých dalších podmínek snadno vypočítat tak, že jej převedeme podle Greenovy věty (věta 4.4.1) na dvojrozměrný integrál po oblasti Ω. Tato oblast Ω musí být ohraničená křivkou k_+ a musí být normální vzhledem k oběma souřadnicovým osám. Integrovaná funkce

$\bar{F}(x,y) = P(x,y)\bar{i} + Q(x,y)\bar{j}$ musí být v oblasti Ω spojitá a musí v ní mít spojité parciální derivace.

Pak platí $\oint_k P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Omega \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right] dxdy$.

Pokud nechceme použít k výpočtu Greenovu větu, můžeme postupovat metodami uvedenými v kapitole 4.3.

4.5. Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě

Průvodce studiem

Další metodu výpočtu křivkového integrálu II. druhu lze použít v případě, kdy hodnota integrálu nezávisí na tvaru integrační křivky, ale pouze na jejím počátečním a koncovém bodě. Nezávislost na tvaru integrační křivky je vlastností integrované funkce, která musí splňovat určité podmínky. Jaké podmínky to jsou a jakým způsobem pak křivkový integrál II. druhu vyřešíme, si ukážeme v této kapitole.

Cíle

Cílem této kapitoly je objasnit pojem nezávislosti křivkového integrálu II. druhu na integrační cestě a ukázat, jak v takovém případě integrál můžeme vypočítat.

Předpokládané znalosti

Integrační metody (základní integrační vzorce, metoda integrace substitucí, metoda per partes).

Křivkový integrál II. druhu.

Vektorová analýza.

Totální diferenciál funkce více proměnných.

Výklad

Definice 4.5.1.

Nechť je oblast Ω, v níž leží dva různé body A, B, ohraničena jednoduchou uzavřenou křivkou. Nechť vektorová funkce $\overline{F}(X) = P(X)\overline{i} + Q(X)\overline{j} + R(X)\overline{k}$ je spojitá v oblasti Ω. Pak platí:

1. Jestliže hodnota křivkového integrálu II. druhu

$$\int_k \overline{F}(X).d\overline{s} = \int_k P(X)dx + Q(X)dy + R(X)dz$$

nezávisí na tvaru křivky k, ležící v oblasti Ω a spojující body A, B, říkáme, že tento **integrál nezávisí na integrační cestě mezi body *A, B***.

2. Platí-li to pro libovolné dva body A, B z oblasti Ω, říkáme, že tento **integrál nezávisí na integrační cestě v oblasti Ω.**

Věta 4.5.1.

Nechť je vektorová funkce $\overline{F}(X) = P(X)\overline{i} + Q(X)\overline{j} + R(X)\overline{k}$ spojitě diferenciabilní v oblasti Ω, v níž leží hladká křivka k s počátečním bodem A a koncovým bodem B. Pak platí:

1. Křivkový integrál

$$\int_k \overline{F}(X).d\overline{s} = \int_k P(X)dx + Q(X)dy + R(X)dz$$

nezávisí na integrační cestě v oblasti Ω právě tehdy, když

Pfaffova forma $P(X)dx + Q(X)dy + R(X)dz$

je totálním diferenciálem kmenové funkce $\phi(X)$,

to je právě tehdy, když vektorové pole $\overline{F}(X)$ je potenciálové (kapitola 3.3),

to je právě tehdy, když vektorové pole $\overline{F}(X)$ je nevírové, tedy $rot\ \overline{F}(X) = \overline{o}$ (věta 3.3.1.).

2. Křivkový integrál je v takovém případě roven rozdílu funkčních hodnot kmenové funkce $\phi(x, y, z)$ v koncovém a počátečním bodě:

$$\int_k \overline{F}(X).d\overline{s} = \int_k P(X)dx + Q(X)dy + R(X)dz = \phi(B) - \phi(A). \qquad (49)$$

3. Je-li křivka k uzavřená $(A \equiv B)$, pak

$$\oint_k \overline{F}(X).d\overline{s} = \phi(B) - \phi(B) = 0. \qquad (50)$$

4. Pro kmenovou funkci $\phi(x, y, z)$ platí vztahy:

- v prostoru:

$$\phi(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y, z)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t, z)dt + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, t)dt, \qquad (51)$$

kde (x_0, y_0, z_0) je libovolný pevně zvolený bod oblasti Ω,

- v rovině

$$\phi(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(t,y)dt+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt, \qquad (52a)$$

případně

$$\phi(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt, \qquad (52b)$$

kde (x_0,y_0) je libovolný pevně zvolený bod oblasti Ω.

Poznámky

1. Druhé tvrzení předchozí věty můžeme vyjádřit také takto: ***Křivkový integrál z totálního diferenciálu je roven rozdílu kmenové funkce v koncovém a počátečním bodě křivky****.*

2. Pro uzavřenou křivku k platí: ***Křivkový integrál z totálního diferenciálu po uzavřené křivce je vždy roven nule****. Toto tvrzení vyplývá ze skutečnosti, že v případě uzavřené křivky počáteční a koncový bod splývají.*

3. Připomeňme si, že při studiu funkce dvou proměnných jsme dokázali, že nutnou a postačující podmínkou pro to, aby výraz $d\phi(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ byl totálním diferenciálem kmenové funkce $\phi(x,y)$ v oblasti Ω, je platnost vztahu:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \qquad v\ \Omega, \qquad (53)$$

viz [4], [7].

Řešené úlohy

Příklad 4.5.1. Vypočítejte integrál $T=\int_k y^3dx+3xy^2dy$ od bodu $A(1,1)$ do bodu $B(3,2)$.

Řešení: Určíme funkce $P(x,y)$, $Q(x,y)$ a vypočítáme příslušné derivace:

$$P(x,y)=y^3, \qquad Q(x,y)=3xy^2,$$
$$P'_y=3y^2, \qquad Q'_x=3y^2.$$

Výraz $y^3dx+3xy^2dy$ je podle vztahu (53) totálním diferenciálem kmenové funkce,

kterou určíme podle vztahu (52a), přičemž za bod (x_0, y_0) zvolíme počátek soustavy souřadnic $(0,0)$. Dostaneme:

$$\phi(x,y) = \int_0^x y^3 dt + \int_0^y 3.0.t^2 dt = y^3 \left[t\right]_0^x + 0 = xy^3 + C.$$

Křivkový integrál nezávisí na integrační cestě a podle vztahu (49) platí

$$T = \phi(3,2) - \phi(1,1) = 3.2^3 - 1.1^3 = 23.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. K totálnímu diferenciálu určete kmenovou funkci podle vztahů (35a) nebo (35b):

a) $d\phi(x,y) = (3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy,$

b) $d\phi(x,y) = (12x^2 y + \frac{1}{2})dx + (4x^3 - \frac{2x}{3})dy,$

c) $d\phi(x,y) = (4x^3 - xy^2)dx + (4y^3 - x^2 y)dy,$

d) $d\phi(x,y) = (x\cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y\, dy,$

e) $d\phi(x,y) = 3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)dy,$

f) $d\phi(x,y) = (2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy,$

g) $d\phi(x,y) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$

h) $d\phi(x,y) = \cos x \cos y dx - \sin y(\sin x + 4\cos y)dy,$

i) $d\phi(x,y) = 4(x^2 - y^2)(xdx - ydy),$

j) $d\phi(x,y) = (2x\cos y - y^2 \sin x)dx + (2y\cos x - x^2 \sin y)dy.$

2. Vypočítejte křivkové integrály po křivce k s počátečním bodem A a koncovým bodem B:

a) $\int_k 2xydx + x^2 dy,\ A = (0,0),\ B = (1,4),$

b) $\int_k \arcsin y\, dx + \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} dy,\ A = (0,0),\ B = (2,0),$

c) $\int_k y\,dx + x\,dy,\ A=(1,2),\ B=(2,3),$

d) $\int_k \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2},\ A=(2,2),\ B=(3,4),$

e) $\int_k \frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy,\ A=(1,2),\ B=(2,1),$

f) $\int_k 2y\sin 2x\,dx - \cos 2x\,dy,\ \ A=(\frac{\pi}{6},1),\ B=(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}),$

g) $\int_k (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y)\,dx + (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x)\,dy,\ \ A=(1,2),\ B=(3,4),$

h) $\int_k (2y-6xy^3)dx + (2x-9x^2y^2)dy,\ A=(1,1),\ B=(4,1),$

i) $\int_k (2x+3y)dx + (3x-4y)dy,\ A=(0,0),\ B=(2,5).$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\phi(x,y) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + C;$

b) $\phi(x,y) = 4x^3y + \frac{x}{y^2} + C;$

c) $\phi(x,y) = x^4 - \frac{x^2y^2}{2} + y^4 + C;$

d) $\phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2\cos 2y + x + C;$

e) $\phi(x,y) = x^3e^y - y + C;$

f) $\phi(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C;$

g) $\phi(x,y) = e^{xy} + x^2 + y + C;$

h) $\phi(x,y) = \sin x\cos y + \cos 2y + C;$

i) $\phi(x,y) = (x^2-y^2)^2 + C;$

j) $\phi(x,y) = x^2\cos y + y^2\cos x + C.$

2. a) 4; **b)** 0; **c)** 4; **d)** $\frac{1}{2}\ln\frac{25}{8}$; **e)** $\frac{3}{2}$; **f)** $\frac{1}{2}$; **g)** $15-\sqrt{5}$; **h)** –39; **i)** –16.

Řešené úlohy

Příklad 4.5.2. Vypočítejte integrál $U = \oint_k x^2 dx + y^2 dy$ po uzavřené křivce *k,* kterou je kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.

Řešení: Určíme funkce $P(x, y)$, $Q(x, y)$ a vypočítáme příslušné derivace:

$$P(x, y) = x^2, \qquad Q(x, y) = y^2,$$
$$P'_y = 0, \qquad Q'_x = 0.$$

Podle vztahu (53) je Pfaffova forma $x^2 dx + y^2 dy$ totálním diferenciálem jisté kmenové funkce $\phi(x, y)$ a křivkový integrál nezávisí na integrační cestě. Křivka *k* je uzavřená a tedy podle vztahu (20) platí $U = 0$.

Úlohy k samostatnému řešení

3. Ověřte, zda se křivkové integrály po uzavřené křivce *k* rovnají 0:

a) $\oint_k (x - y)dx + (y - x)dy,$

b) $\oint_k (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy,$

c) $\oint_k (\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4})dx - \frac{2y}{x^3}dy, \; x \neq 0,$

d) $\oint_k (2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{y^2})dx + (2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3})dy, \; x \neq 0, \; y \neq 0,$

e) $\oint_k xye^x dx + (x - 1)e^x dy,$

f) $\oint_k 2x \ln y \, dx + \frac{x^2}{y}dy, \; y > 0,$

g) $\oint_k x^3 dx + y^3 dy.$

Řešené úlohy

Příklad 4.5.3. Určete kmenovou funkci k totálnímu diferenciálu

$$d\phi(x,y,z) = (3x^2+3yz)dx + (3y^2+3xz+2y+2z)dy + (3z^2+3xy+2y+2z)dz.$$

Řešení: Zvolíme za pevný bod počátek soustavy souřadnic $O=(0,0,0)$.

$$P(x,y,z) = 3x^2+3yz, \qquad P(t,y,z) = 3t^2+3yz,$$
$$Q(x,y,z) = 3y^2+3xz+2y+2z, \qquad Q(0,t,z) = 3t^2+0+2t+2z,$$
$$R(x,y,z) = 3z^2+3xy+2y+2z, \qquad R(0,0,z) = 3t^2+0+0+2t.$$

Podle vztahu (51) platí:

$$\phi(x,y,z) = \int_0^x (3t^2+3yz)dt + \int_0^y (3t^2+2t+2z)dt + \int_0^z (3t^2+2t)dt = \Big[t^3+3yzt\Big]_0^x +$$

$$+\Big[t^3+t^2+2zt\Big]_0^y + \Big[t^3+t^2\Big]_0^z = x^3+3xyz+y^3+y^2+2yz+z^3+z^2+C.$$

Úlohy k samostatnému řešení

4. K totálnímu diferenciálu určete kmenovou funkci:

a) $d\phi(x,y,z) = (x^2+yz)dx + (y^2+xz)dy + (z^2+xy)dz,$

b) $d\phi(x,y,z) = (x^2-2yz)dx + (y^2-2xz)dy + (z^2-2xy)dz,$

c) $d\phi(x,y,z) = xdx + ydy + zdz,$

d) $d\phi(x,y,z) = \dfrac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \ (x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0),$

e) $d\phi(x,y,z) = \dfrac{yzdx+xzdy+xydz}{1+x^2y^2z^2},$

f) $d\phi(x,y,z) = \dfrac{dx+dy+dz}{x+y+z}, \ x+y+z>0,$

g) $d\phi(x,y,z) = \dfrac{1}{z}dx - \dfrac{3}{z}dy + \left(\dfrac{3y-x}{z^2}+z\right)dz, \ z \neq 0.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

4. a) $\phi(x,y,z)=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)+xyz+C;$ **b)** $\phi(x,y,z)=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C;$

c) $\phi(x,y,z)=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)+C;$ **d)** $\phi(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C;$

e) $\phi(x,y,z)=\operatorname{arctg} xyz+C;$ **f)** $\phi(x,y,z)=\ln|x+y+z|+C;$

g) $\phi(x,y,z)=\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}+C.$

Řešené úlohy

Příklad 4.5.4. Vypočítejte integrál $V=\int_k (2x+yz)dx+(xz+z^2)dy+(xy+2yz)dz$ od bodu $A=(1,1,1)$ do bodu $B=(1,2,3).$

Řešení: Určíme funkce $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ a potřebné derivace:

$$P=2x+yz,\quad Q=xz+z^2,\quad R=xy+2yz,$$
$$P'_y=z,\quad Q'_x=z,\quad R'_x=y,$$
$$P_z{}'=y,\quad Q'_z=2z+x,\quad R'_y=2z+x.$$

Platí tedy $P'_y=Q'_x\wedge P'_z=R'_x\wedge Q'_z=R'_y$ a tedy $rot\,\overline{F}=\overline{o}$. Podle věty 4.5.1 jde o integrál nezávislý na integrační cestě. Zvolíme pevný bod (0,0,0) a určíme kmenovou funkci podle vztahu (51):

$$P(t,y,z)=2t+yz,\ Q(0,t,z)=z^2,\ R(0,0,t)=0$$

$$\phi(x,y,z)=\int_0^x(2t+yz)dt+\int_0^y z^2dt+\int_0^z 0dt=x^2+xyz+yz^2+C.$$

Podle vztahu (49) platí

$$V=\phi(B)-\phi(A)=\left[x^2+xyz+yz^2\right]_A^B==(1^2+1.2.3+2.3^2)-(1^2+1.1.1+1.1^2)=22.$$

Úlohy k samostatnému řešení

5. Vypočítejte křivkové integrály po křivce k z bodu A do bodu B:

a) $\int_k yzdx + xzdy + xydz,\ A = (2,2,2),\ B = (2,3,4),$

b) $\int_k xdx + y^2dy - z^3dz,\ A = (1,1,1),\ B = (2,3,2),$

c) $\oint_k e^{x^2+y^2+z^2}(xdx + ydy + zdz),$

d) $\int_k (1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z})dx + (\frac{1}{z} + \frac{1}{y^2})xdy - \frac{xy}{z^2}dz,\ y \neq 0,\ z \neq 0,\ A = (0,1,1),\ B = (1,1,1),$

e) $\int_k \frac{xzdy + xydz - yzdx}{(x - yz)^2},\ x \neq yz,\ A = (1,2,3),\ B = (1,3,1),$

f) $\int_k yzdx + (2 + xz)dy + (xy - 1)dz,\ A = (1,1,1),\ B = (2,2,2).$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5. a) 16; **b)** $\frac{77}{12}$; **c)** 0; **d)** 1; **e)** $-\frac{3}{10}$; **f)** 8.

Kontrolní otázky

1. Pro který integrál má význam nezávislost na integrační cestě?
   a) Pro určitý integrál,
   b) pro neurčitý integrál,
   c) pro křivkový integrál I. druhu,
   d) pro křivkový integrál II. druhu.
2. V čem spočívá podstata nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě mezi body A a B, které leží v oblasti Ω?
   a) Hodnota integrálu je stejná pro všechny křivky, které leží v oblasti Ω a po kterých se dostaneme od bodu A k bodu B,

b) hodnota integrálu je stejná pro všechny křivky, po kterých se dostaneme od bodu A k bodu B,

c) hodnota integrálu je stejná pro všechny křivky, které leží v oblasti Ω,

d) hodnota integrálu je stejná pro skoro všechny křivky, které leží v oblasti Ω a po kterých se dostaneme od bodu A k bodu B,

3. Kdy nezávisí křivkový integrál $\int_k \overline{F}(X).d\overline{s}$ na integrační cestě?

a) Jestliže integrační křivka k je uzavřená,

b) jestliže integrační křivka k je rovinná,

c) jestliže vektorové pole $\overline{F}(X)$ je potenciálové,

d) jestliže vektorové pole $\overline{F}(X)$ je nezřídlové.

4. Kdy je vektorové pole $\overline{F}(X)$ je potenciálové?

a) Jestliže má zřídla,

b) jestliže nemá zřídla,

c) jestliže tvoří víry,

d) jestliže netvoří víry.

5. Čemu se rovná křivkový integrál z totálního diferenciálu?

a) Rozdílu hodnot kmenové funkce v počátečním a koncovém bodě křivky,

b) rozdílu hodnot kmenové funkce v koncovém a počátečním bodě křivky,

c) aritmetickému průměru hodnot kmenové funkce v koncovém a počátečním bodě křivky,

d) vždy je to 0.

6. Co je výsledkem křivkového integrál z totálního diferenciálu, jestliže je křivka k uzavřená?

a) Rozdíl hodnot kmenové funkce v počátečním a koncovém bodě křivky,

b) geometrický průměr hodnot kmenové funkce v koncovém a počátečním bodě křivky,

c) aritmetický průměr hodnot kmenové funkce v koncovém a počátečním bodě křivky,

d) vždy je to 0.

7. Je dána vektorová funkce $\overline{F}(X) = P(X)\overline{i} + Q(X)\overline{j} + R(X)\overline{k}$ a výraz

$P(X)dx + Q(X)dy + R(X)dz$ je totálním diferenciálem kmenové funkce $\phi(X)$.

Rozhodněte, který z následujících zápisů je nesprávný, je-li bod A počátečním a bod B koncovým bodem křivky k.

a) $\int_k P(X)dx + Q(X)dy + R(X)dz = \phi(A) - \phi(B)$,

b) $\int_k \bar{F}(X).d\bar{s} = \int_k P(X)dx + Q(X)dy + R(X)dz$,

c) $\int_k \bar{F}(X).d\bar{s} = \phi(B) - \phi(A)$,

d) $\int_k \bar{F}(X).d\bar{s} = \int_k P(X)dx + Q(X)dy + R(X)dz = \phi(B) - \phi(A)$.

8. Jakou podmínku musí splňovat vektorová funkce $\bar{F}(x,y) = P(x,y)\bar{i} + Q(x,y)\bar{j}$, aby integrál $\oint_k P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ byl roven 0?

a) $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial x}$,

b) $\frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial Q^2(x,y)}{\partial x^2}$,

c) $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$,

d) je roven 0 vždy.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. d); 2. a); 3. c); 4. d); 5. b); 6. d); 7. a); 8. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je potřeba prostudovat kapitolu 4.5 znovu.

Kontrolní test

1. K totálnímu diferenciálu $d\phi(x,y) = 2\cos 2x \cos 3y\, dx - 3\sin 2x \sin 3y\, dy$ určete kmenovou funkci.

a) $\phi(x,y) = \cos 2x \cos 3y + C$,

b) $\phi(x,y) = \sin 2x \sin 3y + C$,

c) $\phi(x,y) = \sin 2x \cos 3y + C$,

d) $\phi(x,y) = \cos 2x \sin 3y + C$.

2. K totálnímu diferenciálu $d\phi(x,y,z) = e^{xyz}(yzdx + xzdy + xydz)$ určete kmenovou funkci.

a) $\phi(x,y,z) = e^x e^y e^z + C$,

b) $\phi(x,y,z) = xyze^{xyz} + C$,

c) $\phi(x,y,z) = e^{x+y+z} + C$,

d) $\phi(x,y,z) = e^{xyz} + C$.

3. Vypočítejte křivkový integrál $\int_k 2x \arcsin 2y\, dx + \frac{2x^2}{\sqrt{1-4y^2}} dy$ po křivce k s počátečním bodem $A = (3,0)$ a koncovým bodem $B = (4, \frac{1}{2})$.

a) 9π, b) 8π,

c) 7π, d) 6π.

4. Vypočítejte křivkový integrál $\int_k \frac{1}{x+2y+3z} dx + \frac{2}{x+2y+3z} dy + \frac{3}{x+2y+3z} dz$ po křivce k s počátečním bodem $A = (0,1,0)$ a koncovým bodem $B = (1,0,1)$.

a) $\ln 16$, b) $\ln 8$,

c) $\ln 4$, d) $\ln 2$.

