VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

MATEMATIKA II

Pavel Kreml
Jaroslav Vlček
Petr Volný
Jiří Krček
Jiří Poláček

Vytvořeno v rámci projektu Operačního programu Rozvoje lidských zdrojů
CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016
Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

ESF – ROVNÉ PŘÍLEŽITOSTI PRO VŠECHNY

ISBN 978-80-248-1316-5

ČÁST III – DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

ISBN 978-80-248-1316-5

STUDIJNÍ OPORY S PŘEVAŽUJÍCÍMI DISTANČNÍMI PRVKY PRO PŘEDMĚTY TEORETICKÉHO ZÁKLADU STUDIA

je název projektu, který uspěl v rámci první výzvy Operačního programu Rozvoj lidských zdrojů. Projekt je spolufinancován státním rozpočtem ČR a Evropským sociálním fondem. Partnery projektu jsou Regionální středisko výchovy a vzdělávání, s.r.o. v Mostě, Univerzita obrany v Brně a Technická univerzita v Liberci. Projekt byl zahájen 5.1.2006 a bude ukončen 4.1.2008.

Cílem projektu je zpracování studijních materiálů z matematiky, deskriptivní geometrie, fyziky a chemie tak, aby umožnily především samostatné studium a tím minimalizovaly počet kontaktních hodin s učitelem. Je zřejmé, že vytvořené texty jsou určeny studentům všech forem studia. Studenti kombinované a distanční formy studia je využijí k samostudiu, studenti v prezenční formě si mohou doplnit získané vědomosti. Všem studentům texty pomohou při procvičení a ověření získaných vědomostí. Nezanedbatelným cílem projektu je umožnit zvýšení kvalifikace širokému spektru osob, které nemohly ve studiu na vysoké škole z různých důvodů (sociálních, rodinných, politických) pokračovat bezprostředně po maturitě.

V rámci projektu jsou vytvořeny jednak standardní učební texty v tištěné podobě, koncipované pro samostatné studium, jednak e-learningové studijní materiály, přístupné prostřednictvím internetu. Součástí výstupů je rovněž banka testových úloh pro jednotlivé předměty, na níž si studenti ověří, do jaké míry zvládli prostudované učivo.

Bližší informace o projektu můžete najít na adrese http://www.studopory.vsb.cz/.

Přejeme vám mnoho úspěchů při studiu a budeme mít radost, pokud vám předložený text pomůže při studiu a bude se vám líbit. Protože nikdo není neomylný, mohou se i v tomto textu objevit nejasnosti a chyby. Předem se za ně omlouváme a budeme vám vděčni, pokud nás na ně upozorníte.

POKYNY KE STUDIU

V úvodu si vysvětlíme jednotnou pevnou strukturu každé kapitoly textu, která by vám měla pomoci k rychlejší orientaci při studiu. Pro zvýraznění jednotlivých částí textu jsou používány ikony a barevné odlišení, jejichž význam nyní objasníme.

Průvodce studiem

vás stručně seznámí s obsahem dané kapitoly a s její motivací. Slouží také k instrukci, jak pokračovat dál po vyřešení kontrolních otázek nebo kontrolních textů.

Cíle

vás seznámí s učivem, které v dané kapitole poznáte a které byste po jejím prostudování měli umět.

Předpokládané znalosti

shrnují stručně učivo, které byste měli znát ještě dříve než kapitolu začnete studovat. Jsou nezbytným předpokladem pro úspěšné zvládnutí následující kapitoly.

Výklad

označuje samotný výklad učiva dané kapitoly, který je členěn způsobem obvyklým v matematice na definice, věty, případně důkazy.

Definice 1.1.1.
Zavádí základní pojmy v dané kapitole.

Věta 1.1.1.
Uvádí základní vlastnosti pojmů zavedených v dané kapitole.

Důkaz: Vychází z předpokladů věty a dokazuje tvrzení uvedené ve větě.

Poznámka

neformálně komentuje vykládanou látku..

Řešené úlohy

označují vzorové příklady, které ilustrují probrané učivo.

Příklad Uvádí zadání příkladu.

Řešení: Uvádí podrobné řešení zadaného příkladu.

Úlohy k samostatnému řešení

obsahují zadání příkladů k procvičení probraného učiva. Úlohy označené ✖ patří k obtížnějším a jsou určeny zájemcům o hlubší pochopení tématu.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

obsahují správné výsledky předchozích příkladů, slouží ke kontrole správnosti řešení.

Kontrolní otázky

obsahují soubor otázek k probranému učivu včetně několika odpovědí, z nichž je vždy alespoň jedna správná.

Odpovědi na kontrolní otázky

uvádějí správné odpovědi na kontrolní otázky.

Kontrolní test

obsahuje soubor příkladů k probranému učivu.

Výsledky testu

uvádějí správné odpovědi na příklady kontrolního testu.

Literatura

obsahuje seznam knih, které byly použity při tvorbě příslušného textu a na které byly případně uvedeny odkazy k hlubšímu prostudování tématu.

Piktogram, který upozorňuje na důležité vztahy nebo vlastnosti, které je nezbytné si zapamatovat.

INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

1. NEURČITÝ INTEGRÁL

Průvodce studiem

V kapitole Diferenciální počet funkcí jedné proměnné jste se seznámili s derivováním funkcí. Jestliže znáte derivace elementárních funkcí a pravidla pro derivování, jste schopni derivovat libovolnou funkci. Možná Vás napadne, zda je možno z derivované funkce nějakým způsobem získat původní funkci. Opačnou operací k derivování je integrace (anglické texty používají termín antiderivace). V této kapitole se seznámíte s pojmem primitivní funkce. Množinu všech primitivních funkcí k dané funkci nazveme neurčitým integrálem. Seznámíte se základními metodami integrace (substituční metoda a metoda per partes). V závěru se budeme věnovat způsobům integrace některých vybraných druhů funkcí.

1.1. Primitivní funkce a neurčitý integrál

Cíle

Seznámíte se s pojmem primitivní funkce a neurčitý integrál funkce jedné proměnné.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že umíte dobře derivovat funkce jedné proměnné, že znáte tabulku derivací elementárních funkcí. Předpokládá se i základní znalost pojmu diferenciál funkce.

Výklad

V kapitole Diferenciální počet funkcí jedné proměnné jste se seznámili s derivováním funkcí. Pro danou funkci $f(x)$ dovedeme nalézt její derivaci $f'(x) = g(x)$. Věnujme se nyní opačné úloze. Hledáme takovou funkci $F(x)$, aby daná funkce $f(x)$ byla její derivací, tj. aby platilo $F'(x) = f(x)$. Tato funkce, pokud ovšem existuje, se nejen v matematice hledá velmi často a jmenuje se primitivní funkce. Postup hledání primitivní funkce se nazývá integrování (opačná operace k derivování).