5. Vypočítejte křivkový integrál $\int_k \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{1+y^2} dy + \frac{1}{1+z^2} dz$ po křivce k s počátečním bodem $O = (0,0,0)$ a koncovým bodem $A = (1,1,1)$.

a) $\frac{7\pi}{4}$, b) $\frac{3\pi}{4}$,

c) $\frac{5\pi}{4}$, d) 0.

6. Vypočítejte křivkový integrál $\oint_k e^{x+y+z}(dx + dy + dz)$ po křivce k, která je určena rovnicemi $x^2 + y^2 = 6,\ z = 2.$

a) 0, b) 2,

c) 4, d) 6.

7. Vypočítejte křivkový integrál $\oint_k \frac{y^2}{\cos^2 x}\,dx + 2y\,\mathrm{tg}\,x\,dy$ po křivce k, která je určena rovnicí

$2x^2 + 3y^2 = 6.$

a) 0, b) 20,

c) 40, d) 60.

8. Vypočítejte křivkový integrál $\int_k \frac{y}{x^2}\,dx - \frac{1}{x}\,dy$ po křivce k s počátečním bodem $A = (1,2)$ a koncovým bodem $B = (2,1)$.

a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{3}{2}$,

c) $\frac{5}{2}$, d) 0.

9. Vypočítejte křivkový integrál $\int_k \cos xyz(yzdx + xzdy + xydz)$ po křivce

$k_+ : x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = t,\ t \in <0, \frac{\pi}{4}>.$

a) $-\pi$, b) 1,

c) -1, d) 0.

10. Vypočítejte křivkový integrál $\int_k e^{x^2+y^2}(2xdx + 2ydy)$ po křivce

$k_+ : x = 2\cos t,\ y = 3\sin t,\ t \in <0, \frac{\pi}{2}>.$

a) e^9, b) $e^9 + e^4$,

c) e^4, d) $e^9 - e^4$.

Výsledky testu

1. c); 2. d); 3. b); 4. d); 5. b); 6. a); 7. a); 8. b); 9. b); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 4.5 znovu.

Shrnutí lekce

Křivkový integrál II. druhu v rovině nebo v prostoru můžeme počítat efektivním způsobem, pokud nezávisí na tvaru křivky k v oblasti Ω. To nastane právě tehdy, když vektorová funkce $\bar{F}(X)$ vytváří potenciálové vektorové pole v oblasti Ω, tedy nevírové vektorové pole v oblasti Ω ($rot\ \bar{F}(X) = \bar{o}$).

Křivkový integrál II. druhu je pak roven rozdílu hodnot kmenové funkce v koncovém a počátečním bodě křivky:

$$\int_k \bar{F}(X).d\bar{s} = \int_k P(X)dx + Q(X)dy + R(X)dz = \phi(B) - \phi(A).$$

Stačí tedy určit kmenovou funkci, viz vztahy (51, 52a,b).

Je-li křivka k navíc uzavřená, rovná se křivkový integrál z totálního diferenciálu vždy 0, protože koncový a počáteční bod splývají:

$$\oint_k \bar{F}(X).d\bar{s} = \phi(B) - \phi(B) = 0.$$

4.6. Aplikace křivkového integrálu

Průvodce studiem

Dosud jsme se naučili počítat křivkový integrál I. a II. druhu, aniž jsme věděli, k čemu nám získané znalosti budou užitečné. V této kapitole si ukážeme, proč jsme vlastně křivkové integrály studovali. Poznáme jejich využití v geometrii při výpočtu metrických úloh a při výpočtu fyzikálních veličin, které charakterizují hmotné útvary, u nichž významně převažuje jeden rozměr nad ostatními (dráty, hadice, …). Velmi významnou aplikací křivkového integrálu ve fyzice je výpočet mechanické práce.

Cíle

V této kapitole se naučíme využívat křivkové integrály v geometrii a ve fyzice či mechanice. Poznáme, jak vypočítat délku křivky, obsah válcové plochy s řídící křivkou k a obsah rovinné oblasti, která je ohraničena křivkou k pomocí křivkových integrálů. Využijeme křivkové integrály pro výpočet mechanické práce, hmotnosti a souřadnic těžiště hmotných křivek a také k určení statických momentů a momentů setrvačnosti hmotných křivek.

Předpokládané znalosti

Využijeme všechny poznatky, které jsme získali v předchozích kapitolách:

Integrační metody (základní integrační vzorce, metoda integrace substitucí, metoda per partes), výpočet určitého integrálu (Newton – Leibnizova věta).

Dvojrozměrný integrál a jeho výpočet.

Analytická geometrie lineárních útvarů (obecná rovnice přímky, její směrnicový a úsekový tvar, parametrické rovnice přímky) a kvadratických útvarů v rovině (kuželosečky).

Analytická geometrie lineárních útvarů v prostoru.

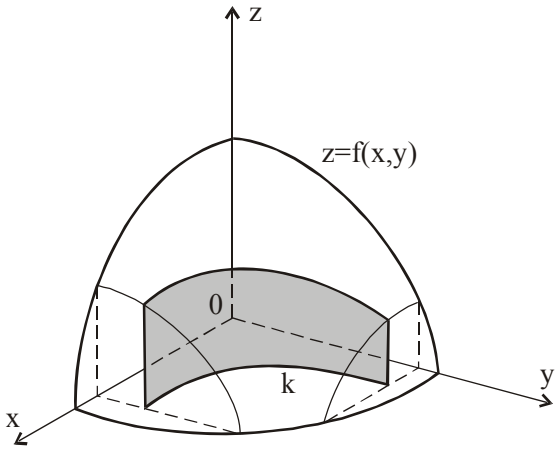
Vektorová funkce jedné a více nezávisle proměnných.

4.6.1. Obsah válcové plochy

Výklad

Nechť je funkce $f(x,y) \geq 0$ spojitá v oblasti Ω, v níž leží jednoduchá hladká křivka k. V každém bodě křivky k veďme rovnoběžku s osou z až po její průsečík s plochou o rovnici $z = u(x,y)$, viz obr. 40. Pro **obsah části** takto sestrojené **válcové plochy mezi rovinou** $z = 0$ **a plochou** $z = u(x,y)$ platí

$$S = \int_k u(x,y)ds. \tag{54}$$



Obr. 40

Vztah (37) určuje geometrický význam křivkového integrálu I. druhu.

Řešené úlohy

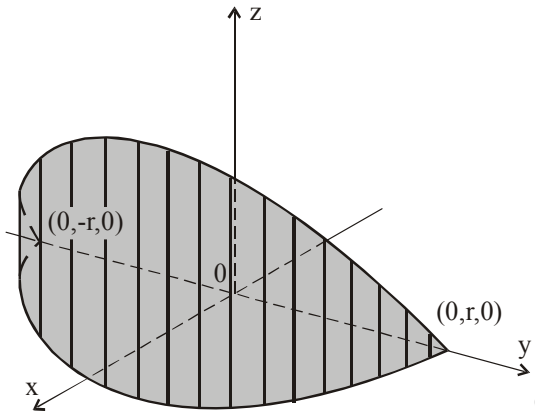
Příklad 4.6.1. Určete obsah části válcové plochy $x^2 + y^2 = r^2$, která je ohraničena rovinami $z = 0$ a $z = x$ v prvním a čtvrtém oktantu, viz obr. 41.

Řešení: Řídicí křivku k (je jí kružnice $x^2 + y^2 = r^2$) válcové plochy vyjádříme podle vztahu (42) parametrickými rovnicemi $x = r\cos t,\ y = r\sin t,$

určíme derivace $\dot{x} = -r\sin t,\ \dot{y} = r\cos t$

a podle vztahu (47a) vypočítáme diferenciál

$ds = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\,dt = rdt.$



Obr. 41

V prvním a čtvrtém oktantu má parametr t hodnoty: $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Dosazením do vztahu (54) dostaneme:

$$S = \int_k x\,ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos t\, r\,dt = r^2 \left[\sin t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2r^2.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočítejte obsah částí válcových ploch, ohraničených rovinou $z = 0$ a danými plochami:

a) $x^2 + y^2 = r^2,\ 2rz = xy,\ r > 0,$

b) $x^2 + y^2 = r^2,\ z = r + \frac{x^2}{r}, r > 0,$

c) $9y^2 = 4(x-1)^3,\ z = 2 - \sqrt{x},$

d) $y^2 = 2x,\ z = \sqrt{2x - 4x^2},$

e) $y = \sqrt{2x}, x = \frac{8}{9},\ z = y,$

f) $y = \frac{3}{8}x^2, z = x, x = 0, y = 6.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) r^2; **b)** $3\pi r^2$; **c)** $\frac{11}{3}$; **d)** $\frac{1}{4}\pi$; **e)** $\frac{98}{81}$; **f)** $\frac{16}{27}(10\sqrt{10} - 1)$.

4.6.2. Délka křivky

Výklad

Nechť je definována jednoduchá, po částech hladká křivka k.

Délka křivky k je dána vztahem

$$L = \int_k ds. \tag{55}$$

Vztah (55) pochopíme, jestliže si uvědomíme, že hodnota L je číselně rovna obsahu válcové plochy nad křivkou k, která je ohraničena rovinami $z = 0, z = 1,$ tj. má výšku rovnu 1 (ve vztahu (54) dosadíme $u(x, y) = 1$: $L = S = \int_k 1 ds = \int_k ds$).

Řešené úlohy

Příklad 4.6.2. Odvoďte vztah pro výpočet délky kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.

Kružnici vyjádříme podle vztahu (42) parametrickými rovnicemi

$x = r\cos t,\ \ y = r\sin t,\ \ t \in < 0, 2\pi)$.

Vypočítáme derivace $\dot{x} = -r\sin t,\ \dot{y} = r\cos t$

a podle vztahu (47a) určíme diferenciál

$$ds = \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = \sqrt{r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt = r dt.$$

Dosadíme do vztahu (55) a dostaneme:

$$L = \int_0^{2\pi} r dt = r\left[t\right]_0^{2\pi} = 2\pi r.$$

Úlohy k samostatnému řešení

2. Vypočítejte délku křivek:

a) Prvního oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ a > 0,$

b) kardioidy $x = 2a\cos t - a\cos 2t,\ y = 2a\sin t - a\sin 2t,\ a > 0,$

c) $x = 2 - \frac{1}{4}t^4$, $y = \frac{1}{6}t^6$ mezi průsečíky se souřadnicovými osami,

d) $y = \frac{1}{2}\ln x$, $z = \frac{1}{2}x^2$, $x \in <1,2>$,

e) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$, $t \in <0,1>$,

f) $y = \frac{1}{2}x^2$, $z = \frac{1}{6}x^3$, $x \in <0,1>$,

g) $y = \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, $x \in <0,1>$,

h) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x$, $x \in <-1,1>$,

i) $\rho = 2a\cos\varphi$, $\varphi \in <-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}>$, $a > 0$,

j) $y = 1 - \ln\cos x$, $x \in <0, \frac{\pi}{4}>$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. a) $8a$; **b)** $16a$; **c)** $\frac{13}{3}$; **d)** $\frac{1}{2}(3 + \ln 2)$; **e)** $e - \frac{1}{e}$; **f)** $\frac{7}{6}$; **g)** 2; **h)** 4; **i)** $2\pi a$; **j)** $\ln(1 + \sqrt{2})$.

4.6.3. Obsah rovinné oblasti

Výklad

Nechť k je jednoduchá, uzavřená, po částech hladká křivka. Křivka k ohraničuje rovinnou oblast Ω, normální vzhledem k oběma osám, a je vzhledem k ní kladně orientována.

Obsah oblasti Ω je dán vztahem

$$P = \frac{1}{2}\oint_k x\,dy - y\,dx. \qquad (56)$$

Důkaz: Křivka k a oblast Ω splňují předpoklady Greenovy věty (věta 4.4.1). Připomeňme si alespoň stručným zápisem její tvrzení: $\oint_k P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$.

Položme nyní funkce $P = 0,\ Q = x$, pak $\frac{\partial P}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$.

Po dosazení do Greenovy věty dostaneme: $\oint_k 0dx + xdy = \iint_\Omega (1-0)\, dxdy$,

po úpravě $\oint_k xdy = \iint_\Omega dxdy$. (57)

Nyní položme funkce $P = y,\ Q = 0$, pak $\frac{\partial P}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$.

Po dosazení do Greenovy věty dostaneme: $\oint_k ydx + 0dy = \iint_\Omega (0-1)\, dxdy$,

po úpravě $\oint_k -ydx = \iint_\Omega dxdy$. (58)

Sečteme-li vztahy (57) a (58), dostaneme: $\oint_k xdy - ydx = 2\iint_\Omega dxdy$

a odtud platí dokazovaný vzorec $P = |\Omega| = \iint_\Omega dxdy = \frac{1}{2}\oint_k xdy - ydx$.

Řešené úlohy

Příklad 4.6.3. Odvoďte vztah pro výpočet obsahu elipsy.

Řešení: Parametrické rovnice elipsy se středem v počátku soustavy souřadnic a délkou poloos a, b mají tvar $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ \ t \in <0, 2\pi)$. Pro derivace platí $\dot{x} = -a\sin t,\ \dot{y} = b\cos t$. Použitím vztahů (46a) a (56) dostáváme

$$P = \frac{1}{2}\left[1.\int_0^{2\pi} a\cos t\, b\cos t dt - 1.\int_0^{2\pi} b\sin t(-a\sin t)dt\right] = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2}ab\left[t\right]_0^{2\pi} = \pi ab.$$

Úlohy k samostatnému řešení

3. Určete obsahy rovinných oblastí, které jsou ohraničeny kladně orientovanými křivkami:

a) Asteroidou $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ a > 0,$

b) kardioidou $x = 2a\cos t - a\cos 2t,\ y = 2a\sin t - a\sin 2t,\ a > 0,$

c) cykloidou $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in < 0, 2\pi >,\ a > 0$ a osou $x,$

d) smyčkou Descartova listu $x = \dfrac{3at}{1+t^3},\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3},\ a > 0,$

e) $y^2 = x^2 - x^4.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. a) $\frac{3}{8}\pi a^2$; **b)** $6\pi a^2$; **c)** $3\pi a^2$; **d)** $\frac{3}{2}a^2$; **e)** $\frac{4}{3}$.

4.6.4. Práce síly po křivce

Výklad

Působí-li v každém bodě jednoduché, po částech hladké křivky k síla $\overline{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)),$ pak **práce**, vykonaná touto silou při působení na hmotný bod s jednotkovou hmotností po křivce $k,$ je dána vztahem

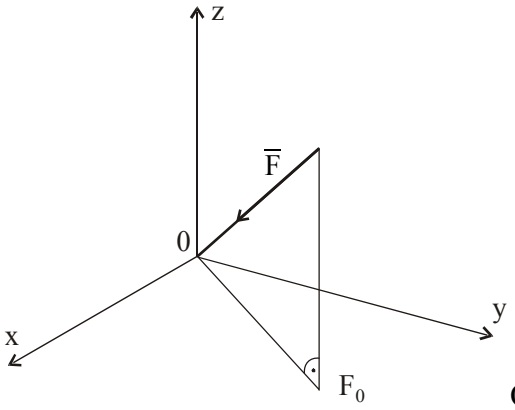
$$A = \int_k P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz, \qquad (59)$$

nebo stručnějším zápisem vztahem $A = \int_k \overline{F}(X).d\overline{s}.$

Řešené úlohy

Příklad 4.6.4. Síla $\overline{F}$, jejíž velikost v každém bodě je rovna vzdálenosti tohoto bodu od roviny $z = 0,$ směřuje do počátku soustavy souřadnic, viz obr. 42. Vypočítejte práci této síly při pohybu hmotného bodu s jednotkovou hmotností po úsečce $x = t,\ y = 2t,\ z = 3t$ z bodu $K = (2,4,6)$ do bodu $L = (3,6,9).$

Řešení: Síla $\overline{F}$ je rovnoběžná s polohovým vektorem $\overrightarrow{OX} = X - O = (x, y, z)$ bodu $X(x, y, z)$, ale má opačnou orientaci a zatím neznámou velikost: $\overline{F} = (-cx, -cy, -cz)$, kde c je konstanta úměrnosti. Velikost síly $\overline{F}$ je dána vztahem



Obr. 42

$$|\overline{F}| = \sqrt{c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2} = c\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Podle zadání platí $|\overline{F}| = z$, ($z > 0$ v prvním oktantu, v němž leží úsečka *KL*).

tedy po dosazení $c\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z$

a odtud $c = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ (v prvním oktantu, v němž leží úsečka *KL).*

Po dosazení za konstantu úměrnosti *c* dostáváme:

$$\overline{F} = \left(-\frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, -\frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, -\frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right),$$

po zjednodušení platí $\overline{F} = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(xz, yz, z^2)$.

Bodu *K* odpovídá parametr $t = 2$ (zjistíme to dosazením souřadnic bodu *K* do parametrických rovnic úsečky *KL:* $2 = t, 4 = 2t, 6 = 3t$), bodu *L* parametr $t = 3$ (zjistíme to dosazením souřadnic bodu *L* do parametrických rovnic úsečky *KL:* $3 = t, 6 = 2t, 9 = 3t$).

Podle vztahů (59) a (46) pro práci *A* platí:

$$A = \int_k \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(xzdx + yzdy + z^2dz) = \int_2^3 \frac{-1}{t\sqrt{1+4+9}}(3t^2dt + 6t^2.2dt + 9t^2.3dt) =$$

$$= \frac{-42}{\sqrt{14}} \int_2^3 t\,dt = -\frac{42}{14}\sqrt{14}\left[\frac{t^2}{2}\right]_2^3 = -\frac{15\sqrt{14}}{2}.$$

Úlohy k samostatnému řešení

4. Najděte práci silového pole $\overline{F} = xy\overline{i} + (x+y)\overline{j}$, jestliže se hmotný bod přemístí z počátku $O = (0,0)$ do bodu $A = (1,1)$

a) po přímce $y = x$,

b) po parabole $y = x^2$,

c) po lomené čáře OBA, kde $B = (1,0)$,

d) po lomené čáře OCA, kde $C = (0,1)$.

5. Určete práci silového pole $\overline{F} = (x-y)\overline{i} + x\overline{j}$ při pohybu hmotného bodu po stranách čtverce, které leží na přímkách $x = \pm a$, $y = \pm a$, v kladném smyslu.

6. Vypočítejte práci silového pole $\overline{F} = (x+y)\overline{i} + 2x\overline{j}$ při jednom oběhu hmotného bodu po kružnici $x^2 + y^2 = r^2$ v kladném smyslu.

7. Silové pole v prostoru je určeno silou $\overline{F} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Vypočítejte práci, kterou vykoná při pohybu hmotného bodu po lomené čáře $OABCO$, $O = (0,0,0)$, $A = (0,1,0)$, $B = (1,1,0)$, $C = (1,1,1)$.

8. Najděte silové pole, jehož potenciál je $\phi(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ a vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu z bodu $A = (1,1)$ do bodu $B = (\sqrt{2},\sqrt{2})$.

9. Určete práci silového pole $\overline{F} = 2xy\overline{i} + x^2\overline{j}$ při pohybu hmotného bodu z bodu $A = (1,0)$ do bodu $B = (0,1)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

4. a) $\frac{4}{3}$; **b)** $\frac{17}{12}$; **c)** $\frac{3}{2}$; **d)** 1; **5.** $8a^2$; **6.** πr^2; **7.** 0; **8.** $\ln\sqrt{2}$; **9.** 0.

4.6.5. Cirkulace vektorového pole

Výklad

Cirkulací vektorového pole $\bar{F}(X) = P(X)\bar{i} + Q(X)\bar{j} + R(X)\bar{k}$ po uzavřené, po částech hladké, orientované křivce k nazýváme křivkový integrál II. druhu

$$C = \oint_k \bar{F}(X).d\bar{s} = \oint_k P(X)dx + Q(X)dy + R(X)dz. \qquad (59a)$$

Je zřejmé, že v potenciálovém vektorovém poli $(rot\ \bar{F}(X) = \bar{o})$ nezávisí křivkový integrál ve vztahu (59a) na integrační cestě a proto je cirkulace podle vztahu (50) vždy nulová.

Poznámka

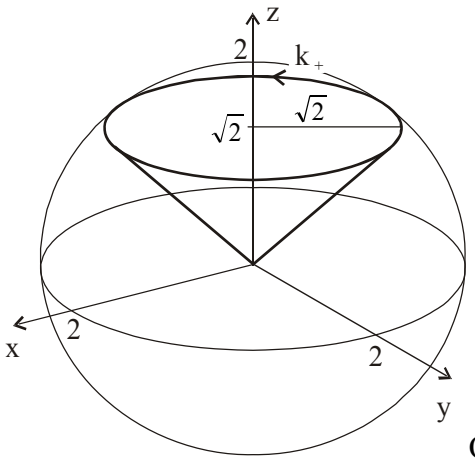
Porovnáním vztahu (59a) *se vztahem* (59) *vidíme, že cirkulace určuje práci vektorového pole* $\bar{F}$ *při přemístění hmotného bodu s jednotkovou hmotností po uzavřené křivce* k.