Příklad 1.1.1. Pro funkci $f(x) = 3x^2 \xrightarrow{\text{derivování}} f'(x) = 6x = g(x)$

Opačná úloha $F(x) = x^3 \xleftarrow{\text{integrování}} f(x) = 3x^2$, protože platí

$$F'(x) = \left[x^3\right]' = 3x^2 = f(x).$$

Definice 1.1.1.

Říkáme, že funkce $F(x)$ je v intervalu (a,b) **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$, platí-li pro všechna $x \in (a,b)$ vztah $F'(x) = f(x)$.

Řešené úlohy

Příklad 1.1.2. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x$ v intervalu $(-1,1)$.

Řešení:

Hledáme funkci $F(x)$, jejíž derivace se na intervalu $(-1,1)$ rovná x. Je zřejmé, že to bude nějaký násobek funkce x^2. Po krátkém experimentování zjistíme, že je to funkce $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$, neboť $F'(x) = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]' = \dfrac{2x}{2} = x = f(x)$. Podle věty 1.1.1 budou i funkce, které se liší konstantou, primitivní k dané funkci.

Příklad 1.1.3. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x$ v intervalu $(-\infty,\infty)$.

Řešení:

Jelikož všechny úvahy v řešení příkladu 1.1.2 platí pro libovolné reálné $x \in (-\infty,\infty)$, je řešením stejná funkce $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

Příklad 1.1.4. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x^n$, $n \in N$ v intervalu $(-\infty,\infty)$.

Řešení:

Podobnými úvahami dojdeme k tomu, že primitivní funkce má tvar $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$ pro všechna $x \in (-\infty,\infty)$, protože $F'(x) = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]' = \dfrac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n = f(x)$.

Příklad 1.1.5. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = \dfrac{1}{x}$ v intervalu $(0,\infty)$.

Řešení:

Vidíme, že vztah uvedený v příkladu 1.1.4 nelze použít pro $n = -1$. Snažíme se najít funkci, jejíž derivací je $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$. Z přehledu derivací elementárních funkcí víme, že touto funkcí je funkce $F(x)=\ln x$, neboť $F'(x)=\left[\ln x\right]'=\frac{1}{x}=f(x)$ pro $x\in(0,\infty)$.

Příklad 1.1.6. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x)=\frac{1}{x}$ v intervalu $(-\infty,0)$.

Řešení:

Podobnými úvahami jako v předcházející části zjistíme, že primitivní funkcí k funkci $f(x)=\frac{1}{x}$ pro $x\in(-\infty,0)$ je funkce $F(x)=\ln|x|=\ln(-x)$.

Funkce $F(x)=\ln|x|$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)=\frac{1}{x}$ pro $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Avšak také funkce $F(x)=\ln|x|+5$ bude primitivní funkcí k dané funkci, neboť platí $F'(x)=\left[\ln|x|+5\right]'=\frac{1}{x}=f(x)$, protože derivace konstanty je rovna nule. Je zřejmé, že tvrzení platí nejen pro konstantu 5, ale i pro libovolnou jinou konstantu C.

Věta 1.1.1.

Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a,b), pak také funkce $F(x)+C$, kde C je libovolná reálná konstanta, je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu (a,b).

Důkaz: Jelikož na intervalu (a,b) platí $\left[F(x)+C\right]'=F'(x)=f(x)$ dostaneme podle definice 1.1.1 uvedené tvrzení.

Poznámka

K dané funkci existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se liší konstantou.

Definice 1.1.2.

Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu (a,b) se nazývá neurčitý integrál této funkce. Píšeme:

$$\int f(x)dx=F(x)+C\ .$$

Poznámka

- $\int$ *se nazývá integrační znak,*
- $f(x)$ *je integrovaná funkce (integrand),*
- dx *je diferenciál integrační proměnné,*
- C *je integrační konstanta.*

Příklady 1.1.5 a 1.1.6 bychom mohli v souladu s definicí 1.1.2 formulovat: Integrujte funkci $f(x)=\frac{1}{x}$ na daném intervalu. Zápis: $\int \frac{1}{x}dx$. Výsledek, který jsme získali (množina všech primitivních funkcí $F(x)=\ln|x|+C$), zapíšeme: $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$. Tento vztah platí pro všechna x, pro něž jsou příslušné funkce ($\frac{1}{x}$ a $\ln|x|$) definovany, tj. pro všechna $x\neq 0$. V takových případech často vynecháváme interval, ve kterém pracujeme.

1.2. Základní neurčité integrály

Operace integrování (tj. operace určování primitivní funkce) a derivování jsou navzájem inverzní. Z tabulky derivací elementárních funkcí hned dostaneme tabulku neurčitých integrálů (tab. 1.2.1). O správnosti uvedených vztahů se podle definice 1.1.1 snadno přesvědčíme derivováním.

Tabulka 1.2.1. Tabulka základních integrálů

[1.]	$\int 0dx=C$	
[2.]	$\int 1dx=x+C$	
[3.]	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	pro $x>0,\ \ n\neq -1$
[4.]	$\int \frac{1}{x}dx=\ln\|x\|+C$	pro $x\neq 0$
[5.]	$\int \sin x\ dx=-\cos x+C$	
[6.]	$\int \cos x\ dx=\sin x+C$	
[7.]	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg} x+C$	pro $x\neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ \ k\in \mathbf{Z}$
[8.]	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{cotg} x+C$	pro $x\neq k\pi,\ \ k\in \mathbf{Z}$
[9.]	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$	pro $x\in(-1,1)$
[10.]	$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg} x+C$	
[11.]	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	pro $a>0,\ \ a\neq 1$

[12.] $\int e^x dx = e^x + C$

[13.] $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

[14.] $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ pro $a > 0$

[15.] $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ pro $x \in (-a, a)$, $a > 0$

[16.] $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ pro $a \neq 0$

Poznámka

Existují rozsáhlé tabulky, ve kterých lze nalézt množství dalších neurčitých integrálů. K výsledkům můžeme dospět použitím pravidel a metod integrace, které budou uvedeny v následující části. Dnes však tyto tabulky ztrácejí význam, neboť jsou dostupné matematické programy, které zvládnou integraci složitých funkcí (např. Derive, Maple, Mathematica). Na Internetu lze nalézt řadu online kalkulátorů (např. http://integrals.wolfram.com/index.jsp, http://www.webmath.com/integrate.html *a další). Po zadání integrované funkce je nalezena primitivní funkce.*

Neurčité integrály z dalších funkcí lze získat různými integračními metodami.