Řešené úlohy

Příklad 4.6.5. Určete cirkulaci vektorového pole $\bar{F}(x, y, z) = y\bar{i} - x\bar{j} + z\bar{k}$ po uzavřené kladně orientované křivce, která je průnikem ploch $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ a $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$.

Řešení: Rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ určuje kulovou plochu se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem $r = 2$, rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ je rovnicí rotační kuželové plochy s vrcholem v počátku soustavy souřadnic a osou rotace v ose z, viz obr. 43. Obě plochy se protínají pro $z > 0$ v kružnici, která má střed v bodě $(0, 0, \sqrt{2})$ a poloměr $r = \sqrt{2}$. Zjistíme to vyřešením soustavy $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$: $2z^2 = 4$, $z^2 = 2$, $z = \sqrt{2}$, odtud $x^2 + y^2 = z^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$ a proto $r = \sqrt{2}$.

Parametrické rovnice této kružnice $x = \sqrt{2}\cos t$, $y = \sqrt{2}\sin t$, $z = \sqrt{2}$, $t \in < 0, 2\pi)$ derivujeme: $\dot{x} = -\sqrt{2}\sin t$, $\dot{y} = \sqrt{2}\cos t$, $\dot{z} = 0$.



Obr. 38

Po dosazení do vztahu (59a) vypočítáme:

$$C = \oint ydx - xdy + zdz = \int_0^{2\pi} (\sqrt{2}\sin t(-\sqrt{2}\sin t) - \sqrt{2}\cos t\,\sqrt{2}\cos t + \sqrt{2}.0)dt =$$

$$= -2\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = -2\int_0^{2\pi} dt = -2.2\pi = -4\pi.$$

Příklad 4.6.6. Vypočítejte cirkulaci vektorového pole

$\overline{F}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)(x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k})$ po kladně orientovaných stranách trojúhelníka $ABC,\ A=(1,0,0),\ B=(0,1,0),\ C=(0,0,1).$

Řešení: Cirkulaci vypočítáme podle vztahu (59a):

$$C = \oint_k x(x^2+y^2+z^2)\,dx + y(x^2+y^2+z^2)\,dy + z(x^2+y^2+z^2)\,dz.$$

Nejprve zjistíme, zda vektorové pole $\overline{F}(X)$ není potenciálové. Stačí vypočítat

$$rot\overline{F}(X) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x(x^2+y^2+z^2) & y(x^2+y^2+z^2) & z(x^2+y^2+z^2) \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}\,(2yz-2yz) + \overline{j}\,(2xz-2xz) + \overline{k}\,(2xy-2xy) = \overline{o}.$$

Vektorové pole $\overline{F}(X)$ je proto nevírové a podle věty 3.3.1 je rovněž potenciálové a tedy integrál C nezávisí na integrační cestě (věta 4.5.1). Protože cirkulace C je definována na uzavřené křivce, platí podle vztahu (50): $C = 0$.

Úlohy k samostatnému řešení

10. Vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\overline{F}(X)$ po křivce k:

a) $\overline{F}(x,y)=(x^3-y)\overline{i}+(y^3+x)\overline{j}$, k je kladně orientovaná kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem r,

b) $\overline{F}(x,y)=(x+y)\overline{i}+(x-y)\overline{j}$, k je kladně orientovaná elipsa se středem v počátku soustavy souřadnic a délkou poloos a, b,

c) $\overline{F}(x,y)=(x^2+y^2)\overline{i}+(x^2-y^2)\overline{j}$, k jsou kladně orientované strany trojúhelníka OAB, $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(0,1)$,

d) $\overline{F}(x,y)=-x^2y\overline{i}+xy^2\overline{j}$, k je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=r^2$,

e) $\overline{F}(x,y)=(x+y)^2\overline{i}-(x+y)^2\overline{j}$, k jsou kladně orientované strany trojúhelníka OAB, $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(0,1)$,

f) $\overline{F}(x,y,z)=(x+y+z)\overline{i}$, k jsou kladně orientované strany trojúhelníka ABC, $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$,

g) $\overline{F}(x,y,z)=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$, k je kladně orientovaná lomená čára $OABCO$, $O=(0,0,0)$, $A=(0,a,0)$, $B=(a,a,0)$, $C=(a,a,a)$, $a>0$,

h) $\overline{F}(x,y,z)=(z-y)\overline{i}+(x-z)\overline{j}+(y-z)\overline{k}$, k jsou kladně orientované strany trojúhelníka ABC, $A=(3,0,0)$, $B=(0,2,0)$, $C=(0,0,1)$,

i) $\overline{F}(x,y,z)=-y^2\overline{i}+z\overline{j}+x\overline{k}$, k jsou kladně orientované strany trojúhelníka ABC, přičemž body A, B, C jsou průsečíky roviny $2x+2y+z=6$ s osami souřadnic.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

10. a) $2\pi r^2$; **b)** 0; **c)** 0; **d)** $\frac{\pi r^4}{2}$; **e)** $-\frac{4}{3}$; **f)** 0; **g)** 0; **h)** 11; **i)** -9.

4.6.6. Hmotnost oblouku křivky

Výklad

Je-li k jednoduchá, po částech hladká křivka a $\rho = \rho(x,y,z)$ lineární hustota v jejím libovolném bodě $X = (x,y,z)$, pak křivkový integrál I. druhu

$$m = \int_k \rho(x,y,z)ds \qquad (60)$$

vyjadřuje **hmotnost křivky *k*.**

Řešené úlohy

Příklad 4.6.7. Určete hmotnost křivky $\overline{f}(t) = e^t \cos t\ \overline{i} + e^t \sin t\ \overline{j} + e^t \overline{k}$, $t \in < 0,1 >$, jestliže lineární hustota křivky v jejím libovolném bodě je nepřímo úměrná čtverci velikosti průvodiče tohoto bodu a v bodě $A = (1,0,1)$ je rovna 1.

Řešení: Křivku vyjádříme parametrickými rovnicemi

$x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t,\ t \in < 0,1 >$,

vypočítáme derivace $\dot{x} = e^t(\cos t - \sin t),\ \dot{y} = e^t(\sin t + \cos t),\ \dot{z} = e^t$

a určíme podle vztahu (47) diferenciál

$$ds = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}}\,dt =$$

$$= e^t \sqrt{(\cos^2 t - 2\sin t \cos t + \sin^2 t) + (\sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t) + 1}dt = e^t\sqrt{3}dt.$$

Průvodič $OX = X - O = (x,y,z)$ bodu $X(x,y,z)$ má velikost $|OX| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$|OX|^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Pro hustotu podle zadání platí nepřímá úměrnost:

$$\rho(x,y,z) = \frac{c}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{c}{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}} = \frac{c}{2e^{2t}},$$

kde c je konstanta úměrnosti.

Bodu A odpovídá hodnota parametru $t = 0$ (po dosazení souřadnic bodu A do parametrických rovnic křivky dostaneme $1 = e^t \cos t,\ 0 = e^t \sin t,\ 1 = e^t$ a vyřešením získáme jediné řešení $t = 0$).

V bodě $A = (1,0,1)$ je $\rho(A) = 1$.

Tedy pro $t = 0$ v bodě A je $\frac{c}{2e^{2.0}} = 1$ a odtud $c = 2$.

Hustota je pak určena vztahem $\rho(t) = \frac{1}{e^{2t}} = e^{-2t}$.

Po dosazení do vztahu (60) pro hmotnost m platí:

$$m = \int_0^1 \frac{1}{e^{2t}}\ e^t \sqrt{3}dt = \sqrt{3}\int_0^1 e^{-t}dt = -\sqrt{3}\left[e^{-t}\right]_0^1 = \sqrt{3}(1 - e^{-1}).$$

Úlohy k samostatnému řešení

11. Určete hmotnosti křivek:

a) Části paraboly $y = x^2$ mezi body $O(0,0)$ a $B(1,1)$, jestliže lineární hustota $\rho = 2x$,

b) prvního závitu šroubovice $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t$ o hustotě $\rho = x^2 + y^2 + z^2$,

c) křivky $3y = 2x\sqrt{x}$ mezi body $O(0,0)$ a $A(1,\frac{2}{3})$, jestliže hustota v každém bodě $X(x,y)$ je rovna délce oblouku OX,

d) křivky $y = \ln x$ mezi body $A(0,1)$ a $B(2,\ln 2)$, jestliže hustota v každém bodě je rovna čtverci x-ové souřadnice bodu,

e) části řetězovky $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ pro $x \in < 0, a >, a > 0$, jestliže hustota v každém bodě $X(x,y)$ je nepřímo úměrná vzdálenosti od osy x a v bodě $A(0,a)$ má hodnotu 1,

f) čtvrtkružnice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ a > 0$ v prvním kvadrantu, je-li hustota v každém bodě $X(x,y)$ přímo úměrná y-ové souřadnici tohoto bodu,

g) části paraboly $y = \frac{1}{2}x^2$ mezi body $O = (0,0)$ a $A = (2,2)$, je-li hustota $\rho = \frac{y}{x}$,

h) části křivky $x = \ln(1+t^2),\ y = 2\operatorname{arctg} t - t$ pro $t \in <0,1>$, je-li hustota $\rho = ye^{-x}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

11. a) $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)$; **b)** $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}(3+4\pi^2)$; **c)** $\frac{2}{9}(9-4\sqrt{2})$; **d)** $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$; **e)** a; **f)** ka^2; **g)** $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)$; **h)** $\frac{1}{16}\pi^2 - \ln\sqrt{2}$.

4.6.7. Statické momenty a souřadnice těžiště křivky

Výklad

Je dána jednoduchá, po částech hladká **prostorová křivka *k***, jejíž lineární hustota je určena funkcí $\rho = \rho(x,y,z)$. Pro její **statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám** os x, y, resp. x, z, resp. y, z platí:

$$S_{xy} = \int_k z\rho(x,y,z)ds, \tag{61a}$$

$$S_{xz} = \int_k y\rho(x,y,z)ds, \tag{61b}$$

$$S_{yz} = \int_k x\rho(x,y,z)ds. \tag{61c}$$

Označíme-li $T = (\xi,\eta,\zeta)$ **těžiště křivky *k***, pak pro jeho souřadnice platí vztahy:

$$\xi = \frac{S_{yz}}{m},\ \eta = \frac{S_{xz}}{m},\ \zeta = \frac{S_{xy}}{m}, \tag{62}$$

kde m značí hmotnost křivky k.

Analogicky, je-li dána jednoduchá, po částech hladká **rovinná křivka *k***, jejíž lineární hustota je $\rho = \rho(x,y)$, pak pro její **statické momenty vzhledem k souřadnicové ose** x, resp. y platí:

$$S_x = \int_k y\rho(x,y)ds, \tag{63a}$$

$$S_y = \int_k x\rho(x,y)ds. \tag{63b}$$

Označíme-li $T=(\xi,\eta)$ **těžiště křivky rovinné křivky *k***, pak pro jeho souřadnice platí:

$$\xi=\frac{S_y}{m},\ \eta=\frac{S_x}{m} \tag{64}$$

kde m značí hmotnost křivky k.

Řešené úlohy

Příklad 4.6.8. Určete souřadnice těžiště prvního závitu homogenní šroubovice $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t.$

Řešení: Osa z je osou symetrie šroubovice, proto těžiště leží na ose z, to je $\xi=\eta=0$ a tedy také $S_{yz}=S_{xz}=0$. K určení ζ potřebujeme znát podle vztahu (62) hmotnost m a statický moment S_{xy}.

Určíme nejprve derivace $\dot{x}=-\sin t,\ \dot{y}=\cos t,\ \dot{z}=1$ a podle vztahu (47) vypočítáme diferenciál $ds=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}dt=\sqrt{2}dt.$

Hustotu položíme bez újmy na obecnosti rovnu 1.

Podle vztahu (60) vypočítáme $$m=\int_0^{2\pi}1.\sqrt{2}dt=2\pi\sqrt{2}$$

a podle vztahu (61a) určíme $$S_{xy}=\int_0^{2\pi}t.1.\sqrt{2}dt=\sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}=2\pi^2\sqrt{2}.$$

Platí tedy: $$\zeta=\frac{2\pi^2\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{2}}=\pi.$$

První závit homogenní šroubovice má těžiště o souřadnicích $T=(0,0,\pi).$

Úlohy k samostatnému řešení

12. Určete souřadnice těžiště hmotných křivek:

a) Prvního oblouku cykloidy $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ a>0,$ je-li její hustota jednotková,

b) dolní poloviny kružnice $x^2+y^2=r^2,\ r>0,$ je-li její hustota jednotková,

c) části asteroidy $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ a > 0$ mezi body $A = (0,a)$ a $B = (a,0)$, je-li její hustota v každém bodě $X(x,y)$ rovna x-ové souřadnici tohoto bodu,

d) části křivky $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t$ pro $t \in (-\infty, 0>$, je-li její hustota konstantní.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

12. a) $(\pi a, \frac{4}{3}a)$; **b)** $(0, -\frac{2r}{\pi})$; **c)** $(\frac{5}{8}a, \frac{15}{256}\pi a)$; **d)** $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{2})$.

4.6.8. Momenty setrvačnosti křivky

Výklad

Je-li k jednoduchá, po částech hladká **prostorová křivka** o rovnici $\bar{f}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k},\ t \in <a,b>$ a $\rho = \rho(x,y,z)$ její lineární hustota v jejím libovolném bodě $X(x,y,z)$, pak **moment setrvačnosti křivky *k* při rotaci kolem osy** x, resp. osy y, resp. osy z je určen postupně vztahy:

$$I_x = \int_k (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)ds, \tag{65a}$$

$$I_y = \int_k (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)ds, \tag{65b}$$

$$I_z = \int_k (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)ds. \tag{65c}$$

Analogicky pro jednoduchou, po částech hladkou **rovinnou křivku *k*** o rovnici $\bar{f}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j},\ t \in <a,b>$ s lineární hustotou $\rho = \rho(x,y)$ v jejím libovolném bodě $X(x,y)$ platí: **Moment setrvačnosti křivky při rotaci kolem osy** x, resp. osy y, resp. Osy z, je postupně určen vztahy:

$$I_x = \int_k y^2 \rho(x,y)ds, \tag{66a}$$

$$I_y = \int_k x^2 \rho(x,y)ds, \tag{66b}$$

$$I_z = I_x + I_y = \int_k (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)ds. \qquad (66c)$$

Řešené úlohy

Příklad 4.6.9. Určete moment setrvačnosti prvního závitu homogenní cykloidy $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ a > 0$ při rotaci kolem osy x.

Řešení: Pro derivace platí $\dot{x} = a(1 - \cos t),\ \dot{y} = a\sin t$ a podle vztahu (30a) určíme diferenciál $ds = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt.$

Podle vztahu (66a) platí pro $\rho = 1$:

$$I_x = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 .2a\sin\frac{t}{2}dt = 2a^3\int_0^{2\pi} 4(\frac{1-\cos t}{2})^2\sin\frac{t}{2}dt = 8a^3\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 8a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})^2\sin\frac{t}{2}dt = \left|\begin{array}{lcl}\cos\frac{t}{2} & = & m\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt & = & dm\end{array}\right| = 8a^3\int_{-1}^{+1}(1-m^2)^2 2dm =$$

$$= 16a^3\left[m - 2\frac{m^3}{3} + \frac{m^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{256}{15}a^3.$$

Úlohy k samostatnému řešení

13. Určete momenty setrvačnosti při rotaci kolem souřadnicových os prvního závitu homogenní šroubovice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = \frac{at}{2\pi},\ a > 0.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

13. $I_x = \frac{5}{6}a^3\sqrt{4\pi^2+1} = I_y,\ I_z = a^3\sqrt{4\pi^2+1}.$

Kontrolní otázky

1. Který z následujících výrazů vyjadřuje obsah válcové plochy, která má řídicí křivku k a je ohraničena rovinou $z = 0$ a plochou $z = u(X)$?

a) $S = \int_k u(x,y,z)ds$, b) $S = \int_k u(x,y)dz$,

c) $S = \int_k u(x,y)ds$, d) $S = \int_k u(x,y)dx$.

2. Délku křivky k vypočítáme podle vztahu:

a) $L = \int_k u(x,y,z)ds$, b) $L = \int_k ds$,

c) $L = \int_k dx + dy$, d) $L = \frac{1}{2}\oint_k xdy - ydx.$

3. Podle vztahu $\frac{1}{2}\oint_k xdy - ydx$ vypočítáme:

a) Délku křivky k,

b) hmotnost křivky k,

c) obsah rovinné oblasti, která je ohraničena křivkou k,

d) obvod rovinné oblasti, která je ohraničena křivkou k.

4. Podle vztahu $\int_k \rho(x,y,z)ds$, kde funkce $\rho(x,y,z)$ vyjadřuje hustotu v bodě $X(x,y,z)$, vypočítáme:

a) Délku křivky k,

b) hmotnost křivky k,

c) obsah rovinné oblasti, která je ohraničena křivkou k,

d) obvod rovinné oblasti, která je ohraničena křivkou k.

5. Který z následujících vztahů vyjadřuje práci, kterou vykoná síla $\overline{F}(X)$ při pohybu hmotného bodu s jednotkovou hmotností po křivce k?

a) $A = \int_k \overline{F}(X).d\overline{s}$, b) $A = \int_k \overline{F}(X) \times d\overline{s}$,

c) $A = \int_k \overline{F}(X).dX$, d) $A = \int_k \overline{F}(X) \times d\overline{F}$.

6. Cirkulace vektorového pole znamená:

a) Práci vektorového pole při pohybu po uzavřené křivce,

b) výkon vektorového pole,

c) divergenci vektorového pole,

d) rotaci vektorového pole.

7. Statický moment vzhledem k souřadnicové rovině os *x, y* jednoduché, hmotné křivky *k*, jejíž hustota v bodě $X(x,y,z)$ je $\rho(x,y,z)$, je určen vztahem:

a) $S_{xy} = \int_k xy\rho(x,y,z)ds$, b) $S_{xy} = \int_k x\rho(x,y,z)ds$,

c) $S_{xy} = \int_k y\rho(x,y,z)ds$, d) $S_{xy} = \int_k z\rho(x,y,z)ds$.

8. Moment setrvačnosti jednoduché hmotné křivky *k*, jejíž hustota v bodě $X(x,y,z)$ je $\rho(x,y,z)$, která rotuje kolem osy *z* je určen vztahem:

a) $I_z = \int_k x^2y^2\rho(x,y,z)ds$, b) $I_z = \int_k (x^2+y^2)\rho^2(x,y,z)ds$,

c) $I_z = \int_k z^2\rho(x,y,z)ds$, d) $I_z = \int_k (x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. c); 2. b); 3. c); 4. b); 5. a); 6. a); 7. d); 8. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je potřeba prostudovat kapitolu 4.6 znovu.

Kontrolní test

1. Vypočítejte obsah části válcové plochy $x^2 + y^2 = 36$, která je ohraničena rovinami $z = 0$ a $z = x,\ z \geq 0$.

a) 24, b) 12,

c) 72, d) 144.

2. Určete délku křivky $y = 3x + 5$ pro $x \in < 2,5 >$.

a) $2\sqrt{10}$, b) $3\sqrt{10}$,

c) $4\sqrt{10}$, d) $5\sqrt{10}$.

3. Určete obsah rovinné oblasti, která je ohraničena kladně orientovanou křivkou $9x^2 + y^2 = 36$.

a) 12π, b) 24π,

c) 9π, d) 36π.

4. Vypočítejte práci síly $\overline{F}(X) = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$ při pohybu hmotného bodu po křivce k:

$\overline{f}(t) = \cos t\ \overline{i} + \sin t\ \overline{j} + t\ \overline{k},\ t \in <0, \frac{\pi}{2}>$.

a) $\frac{\pi^3}{2}$, b) $\frac{\pi^3}{4}$,

c) $\frac{\pi^3}{12}$, d) $\frac{\pi^3}{24}$.

5. Určete cirkulaci vektorového pole $\overline{F}(X) = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$ po kladně orientované lomené čáře $OABCO$, $O = (0,0,0)$, $A = (0,2,0)$, $B = (2,2,0)$, $C = (2,2,2)$.

a) 0, b) 2,

c) 4, d) 6.

6. Vypočítejte hmotnost homogenní křivky k: $y = 2x - 1,\ x \in <1,3>$, položte $\rho(x,y) = 1$.

a) $\sqrt{5}$, b) $3\sqrt{5}$,

c) $2\sqrt{5}$, d) $9\sqrt{5}$.

7. Stanovte souřadnice těžiště homogenní křivky k: $x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0$, položte $\rho(x,y) = 1$.

a) $T = (\frac{3}{\pi}, 0)$, b) $T = (\frac{4}{\pi}, 0)$,

c) $T = (0, \frac{3}{\pi})$, d) $T = (0, \frac{4}{\pi})$.

8. Určete moment setrvačnosti homogenní křivky k: $y = 2x - 1,\ x \in <1,3>$, která rotuje kolem osy y. Položte $\rho(x,y) = 1$.

a) $\frac{26}{3}\sqrt{5}$, b) $\frac{46}{3}\sqrt{5}$,

c) $\frac{86}{3}\sqrt{5}$, d) $\frac{106}{3}\sqrt{5}$.