Z pravidel pro derivování funkcí $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(cf)' = cf'$, $c =$ konst. a z vlastnosti primitivní funkce okamžitě plyne:

Věta 1.2.1.

Mají-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu (a,b) primitivní funkce, pak platí:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \ , \ c = \text{konst.}$$

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

Řešené úlohy (úpravou integrandu)

Příklad 1.2.1. Vypočtěte integrál $\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{3x} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{3x^2+4x+2}{3x}\,dx=\int x\,dx+\frac{4}{3}\int x^0 dx+\frac{2}{3}\int \frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}\ln|x|+C\,.$$

Příklad 1.2.2. Vypočtěte integrál $\int (1-\sqrt{x})^2 dx$.

Řešení:

$$\int (1-\sqrt{x})^2 dx=\int (1-2\sqrt{x}+x)dx=\int dx-2\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x dx=x-2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}+C=$$

$$x-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+\frac{x^2}{2}+C\,.$$

Příklad 1.2.3. Vypočtěte integrál $\int tg^2 x\,dx$.

Řešení:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\operatorname{tg} x-x+C\,.$$

Příklad 1.2.4. Vypočtěte integrál $\int \operatorname{cotg} x\,dx$.

Řešení:

$$\int \operatorname{cotg} x\,dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx=\ln|\sin x|+C\,.$$

(Použili jsme vztah [13] z tabulky 1.2.1)

Příklad 1.2.5. Vypočtěte integrál $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

Řešení:

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}dx=\int (e^{2x}-e^x+1)dx=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C\,.$$

Při úpravě čitatele zlomku jsme použili vztah $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Příklad 1.2.6. Vypočtěte integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-9x^2}}$.

Řešení:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-(6x+9x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-(1+3x)^2+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(3x+1)^2}} =$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x+1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{3}+C$$ Použili jsme vztah [16] z tabulky 1.2.1.

Poznámka

I když všechny primitivní funkce k funkci $f(x)$ mají až na konstantu stejný tvar, může se stát, že při použití různých integračních metod dostaneme pokaždé „trochu jiný“ výsledek. V tomto případě je vždy možno převést jeden tvar výsledku na druhý. Například první metodou dostaneme

$\int \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{\cos^2 x}+C$. *Jinou metodou nám vyjde* $\int \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx = 1+\operatorname{tg}^2 x + C$. *Oba výsledky jsou správné, neboť* $1+\operatorname{tg}^2 x = 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Kontrolní otázky

1. Kolik primitivních funkcí existuje k funkci e^{2x}? Uveďte některé z nich.
2. Ke které funkci je funkce $F(x) = x(\ln x - 1)$ primitivní?
3. Je funkce $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$ primitivní funkce k funkci $\cos^3 x$?
4. Je funkce $\frac{1}{4+x^2}$ primitivní funkce k funkci $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$?
5. Lze při výpočtu následujícího integrálu použít naznačený postup?

   $$\int (2^{x+2} + \frac{1}{3x})dx = 4\int 2^x\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx$$
6. Platí $\int 3e^x \sin 2x dx = 3\int e^x dx \int \sin 2x dx$?

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ b) $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}-x\right)^2}{x^2}dx$ c) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x^3\sqrt{x}}}\,dx$

d) $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx$ e) $\int \frac{x^4+8x}{x+2}dx$ f) $\int \frac{x^2+2}{1+x^2}dx$

2. a) $\displaystyle\int \frac{\left(2^x-3^x\right)^2}{6^x}dx$ b) $\displaystyle\int\left(1+\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

d) $\displaystyle\int \sin x\cos x\, dx$ e) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx$ f) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\, dx$

3. a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+9}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3}$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+7}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$ e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{11}{4}-x-x^2}}$

4. a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$ c) $\displaystyle\int \frac{3x\, dx}{x^2+3}$

d) $\displaystyle\int\left(\sin 2x+e^{\frac{x}{2}}\right)dx$ e) $\displaystyle\int \operatorname{tg} 2x\, dx$ f) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$

5. a) $\displaystyle\int\left(10^{-x}+5\cos x-\sqrt{3x^5}+\frac{3}{x^2+4}\right)dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(x^2+1\right)}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2+2}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{3-2\operatorname{cotg}^2 x}{\cos^2 x}dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+C$; b) $-3x^{-\frac{1}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}+x+C$; c) $\frac{12}{23}x^{\frac{23}{12}}+C$; d) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$;

e) $\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x^2+C$ f) $x+\operatorname{arctg} x+C$. **2.** a) $\displaystyle\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}}-2x+C$;

b) $x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$; c) $\operatorname{tg} x-\operatorname{cotg} x+C$; d) $-\frac{1}{4}\cos 2x+C$; e) $-\operatorname{cotg} x-x+C$;

f) $2x-\operatorname{tg} x+C$. **3.** a) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$; c) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{3}}+C$;

d) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+C$; e) $\arcsin\frac{x-2}{2}+C$; f) $\arcsin\frac{2x+1}{6}+C$. **4.** a) $\ln\left|\ln x\right|+C$;

b) $-\ln\left|\arccos x\right|+C$; c) $\frac{3}{2}\ln\left(x^2+3\right)+C$; d) $-\frac{1}{2}\cos 2x+2e^{\frac{x}{2}}+C$; e) $-\frac{1}{2}\ln\left|\cos 2x\right|+C$;

f) $\ln\left(e^x+2\right)+C$. **5.** a) $-\frac{10^{-x}}{\ln 10}+5\sin x-\frac{2\sqrt{3}}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$; b) $-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}x+C$;

c) $\arcsin x+C$; d) $x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; e) $3\operatorname{tg}x-5x+C$.

Kontrolní test

1. Ke které funkci je funkce $F(x)=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)$ primitivní?

a) $\frac{x^3}{3+3x^2}+x^2\operatorname{arctg}x+\frac{1-x}{3(1+x^2)}$, b) $x^2\operatorname{arctg}x$,

c) $x^2\operatorname{arctg}x-\frac{x}{3}+\frac{x}{3(1+x^2)}$, d) $\frac{x^3-x}{3(1+x^2)}$.

2. Ke které funkci je funkce $F(x)=\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}$ primitivní?

a) $\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}-\frac{e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}$, b) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}+\frac{e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}$,

c) $\frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, d) $\frac{1+e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

3. Ke které funkci je funkce $F(x)=x^2-\frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}$ primitivní?

a) $2x-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$, b) $x(2+\sqrt{4-x^2})$,

c) $x(2-\sqrt{4-x^2})$, d) $2x(1+\sqrt{4-x^2})$.

4. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

a) $\frac{9}{7}\sqrt[3]{x^7}+6\sqrt[3]{x}+C$, b) $x^3+2x+3\sqrt[3]{x}+C$,

c) $9\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+C$, d) $\frac{9}{7}\sqrt[3]{x^7}+2\sqrt[3]{x}+C$.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{(2^x - 3^x)^2}{6^x} dx$.

a) $(\frac{2}{3})^x - 2x + (\frac{3}{2})^x + C$,
b) $(\frac{2}{3})^x \ln\frac{2}{3} - 2x + (\frac{3}{2})^x \ln\frac{3}{2} + C$,

c) $\frac{2^x 3^{-x} - 3^x 2^{-x}}{\ln 2 - \ln 3} - 2x + C$,
d) $\frac{2^x 3^{-x} + 3^x 2^{-x}}{\ln 2 - \ln 3} - 2x + C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\sqrt{x^4 + 2 + x^{-4}}}{x^3} dx$.

a) $\ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C$,
b) $-\frac{1}{x} - \frac{1}{5x^5} + C$,

c) $\ln|x| - \frac{5}{x^6} + C$,
d) $\ln|x| - \frac{\sqrt{2}}{2x^2} - \frac{1}{4x^4} + C$.

7. Vypočtěte neurčitý integrál $\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$.

a) $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x + \frac{1}{2}x + C$,
b) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C$,

c) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{cotg} x + C$,
d) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + x + C$.

8. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \operatorname{cotg}^2 x \, dx$.

a) $\operatorname{cotg} x - x + C$,
b) $\operatorname{tg} x - x + C$,

c) $-\operatorname{cotg} x - x + C$,
d) $-\frac{1}{\sin x} - x + C$.

9. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{8 - x^3}{x - 2} dx$.

a) $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + C$,
b) $-\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + C$,

c) $8\ln|x-2| - \frac{x^4}{4} + C$,
d) $-\frac{x^3}{3} - x^2 - 4x + C$.

10. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

a) $\arccos\frac{x+2}{3}+C$, b) $\arcsin\frac{x-2}{3}+C$,

c) $\arcsin\frac{x+2}{3}+C$, d) $\arccos\frac{x-2}{3}+C$.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. b); 4. a); 5. c); 6. a); 7. b); 8. c); 9. d); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.1 a 1.2 znovu.

Shrnutí lekce

V prvých dvou kapitolách jste se seznámili s pojmy primitivní funkce a neurčitý integrál. Operace integrování (tj. operace určování primitivní funkce) a derivování jsou navzájem inverzní. Tabulka 1.2.1 obsahuje přehled základních integrálů. Doporučujeme vytisknout si tuto tabulku, neboť bude využívána v dalších kapitolách při integraci složitějších funkcí. Všechny příklady a cvičení v kapitole 1.1.2 vyřešíme tak, že integrovanou funkci upravujeme, až dostaneme základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1.

1.3. Integrace metodou per partes

Průvodce studiem

V předcházející kapitole jsme poznali, že integrování součtu funkcí lze provést jednoduše, známe-li integrály jednotlivých sčítanců (věta 1.2.1). Součin funkcí už obvykle nelze integrovat jednoduše. Problém je v tom, že neexistuje univerzální algoritmus pro integrování součinu funkcí (to je podstatný rozdíl proti derivování součinu funkcí!). V některých případech lze integrovat součin funkcí metodou per partes (čili po částech).

Cíle

Seznámíte se s principem integrace metodou per partes a se základními typy integrálů, které lze touto metodou vypočítat.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte pojem primitivní funkce k dané funkci, znáte základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1 a umíte vypočítat jednoduché integrály úpravou integrované funkce (integrandu).

Výklad

Pro integrování součinu dvou funkcí $f(x)\cdot g(x)$

$\int f(x)\cdot g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$ **obecně neplatí!!!**

Avšak ze vztahu pro derivování součinu dvou funkcí

$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$ dostaneme $u'\cdot v = (u\cdot v)' - u\cdot v'$

a odtud integrováním

$$\int u'\cdot v\, dx = \int \left[(u\cdot v)' - u\cdot v'\right] dx = u\cdot v - \int u\cdot v' dx .$$

Věta 1.3.1. (Integrování per partes, čili po částech)

Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu (a,b) spojitou derivaci, pak v (a,b) platí

$$\int u'(x)\cdot v(x)\, dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx \ .$$

Poznámka

Integrační metoda se nazývá per partes (po částech), neboť se integrál z funkce $f(x) = u'(x)\cdot v(x)$ *vypočte jen zčásti. Zbývá totiž vypočíst další integrál z funkce*

$g(x) = u(x) \cdot v'(x)$. *Integrování metodou per partes vyžaduje určitou „prozíravost“, abychom volili funkce* $u'(x)$ *a* $v(x)$ *tak, aby byl integrál* $\int g(x)dx = \int u(x) \cdot v'(x)dx$, *pokud možno, jednodušší.*

Řešené úlohy

Příklad 1.3.1. Vypočtěte integrál $\int (x^2 + x)\cos x \, dx$

Řešení:

Použijeme metodu per partes, přičemž položíme

$u' = \cos x$, $v = x^2 + x$,

takže $u = \sin x$, $v' = 2x + 1$.

Proto je $\int (x^2 + x)\cos x \, dx = (x^2 + x)\sin x - \int (2x+1)\sin x \, dx$.

K výpočtu posledního integrálu opět použijeme metody per partes, přičemž položíme

$u' = \sin x$, $v = 2x + 1$,

takže $u = -\cos x$, $v' = 2$.

Dostaneme $\int (2x+1)\sin x \, dx = -(2x+1)\cos x + 2\int \cos x \, dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C_1$.

Je tedy $\int (x^2 + x)\cos x \, dx = (x^2 + x)\sin x + (2x+1)\cos x - 2\sin x + C$.

Kdybychom v daném integrálu zvolili $u' = x^2 + x$, $v = \cos x$,

bylo by $u = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}$ $v' = -\sin x$ a daný integrál bychom dostali ve tvaru

$\int (x^2 + x)\cos x \, dx = \left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}\right)\cos x + \int \left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}\right)\sin x \, dx$, což je integrál složitější než původní.

Příklad 1.3.2. Vypočtěte integrál $\int x^2 \ln x \, dx$

Pokud bychom stejně jako v úloze a) volili

$u' = \ln x$, $v = x^2$, dostaneme $u = \int \ln x dx$. Tento integrál je však pro nás v tomto okamžiku obtížný. Proto volíme

$u' = x^2$, $v = \ln x$,

takže $u = \dfrac{x^3}{3}$, $v' = \dfrac{1}{x}$.