9. Určete statický moment vzhledem k ose y homogenní křivky k: $y = 2x - 1,\ x \in <1,3>$. Položte $\rho(x, y) = 1$.

a) $14\sqrt{5}$, b) $4\sqrt{5}$,

c) $24\sqrt{5}$, d) $40\sqrt{5}$.

10. Vypočítejte práci síly $\overline{F}(X) = (x + y)\,\overline{i} + xy\,\overline{j}$ při pohybu hmotného bodu křivce k: $y = 2x - 1,\ x \in <1,3>$ v kladném smyslu.

a) $\frac{130}{3}$, b) $\frac{140}{3}$,

c) $\frac{110}{3}$, d) $\frac{100}{3}$.

Výsledky testu

1. c); 2. b); 3. a); 4. d); 5. a); 6. c); 7. b); 8. a); 9. b); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 4.6 znovu.

Shrnutí lekce

V této kapitole jsme si ukázali využití křivkových integrálů v matematice a fyzice. Křivkový integrál I. druhu umožňuje vypočítat délku křivky a obsah válcové plochy, která má řídicí křivku k a je ohraničena rovinou $z = 0$ a plochou $z = u(X)$.

Křivkový integrál II. druhu nám dává další možnost, jak vypočítat obsah rovinné oblasti.

V případě hmotné křivky k dokážeme křivkovým integrálem I. druhu jednoduše vypočítat její hmotnost, souřadnice těžiště, statické momenty vzhledem k rovinám souřadnic a momenty setrvačnosti při rotaci oblasti Ω kolem souřadnicových os.

Křivkový integrál II. druhu umožňuje určit práci síly při pohybu po křivce k a cirkulaci vektorového pole.

5. PLOŠNÝ INTEGRÁL

Průvodce studiem

V závěru tohoto učebního textu se ve stručnosti seznámíme s dalším rozšířením pojmu integrál, kterým je integrál plošný. Jeho integrační oblastí je plocha.

Cíle

V této kapitole poznáme rovnice plochy a její orientaci, zavedeme plošný integrál I. a II. druhu a naučíme se tyto integrály počítat různými metodami. Nakonec se seznámíme s využitím plošných integrálů v geometrii a ve fyzice.

Předpokládané znalosti

Integrační metody (základní integrační vzorce, metoda integrace substitucí, metoda per partes), výpočet určitého integrálu (Newton – Leibnizova věta).

Dvojrozměrný a trojrozměrný integrál a jejich výpočet.

Analytická geometrie lineárních útvarů (obecná rovnice roviny, její směrnicový a úsekový tvar, parametrické rovnice přímky) a kvadratických útvarů (kvadratické plochy) v prostoru.

Vektorová funkce dvou a více nezávisle proměnných.

5.1. Plocha a její orientace

Průvodce studiem

Abychom mohli studovat plošný integrál, musíme vyjádřit analyticky jeho integrační oblast (plochu) a také zavést orientaci plochy.

Cíle

Cílem této kapitoly je poznat rovnice plochy a zavést její orientaci.

Předpokládané znalosti

Vektorová funkce dvou nezávisle proměnných.

Maticový počet.

Parciální derivace funkce více proměnných.

Výklad

Vektorovou funkcí dvou nezávisle proměnných u, v

$$\overline{f}(u,v) = x(u,v)\overline{i} + y(u,v)\overline{j} + z(u,v)\overline{k},\ (u,v) \in \Omega$$

je určena plocha σ, pokud jsou funkce $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ spojitě diferenciabilní podle proměnných u, v.

Body, v nichž matice $a = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ má hodnost 2, jsou regulární body plochy.

Ekvivalentním zápisem plochy σ jsou parametrické rovnice s parametry u, v tvaru $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ (u,v) \in \Omega$.

Z parametrických rovnic odvodíme explicitní rovnici $z = f(x,y)$ plochy σ vyloučením parametrů u a v. Dosadíme-li například za $u = x$ a $v = y$, pak $z = z(u,v) = z(x,y) = f(x,y)$.

Implicitní funkce $F(x,y,z) = 0$ je rovnicí plochy σ, pokud funkce $F(x,y,z)$ je spojitě diferenciabilní podle proměnných x, y, z. Body, v nichž je aspoň jedna z parciálních derivací $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ nenulová, jsou regulární body plochy.

Řešené úlohy

Příklad 5.1.1. Vyjádřete rovnici kulové plochy se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem $r = 3$ a) implicitní funkcí,

b) explicitní rovnicí,

c) parametricky,

d) vektorovou funkcí.

Řešení: Středová rovnice kulové plochy se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem $r = 3$ má tvar $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

a) Implicitní vyjádření plochy získáme anulováním středové rovnice

$x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$.

b) Vyjádřením proměnné z z předchozí rovnice získáme dvě explicitní rovnice:

$z = +\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ pro horní polovinu kulové plochy a

$z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ pro dolní polovinu kulové plochy.

c) Nejčastěji používané parametrické rovnice kulové plochy mají tvar:

$$\begin{aligned} x &= 3\cos u \sin v, \\ y &= 3\sin u \sin v, \\ z &= 3\cos v, \end{aligned}$$

kde $u \in < 0, 2\pi)$, $v \in < 0, \pi >$ jsou parametry.

d) Vektorovou funkci vyjadřující kulovou plochu získáme z parametrických rovnic:

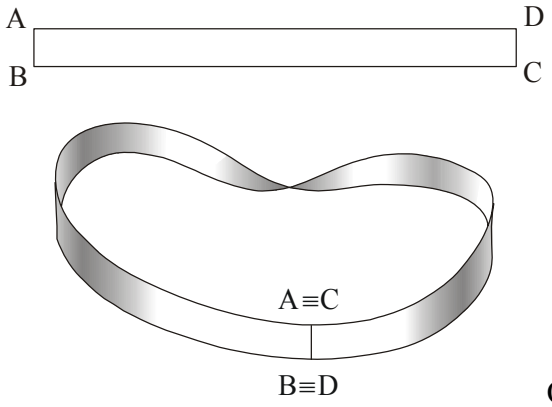
$\overline{f}(u,v) = 3\cos u \sin v\, \overline{i} + 3\sin u \sin v\, \overline{j} + 3\cos v\, \overline{k}$, $u \in < 0, 2\pi)$, $v \in < 0, \pi >$.

Výklad

Plocha σ se nazývá

- hladká, obsahuje-li pouze regulární body,
- jednoduchá, jestliže sama sebe neprotíná,
- dvojstranná, lze-li určit její rub a líc,
- jednostranná, nelze-li rozlišení stran určit,
- uzavřená, ohraničuje-li nějaké prostorové těleso.

Příkladem dvojstranné plochy je list papíru nebo plocha kulová.



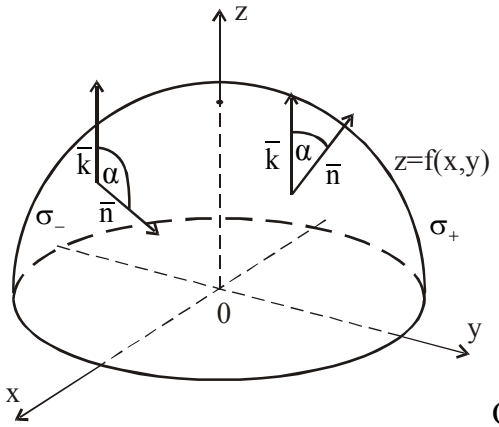
Obr. 44

Příkladem jednostranné plochy je Möbiův list, viz obr. 44, který vytvoříme z obdélníkového pásu $ABCD$ tím, že jej překroutíme o 180^0 a spojíme strany AB a CD tak, aby platilo $A \equiv C$ a $B \equiv D$.

Základní rozdíl mezi jednostrannými a dvojstrannými plochami spočívá v tom, že jednostranné plochy nelze orientovat. Může u nich totiž nastat případ, že při spojitém pohybu po některé spojité a uzavřené křivce k ležící na ploše σ má normálový vektor k ploše na začátku pohybu opačnou orientaci než na konci pohybu.

Dvojstrannou plochu považujeme za orientovanou, označíme-li jednu její stranu za kladnou a druhou za zápornou. V teorii plošného integrálu je výhodná **orientace podle normálového vektoru.**

Plocha σ je orientována kladně vzhledem k ose x, resp. y, resp. z, svírá-li její normálový vektor ostrý úhel s vektorem $\bar{i}$, resp. $\bar{j}$, resp. $\bar{k}$. Je-li tento úhel tupý, je plocha σ orientována záporně. Na obr. 45 je vnější strana plochy $z = f(x,y)$ orientována kladně (značíme σ_+), kdežto vnitřní strana záporně (značíme σ_-).



Obr. 45

Kontrolní otázky

1. Které z následujících rovnic vyjadřují plochu v prostoru formou parametrických rovnic s parametry u, v?

   a) $x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ t \in < a,b >$,

   b) $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in \Omega$,

   c) $x = x(u,v), y = y(u,v),\ (u,v) \in \Omega$,

   d) $\bar{f}(u,v) = x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\bar{k},\ (u,v) \in \Omega$.

2. Která z následujících rovnic vyjadřuje plochu v prostoru formou vektorové funkce?

a) $x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ t \in < a,b >$,

b) $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in \Omega$,

c) $x = x(u,v), y = y(u,v),\ (u,v) \in \Omega$,

d) $\overline{f}(u,v) = x(u,v)\overline{i} + y(u,v)\overline{j} + z(u,v)\overline{k},\ (u,v) \in \Omega$.

3. Jaké musí být funkce $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$, aby vektorová funkce

$\overline{f}(u,v) = x(u,v)\overline{i} + y(u,v)\overline{j} + z(u,v)\overline{k},\ (u,v) \in \Omega$ vyjadřovala plochu?

a) Kladné, b) spojité,

c) spojitě diferenciabilní, d) periodické.

4. Které z následujících tvrzení vyjadřuje rozdíl mezi jednostrannou a dvojstrannou plochou?

a) Na jednostranné ploše nelze určit líc, na dvojstranné ploše nelze určit rub,

b) na jednostranné ploše nelze odlišit líc a rub, na dvojstranné ploše ano,

c) na dvojstranné ploše nelze odlišit líc a rub, na jednostranné ploše ano,

d) není mezi nimi rozdíl.

5. Kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ r > 0$ má parametrické rovnice:

a) $x = r\cos u \sin v,\ \ y = r\sin u \sin v,\ \ z = r\cos v,\ u \in < 0, 2\pi),\ v \in < 0, \pi >$,

b) $x = r\cos u \cos v,\ \ y = r\sin u \sin v,\ \ z = r\cos v,\ u \in < 0, 2\pi),\ v \in < 0, \pi >$,

c) $x = r\cos u \sin v,\ \ y = r\sin u \sin v,\ \ z = r\cos v,\ u \in < 0, \pi),\ v \in < 0, \pi >$,

d) $x = r\cos t,\ \ y = r\sin t,\ \ t \in < 0, \pi >$.

6. Explicitní rovnice horní poloviny kulové plochy se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem r má tvar:

a) $z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, b) $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$,

c) $z = +\sqrt{r - x^2 - y^2}$, d) $z = +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$

7. Výraz $\overline{f}(u,v) = r\cos u \sin v\ \overline{i} + r\sin u \sin v\ \overline{j} + r\cos v\ \overline{k},\ u \in < 0, \pi),\ v \in < 0, \pi >$ vyjadřuje:

a) polovinu kulové plochy se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem r,

b) čtvrtinu kulové plochy se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem r,

c) osminu kulové plochy se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem r,

d) kulovou plochu se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem r.

8. Implicitní rovnice kulové plochy se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem r má tvar:

a) $x^2 + y^2 + z^2 + r = 0,\ r > 0$,

b) $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,\ r > 0$,

c) $x^2 + y^2 + z^2 + r^2 = 0,\ r > 0$,

d) $x^2 + y^2 - z^2 - r = 0,\ r > 0$

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. d); 3. c); 4. b); 5. a); 6. d); 7. a); 8. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte dále. V opačném případě je potřeba prostudovat kapitolu 5.1 znovu.

Shrnutí lekce

V této kapitole jsme se naučili vyjádřit analyticky plochu ve tvaru parametrických rovnic a ve tvaru vektorové funkce. Dále jsme si objasnili rozdíl mezi explicitní a implicitní rovnicí plochy. Poznali jsme rozdíl mezi jednostrannou a dvojstrannou plochou. Dvojstranné plochy jsme orientovali podle normálového vektoru.

5.2. Zavedení plošného integrálu

Průvodce studiem

Určitý integrál, dvojrozměrný integrál, trojrozměrný integrál i křivkový integrál jsme zavedli shodnou metodou – dělením příslušné integrační oblasti na dílčí oblasti normální posloupností dělení. Plošný integrál zavedeme na základě analogie – rozdělíme plochu σ na dílčí plochy. Musíme však stejně jako u křivkového integrálu rozlišovat, zda je plocha σ orientovaná nebo neorientovaná.

Cíle

Cílem této kapitoly je objasnit pojem plošného integrálu I. a II. druhu.

Předpokládané znalosti

Zavedení křivkových integrálů.

Vektorová funkce dvou a více proměnných.

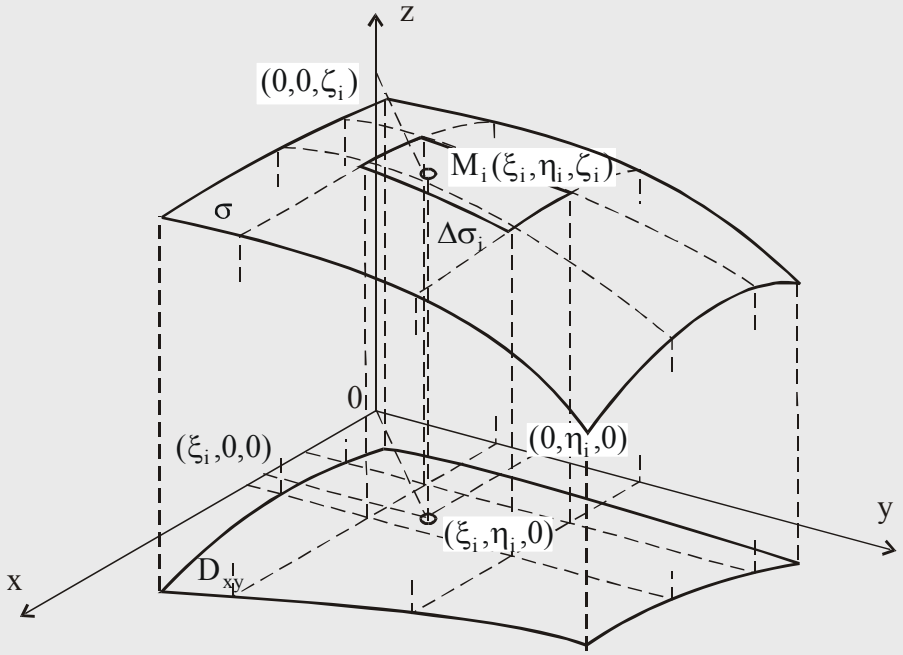
Vektorová algebra (skalární součin vektorů).

Rovnice plochy a její orientace.

Výklad

Plošný integrál je zobecněním dvojrozměrného integrálu, přičemž integračním oborem je místo rovinné oblasti Ω plocha σ.

Omezíme se na jednoduchou hladkou ohraničenou plochu σ, kterou rozdělíme na n jednoduchých dílčích hladkých ploch $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ řezy rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami x, z a y, z, viz obr. 46. Dělení provedeme tak, aby tvořilo normální posloupnost dělení.



Obr. 46

Označme $\Delta\sigma_i$ plošný obsah i-té dílčí plochy σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tomuto dělení plochy σ odpovídá rozdělení jejího pravoúhlého průmětu D_{xy} do roviny $z = 0$ na části $D_1, D_2, \ldots, D_n$.

Pro obsah i-té části ΔD_i platí $\Delta D_i = \Delta x_j . \Delta y_k$, $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$,

$k = 1,2,\ldots,p,,$ $n = m.p.$

Na každé dílčí ploše σ_i libovolně zvolíme bod $M_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $i = 1,2,\ldots n$ a v něm sestrojíme jednotkový normálový vektor $\overline{n}_i = \overline{n}(M_i)$ orientovaný shodně s orientací plochy.

Na ploše σ jsou definovány, ohraničené a spojité:

- skalární funkce $u = u(x,y,z) = u(X)$,
- vektorová funkce $\overline{F} = \overline{F}(x,y,z) = \overline{F}(X) = P(X)\overline{i} + Q(X)\overline{j} + R(X)\overline{k}$.

V bodech M_i nabývají tyto funkce hodnoty $u(M_i) = u(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ a $\overline{F}(M_i) = \overline{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Vytvoříme součiny $u(M_i)\,\Delta\sigma_i$ a skalární součiny $\overline{F}(M_i).\overline{n}(M_i)\,\Delta\sigma_i$ pro $i = 1,2,\ldots,n$.

Nyní utvoříme součty $$\sum_{i=1}^{n} u(M_i)\Delta\sigma_i \qquad (67)$$

a $$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}(M_i).\overline{n}(M_i)\,\Delta\sigma_i. \qquad (68)$$

Definice 5.2.1.

1. Existuje-li pro $n \to \infty$ a $\Delta\sigma_i \to 0$ pro všechna $i = 1,2,\ldots,n$ limita výrazu (67), pak tuto limitu nazveme **plošným integrálem I. druhu** skalární funkce $u(x,y,z)$ na ploše σ a zapíšeme ji ve tvaru

$$\iint_{\sigma} u(x,y,z)\, d\sigma.$$

2. Existuje-li pro $n \to \infty$ a $\Delta\sigma_i \to 0$ pro všechna $i = 1,2,\ldots,n$ limita výrazu (68), pak tuto limitu nazveme **plošným integrálem II. druhu** vektorové funkce $\overline{F}(x,y,z) = P(X)\overline{i} + Q(X)\overline{j} + R(X)\overline{k}$ na orientované ploše σ a zapíšeme ji ve tvaru

$$\iint_{\sigma} \overline{F}(x,y,z).\overline{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy.$$

Shrnutí lekce

Integrační oblastí plošného integrálu je plocha.

Plochu σ jsme rozdělili na dílčí plošky normální posloupností dělení. Na každé dílčí plošce jsme zvolili libovolný bod a v něm jsme sestrojili podle orientace plochy jednotkový normálový vektor. Plošné integrály I. a II. druhu jsme zavedli jako limity příslušných integrálních součtů.

Pokud nezáleží na orientaci plochy, jde o plošný integrál I. druhu, který značíme $\iint_{\sigma} u(x,y,z)d\sigma$. Je definován pro (skalární) funkci $u(x,y,z)$.

Pokud záleží na orientaci plochy, jde o plošný integrál II. druhu, který zapisujeme ve tvaru $\iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$, případně stručněji $\iint_{\sigma} \overline{F}(x,y,z).\overline{n}\, d\sigma$.

Je definován pro vektorovou funkci $\overline{F}(x,y,z)$.

5.3. Výpočet a vlastnosti plošných integrálů

Průvodce studiem

Počítat plošné integrály podle definice 5.2.1 by bylo velmi pracné a také zdlouhavé. Existuje několik metod, jak tyto integrály počítat. Nyní se seznámíme se základními metodami výpočtu plošných integrálů I. a II. druhu.

Cíle

Cílem této kapitoly je objasnit metody výpočtu a vlastnosti plošného integrálu I. a II. druhu.

Předpokládané znalosti

Integrační metody (základní integrační vzorce, metoda integrace substitucí, metoda per partes), výpočet určitého integrálu (Newton – Leibnizova věta).

Dvojrozměrný integrál a jeho výpočet.

Parciální derivace funkce více proměnných.

Analytická geometrie lineárních útvarů (obecná rovnice roviny, její směrnicový a úsekový tvar, parametrické rovnice přímky) a kvadratických útvarů (kvadratické plochy) v prostoru.

Vektorová funkce dvou a více nezávisle proměnných.

Výklad

Plošný integrál I. a II. druhu počítáme převedením na dvojrozměrný integrál. Výpočet závisí na způsobu zadání plochy σ.

Věta 5.3.1.