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C .$$

Pro jednoduché typy integrálů postupujeme podle následujícího schématu:

Jednoduché typy integrálů řešitelných metodou per partes.

Je-li $P(x)$ polynom stupně $n \geq 1$, pak u integrálů typu:

$$\int P(x) \sin x \, dx ,$$

$$\int P(x) \cos x \, dx ,$$

$$\int P(x) e^x dx ,$$

$$\int P(x) \mathrm{a}^x \, dx$$

položíme $v = P(x)$, takže $v' = P'(x)$,

kdežto u integrálů typu:

$$\int P(x) \ln x \, dx ,$$

$$\int P(x) \operatorname{arctg} x \, dx ,$$

$$\int P(x) \operatorname{arccotg} x \, dx ,$$

$$\int P(x) \arcsin x \, dx ,$$

$$\int P(x) \arccos x \, dx$$

položíme $u' = P(x)$, takže $u = \int P(x) dx$,

kde $P(x)$ je polynom stupně $n \geq 0$ (tedy i konstanta).

Řešené úlohy

Příklad 1.3.3. Vypočtěte integrál $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

Řešení:

Integrovanou funkci můžeme výhodně zapsat ve tvaru $\operatorname{arctg} x = 1 \cdot \operatorname{arctg} x$.

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \operatorname{arctg} x \\ u = x & v' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Při výpočtu druhého integrálu jsme použili vztah [13] z tabulky 1.2.1.

Příklad 1.3.4. Vypočtěte integrál $\int x^2 e^{-x} dx$.

Řešení:

$$\int x^2 e^{-x} dx = \begin{vmatrix} u' = e^{-x} & v = x^2 \\ u = -e^{-x} & v' = 2x \end{vmatrix} = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u' = e^{-x} & v = 2x \\ u = -e^{-x} & v' = 2 \end{vmatrix} = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2\int e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C.$$

Příklad 1.3.5. Vypočtěte integrál $\int x^n \ln x \, dx$

Řešení:

$$\int x^n \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u' = x^n & v = \ln x \\ u = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} & v' = \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

Speciálně pro $n = 0$ dostáváme

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C.$$

Příklad 1.3.6. Vypočtěte integrál $\int e^{-x} \cos(2x) dx$.

Řešení:

V tomto případě lze volit $u' = e^{-x}$. K cíli však povede i volba $u' = \cos(2x)$.

$$\int e^{-x} \cos(2x) dx = \begin{vmatrix} u' = e^{-x} & v = \cos(2x) \\ u = -e^{-x} & v' = -2\sin(2x) \end{vmatrix} = -e^{-x}\cos(2x) - 2\int e^{-x} \sin(2x) dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u' = e^{-x} & v = \sin(2x) \\ u = -e^{-x} & v' = 2\cos(2x) \end{vmatrix} = -e^{-x}\cos(2x) - 2\left[-e^{-x}\sin(2x) + 2\int e^{-x}\cos(2x) dx\right] =$$

$-e^{-x}\cos(2x) + 2e^{-x}\sin(2x) - 4\int e^{-x}\cos(2x)dx$.

Jestliže hledaný integrál označíme symbolem $I = \int e^{-x}\cos(2x)dx$, dostáváme rovnici

$I = -e^{-x}\cos(2x) + 2e^{-x}\sin(2x) - 4I$.

Z této rovnice vypočteme neznámou I

$5I = -e^{-x}\cos(2x) + 2e^{-x}\sin(2x)$,

$$I = \frac{1}{5}\left[-e^{-x}\cos(2x) + 2e^{-x}\sin(2x)\right] = \frac{e^{-x}}{5}\left[2\sin(2x) - \cos(2x)\right] + C .$$

Poznámka

Stejně jako v příkladu 1.3.6 se někdy stává, že při použití metody per partes dostaneme násobek hledaného integrálu: $\int f(x)dx = F(x) + k\int f(x)dx$ *(k je konstanta). Je-li* $k \neq 1$, *lze hledaný integrál vypočítat převedením integrálů na stejnou stranu rovnice. Tedy*

$(1-k)\int f(x)dx = F(x)$, *odkud*

$$\int f(x)dx = \frac{1}{1-k}F(x) + C .$$

Kontrolní otázky

1. Proč se integrační metoda nazývána per partes?
2. Lze integrál $\int e^{2x}\cdot e^{3x}dx = \int e^{2x}dx \cdot \int e^{3x}dx$ počítat naznačeným způsobem? Čemu se rovná tento integrál?
3. Jak by se podle věty 1.3. vypočítal integrál typu $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx$?
4. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int x^3 \sin x\,dx$?
5. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int x^3 \ln x\,dx$?
6. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int \ln^2 x\,dx$?
7. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int e^{2x}\sin x\,dx$?
8. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x) = x$ a výsledný integrál je $I = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$.

9. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x)=\sin 3x$ a výsledný integrál je

$$I=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C.$$

10. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x)=1$ a výsledný integrál je $I=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int x^2\sin x\,dx$ b) $\int(2x+3)\cos 2x dx$ c) $\int 3x\cos\frac{x}{2}dx$

d) $\int xe^{2x}dx$ e) $\int\left(x^2+2x\right)e^{\frac{x}{3}}dx$ f) $\int x^2 2^{-x}dx$

2. a) $\int x^2\ln x dx$ b) $\int 2x\,\mathrm{arctg}\,x dx$ c) $\int\sqrt{x}\ln 2x dx$

d) $\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$ e) $\int x\ln^2 x dx$ f) $\int 4x^3\,\mathrm{arctg}\,x dx$

3. a) $\int\ln x dx$ b) $\int\ln^2 x dx$ c) $\int\mathrm{arctg}\,x dx$

d) $\int\mathrm{arccotg}\,x dx$ e) $\int\arcsin x dx$ f) $\int\arccos x dx$

4. a) $\int e^x\cos x dx$ b) $\int e^{-2x}\sin 3x dx$ c) $\int 2^x\cos 2x dx$

d) $\int\cos(\ln x)dx$ e) $\int\sin(\ln 2x)dx$ f) $\int e^{-x}\sin^2 x dx$

5. a) $\int\frac{2x}{\sin^2 x}dx$ b) $\int\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$ c) $\int\mathrm{arctg}(2x+3)dx$

d) $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ e) $\int\ln^3 x dx$ f) $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\left(2-x^2\right)\cos x+2x\sin x+C$; b) $\left(x+\frac{3}{2}\right)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$;

c) $6\left(x\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\right)+C$; d) $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$; e) $3e^{\frac{x}{3}}\left(x^2-4x+12\right)+C$;

f) $-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\left(x^2+\frac{2x}{\ln 2}+\frac{2}{\ln^2 2}\right)$. **2.** a) $\frac{x^3}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)+C$; b) $\left(x^2+1\right)\mathrm{arctg}\,x-x+C$;

c) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln 2x-\frac{2}{3}\right)+C$; d) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\left(\ln x+\frac{3}{2}\right)+C$; e) $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$;

f) $\left(x^4-1\right)\operatorname{arctg} x-\frac{x^3}{3}+x+C$. **3.** a) $x\ln x-x+C$; b) $x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+C$;

c) $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$; d) $x\operatorname{arccotg} x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$; e) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$;

f) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$. **4.** a) $\frac{1}{2}e^x\left(\sin x+\cos x\right)+C$;

b) $-\frac{1}{13}e^{-2x}\left(3\cos 3x+2\sin 3x\right)+C$; c) $\frac{2^{x+2}\ln 2}{4+\ln^2 2}\left(\cos 2x-\ln 2\sin 2x\right)+C$;

d) $\frac{x}{2}\left(\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right)+C$; e) $\frac{x}{2}\left(\sin\left(\ln x\right)-\cos\left(\ln x\right)\right)+C$;

f) $e^{-x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\sin 2x+\frac{1}{10}\cos 2x\right)+C$. **5.** a) $2\ln\left|\sin x\right|-2x\operatorname{cotg} x+C$;

b) $\operatorname{tg} x\left(\ln\left(\cos x\right)+1\right)-x+C$; c) $\left(x+\frac{3}{2}\right)\operatorname{arctg}\left(2x+3\right)-\frac{1}{4}\ln\left(4x^2+12x+10\right)+C$;

d) $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$; e) $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x-6\ln x+6\right)+C$; f) $\frac{e^x}{x+1}+C$.

Kontrolní test

1. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x)=x$ a výsledný integrál je $I=-\frac{x}{4}\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$.

   a) $v(x)=\sin 2x$, b) $v(x)=\sin x\cos x$,

   c) $v(x)=x\sin 2x$, d) $v(x)=\sin\frac{x}{2}$.

2. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x)=1$ a výsledný integrál je $I=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$.

   a) $v(x)=\ln 2x$, b) $v(x)=2\ln x$, c) $v(x)=\ln x^2$, d) $v(x)=\ln^2 x$.

3. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$?

   a) $u'=x,\quad v=\operatorname{arctg} x$, b) $u'=\operatorname{arctg} x,\quad v=x$,

   c) $u'=1,\quad v=x\operatorname{arctg} x$. d) $u'=x\operatorname{arctg} x,\quad v=1$

4. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int\frac{x^3}{e^x}dx$?

   a) $u'=x^3,\quad v=e^x$, b) $u'=x^3,\quad v=e^{-x}$,

   c) $u'=\frac{1}{e^x},\quad v=x^3$, d) $u'=1,\quad v=x^3e^{-x}$.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

a) $x \operatorname{cotg} x - \ln|\sin x| + C$, b) $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$,

c) $x \operatorname{tg} x - \ln|\cos x| + C$, d) $x \operatorname{cotg} x + \ln|\sin x| + C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} dx$.

a) $-\operatorname{cotg} x \ln \cos x - x + C$, b) $-\operatorname{cotg} x \ln \cos x + x + C$,

c) $\operatorname{cotg} x \ln \cos x - x + C$, d) $\operatorname{cotg} x \ln \cos x + x + C$.

7. Vypočtěte neurčitý integrál $\int (x^2 - x) \sin 2x dx$.

a) $(-\frac{x^2}{2} + x) \cos 2x - \frac{1}{2}(x-1) \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$,

b) $(x^2 - 2x) \cos 2x - (x-1) \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + C$,

c) $(-\frac{x^2}{2} + x) \cos 2x + (x-1) \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$,

d) $(-\frac{x^2}{2} + x) \cos 2x + \frac{1}{2}(x-1) \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$.

8. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int x 3^x dx$?

a) $x 3^x \ln 3 - 3^x \ln^2 3 + C$, b) $\frac{3^x}{\ln 3}(x - \frac{1}{\ln 3}) + C$,

c) $x 3^x - 3^x \ln 3 + C$, d) $\frac{x 3^x}{\ln 3} + \frac{3^x}{\ln 3^2} + C$.

9. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int x \ln(1-x) dx$?

a) $\frac{x^2 - 1}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{2}(x + \frac{x^2}{2}) + C$, b) $\frac{x^2 - 1}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2}(x + \frac{x^2}{2}) + C$,

c) $\frac{x^2}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}) + C$, d) $\frac{-x}{1-x} + \ln(1-x) + C$.

10. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int e^{2x}\sin x dx$?

a) $\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x+\cos x)+C$, b) $\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)+C$,

c) $\frac{1}{2}e^{2x}(\sin x-\cos x)+C$, d) $\frac{1}{5}e^{2x}(\cos x+2\sin x)+C$.

Výsledky testu

1. b); 2. d); 3. a); 4. c); 5.b); 6. a); 7. d); 8. b); 9. a); 10. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.3 znovu a propočítat další úlohy k samostatnému řešení.

Shrnutí lekce

Pro integraci součinu dvou funkcí $f(x)\cdot g(x)$ nelze nalézt obecnou formuli (na rozdíl od derivování součinu funkcí). Při integraci součinu funkce a derivace jiné funkce lze často užít metodu per partes (po částech). Nejčastěji je tato metoda využívána při výpočtu integrálů typu $\int P(x)\cdot f(x)\,dx$, kde $P(x)$ je polynomická funkce (může být i $P(x)=1$) a $f(x)$ je trigonometrická, exponenciální, logaritmická nebo cyklometrická funkce. Metoda bude úspěšná, pokud zbývající integrál bude jednodušší než integrál původní.

1.4. Integrace substitucí

Průvodce studiem

Integrály, které nelze řešit pomocí základních vzorců, lze velmi často řešit substituční metodou. Vzorce pro derivace elementárních funkcí a věty o derivaci součtu a součinu funkcí nám v kapitolách 1.2 a 1.3 umožnily nalézt vzorce, resp. metody pro výpočet některých neurčitých integrálů. V této kapitole pro výpočet využijeme větu o derivaci složené funkce. Pomocí ní získáme větu, která nám poskytne jednu z nejdůležitějších a nejčastěji používaných metod integrování – substituční metodu. Připomínáme, že neexistuje univerzální návod, kdy substituční metodu použít, ani jakou substituci zvolit. Doporučujeme pečlivě prostudovat tuto kapitolu a propočítat si řešené úlohy. Důležité je získat zkušenosti se substituční metodou samostatným řešením většího množství příkladů.