1. Nechť je dána jednoduchá hladká plocha σ, na které jsou definovány, spojité a ohraničené skalární funkce $u = u(x, y, z)$ a vektorová funkce

$$\overline{F}(x, y, z) = \overline{F}(X) = P(X)\overline{i} + Q(X)\overline{j} + R(X)\overline{k}.$$

Označíme-li D_{xy} pravoúhlý průmět plochy σ do roviny $z = 0$ a plochu vyjádříme explicitně ve tvaru $z = z(x, y)$, platí pro plošný integrál I. druhu

$$\iint_{\sigma} u(x, y, z)d\sigma = \iint_{D_{xy}} u(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \qquad (69a)$$

Promítneme-li plochu σ do roviny $y = 0$, průmět označíme D_{xz}, pak plochu σ vyjádříme explicitně ve tvaru $y = y(x, z)$. Plošný integrál I. druhu vypočítáme podle vztahu

$$\iint_{\sigma} u(x, y, z)d\sigma = \iint_{D_{xz}} u(x, y(x, z), z)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz. \qquad (69b)$$

Analogicky při promítání plochy σ do roviny $x = 0$, průmět označíme D_{yz} a vyjádříme plochu σ explicitní funkcí $x = x(y, z)$. Plošný integrál I. druhu vypočítáme podle vztahu

$$\iint_{\sigma} u(x, y, z)d\sigma = \iint_{D_{yz}} u(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz. \qquad (69c)$$

2. Pro plošný integrál II. druhu platí

$$\iint_{\sigma} \overline{F}(x, y, z).\overline{n}\; d\sigma = \iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy =$$

$$= \varepsilon \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz + \varepsilon \iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz + \varepsilon \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy, \quad (70)$$

přičemž $\varepsilon = +1$ v případě kladně orientované plochy σ a $\varepsilon = -1$ v případě záporně orientované plochy σ.

Vlastnosti plošných integrálů přímo vyplývají z definice součtů (67) a (68) a jsou analogické vlastnostem křivkových integrálů.

Věta 5.3.2. (Vlastnosti plošných integrálů)

1. $\iint_{\sigma} c\,u(X)d\sigma = c\iint_{\sigma} u(X)d\sigma, \qquad \iint_{\sigma_+} c\,\bar{F}(X).\bar{n}\,d\sigma = c\iint_{\sigma_+} \bar{F}(X).\bar{n}\,d\sigma, \quad c \in R,$

2. $\iint_{\sigma} (u(X)+v(X))d\sigma = \iint_{\sigma} u(X)d\sigma + \iint_{\sigma} v(X)d\sigma,$

   $\iint_{\sigma_+} (\bar{F}(X)+\bar{G}(X)).\bar{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma_+} \bar{F}(X).\bar{n}\,d\sigma + \iint_{\sigma_+} \bar{G}(X).\bar{n}\,d\sigma,$

3. $\iint_{\sigma} u(X)d\sigma = \iint_{\sigma_1} u(X)d\sigma + \iint_{\sigma_2} u(X)d\sigma,$

   $\iint_{\sigma_+} \bar{F}(X).\bar{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma_{1+}} \bar{F}(X).\bar{n}\,d\sigma + \iint_{\sigma_{2+}} \bar{F}(X).\bar{n}\,d\sigma,$

4. $\iint_{\sigma_+} \bar{F}(X).\bar{n}\,d\sigma = -\iint_{\sigma_-} \bar{F}(X).\bar{n}\,d\sigma,$

přičemž skalární funkce $u(X), v(X)$ a vektorové funkce $\bar{F}(X), \bar{G}(X)$ jsou spojité a ohraničené na ploše σ, plochy σ_1, σ_2 vzniknou rozdělením plochy σ na dvě části.

Poznámky

1. Plošný integrál I. druhu stejně jako křivkový integrál I. druhu nazýváme také neorientovaný, protože podle vztahů (69a,b,c) *jejich výpočet nezávisí na orientaci plochy* σ. *Plošný element* $d\sigma$ *je vždy kladný.*

Plošný integrál II. druhu shodně s křivkovým integrálem II. druhu nazýváme také orientovaný, protože podle vztahu (70) *závisí jeho hodnota na orientaci plochy* σ

2. Pro výpočet plošného integrálu II. druhu lze za stejných předpokladů jako ve větě 5.3.1 užít následující vztahy:

$$\iint_{\sigma} \bar{F}(x,y,z).\bar{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma} P(X)dydz + Q(X)dxdz + R(X)dxdy =$$

$$= \varepsilon \iint_{D_{xy}} (R(X) - P(X)\frac{\partial z}{\partial x} - Q(X)\ \frac{\partial z}{\partial y})dxdy, \qquad (71a)$$

$$= \varepsilon \iint_{D_{xz}} (Q(X) - P(X)\frac{\partial y}{\partial x} - R(X)\ \frac{\partial y}{\partial z})dxdz, \qquad (71b)$$

$$= \varepsilon \iint_{D_{yz}} (P(X) - Q(X)\frac{\partial x}{\partial y} - R(X)\ \frac{\partial x}{\partial z})dydz. \qquad (71c)$$

3. Z věty 5.3.1 vyplývá, že plošný integrál I. druhu můžeme teoreticky vypočítat promítnutím plochy σ *do kterékoliv souřadnicové roviny. Průmětem však musí být rovinná oblast.*

4. Z věty 5.3.1 vyplývá, že při výpočtu plošného integrálu II. druhu je jednoznačně určeno promítání v závislosti na součinu diferenciálů:

V případě součinu diferenciálů $dxdy$ *promítáme plochu* σ *do souřadnicové roviny os* x, y, *v případě součinu diferenciálů* $dxdz$ *promítáme plochu* σ *do souřadnicové roviny os* x, z, *v případě součinu diferenciálů* $dydz$ *promítáme plochu* σ *do souřadnicové roviny os* y, z.

Řešené úlohy

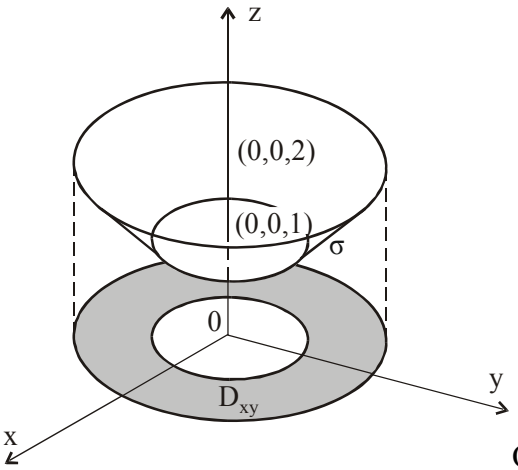
Příklad 5.3.1. Vypočítejte integrál $A = \iint_{\sigma} z d\sigma$, kde σ je část kuželové plochy $x^2 + y^2 = z^2$ pro $1 \le z \le 2$.

Řešení: Dosadíme-li do rovnice plochy σ za $z=1,$ dostaneme rovnici kružnice $x^2+y^2=1.$ Dosadíme-li do rovnice plochy σ za $z=2,$ dostaneme rovnici kružnice $x^2+y^2=4.$ Pravoúhlým průmětem D_{xy} plochy σ do roviny $z=0$ je tedy mezikruží, viz obr. 47.

Příslušný dvojný integrál budeme proto řešit v polárních souřadnicích (5): $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ \rho\, d\rho\, d\varphi.$

Mezikruží $1\le x^2+y^2\le 4,$ vyjádříme v polárních souřadnicích

$D_{\rho\varphi}: 1\le\rho\le 2,\ 0\le\varphi<2\pi.$



Obr. 47

Plocha σ má v polárních souřadnicích rovnici

$$z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=\rho.$$

Podle vztahu (69a) určíme:

$$d\sigma=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}dxdy=$$

$$=\sqrt{2}\,dxdy.$$

Po dosazení do vztahu (69a) platí:

$$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\,dxdy=\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\rho\sqrt{2}\rho\,d\rho\,d\varphi=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^2\rho^2 d\rho=$$

$$=\sqrt{2}\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2=\frac{14}{3}\pi\sqrt{2}.$$

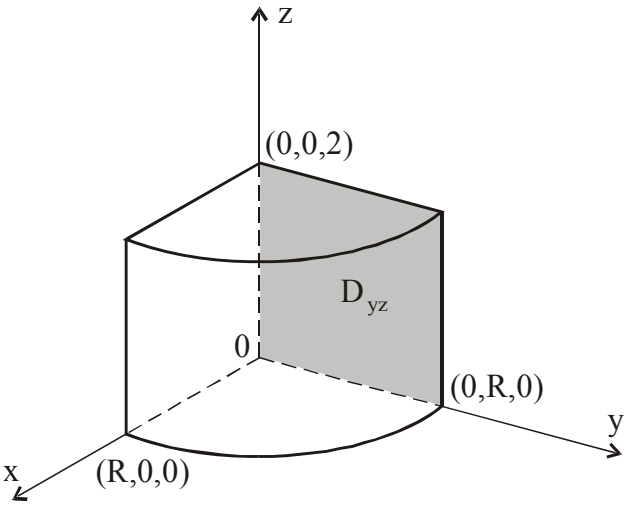
Příklad 5.3.2. Vypočítejte integrál $B = \iint_{\sigma} x \, d\sigma$, kde plocha σ je určena rovnicemi

$x^2 + y^2 = R^2, 0 \le z \le 2, x \ge 0, y \ge 0.$

Řešení: Integrační plocha σ je částí válcové plochy, viz obr. 48. Průmětem plochy σ do roviny x, y je pouze čtvrtkružnice, tedy křivka. Promítneme proto plochu σ například do roviny os y, z. Průmětem D_{yz} je obdélník, který je určen nerovnicemi $0 \le y \le R, 0 \le z \le 2.$

Plochu σ vyjádříme ve tvaru $x = x(y,z) = \sqrt{R^2 - y^2}$

a vypočítáme derivace $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2}}, \frac{\partial x}{\partial z} = 0.$



Obr. 48

Podle vztahu (69c) platí

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{y^2}{R^2 - y^2} + 0^2}\, dydz = \sqrt{\frac{R^2 - y^2 + y^2}{R^2 - y^2}}\, dydz = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}\, dydz$$

a po dosazení do integrálu vypočítáme

$$B = \iint_{D_{yz}} \sqrt{R^2 - y^2}\, \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}\, dydz = R \int_0^R dy \int_0^2 dz = 2R^2.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočítejte plošné integrály I. druhu na ploše σ:

a) $\iint_\sigma y\,d\sigma$, σ: část kulové plochy $x^2+y^2+z^2=1$ v prvním oktantu,

b) $\iint_\sigma z\,d\sigma$, σ: část roviny $x+y+z=1$ v prvním oktantu,

c) $\iint_\sigma \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, σ: část kuželové plochy $b^2(x^2+y^2)=a^2z^2$, $a>0$, $b>0$ pro

$z\in<-b,0>$,

d) $\iint_\sigma (2x^2+3y^2)d\sigma$, σ: část plochy rotačního paraboloidu $2z=x^2+y^2$ uvnitř

válcové plochy $x^2+y^2=2$,

e) $\iint_\sigma \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, σ: část plochy rotačního paraboloidu $z=x^2+y^2$ ohraničená

rovinou $z=1$,

f) $\iint_\sigma xy\,d\sigma$, σ: část kuželové plochy $z^2=x^2+y^2$ mezi rovinami $z=0, z=9$,

g) $\iint_\sigma \frac{z}{x^2+y^2}d\sigma$, σ: část kulové plochy $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$ vně rotační válcové

plochy $x^2+y^2=1$, ✖

h) $\iint_\sigma \frac{x^2-y^2}{z^3}d\sigma$, σ: část kuželové plochy $z^2=x^2+y^2$ ležící uvnitř rotační válcové

plochy $x^2+2x+y^2=0$, ✖

i) $\iint_\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1+4z}}$, σ: část plochy rotačního paraboloidu $z=x^2+y^2$ ležící uvnitř rotační

válcové plochy $x^2+y^2=2x$, ✖

j) $\iint_\sigma xy^2z^3d\sigma$, σ: část rotační válcové plochy $x^2+y^2=16$, $x\leq 0$ mezi rovinami

$z=1, z=3$,

k) $\iint_\sigma x\,d\sigma$, σ: část roviny $x+z=1$ v prvním oktantu, $y\leq 1$,

l) $\iint\limits_{\sigma} z\, d\sigma$, σ: část povrchu rotačního elipsoidu $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$ v prvním oktantu,

m) $\iint\limits_{\sigma} xyz\, d\sigma$, σ: část kulové plochy $x^2+y^2+z^2=4,\ y\geq 0,\ z\geq 0$,

n) $\iint\limits_{\sigma} (x+y+z)d\sigma$, σ: část roviny $x+2y+3z=6$ v prvním oktantu.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{\pi}{4}$; **b)** $\frac{1}{6}\sqrt{3}$; **c)** $\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}$; **d)** $\frac{2}{3}\pi(6\sqrt{3}+1)$; **e)** $\frac{1}{16}\pi(9\sqrt{5}-\ln\sqrt{2+\sqrt{5}})$; **f)** 0;

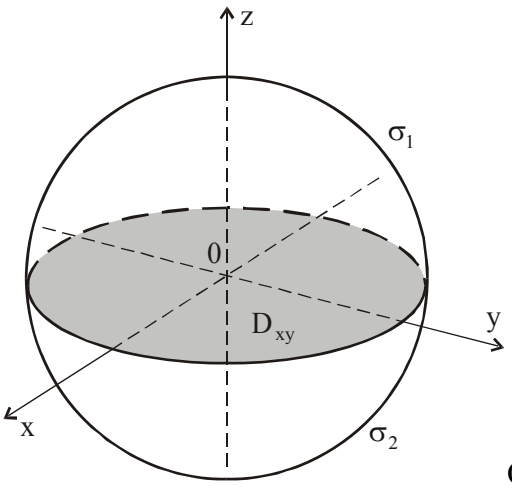
g) $4\pi\ln 2$; **h)** $\frac{4}{3}\sqrt{2}$; **i)** π; **j)** $-\frac{10240}{3}$; **k)** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; **l)** $\frac{56}{9}\pi$; **m)** 0; **n)** $11\sqrt{14}$.

Řešené úlohy

Příklad 5.3.3. Vypočítejte integrál $C=\iint\limits_{\sigma} xdxdy$, kde σ je vnější strana kulové plochy

$x^2+y^2+z^2=9$.

Řešení: Z rovnice $x^2+y^2+z^2=9$ nelze vyjádřit integrační plochu $z=f(x,y)$ jedinou explicitní rovnicí. Plochu σ tedy rozdělíme na dvě části, viz obr. 49:



Obr. 49

σ_1 nad rovinou $z=0$ má rovnici $z=+\sqrt{9-x^2-y^2}$ a je orientována kladně,

σ_2 pod rovinou $z=0$ má rovnici $z=-\sqrt{9-x^2-y^2}$ a je orientována záporně.

Průmětem D_{xy} obou ploch do roviny $z=0$ je kruh $x^2+y^2\le 9$. Integrál C je proto součtem dvou integrálů $C=\iint\limits_{\sigma_{1+}} x\,dxdy+\iint\limits_{\sigma_{2-}} x\,dxdy$

a podle vztahu (70) platí $C=+1\iint\limits_{D_{xy}} x\,dxdy-1\iint\limits_{D_{xy}} x\,dxdy=0.$

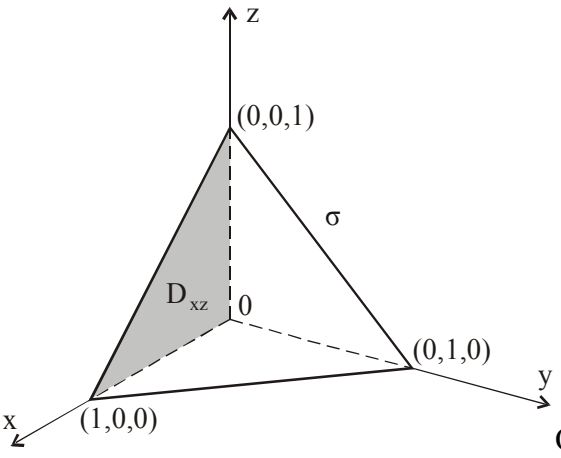
Příklad 5.3.4. Vypočítejte integrál $D=\iint\limits_{\sigma} y\,dxdz$, kde σ je kladně orientovaná strana roviny $x+y+z=1$ v prvním oktantu, viz obr. 50.

Řešení: Vzhledem k diferenciálům *dxdz* budeme podle vztahu (70) plochu σ promítat do roviny os x, z. Průmět D_{xz} je dán nerovnicemi: $0\le x\le 1,\ 0\le z\le 1-x.$

Z rovnice plochy σ vyjádříme funkci $y=y(x,z)=1-x-z$ a dosadíme do vztahu (70):

$$D=1\iint\limits_{D_{xz}}(1-x-z)dxdz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-z)dz=\int_0^1\left[(1-x)z-\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x}dx=$$

$$=\int_0^1\left((1-x)^2-\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2dx=\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x)^3}{-3}\right]_0^1=-\frac{1}{6}(0-1)=\frac{1}{6}.$$



Obr. 50

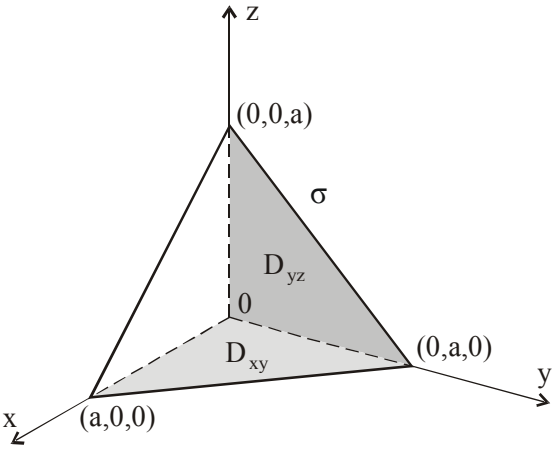
Příklad 5.3.5. Vypočítejte integrál $E=\iint\limits_{\sigma} x\,dydz+y\,dxdz+z\,dxdy$, kde plocha σ je horní strana roviny $x+y+z=a,\ a>0$ v prvním oktantu.

Řešení: a) Plochu σ vyjádříme ve tvaru $z = z(x, y) = a - x - y$ a určíme její pravoúhlý průmět do roviny $z = 0$, viz obr. 51.

$D_{xy} : 0 \le x \le a, 0 \le y \le a - x.$

K výpočtu integrálu použijeme vztah (71a), přičemž dosadíme

$$P = x, \quad Q = y, \quad R = z, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -1, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -1.$$



Obr. 51

Dostaneme:

$$E = 1 \iint_{D_{xy}} \left(a - x - y - x\,(-1) - y\,(-1)\right) dxdy = \iint_{D_{xy}} (a - x - y + x + y) dxdy =$$

$$= a \iint_{D_{xy}} dxdy = a \,|\, D_{xy} \,| = a \,\frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} a^3.$$

b) Integrál E rozdělíme na tři integrály

$E = \iint_{\sigma} xdydz + \iint_{\sigma} ydxdz + \iint_{\sigma} zdxdy = E_1 + E_2 + E_3$ a vyřešíme každý zvlášť.

Podle vztahu (70) platí:

$$E_1 = \iint_{\sigma} xdydz = \begin{vmatrix} D_{yz} & : & 0 \le y \le a \\ & & 0 \le z \le a - y \\ x & = & a - y - z \end{vmatrix} = 1 \iint_{D_{yz}} (a - y - z) dydz = \int_0^a dy \int_0^{a-y} (a - y - z) dz =$$

$$= \int_0^a \left[(a - y) z - \frac{z^2}{2} \right]_0^{a-y} dy = \int_0^a \left((a - y)^2 - \frac{(a - y)^2}{2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^a (a - y)^2 dy =$$

$$= -\frac{1}{6} \left[(a - y)^3 \right]_0^a = \frac{1}{6} a^3.$$

Analogicky bychom promítáním do roviny os x, z určili $E_2 = \frac{1}{6}a^3$, respektive promítáním do roviny os x, y zjistíme, že $E_3 = \frac{1}{6}a^3$.

Tedy $E = 3\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{2}a^3$.

Je zřejmé, že postup řešení použitý v případě a) je jednodušší a rychlejší.

Úlohy k samostatnému řešení

2. Vypočítejte plošné integrály II. druhu na ploše σ:

a) $\iint_\sigma xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, σ: kladně orientovaná strana roviny $x + y + z = 1$ v prvním oktantu,

b) $\iint_\sigma x^2dydz + z^2dxdy$, σ: vnější strana kuželové plochy $x^2 + y^2 = z^2$ pro $z \in <0,1>$,

c) $\iint_\sigma xyzdxdy$, σ: kladně orientovaná strana kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ v prvním oktantu,

d) $\iint_\sigma xdydz + dxdz + xz^2dxdy$, σ: kladně orientovaná strana kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ v prvním oktantu, ✖

e) $\iint_\sigma xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, σ: vnější plocha elipsoidu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ v prvním oktantu, ✖

f) $\iint_\sigma zdxdy + xdxdz + ydydz$, σ: část plochy $x - y + z = 1$ ve čtvrtém oktantu, orientovaná kladně,

g) $\iint_\sigma z^3dxdy$, σ: vnější strana kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 4$,

h) $\iint_\sigma x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, σ: vnější plocha kvádru, jehož stěny leží v rovinách $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 2, z = 3$,

i) $\iint_\sigma xydxdy + yzdydz + xzdxdz$, σ: vnější plocha krychle, jejíž stěny leží v rovinách

$x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 2, z = 2,$

j) $\iint_\sigma xy^2z^2dydz + yx^2z^2dxdz + zx^2y^2dxdy$, σ: vnější plocha čtyřstěnu, jehož stěny leží

v rovinách $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0,$

k) $\iint_\sigma (x+1)dydz$, σ: vnější plocha elipsoidu $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4,$

l) $\iint_\sigma (x^2 + 2x)dydz + (y^2 - 2y)dxdz, \sigma$: vnější plocha krychle, jejíž stěny leží

v rovinách $x = 0, y = 0, z = 0, x = 3, y = 3, z = 3,$

m) $\iint_\sigma xdydz + ydxdz + zdxdy,$

α) σ: vnější plocha krychle, jejíž stěny leží v rovinách

$x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 2, z = 2,$

β) σ: vnější strana kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. a) $\frac{1}{8}$; **b)** $-\frac{\pi}{2}$; **c)** $\frac{1}{15}$; **d)** $\frac{\pi r^3}{6} + \frac{\pi r^2}{4} + \frac{2}{15}r^5$; **e)** $\frac{27}{2}\pi$; **f)** $-\frac{1}{6}$; **g)** $\frac{128}{5}\pi$; **h)** 36; **i)** 0;

j) $\frac{1}{420}$; **k)** $\frac{8}{3}\pi\sqrt{2}$; **l)** 162; **m)** α) 24; β) $4\pi r^3$.

Kontrolní otázky

1. V čem spočívá rozdíl mezi plošným integrálem I. a II. druhu?

a) Integrál I. druhu závisí na orientaci plochy, integrál II. druhu nezávisí na orientaci plochy,

b) integrál I. druhu je definován pro plochu orientovanou kladně, integrál II. druhu pro plochu orientovanou záporně,

c) integrál I. druhu nezávisí na orientaci plochy, integrál II. druhu závisí na orientaci plochy,

d) není mezi nimi rozdíl.

2. Který z následujících zápisů vyjadřuje obecně plošný integrál I. druhu po ploše σ?

a) $\iint_{\sigma} u(x,y,z)d\sigma$,

b) $\iint_{\sigma} u(x,y,z)dxdy$,

c) $\iint_{\sigma} \overline{F}(x,y,z)d\sigma$,

d) $\iint_{\sigma} u(x,y,z)dxdydz$.

3. Který z následujících zápisů vyjadřuje obecně plošný integrál II. druhu po orientované ploše σ?

a) $\iint_{\sigma} \overline{F}(x,y,z).d\sigma$,

b) $\iint_{\sigma} \overline{F}(x,y,z).\overline{n}\ d\sigma$,

c) $\iint_{\sigma} \overline{F}(x,y,z).\overline{n}\ dxdydz$,

d) $\iint_{\sigma} u(x,y,z)\ d\sigma$.

4. Podle jakého vztahu vypočítáme integrál I. druhu $\iint_{\sigma} u(x,y,z)d\sigma$?

a) $\iint_{\sigma} u(x,y,z)d\sigma = \iint_{D_{xy}} u(x,y)\ d\sigma$,

b) $\iint_{\sigma} u(x,y,z)d\sigma = \iint_{D_{xy}} u(x,y)\ d\sigma$,

c) $\iint_{\sigma} u(x,y,z)d\sigma = \iint_{D_{xy}} u(x,y,z(x,y))\ dxdy$,

d) $\iint_{\sigma} u(x,y,z)d\sigma = \iint_{D_{xy}} u(x,y,z(x,y))\ d\sigma$

5. Podle kterého vztahu vypočítáme diferenciál $d\sigma$?

a) $d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$,

b) $d\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$,

c) $d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdz$,

d) $d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdy$.

6. Jak volíme souřadnicovou rovinu, do které promítáme plochu σ při výpočtu plošného integrálu I. druhu?

a) Zcela libovolně,

b) libovolně, ale průmětem musí být rovinná oblast,

c) libovolně, ale průmětem musí být uzavřená křivka,

d) vždy promítáme do souřadnicové roviny os x, y.

7. Podle jakého vztahu vypočítáme integrál II. druhu $\iint_{\sigma} \bar{F}(x,y,z).\bar{n}\,d\sigma$?

a) $\varepsilon \iint_{D_{yz}} (P(x,y,z)+Q(x,y,z)+R(x,y,z))dxdy$,

b) $\varepsilon \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \times \varepsilon \iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \times \varepsilon \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$,

c) $\varepsilon \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dy + \varepsilon \iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dx + \varepsilon \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dx$,

d) $\varepsilon \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz + \varepsilon \iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz + \varepsilon \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$.

8. Jak volíme souřadnicovou rovinu, do které promítáme plochu σ při výpočtu plošného integrálu II. druhu?

a) Zcela libovolně,

b) libovolně, ale průmětem musí být rovinná oblast,

c) promítací rovina je jednoznačně určena součinem diferenciálů $dxdy$, resp. $dxdz$, resp. $dydz$,

d) vždy promítáme do souřadnicové roviny os x, y.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. c); 2. a); 3. b); 4. d); 5. a); 6. b); 7. d); 8. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 5.3 znovu.

Kontrolní test

1. Vypočítejte integrál $\iint_\sigma z\, d\sigma$, kde σ je část kulové plochy $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$.

a) 6π, b) 8π,

c) 10π, d) 12π.

2. Vypočítejte integrál $\iint_\sigma (x+y)d\sigma$, kde σ je část roviny $x+y+4z=4$ v prvním oktantu.

a) $16\sqrt{2}$, b) $24\sqrt{2}$,

c) $48\sqrt{2}$, d) $96\sqrt{2}$.

3. Vypočítejte integrál $\iint_\sigma z^2 d\sigma$, kde σ je část roviny $2x+3y=6$ v prvním oktantu pro $z\leq 2$.

a) $\frac{16}{3}\sqrt{13}$, b) $\frac{10}{3}\sqrt{13}$,

c) $\frac{8}{3}\sqrt{13}$, d) $\frac{4}{3}\sqrt{13}$.

4. Vypočítejte integrál $\iint_\sigma xz\, d\sigma$, kde σ je část válcové plochy $x^2+z^2=9$, $0\leq y\leq 4$, $x\geq 0$, $z\geq 0$.

a) 18, b) 36,

c) 54, d) 72.

5. Vypočítejte integrál $\iint_\sigma \sqrt{1+4z}d\sigma$, kde σ je část plochy rotačního paraboloidu $z=x^2+y^2$, $z\leq 4$.

a) 36π, b) 38π,

c) 40π, d) 42π.

6. Vypočítejte integrál $\iint_{\sigma} y^2 dxdy + x^2 dxdz$, kde σ_+ je plocha čtverce o stranách

$x = 0,\ y = 0,\ x = 2,\ y = 2$ v rovině $z = 2$.

a) $\frac{16}{3}$, b) $\frac{10}{3}$,

c) $\frac{8}{3}$, d) $\frac{4}{3}$.

7. Vypočítejte integrál $\iint_{\sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy$, kde σ je vnější plocha kvádru, jehož stěny

leží v rovinách $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 2,\ y = 4,\ z = 6$.

a) 188, b) 136,

c) 144, d) 172.

8. Vypočítejte integrál $\iint_{\sigma} xzdxdz$, kde σ_+ je část roviny $2x + 3y + 6z = 12$ v prvním oktantu.

a) 8, b) 6,

c) 4, d) 2.

9. Vypočítejte integrál $\iint_{\sigma} xydxdz$, kde σ_+ je část roviny $2x + 3y + 6z = 12$ v prvním oktantu.

a) 18, b) 16,

c) 14, d) 12.

10. Vypočítejte integrál $\iint_{\sigma} z^4 dxdy$, kde σ je část kuželové plochy

$x^2 + y^2 = z^2,\ z \in <0,2>,\ x \geq 0,\ y \geq 0$.

a) $\frac{16\pi}{3}$, b) $\frac{16\pi}{15}$,

c) $\frac{16\pi}{45}$, d) $\frac{16\pi}{5}$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. c); 4. c); 5. a); 6. a); 7. c); 8. b); 9. d); 10. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 5.3 znovu.

Shrnutí lekce

Při výpočtu plošného integrálu I. druhu promítneme integrační plochu σ do vhodné souřadnicové roviny, vypočítáme příslušný diferenciál $d\sigma$ a převedeme jej na dvojrozměrný integrál podle vztahu (69a,b,c) v závislosti na tom, do které souřadnicové roviny jsme promítali plochu σ. Dvojrozměrný integrál vypočítáme některou z metod uvedených v kapitolách 1.1 nebo 1.2.

Plošný integrál II. druhu rozdělíme na dílčí integrály pro jednotlivé součiny diferenciálů $dydz$, resp. $dxdz$, resp. $dxdy$ a postupně promítneme integrační plochu σ do souřadnicové roviny os y, z, resp. os x, z, resp. os x, y. Podle vztahu (70) převedeme dílčí integrály na integrály dvojrozměrné. Dvojrozměrný integrál vypočítáme některou z metod uvedených v kapitolách 1.1, 1.2 nebo 1.3. Změní-li se orientace plochy, změní plošný integrál II. druhu znaménko.

5.4. Gauss-Ostrogradského věta, Stokesova věta

Průvodce studiem

Výpočet plošného integrálu II. druhu na uzavřené ploše se zjednoduší, převedeme-li ho za splnění jistých podmínek na integrál trojrozměrný. Urychlí to výpočet zejména v případě, kdy integrační oblastí je uzavřená plocha, která se skládá z více ploch (stěny kvádru, stěny krychle, …). Pak musíme počítat tolik plošných integrálů II. druhu, z kolika částí se skládá integrační plocha. Použijeme-li však Gauss-Ostrogradského větu, počítáme pouze jediný trojrozměrný integrál. Další možnost výpočtu plošného integrálu skýtá věta Stokesova, která řeší vzájemný vztah mezi plošným integrálem II. druhu a křivkovým integrálem II. druhu.

Cíle

Cílem této kapitoly je vysvětlit dvě další metody výpočtu plošného integrálu II. druhu - pomocí Gauss-Ostrogradského věty a pomocí Stokesovy věty.

Předpokládané znalosti

Integrační metody (základní integrační vzorce, metoda integrace substitucí, metoda per partes).

Křivkový integrál II. druhu.

Trojrozměrný integrál a jeho výpočet.

Plošný integrál II. druhu.

Analytická geometrie lineárních útvarů (obecná rovnice roviny, její směrnicový a úsekový tvar, parametrické rovnice přímky) a kvadratických útvarů (kvadratické plochy) v prostoru.

Vektorová funkce jedné a více nezávisle proměnných.

Výklad

Gauss-Ostrogradského věta vyjadřuje vztah mezi plošným integrálem II. druhu po uzavřené ploše a trojrozměrným integrálem. Je tedy jistou analogií Greenovy věty (kap. 4.4).

Úmluva

Plošný integrál II. druhu po uzavřené ploše σ značíme symbolem $\oiint_{\sigma}$.

Věta 5.4.1. (Gauss-Ostrogradského)

Předpoklady:

1. Nechť vektorová funkce $\bar{F}(X) = P(X)\bar{i} + Q(X)\bar{j} + R(X)\bar{k}$, a skalární funkce

   $div\ \bar{F}(X) = \frac{\partial P(X)}{\partial x} + \frac{\partial Q(X)}{\partial y} + \frac{\partial R(X)}{\partial z}$ jsou spojité v oblasti Ω.

2. Nechť oblast Ω je trojrozměrná, ohraničená a normální vzhledem ke všem třem souřadnicovým rovinám.

3. Nechť hranicí oblasti Ω je jednoduchá uzavřená hladká orientovaná plocha σ.

Tvrzení:

$$\oiint_{\sigma} \bar{F}(X).\bar{n}\ d\sigma = \iiint_{\Omega} div\ \bar{F}(X)dxdydz,$$

po rozepsání

$$\oiint_{\sigma} P(X)dydz + Q(X)dxdz + R(X)dxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P(X)}{\partial x} + \frac{\partial Q(X)}{\partial y} + \frac{\partial R(X)}{\partial z} \right) dxdydz. \quad (72)$$

Poznámky

1. Protože na pravé straně rovnice (72) *je integrál z divergence vektorového pole* $\bar{F}(X)$ *v oblasti* Ω, *používá se pro Gauss-Ostrogradského větu také název* ***divergenční teorém***.

2. Vzhledem k tomu, že levá strana rovnice (52) *z fyzikálního hlediska představuje tok vektorového pole* $\bar{F}(X)$ *plochou* σ, *můžeme větu 5.4.1 formulovat také takto:*

Tok vektorového pole $\bar{F}(X)$ ***uzavřenou plochou*** σ ***je roven trojnému integrálu divergence pole*** $\bar{F}(X)$ ***v oblasti*** Ω, ***která je ohraničena plochou*** σ.

3. V kapitole 3.3 jsme bod X, v němž platí $\operatorname{div} \bar{F}(X) > 0$, *nazvali zřídlo. Podle věty 5.4.1 to znamená, že tok vektorového pole* $\bar{F}(X)$ *malou uzavřenou ploškou, která zřídlo obklopuje, je kladný.*

Analogicky pro noru ($\operatorname{div} \bar{F}(X) < 0$*) platí, že tok vektorového pole malou uzavřenou ploškou, která noru obklopuje, je záporný.*

4. Podle Gauss-Ostrogradského věty můžeme plošný integrál II. druhu po uzavřené ploše σ *počítat převedením na trojrozměrný integrál, pokud jsou splněny předpoklady věty.*

Řešené úlohy

Příklad 5.4.1. Vypočítejte integrál $F = \oiint_{\sigma} xydydz + yzdxdz + xzdxdy$, kde plocha σ je vnější plocha krychle, jejíž stěny leží v rovinách $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 2, z = 2$.

Řešení: Krychle je trojrozměrná oblast normální vzhledem ke všem třem souřadnicovým rovinám. Plocha σ je uzavřená, jednoduchá, hladká a orientovaná. Předpoklady Gauss-Ostrogradského věty jsou splněny.

$$P(X) = xy, \quad Q(X) = yz, \quad R(X) = xz,$$
$$\frac{\partial P}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = x.$$

Oblast Ω je určena nerovnicemi $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 2.$

Podle vztahu (72) platí:

$$F = \iiint_{\Omega} (y+z+x)dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^2 dy \int_0^2 (x+y+z)dz = \int_0^2 dx \int_0^2 \left[(x+y)z + \frac{z^2}{2} \right]_0^2 dy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^2 \left((x+y).2 + 2 \right) dy = 2\int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} + y \right]_0^2 dx = 2\int_0^2 (2x+2+2)dx =$$

$$= 4\left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = 4.6 = 24.$$

Úlohy k samostatnému řešení

3. Použitím Gauss-Ostrogradského věty vypočítejte plošné integrály z úlohy 2. g) – m) v této kapitole.

Výklad

Stokesova věta vyjadřuje vztah mezi křivkovým integrálem II. druhu po uzavřené prostorové křivce a plošným integrálem II. druhu. Je tedy zobecněním věty Greenovy.

Věta 5.4.2. (Stokesova)

Předpoklady:

1. Nechť vektorové funkce $\bar{F}(X) = P(X)\bar{i} + Q(X)\bar{j} + R(X)\bar{k}$ a $rot\ \bar{F}(X)$ jsou spojité na ploše σ.
2. Nechť plocha σ je jednoduchá, hladká, ohraničená a kladně orientovaná.
3. Nechť hranicí plochy σ je uzavřená kladně orientovaná křivka *k*.

Tvrzení:

$$\oint_{k_+} \bar{F}(X).\overline{ds} = \iint_{\sigma_+} rot\ \bar{F}(X).\bar{n}\, d\sigma,$$

po rozepsání

$$\oint_{k_+} P(X)dx + Q(X)dy + R(X)dz = \iint_{\sigma_+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz. \quad (73)$$

Poznámky

1. Křivkový integrál vektorové funkce $\bar{F}(X)$ po uzavřené křivce k na levé straně rovnice (73) *představuje z fyzikálního hlediska cirkulaci vektorového pole $\bar{F}(X)$ po křivce k. Plošný integrál na pravé straně rovnice* (73) *určuje z fyzikálního hlediska tok vektorového pole rot $\bar{F}(X)$ plochou σ. Můžeme tedy Stokesovu větu interpretovat takto:*

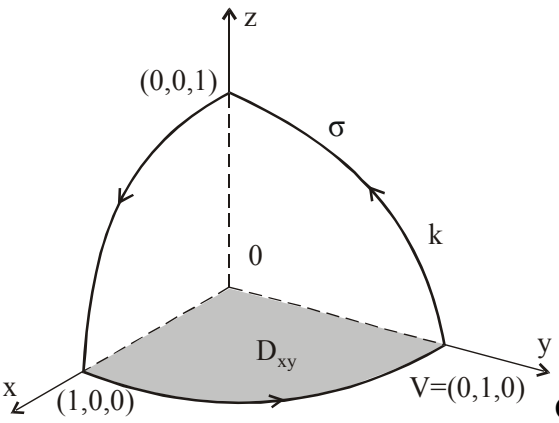
Cirkulace vektorového pole $\bar{F}(X)$ po uzavřené křivce k je rovna toku vektorového pole rot $\bar{F}(X)$ plochou σ, která je ohraničena křivkou k.

2. Podle Stokesovy věty můžeme křivkový integrál II. druhu po uzavřené křivce vypočítat převedením na plošný integrál II. druhu a naopak.

Řešené úlohy

Příklad 5.4.2. Vypočítejte cirkulaci C vektorového pole $\bar{F} = y^2\bar{i} - x^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ po kladně orientované křivce k, která je průsečnicí parabolické plochy $x^2 + z^2 = 1 - y$ se souřadnicovými rovinami v prvním oktantu, viz obr. 52.

Řešení: Vektor $\bar{F}$ má složky $P = y^2, Q = -x^2, R = z^2,$ pro derivace platí:



Obr. 52

$$P'_y = 2y, \qquad Q'_x = -2x, \qquad R'_x = 0,$$

$$P'_z = 0, \qquad Q'_z = 0, \qquad R'_y = 0.$$

Podle vztahu (73) platí:

$$C = \oint_{k_+} y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz = \iint_{\sigma} (-2x - 2y) dxdy + (0-0) dydz + (0-0) dxdz =$$

$$= -2 \iint_{\sigma} (x + y) dxdy,$$

kde plocha σ je povrch části paraboloidu $x^2 + z^2 = 1 - y$ v prvním oktantu.

Plošný integrál II. druhu vyřešíme promítnutím do roviny os x, y a použitím vztahu (70). Integrační oblast D_{xy} je určena nerovnicemi: $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x^2$.

$$C = -2 \iint_{D_{xy}} (x + y) dxdy = -2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} (x + y) dy = -2 \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x^2} dx =$$

$$= -2 \int_0^1 \left(x(1-x^2) + \frac{1}{2}(1-x^2)^2 \right) dx = -2 \int_0^1 (x - x^3 + \frac{1}{2} - x^2 + \frac{1}{2} x^4)\, dx =$$

$$= -2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = -\frac{31}{30}.$$

Úlohy k samostatnému řešení

4. Použitím Stokesovy věty vypočítejte křivkové integrály po křivce k:

a) $\oint_k xyzdx + xydy + xdz$, k: kružnice $x^2 + y^2 = 9$ v rovině $z = 0$,

b) $\oint_k (x^2 + y^2) dy$, k: strany obdélníka, které leží na přímkách $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 4$,

c) $\oint_k x(z - y)dx + y(x - z)dy + z(y - x)dz$, k: strany trojúhelníka ABC, $A = (a, 0, 0,)$,

$B = (0, a, 0)$, $C = (0, 0, a)$,

d) $\oint_k yzdx + xzdy + xydz$, k: libovolná jednoduchá uzavřená křivka,

e) $\oint_k ydx + zdy + xdz, k:$ kružnice, která je dána rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$

$x + y + z = 0,$

f) $\oint_k y^2dx + z^2dy + x^2dz, k:$ strany trojúhelníka ABC, $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$,

$C = (0,0,1),$

g) $\oint_k (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz, k:$ kružnice, která je dána rovnicemi

$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

4. a) 0; **b)** 16; **c)** a^3; **d)** 0; **e)** $-\sqrt{3}\pi r^2$; **f)** -1; **g)** 0.

Kontrolní otázky

1. V čem spočívá podstata Gauss-Ostrogradského věty?
   a) Převádí plošný integrál I. druhu na plošný integrál II. druhu,
   b) převádí plošný integrál II. druhu na plošný integrál I. druhu,
   c) převádí plošný integrál II. druhu na trojrozměrný integrál,
   d) převádí plošný integrál I. druhu na dvojrozměrný integrál.
2. Jaká musí být plocha σ, abychom k řešení plošného integrálu II. druhu mohli použít Gauss-Ostrogradského větu?
   a) Uzavřená, jednoduchá, hladká, orientovaná,
   b) uzavřená, jednoduchá, kladně orientovaná,
   c) uzavřená, hladká, kladně orientovaná,
   d) jednoduchá, hladká, kladně orientovaná, rovinná.
3. Jaké podmínky musí splňovat integrační oblast Ω v Gauss-Ostrogradského větě?
   a) Musí být rovinná, ohraničená a normální vzhledem k souřadnicové rovině os x, y,
   b) musí být trojrozměrná, ohraničená a normální vzhledem ke všem třem souřadnicovým rovinám,
   c) musí být ohraničená a normální vzhledem ke všem třem souřadnicovým osám,

d) musí být normální vzhledem ke všem třem souřadnicovým rovinám.