Cíle

Seznámíte se s principem integrace substituční metodou a se základními typy integrálů, které lze touto metodou vypočítat.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte pojem primitivní funkce k dané funkci, znáte základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1 a umíte vypočítat jednoduché integrály úpravou integrované funkce (integrandu). Bude užíváno pravidlo pro výpočet derivace složené funkce, diferenciálu funkce jedné proměnné a inverzní funkce.

Výklad

Velmi často se vyskytují integrály typu

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx$$

nebo integrály, které se dají na tento tvar upravit. Tento tvar má například integrál

$$\int 2x\sin(x^2+1)\,dx\,.$$

V tomto případě je $f(u)=\sin u$, $u=\varphi(x)=x^2+1$, a tedy $u'=\varphi'(x)=2x$.

Všimněte si, že integrovaná funkce má tyto vlastnosti:

- Je součinem dvou funkcí $f\left(\varphi(x)\right)$ a $\varphi'(x)$.

- První z nich je složená funkce s vnější funkcí f a vnitřní funkcí φ. Druhá je derivací vnitřní funkce.

Předpokládejme, že funkce $f(u)$ je spojitá na intervalu (α,β) a funkce $u=\varphi(x)$ má derivaci $\varphi'(x)$ na intervalu (a,b), a nechť pro každé $x\in(a,b)$ platí $\varphi(x)\in(\alpha,\beta)$ (funkce $\varphi(x)$ zobrazuje interval (a,b) do intervalu (α,β)).

Protože funkce $f(u)$ je spojitá na intervalu (α,β), má na něm spojitou primitivní funkci $F(u)$, takže platí $f(u)=F'(u)$. Funkce $F(u)$ je na uvedeném intervalu složenou funkcí $F(\varphi)$, tedy pro derivaci složené funkce platí:

$$\left[F(\varphi(x))\right]' = F'(u)\varphi'(x) = f(u)\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

To znamená (podle definice 1.1.1), že funkce $F(\varphi(x))$ je primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na intervalu (a,b) a tedy

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) = F(u) = \int f(u)du .$$

Získaný výsledek zformulujeme ve větě:

Věta 1.4.1. (Integrování substituční metodou $\varphi(x)=u$)

Nechť $F(u)$ je primitivní funkce ke spojité funkci $f(u)$ na intervalu (α,β). Nechť má funkce $u=\varphi(x)$ derivaci $\varphi'(x)$ na intervalu (a,b) a nechť pro každé $x\in(a,b)$ platí $\varphi(x)\in(\alpha,\beta)$. Potom je funkce $F(\varphi(x))$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na intervalu (a,b). Tedy platí

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du .$$

Poznámka

Vzorec ve větě 1.4 si zapamatujeme velmi snadno. V integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ *položíme* $u=\varphi(x)$ *(provedeme substituci). Diferencováním dostaneme* $du=\varphi'(x)dx$. *Takže za výraz* $\varphi'(x)dx$ *v daném integrálu můžeme formálně dosadit* du.

Tvrzení věty 1.4.1 můžeme přehledně shrnout:

Substituce typu $\varphi(x) = u$

Máme vypočítat integrál typu $\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx$.

Jsou-li splněny předpoklady věty 1.4.1, položíme (provedeme substituci)

$\varphi(x) = u$. Diferencováním této rovnice dostaneme

$\varphi'(x)dx = du$. Daný integrál tedy převedeme na tvar

$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du$.

Postup bude úspěšný, pokud umíme vypočítat integrál $\int f(u)\,du$.

Řešené úlohy

Příklad 1.4.1. Vypočtěte integrál $\int 2x\sin(x^2+1)\,dx$.

Řešení:

Je zřejmé, že pro všechna $x \in (-\infty,\infty)$ je $2xdx$ diferenciál funkce x^2+1. Proto položíme $u = x^2+1 = \varphi(x)$, a tedy $du = 2xdx = \varphi'(x)dx$. Funkce $f(u) = \sin u$ je spojitá pro všechna $u \in (-\infty,\infty)$ a má na tomto intervalu primitivní funkci $F(u) = \cos u$. Jsou splněny předpoklady věty 1.4.1, proto platí:

$$\int 2x\sin(x^2+1)\,dx = \int \sin u\,du = -\cos u + C = -\cos(x^2+1) + C.$$

Příklad 1.4.2. Vypočtěte integrál $\int \sin^3 x\cos x\,dx$.

Řešení:

Je zřejmé, že pro všechna $x \in (-\infty,\infty)$ je $\cos x\,dx$ diferenciál funkce $\sin x$. Proto položíme

$u = \sin x$, potom $du = \cos x\,dx$.

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ u = \sin x\\ du = \cos x\,dx\end{array}\right| = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Příklad 1.4.3. Vypočtěte integrál $\int f(ax+b)dx$ pro $a \neq 0$, (vzorec [16] v tabulce 1.2.1.)

Řešení:

O platnosti vzorce [16] v tabulce 1.2.1 jsme se mohli snadno přesvědčit derivováním. Ke stejnému výsledku můžeme dospět substitucí. Je-li funkce $f(u)$ spojitá na intervalu (α,β), má na něm spojitou primitivní funkci $F(u)$. Vnitřní funkce $u=\varphi(x)=ax+b$ má na intervalu $(-\infty,\infty)$ nenulovou derivaci $\varphi'(x)=a$ pro $a\neq 0$, a proto

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)a\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ u=ax+b\\ du=adx\end{array}\right|=\frac{1}{a}\int f(u)\,du=\frac{1}{a}F(u)+C=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\,.$$

Podle tohoto vztahu dostáváme:

$\int\frac{1}{3x+5}dx=\frac{1}{3}\ln|3x+5|+C$ ($ax+b=3x+7=u$ a $f(u)=\frac{1}{u}$),

$\int(3-2x)^4dx=\frac{1}{-2}\frac{(3-2x)^5}{5}+C=-\frac{1}{10}(3-2x)^5+C$ ($ax+b=-2x+3=u$ a $f(u)=u^4$),

$\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$ ($ax+b=2x=u$ a $f(u)=e^u$).

Příklad 1.4.4. Vypočtěte integrál $\int 3x\sqrt{5+x^2}\,dx$.