4. Který z následujících výrazů je tvrzením Gauss-Ostrogradského věty?

a) $\oiint_{\sigma} \bar{F}(X)d\sigma = \iiint_{\Omega} div\ \bar{F}(X)dxdydz$,

b) $\oiint_{\sigma} \bar{F}(X).\bar{n}d\sigma = \iiint_{\Omega} div\ \bar{F}(X)dxdydz$,

c) $\oiint_{\sigma} \bar{F}(X).\bar{n}d\sigma = \iiint_{\Omega} div\ \bar{n}\ dxdydz$,

d) $\oiint_{\sigma} \bar{F}(X).\bar{n}d\sigma = \iiint_{\Omega} div\ \bar{F}(X)d\sigma$.

5. Jaký jiný název se používá pro Gauss-Ostrogradského větu?

a) Rotační teorém, b) divergenční teorém,

c) plošný teorém, c) teorém toku.

6. V čem spočívá podstata Stokesovy věty?

a) Převádí křivkový integrál II. druhu po uzavřené křivce na plošný integrál II. druhu,

b) převádí plošný integrál II. druhu na plošný integrál I. druhu,

c) převádí plošný integrál II. druhu na trojrozměrný integrál,

d) převádí plošný integrál I. druhu na křivkový integrál I. druhu po uzavřené křivce.

7. Který z následujících výrazů je tvrzením Stokesovy věty?

a) $\oint_{k_+} \bar{F}(X).\overline{ds} = \iint_{\sigma_+} div\ \bar{F}(X).\bar{n}\ d\sigma$,

b) $\oint_{k_+} \bar{F}(X).\overline{ds} = \iint_{\sigma_+} grad\ \bar{F}(X).\bar{n}\ d\sigma$,

c) $\oint_{k_+} \bar{F}(X).\overline{ds} = \iint_{\sigma_+} rot\ \bar{F}(X).\bar{n}\ d\sigma$,

d) $\oint_{k_+} \bar{F}(X)\times\overline{ds} = \iint_{\sigma_+} rot\ \bar{F}(X).\bar{n}\ d\sigma$.

8. Která z následujících interpretací Stokesovy věty je správná?

a) Cirkulace vektorového pole $\bar{F}(X)$ po uzavřené křivce k je rovna toku vektorového pole $rot\ \bar{F}(X)$ plochou σ, která je ohraničena křivkou k,

b) výkon vektorového pole $rot\,\bar{F}(X)$ po uzavřené křivce k je rovna toku vektorového pole $rot\,\bar{F}(X)$ plochou σ, která je ohraničena křivkou k,

c) práce vektorového pole $\bar{F}(X)$ po křivce k s počátečním bodem A a koncovým bodem B je rovna divergenci vektorového pole $\bar{F}(X)$,

d) cirkulace vektorového pole $rot\,\bar{F}(X)$ po uzavřené křivce k je rovna toku vektorového pole $\bar{F}(X)$ plochou σ, která je ohraničena křivkou k.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. c); 2. a); 3. b); 4. b); 5. b); 6. a); 7. c); 8. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je potřeba prostudovat kapitolu 5.4 znovu.

Kontrolní test

1. Vypočítejte integrál $\iint_{\sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy$, kde σ je vnější plocha kvádru, jehož stěny leží v rovinách $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=2,\ y=4,\ z=6$.

a) 188, b) 136,

c) 144, d) 172.

2. Vypočítejte integrál $\iint_{\sigma} xydxdz$, kde σ je vnější plocha čtyřstěnu $2x+3y+6z=12$, $x=0,\ y=0,\ z=0$.

a) 8, b) 16,

c) 24, d) 32.

3. Vypočítejte integrál $\iint_{\sigma} (2z+3)dxdy$, kde σ je vnější strana kulové plochy $x^2+y^2+z^2=9$.

a) 36π, b) 72π,

c) 108π, d) 144π.

4. Vypočítejte integrál $\iint_{\sigma}(2xz+3)dxdy$, kde σ je vnější povrch osminy koule

$x^2+y^2+z^2=9,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ v prvním oktantu.

a) $\frac{36\pi}{5}$, b) $\frac{63\pi}{8}$,

c) $\frac{36\pi}{7}$, d) $\frac{81\pi}{8}$.

5. Vypočítejte integrál $\iint_{\sigma}x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$, kde σ je vnější strana kulové plochy

$x^2+y^2+z^2=4$.

a) $\frac{364\pi}{5}$, b) $\frac{363\pi}{5}$,

c) $\frac{388\pi}{5}$, d) $\frac{384\pi}{5}$.

6. Použitím Stokesovy věty vypočítejte integrál $\oint_{k}xdx+xydy+xyzdz$, kde křivka k_+ je

kružnice $x^2+y^2=4$ v rovině $z=1$.

a) 8, b) 4,

c) 2, d) 0.

7. Použitím Stokesovy věty vypočítejte integrál $\oint_{k}x(2z-y)dx+y(2x-z)dy+z(2y-x)dz$,

kde křivku k_+ tvoří strany trojúhelníka ABC, $A=(1,0,0,)$, $B=(0,2,0)$, $C=(0,0,3)$.

a) $\frac{13}{2}$, b) $\frac{11}{2}$,

c) $\frac{9}{2}$, d) $\frac{7}{2}$.

8. Použitím Stokesovy věty vypočítejte integrál $\oint_{k}x^2dx+y^2dy+z^2dz$, kde křivka k_+ je

kružnice, která je dána rovnicemi $x^2+y^2+z^2=4,\ x+2y+3z=0$.

a) 8, b) 4,

c) 2, d) 0.

9. Použitím Stokesovy věty vypočítejte integrál $\oint_k (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$, kde křivku k_+ tvoří strany trojúhelníka ABC, $A=(3,0,0)$, $B=(0,2,0)$, $C=(0,0,1)$.

a) 8, b) 4,

c) 2, d) 0.

10. Použitím Stokesovy věty vypočítejte integrál $\oint_k yzdx + 2xzdy + 3xy)dz$, kde křivku k_+ tvoří strany obdélníka, které leží na přímkách $x=0$, $y=0$, $x=3$, $y=5$ v rovině $z=2$.

a) 10, b) 20,

c) 30, d) 40.

Výsledky testu

1. c); 2. a); 3. b); 4. d); 5. d); 6. d); 7. c); 8. d); 9. d); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je nutno prostudovat kapitolu 5.4 znovu.

Shrnutí lekce

Pro řešení plošného integrálu II. druhu existují dvě další metody, jak ho vypočítat. Obě metody předpokládají určité speciální podmínky, za kterých je lze použít.

Plošný integrál II. druhu po uzavřené ploše σ můžeme za splnění dalších podmínek snadno vypočítat tak, že jej převedeme podle Gauss-Ostrogradského věty (věta 5.4.1) na trojrozměrný integrál po oblasti Ω, kterou plocha σ ohraničuje.

Věta Stokesova převádí plošný integrál II. druhu po ploše σ na křivkový integrál II. druhu po uzavřené křivce k, která je hranicí plochy σ.

Pokud nechceme k výpočtu Gauss-Ostrogradského větu nebo Stokesovu větu použít, můžeme postupovat univerzálními metodami, které jsou uvedeny v kapitole 5.3.

5.5. Aplikace plošného integrálu

Průvodce studiem

Dosud jsme se naučili počítat plošný integrál I. a II. druhu, aniž jsme věděli, k čemu nám získané znalosti budou užitečné. V této kapitole si ukážeme, proč jsme vlastně plošné integrály studovali. Poznáme jejich využití v geometrii při výpočtu metrických úloh a při výpočtu důležitých fyzikálních veličin, které charakterizují plošné hmotné útvary. Významnou aplikací plošných integrálů ve fyzice je výpočet toku vektorového pole plochou.

Cíle

V této kapitole se naučíme využívat plošné integrály v geometrii a ve fyzice či mechanice. Poznáme, jak vypočítat obsah plochy σ a objem tělesa, které je ohraničeno uzavřenou plochou σ. Využijeme plošné integrály pro výpočet toku vektorového pole plochou σ, hmotnosti a souřadnic těžiště hmotných ploch a také k určení statických momentů a momentů setrvačnosti hmotných ploch.

Předpokládané znalosti

Využijeme všechny poznatky, které jsme získali v předchozích kapitolách:

Integrační metody (základní integrační vzorce, metoda integrace substitucí, metoda per partes), výpočet určitého integrálu (Newton – Leibnizova věta).

Dvojrozměrný a trojrozměrný integrál a jejich výpočet.

Analytická geometrie lineárních útvarů (obecná rovnice roviny, její směrnicový a úsekový tvar, parametrické rovnice přímky) a kvadratických útvarů (kvadratické plochy) v prostoru.

Vektorová funkce jedné a více nezávisle proměnných.

5.5.1. Obsah plochy

Výklad

Je-li σ jednoduchá hladká plocha, pak plošný integrál I. druhu

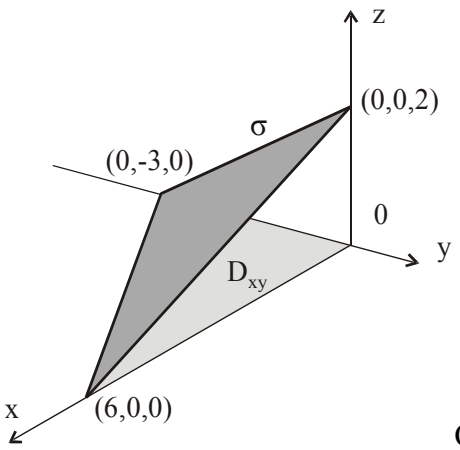
$$S = |\sigma| = \iint_{\sigma} d\sigma \tag{74}$$

značí **obsah plochy** σ.

Řešené úlohy

Příklad 5.5.1. Vypočítejte obsah trojúhelníka ABC, kde body A, B, C jsou průsečíky roviny $x - 2y + 3z = 6$ se souřadnicovými osami, viz obr. 53.

Řešení: Rovnici roviny převedeme na úsekový tvar $\frac{x}{6} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{2} = 1$. Body A, B, C mají souřadnice $A = (6,0,0,), B = (0,-3,0), C = (0,0,2)$. Z rovnice plochy σ vyjádříme $z = 2 + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x$, určíme derivace $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{3}$ a vypočítáme podle vztahu (69a) diferenciál $d\sigma = \sqrt{1 + (-\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2}\, dxdy = \frac{1}{3}\sqrt{14}\, dxdy.$



Obr. 53

Podle vztahu (69a) vypočítáme:

$$S=\iint_{\sigma} d\sigma=\iint_{D_{xy}} \frac{1}{3}\sqrt{14}\,dxdy=\left|\begin{array}{lllll} D_{xy}: & 0 & \le x \le & 6 \\ & \frac{x}{2}-3 & \le y \le & 0 \end{array}\right|=-\frac{1}{3}\sqrt{14}\int_0^6 dx\int_0^{\frac{x}{2}-3} dy=$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{14}\int_0^6 [y]_0^{\frac{x}{2}-3}dx=-\frac{1}{3}\sqrt{14}\int_0^6(\frac{x}{2}-3)dx=-\frac{1}{3}\sqrt{14}\left[\frac{x^2}{4}-3x\right]_0^6=3\sqrt{14}.$$

Lze také využít vlastnosti dvojrozměrného integrálu $\iint_{D_{xy}} dxdy=|D_{xy}|$.

Pak $S=\frac{1}{3}\sqrt{14}\iint_{D_{xy}} dxdy=\frac{1}{3}\sqrt{14}\,|D_{xy}|=\frac{1}{3}\sqrt{14}\,\frac{6.3}{2}=3\sqrt{14},$

neboť míra $|D_{xy}|$ je obsah pravoúhlého trojúhelníka se základnou 6 a výškou 3.

Poznámka

Při této příležitosti si připomeňme další metody výpočtu obsahu trojúhelníka:

- *Pomocí vektorového součinu* $S=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|,$
- *pomocí Heronova vzorce* $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ s=\frac{a+b+c}{2},$
- *pomocí běžně užívaného vzorce* $S=\frac{a.v_a}{2}=\frac{b.v_b}{2}=\frac{c.v_c}{2}.$

Úlohy k samostatnému řešení

5. Vypočítejte obsahy ploch:

a) Části roviny $6x+3y+2z=12,$ která leží v prvním oktantě,

b) části plochy rotačního paraboloidu $2z=x^2+y^2,$ která leží uvnitř rotační válcové plochy $x^2+y^2=1,$

c) části kulové plochy $x^2+y^2+z^2=r^2,$ která leží uvnitř rotační válcové plochy $x^2+y^2=9,\ r\ge 3,$

d) části kuželové plochy $z=\sqrt{x^2+y^2},$ která leží uvnitř rotační válcové plochy $x^2+y^2=2x,$ ✖

e) části plochy $z = xy,$ ležící uvnitř rotační válcové plochy $x^2 + y^2 = 4,$

f) části parabolické válcové plochy $z^2 = 4x,$ ohraničené parabolickou válcovou plochou $y^2 = 4x$ a rovinou $x = 1,$

g) části plochy $z^2 = 2xy$ nad obdélníkem, jehož stěny leží v rovinách $x = 0,\ y = 0,$ $x = 3,\ y = 6,$

h) části kuželové plochy $y^2 + z^2 = x^2,$ ohraničené hyperbolickou válcovou plochou $x^2 - y^2 = a^2,\ a > 0$ a rovinami $y = b,\ y = -b,$

i) části rotační válcové plochy $x^2 + y^2 = r^2,$ která je ohraničena rovinami $z = x,\ z = -x,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5. a) 14; **b)** $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$; **c)** $4\pi r(r-\sqrt{r^2-9})$; **d)** $\pi\sqrt{2}$; **e)** $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$; **f)** $\frac{16}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$; **g)** 36; **h)** $8ab\sqrt{2}$; **i)** $2r^2$.

5.5.2. Objem tělesa

Výklad

Nechť σ je jednoduchá hladká uzavřená plocha, která ohraničuje trojrozměrnou oblast $\Omega,$ normální vzhledem ke všem třem souřadnicovým rovinám. Pak **objem oblasti** Ω je určen pomocí plošného integrálu II. druhu

$$V = |\Omega| = \frac{1}{3}\iint_{\sigma} x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy. \qquad (75)$$

Uvedený vztah snadno odvodíme pomocí Gauss – Ostrogradského věty (72), jejíž předpoklady jsou splněny. Platí

$$P(X) = x, \quad Q(X) = y, \quad R(X) = z,$$
$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 1.$$

Po dosazení do vztahu (72) dostaneme

$$\frac{1}{3}\oiint_{\sigma} x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy = \frac{1}{3}\iiint_{\Omega}(1+1+1)\,dxdydz = \iiint_{\Omega} dxdydz = |\,\Omega\,| = V.$$

Řešené úlohy

Příklad 5.5.2. Odvoďte vztah pro výpočet objemu koule.

Řešení: Kulovou plochu $x^2+y^2+z^2=r^2$ rozdělíme na dvě části:

σ_1 nad rovinou $z=0$ má rovnici $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ a je orientována kladně,

σ_2 pod rovinou $z=0$ má rovnici $z=-\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ a je orientována záporně, viz obr. 49.

Průmětem obou ploch do roviny $z=0$ je kruh $x^2+y^2\le r^2$, proto zavedeme polární souřadnice (5): $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ dxdy=\rho\,d\rho\,d\varphi,$

$D_{\rho\varphi}: 0<\rho\le r,\ 0\le\varphi<2\pi.$

Podle vztahu (75) platí:

$$V=\frac{1}{3}\iint_{\sigma_{1+}} x\,dydz+y\,dxdz+z\,dxdy+\frac{1}{3}\iint_{\sigma_{2-}} x\,dydz+y\,dxdz+z\,dxdy$$

a podle vztahu (51a) je

$$V=\frac{2}{3}1\iint_{D_{xy}}\left(\sqrt{r^2-x^2-y^2}-x\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}-y\frac{-y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\right)dxdy=$$

$$=\frac{2}{3}\iint_{D_{xy}}\frac{r^2}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\,dxdy=\frac{2}{3}r^2\iint_{D_{\rho\varphi}}\frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{r^2-\rho^2}}=\frac{2}{3}r^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^r\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}=$$

$$=\frac{2}{3}r^2\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\left[-\sqrt{r^2-\rho^2}\right]_0^r=\frac{2}{3}r^2\,2\pi(-0+r)=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Integrál v proměnné ρ jsme vyřešili substitucí

$$r^2-\rho^2=t,\ -2\rho\,d\rho=dt,\ \rho\,d\rho=-\frac{dt}{2}.$$

Úlohy k samostatnému řešení

6. Užitím vztahu (75) vypočítejte objemy těles, která jsou ohraničena plochami:

a) $z = 4 - y^2,\ z = y^2 + 2,\ x = -1,\ x = 2,$

b) $z = x^2 + y^2,\ z = 2x^2 + 2y^2,\ y = x^2,\ y = x,$

c) $z = 4 - x^2,\ 2x + y = 4,\ y = 0,\ z = 0,\ x \geq 0,$

d) $z = 9 - y^2,\ 3x + 4y = 12,\ x = 0,\ z = 0,\ y \geq 0,$

e) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6},\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = a,\ y = b,\ a > 0,\ b > 0,$

f) $z = x^2 + y^2 + 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 4,\ y = 4,$

g) $x + y + z = 6,\ 3x + 2y = 12,\ 3x + y = 6,\ y = 0,\ z = 0,$

h) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

6. a) 8; **b)** $\frac{3}{35}$; **c)** $\frac{40}{3}$; **d)** 45; **e)** $\frac{1}{6}ab(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3})$; **f)** $\frac{560}{3}$; **g)** 12; **h)** $\frac{4}{3}\pi\, abc$.

5.5.3. Hmotnost plochy

Výklad

Je-li σ jednoduchá hladká plocha a $\mu = \mu(x, y, z)$ plošná hustota v jejím libovolném bodě $X = (x, y, z)$, pak plošný integrál I. druhu

$$m = \iint_{\sigma} \mu(x, y, z)\, d\sigma \qquad (76)$$

vyjadřuje **hmotnost plochy** σ.

Řešené úlohy

Příklad 5.5.3. Určete hmotnost části plochy $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ pro $z \in <0,1>$, viz obr. 54, je-li plošná hustota v libovolném bodě plochy přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od roviny $z = 0$ a v bodě $A = (1,1,1)$ je rovna 3.

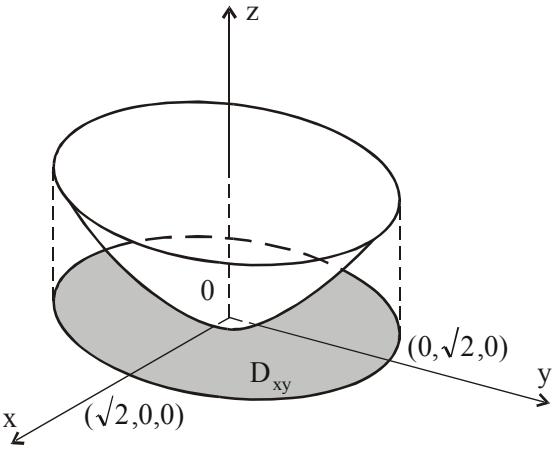
Řešení: Podle zadání je plošná hustota $\mu = c\,z,$ kde c je konstanta úměrnosti,

$\mu(A) = 3,$ to je $3 = c.1$ a odtud $c = \frac{1}{3}.$

Hustota je tedy určena vztahem $\mu(x, y, z) = \frac{1}{3}z.$

Pro derivace platí $\frac{\partial z}{\partial x} = x,\ \frac{\partial z}{\partial y} = y$ a tedy podle vztahu (69a) je diferenciál

$d\sigma = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy.$



Obr. 4

Pro hmotnost podle vztahu (76) platí:

$$m = \iint_{\sigma} \frac{1}{3} z\, d\sigma = \frac{1}{3} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy,$$

přičemž průmětem D_{xy} plochy σ do roviny $z = 0$ je kruh $x^2 + y^2 \le 2.$

Pro řešení použijeme polární souřadnice (5):

$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ dxdy = \rho\,d\rho\,d\varphi.$

Pak platí: $D_{\rho\varphi} : 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < \rho \le \sqrt{2}.$

Dále vypočítáme:

$$m = \frac{1}{6} \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2\sqrt{1 + \rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2\sqrt{1 + \rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} 1 + \rho^2 &=& u^2, \\ 2\rho d\rho &=& 2udu, \qquad \rho_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 1, \\ \rho d\rho &=& udu, \qquad \rho_2 = \sqrt{2} \Rightarrow u_2 = \sqrt{3} \\ \rho^2 &=& u^2 - 1, \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{3}} (u^2 - 1)\, u\, u du = \frac{1}{6}\, 2\pi \int_1^{\sqrt{3}} (u^4 - u^2) du = \frac{1}{3}\pi \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{45}\pi(6\sqrt{3} + 1).$$

Úlohy k samostatnému řešení

7. Určete hmotnost ploch:

a) Stěn krychle $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1,$ je-li plošná hustota určena vztahem $\mu(x, y, z) = xyz,$

b) části kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ v prvním oktantu, je-li plošná hustota v libovolném bodě rovna vzdálenosti tohoto bodu od roviny $y = 0,$

c) plochy trojúhelníka $ABC,\ A = (1,0,0),\ B = (0,1,0),\ C = (0,0,1),$ je-li plošná hustota v libovolném bodě plochy rovna vzdálenosti tohoto bodu od roviny $z = 0$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

7. a) $\frac{3}{4}$; **b)** $\frac{\pi}{4}$; **c)** $\frac{1}{6}\sqrt{3}$.

5.5.4. Statické momenty a souřadnice těžiště plochy

Výklad

Je-li σ jednoduchá hladká plocha a $\mu = \mu(x, y, z)$ její plošná hustota v jejím libovolném bodě $X = (x, y, z),$ pak pro **statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám** os $x, y,$ resp. x, z a resp. y, z platí:

$$S_{xy} = \iint_\sigma z\mu(x, y, z)\, d\sigma, \qquad (77a)$$

$$S_{xz} = \iint_\sigma y\mu(x, y, z)\, d\sigma, \qquad (77b)$$

$$S_{yz} = \iint_\sigma x\mu(x, y, z)\, d\sigma. \qquad (77c)$$

Označíme-li $T = (\xi, \eta, \zeta)$ **souřadnice těžiště plochy** σ, platí pro jejich výpočet vztahy:

$$\xi = \frac{S_{yz}}{m}, \qquad \eta = \frac{S_{xz}}{m}, \qquad \zeta = \frac{S_{xy}}{m}, \tag{78}$$

kde m je hmotnost plochy σ (76).

Řešené úlohy

Příklad 5.5.4. Určete těžiště horní poloviny kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, jestliže plošná hustota v každém bodě plochy je rovna čtverci vzdálenosti tohoto bodu od osy z.

Řešení: Hustota je určena vztahem $\mu(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Plochu σ vyjádříme ve tvaru $z = z(x, y) = +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$,

vypočítáme derivace $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$

a určíme podle vztahu (69a) diferenciál

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{r^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy = \frac{r dxdy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

Průmětem D_{xy} plochy σ do roviny $z = 0$ je kruh $x^2 + y^2 \le r^2$.

Zavedeme polární souřadnice (5): $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi.$.

Pro integrační oblast pak platí: $D_{\rho\varphi}:\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < \rho \le r.$

Pro diferenciál $d\sigma$ po dosazení platí: $d\sigma = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}\, \rho\, d\rho\, d\varphi.$

Podle vztahu (76) vypočítáme hmotnost

$$m = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \frac{r}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}\, \rho\, d\rho\, d\varphi = r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r} \rho^2 \frac{1}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}\, \rho\, d\rho =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} r^2 - \rho^2 &=& u^2, \\ -2\rho d\rho &=& 2u du, \\ \rho d\rho &=& -u du, \end{array} \quad \begin{array}{l} \rho_1 = 0 \Rightarrow u_1 = r, \\ \rho_2 = r \Rightarrow u_2 = 0 \end{array} \right| = r\left[\varphi\right]_0^{2\pi} \int_r^0 \frac{-(r^2 - u^2)}{u} u du = 2\pi\, r \int_0^r (r^2 - u^2) du =$$

$$= 2\pi\, r\left[r^2 u - \frac{u^3}{3} \right]_0^r = \frac{4}{3}\pi\, r^4 .$$

Plocha σ a funkce hustoty $\mu(x,y,z)$ mají osu symetrie v ose z a proto leží těžiště na této ose. Odtud $\xi = \eta = 0$ a také $S_{xz} = S_{yz} = 0$. Podle vztahu (77a) je

$$S_{xy} = \iint_{\sigma} (x^2+y^2) z \, d\sigma = \iint_{\sigma} (x^2+y^2)\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, d\sigma =$$

$$= \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, \frac{r\,dx\,dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = r \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= r \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \, \rho \, d\rho \, d\varphi = r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho^3 d\rho = r\,[\varphi]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^r = \frac{1}{2}\pi r^5 .$$

Podle vztahu (78) je $\xi = \dfrac{\frac{1}{2}\pi r^5}{\frac{4}{3}\pi r^4} = \frac{3}{8} r$ a $T = (0,0,\frac{3}{8}r)$.

Úlohy k samostatnému řešení

8. Určete souřadnice těžiště ploch:

a) Části roviny $x + y + z = 8$, která leží v prvním oktantu a je ohraničena rovinami $x = 2$, $y = 4$, je-li její hustota jednotková,

b) části kuželové plochy $x^2 + y^2 = z^2$ pro $z \in < 0,1 >$, je-li její hustota v každém bodě přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od osy z,

c) části kuželové plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ležící uvnitř rotační válcové plochy $x^2 + y^2 = 2y$, je-li její hustota jednotková, ✖

d) části kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ v prvním oktantu, je-li její hustota jednotková,

e) horní poloviny kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, je-li její hustota jednotková.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

8. a) $(1,2,5)$; **b)** $(0,0,\frac{3}{4})$; **c)** $(0,1,\frac{32}{9\pi})$; **d)** $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$; **e)** $(0,0,\frac{1}{2})$.

5.5.5. Momenty setrvačnosti plochy

Výklad

Je-li σ jednoduchá hladká plocha a $\mu = \mu(x,y,z)$ její plošná hustota v libovolném bodě $X = (x,y,z)$, pak moment setrvačnosti plochy σ při rotaci kolem osy x, resp. osy y, resp. osy z je určen vztahy

$$I_x = \iint_\sigma (y^2+z^2)\mu(x,y,z)d\sigma, \qquad (79a)$$

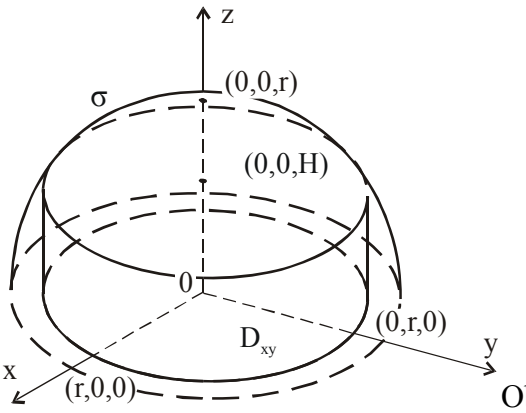
$$I_y = \iint_\sigma (x^2+z^2)\mu(x,y,z)d\sigma, \qquad (79b)$$

$$I_z = \iint_\sigma (x^2+y^2)\mu(x,y,z)d\sigma. \qquad (79c)$$

Řešené úlohy

Příklad 5.5.5. Určete moment setrvačnosti části homogenní kulové plochy $x^2+y^2+z^2 = r^2$, $z \in < H, r >$, $0 < H < r$, při rotaci kolem osy z, viz obr. 55.

Řešení:



Obr. 50

Plocha je homogenní, tedy plošná hustota $\mu = k$. Při výpočtu těžiště horní poloviny kulové plochy jsme určili diferenciál (příklad 5.5.4):

$$d\sigma = \frac{r dx dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = \frac{r\rho\, d\rho\, d\varphi}{\sqrt{r^2-\rho^2}}.$$

Oblast $D_{\rho\varphi}$ je určena nerovnicemi $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 < \rho \le \sqrt{r^2-H^2}$.

Podle vztahu (79c) vypočítáme:

$$I_z = \iint_{\sigma} (x^2+y^2)\,k\,d\sigma = k \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \frac{r\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\,d\rho\,d\varphi = kr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{r^2-H^2}} \frac{\rho^2}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} r^2-\rho^2 &=& u^2, \\ -2\rho\,d\rho &=& 2u\,du, \\ \rho\,d\rho &=& -u\,du, \end{array} \quad \begin{array}{c} \rho_1 = 0 \Rightarrow u_1 = r, \\ \rho_2 = \sqrt{r^2-H^2} \Rightarrow u_2 = H \end{array} \right| = -kr\left[\varphi\right]_0^{2\pi} \int_r^H \frac{r^2-u^2}{u}\,u\,du =$$

$$= 2\pi kr \int_H^r (r^2-u^2)\,du = 2\pi kr \left[r^2u - \frac{u^3}{3} \right]_H^r = 2\pi kr\left(r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2H + \frac{H^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi kr(2r^3 - 3r^2H + H^3).$$

Úlohy k samostatnému řešení

9. Vypočítejte momenty setrvačnosti homogenních ploch s jednotkovou hustotou při rotaci kolem osy z :

a) Části kuželové plochy $x^2+y^2=z^2$ pro $z \in <0,1>$,

b) kulové plochy $x^2+y^2+z^2=r^2$,

c) části plochy rotačního paraboloidu $x^2+y^2=2z$ pro $z \in <0,1>$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

9. a) $\frac{1}{2}\pi\sqrt{2}$; **b)** $\frac{8}{3}\pi r^4$; **c)** $4\pi\frac{6\sqrt{3}+1}{15}$.

5.5.6. Tok vektorového pole plochou

Výklad

Nechť na jednoduché, hladké, kladně orientované ploše σ je definovaná a ohraničená vektorová funkce $\bar{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$. Pak plošný integrál II. druhu

$$T = \iint_{\sigma} \bar{F}(X).\bar{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma} P(X)dydz + Q(X)dxdz + R(X)dxdy, \qquad (80)$$

kde $\bar{n}$ je jednotkový vektor normály k ploše σ, určuje **tok vektoru** $\bar{F}(x,y,z)$ **plochou** σ.

Pokud $\bar{F}(x,y,z)$ je vektor rychlosti proudící kapaliny, určuje tento integrál tok kapaliny plochou σ za jednotku času.

Řešené úlohy

Příklad 5.5.6. Vypočítejte tok vektorového pole $\bar{F} = x\bar{i} + 2y\bar{j} - z\bar{k}$ vnější stranou plochy kulové $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Řešení: Ze zadání vyplývá $P = x, Q = 2y, R = -z$ a proto podle vztahu (80) platí

$$T = \oiint_{\sigma} xdydz + 2ydxdz - zdxdy.$$

Vypočítáme derivace $\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -1$

a podle Gauss-Ostrogradského věty (vztah 72) převedeme plošný integrál na trojrozměrný:

$$T = \iiint_{\Omega} (1+2-1)dxdydz = 2\iiint_{\Omega} dxdydz = 2\,|\,\Omega\,| = 2\,\frac{4}{3}\pi\, 3^3 = 72\pi.$$

Úlohy k samostatnému řešení

10. Vypočítejte tok vektorového pole $\bar{F}$ plochou σ:

a) $\bar{F} = (x-2z)\bar{i} + (3z-4x)\bar{j} + (5x+y)\bar{k}$, σ: plocha čtyřstěnu $OABC, O = (0,0,0)$, $A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,0,1)$,

b) $\bar{F} = (x+z)\bar{i} + (y+x)\bar{j} + (z+y)\bar{k}$, σ: uzavřená plocha, jejíž hranice leží na plochách $x^2 + y^2 = 9, \; x = z, z = 0, \; z > 0$,

c) $\bar{F} = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$, σ: plocha kulová $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

d) $\bar{F} = 3x\bar{i} - 2z\bar{j} + y\bar{k}$, σ: plocha čtyřstěnu, jehož stěny leží v rovinách $x + y + z = 2, x = 0, y = 0, z = 0$,

e) $\bar{F} = 2x\bar{i} - y\bar{j} + z\bar{k}$, σ: uzavřená plocha, jejíž hranice leží na plochách

$9 - z = x^2 + y^2, z = 0,$

f) $\bar{F} = xy^2\bar{i} + yz^2\bar{j} + x^2z\bar{k}$, σ: kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$,

g) $\bar{F} = (x+z)\bar{i} + (y+z)\bar{k}$, σ: uzavřená plocha, jejíž hranice leží na plochách

$x^2 + y^2 = 9,\ z = y,\ z > 0,$

h) $\bar{F} = x^2\bar{i} + z^2\bar{j}$, σ: uzavřená plocha, jejíž hranice leží na plochách

$z^2 = 1 - x - y,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

10. a) $\frac{1}{6}$; **b)** 54; **c)** $\frac{12}{5}\pi$; **d)** 4; **e)** 81π; **f)** $\frac{4}{5}\pi r^5$; **g)** 36; **h)** $\frac{16}{105}$.

Kontrolní otázky

1. Který z následujících výrazů vyjadřuje obsah plochy σ?

a) $|\sigma| = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy$, b) $|\sigma| = \iint\limits_{\sigma} dxdy$,

c) $|\sigma| = \iint\limits_{\sigma} \sigma d\sigma$, d) $|\sigma| = \iint\limits_{\sigma} d\sigma$.

2. Objem tělesa Ω, které ohraničuje jednoduchá hladká uzavřená plocha σ, určen vztahem:

a) $\frac{1}{3}\oiint\limits_{\sigma} dydz + dxdz + dxdy$, b) $\frac{1}{3}\oiint\limits_{\sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy$,

c) $\frac{1}{3}\oiint\limits_{\sigma} dxdydz$, d) $\frac{1}{3}\oiint\limits_{\sigma} (x + y + z)dxdydz$.

3. Podle vztahu $\iint\limits_{\sigma} \mu(x,y,z)d\sigma$, v němž $\mu(x,y,z)$ znamená hustotu v bodě $X(x,y,z)$,

vypočítáme:

a) Obsah plochy σ,

b) hmotnost plochy σ,

c) objem tělesa Ω, které ohraničuje jednoduchá hladká uzavřená plocha σ,

d) obvod plochy σ.

4. Podle vztahu $\iint_{\sigma} P(X)dydz + Q(X)dxdz + R(X)dxdy$, vypočítáme:

a) Tok vektorového pole $\bar{F}(X) = (P(X), Q(x), R(X))$ plochou σ,

b) hmotnost plochy σ

c) obsah plochy σ,

d) práci vektorového pole $\bar{F}(X) = (P(X), Q(x), R(X))$ na ploše σ.

5. Které z následujících tvrzení je nepravdivé?

a) Těžiště homogenní koule je v jejím geometrickém středu,

b) těžiště homogenní koule leží na ose symetrie koule,

c) těžiště homogenní koule leží v rovině symetrie koule,

d) těžiště homogenní koule závisí na poloměru koule.

6. Cirkulaci vektorového pole neumožňuje vypočítat věta:

a) Greenova, b) Gauss-Ostrogradského,

c) Stokesova, d) Newton-Leibnizova.

7. Statický moment vzhledem k souřadnicové rovině os x, z jednoduché hmotné plochy σ, jejíž hustota v bodě $X(x,y,z)$ je $\mu(x,y,z)$, je určen vztahem:

a) $S_{xz} = \iint_{\sigma} xz\mu(x,y,z)d\sigma$, b) $S_{xz} = \iint_{\sigma} y\mu(x,y,z)d\sigma$,

c) $S_{xz} = \iint_{\sigma} y\mu(x,y,z)dxdz$, d) $S_{xz} = \iint_{\sigma} y\mu(x,y,z)dy$.

8. Moment setrvačnosti jednoduché hmotné plochy σ, jejíž hustota v bodě $X(x,y,z)$ je $\mu(x,y,z)$, která rotuje kolem osy x je určen vztahem:

a) $I_x = \iint_{\sigma} x^2\mu(x,y,z)dx$,

b) $I_x = \iint_{\sigma} x^2\mu(x,y,z)d\sigma$,

c) $I_x = \iint_{\sigma} y^2 + z^2\mu(x,y,z)d\sigma$,

d) $I_x = \iint_{\sigma} (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)d\sigma$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. d); 2. b); 3. b); 4. a); 5. d); 6. b); 7. b); 8. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v šesti případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je potřeba prostudovat kapitolu 5.5 znovu.

Kontrolní test

1. Vypočítejte obsah části plochy $z = x + y,$ ležící uvnitř rotační válcové plochy $x^2 + y^2 = 9$.

a) $12\pi\sqrt{3}$, b) $24\pi\sqrt{3}$,

c) $9\pi\sqrt{3}$, d) $36\pi\sqrt{3}$.

2. Vypočítejte obsah té části plochy $z = xy,$ jejímž průmětem do souřadnicové roviny os x, y je kruh $x^2 + y^2 = 9$.

a) $\frac{2\pi}{3}(10\sqrt{10} - 1)$, b) $\frac{4\pi}{3}(10\sqrt{10} - 1)$,

c) $\frac{8\pi}{3}(10\sqrt{10} - 1)$, d) $\frac{10\pi}{3}(10\sqrt{10} - 1)$.

3. Užitím vztahu (75) vypočítejte objem čtyřstěnu, který je ohraničen rovinami $4x + 3y + 2z = 12,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

a) 8, b) 12,

c) 16, d) 20.

4. Určete hmotnost části povrchu elipsoidu $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ v prvním oktantu, je-li jeho hustota v bodě $X(x, y, z)$ rovna vzdálenosti od souřadnicové roviny os x, y.

a) $\frac{56\pi}{3}$, b) $\frac{56\pi}{5}$,

c) $\frac{56\pi}{7}$, d) $\frac{56\pi}{9}$.

5. Vypočítejte hmotnost části kuželové plochy $x^2 + y^2 = z^2$ pro $z \in <1,3>$, jestliže její plošná hustota v bodě $X(x,y,z)$ je rovna vzdálenosti od osy z.

a) $\frac{56\pi}{3}\sqrt{2}$, b) $\frac{53\pi}{3}\sqrt{2}$,

c) $\frac{52\pi}{3}\sqrt{2}$, d) $\frac{50\pi}{3}\sqrt{2}$.

6. Určete statický moment vzhledem k souřadnicové rovině os x, y poloviny homogenní kulové plochy $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Bez újmy na obecnosti položte $\mu(x,y,z) = 1$.

a) 6π, b) 8π,

c) 10π, d) 12π.

7. Stanovte souřadnice těžiště poloviny homogenní kulové plochy $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

a) $T = (1,0,0)$, b) $T = (0,1,0)$,

c) $T = (0,0,1)$, d) $T = (0,1,1)$.

8. Určete moment setrvačnosti poloviny homogenní kulové plochy $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, která rotuje kolem osy z.

a) $\frac{64\pi}{3}$, b) $\frac{96\pi}{3}$,

c) $\frac{46\pi}{3}$, d) $\frac{52\pi}{3}$.

9. Určete tok vektorového pole $\overline{F}(X) = x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k}$ kladně orientovanou plochou ΔABC, kterou vytíná rovina $x + y + z = 4$ v prvním oktantu.

a) 38, b) 36,

c) 34, d) 32.

10. Vypočítejte tok vektorového pole $\overline{F}(X) = 2x\,\overline{i} + 2y\,\overline{j} + z^2\,\overline{k}$ kladně orientovanou kulovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

a) $\frac{64\pi}{3}$, b) $\frac{128\pi}{3}$,

c) $\frac{256\pi}{3}$, d) $\frac{512\pi}{3}$.

Výsledky testu

1. c); 2. a); 3. b); 4. d); 5. c); 6. b); 7. c); 8. a); 9. d); 10. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v osmi případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě doporučujeme prostudovat kapitolu 5.5 znovu.

Shrnutí lekce

V této kapitole jsme si ukázali využití plošných integrálů v matematice a fyzice. Plošný integrál I. druhu umožňuje vypočítat obsah plochy. Plošný integrál II. druhu nám dává další možnost, jak vypočítat objem tělesa.

V případě hmotné plochy, dokážeme plošným integrálem I. druhu jednoduše vypočítat její hmotnost, souřadnice těžiště, statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám a momenty setrvačnosti při rotaci plochy kolem souřadnicových os.

Plošný integrál II. druhu umožňuje určit tok vektorového pole plochou.

Literatura

[1] ANTON, H.: *Multivariable Calculus.* John Wiley & Sons. INC., New York, 1992

[2] BURDA, P., DOLEŽALOVÁ, J.: *Cvičení z matematiky IV.* Učební texty VŠB – TU Ostrava, 2002, ISBN 80-248-0028-4.

[3] BURDA, P., KREML, P.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné (Matematika IIa).* Učební texty VŠB – TU Ostrava, 2004, ISBN 80-248-0634-7.

[4] JAMES, G.: *Modern Engineering Mathematics.* Addison – Wesley Publishing Company, Wokingham, 1994, ISBN 0-201-18504-5.

[5] MEYBERG, K., VACHENAUER, P.: *Höhere Mathematik 1.* Springer – Verlag, Berlin, 1999, ISBN 3-540-66148-4.

[6] PAVELKA, L., PINKA, P.: *Integrální počet funkcí jedné proměnné (Matematika IIIa).* Učební texty VŠB – TU Ostrava, 1999, ISBN 80-7078-654-X.

[7] REKTORYS, K. A KOL.: *Přehled užité matematiky.* SNTL, Praha 1968.

[8] ŠKRÁŠEK, J., TICHÝ, Z: *Základy aplikované matematiky I.* SNTL, Praha, 1986.

[9] ŠKRÁŠEK, J., TICHÝ, Z: *Základy aplikované matematiky II.* SNTL, Praha, 1986.