Řešení:

$$\int 3x\sqrt{5+x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ u=5+x^2\\ du=2xdx\end{array}\right|=\frac{3}{2}\int 2x\sqrt{5+x^2}\,dx=\frac{3}{2}\int\sqrt{u}\,du=\frac{3}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=u^{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\sqrt{\left(5+x^2\right)^3}+C\,.$$

Příklad 1.4.5. Vypočtěte integrál $\int\frac{\operatorname{cotg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Řešení:

$$\int\frac{\operatorname{cotg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ u=\sqrt{x}\\ du=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx\end{array}\right|=2\int\frac{\operatorname{cotg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx=2\int\operatorname{cotg}u\,du=2\int\frac{\cos u}{\sin u}du=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ t=\sin u\\ dt=\cos u du\end{array}\right|=$$

$$=2\int\frac{1}{t}dt=2\ln|t|+C=2\ln|\sin u|+C=2\ln\left|\sin\sqrt{x}\right|+C\,.$$

Místo druhé substituce bylo možno přímo použít vzorec [13] v tabulce 1.2.1.

Příklad 1.4.6. Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$.

Řešení:

Při výpočtu integrálu $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$ se musíme omezit na nějaký interval, v němž se $\sin x$ nikdy nerovná nule (pro jednoduchost např. na $x \in (0, \pi)$). Pro úpravu integrandu použijeme vztah $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ u = \frac{x}{2} \\ du = \frac{1}{2}\,dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin u\cos u}\,du = \int \frac{1}{\frac{\sin u}{\cos u}\cos^2 u}\,du =$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg} u\cos^2 u}\,du \quad \text{pro} \quad u \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Jelikož $\frac{1}{\cos^2 u}$ je derivace funkce $\operatorname{tg} u$, provedeme substituci $t = \operatorname{tg} u$ (tedy $t > 0$). Dostaneme

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} u\cos^2 u}\,du = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ t = \operatorname{tg} u \\ dt = \frac{du}{\cos^2 u} \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln t + C = \ln \operatorname{tg} u + C =$$

$$= \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Výklad

Podle věty 1.4.1 jsme integrál

$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ substitucí $\varphi(x) = u$ převedli na integrál $\int f(u)\,du$.

V některých případech je vhodné zvolit opačný postup.

Máme vypočítat integrál $\int f(x)\,dx$. Substitucí $x = \varphi(t)$ (tedy $dx = \varphi'(t)\,dt$) se snažíme tento integrál převést na integrál $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$, který může být jednodušší. Otázkou je, zda po nalezení primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ dovedeme najít primitivní funkci k funkci $f(x)$. Je to možné, pokud vedle předpokladů věty 1.4.1 ještě platí:

- funkce $\varphi(t)$ je na intervalu (α,β) ryze monotónní,
- pro každé $t\in(\alpha,\beta)$ je $\varphi'(t)\neq 0$.

Za uvedených předpokladů k funkci $x=\varphi(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$ existuje inverzní funkce $t=\varphi^{-1}(x)=\psi(x)$ pro $x\in(a,b)$ a tato inverzní funkce má derivaci

$$\psi'(x)=\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Je-li $G(t)$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na intervalu (α,β), pak platí

$$G'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Složená funkce $F(x)=G(\psi(x))$ definovaná na intervalu (a,b) je na tomto intervalu primitivní funkcí k funkci $f(x)$, protože podle věty o derivaci složené funkce platí:

$$F'(x)=G'(t)\psi'(x)=f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=f(\varphi(t))=f(x).$$

Získaný výsledek zformulujeme ve větě:

Věta 1.4.2 (Integrování substituční metodou $x=\varphi(t)$)

Nechť funkce $x=\varphi(t)$ zobrazující interval (α,β) na interval (a,b) je rostoucí, popř. klesající, na intervalu (α,β) a má tam spojitou derivaci $\varphi'(t)\neq 0$ a nechť funkce $t=\psi(x)$ je inverzní funkce k funkci $x=\varphi(t)$ na intervalu (a,b). Je-li $f(x)$ spojitá funkce na intervalu (a,b) a je-li $G(t)$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na intervalu (α,β), potom pro všechna $x\in(a,b)$ platí

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=G(t)+C=G(\psi(x))+C.$$

Tvrzení věty 1.4.2 můžeme přehledně shrnout:

Substituce typu $x=\varphi(t)$

Máme vypočítat integrál typu $\int f(x)dx$.

Jsou-li splněny předpoklady věty 1.4.2, položíme (provedeme substituci)

$x=\varphi(t)$. Diferencováním této rovnice dostaneme

$dx=\varphi'(t)dt$. Daný integrál tedy převedeme na tvar

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,.$$

Postup bude úspěšný, pokud umíme vypočítat integrál $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

Poznámka

Při výpočtu integrálů substituční metodou obvykle počítáme podle vzorce z věty 1.4.1 nebo 1.4.2, dokud nenalezneme primitivní funkci. Obvykle teprve potom zkontrolujeme, zda jsou splněny předpoklady použité věty. O správnosti výsledku se můžeme snadno přesvědčit derivováním nalezené primitivní funkce.

Řešené úlohy

Příklad 1.4.7. Vypočtěte integrál $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Řešení:

Funkce $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ je spojitá pro $x\in(-2,2)$. Zavedeme substituci $x=2\sin t$, $dx=2\cos t\,dt$. Je však nutno omezit proměnnou x tak, aby bylo možno nalézt funkci inverzní $t=\arcsin\frac{x}{2}$. Pro $t\in(0,\frac{\pi}{2})$ bude $x\in(0,2)$ a funkce $\varphi(t)=2\sin t$ bude mít rostoucí nenulovou derivaci $\varphi'(t)=2\cos t$. Dostaneme

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ x=2\sin t\\ dx=2\cos t\,dt\end{array}\right| = \int\sqrt{4-4\sin^2 t}\;2\cos t\,dt = 4\int\sqrt{1-\sin^2 t}\;\cos t\,dt =$$

$$=4\int\cos^2 t\,dt = 4\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2\int(1+\cos 2t)dt =$$

$$=2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C = 2t+2\sin t\cos t+C = 2t+2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}+C =$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}+x\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+C = 2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C\,.$$

Při výpočtu jsme použili vzorce

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \text{a} \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Analogický výsledek bychom dostali pro $t\in(-\frac{\pi}{2},0)$, kdy $x\in(-2,0)$.

Příklad 1.4.8. Vypočtěte integrál $\int \sin\sqrt{x}dx$.

Řešení:

Integrovaná funkce je definována pro $x \in < 0,\infty)$. Provedeme substituci $x = t^2$, abychom odstranili odmocninu v integrandu. Ze substituce vyplývá, že $t = \sqrt{x}$ nebo $t = -\sqrt{x}$. Zvolíme $t = \sqrt{x}$, takže t je z intervalu $(0,\infty)$. Dostaneme

$$\int \sin\sqrt{x}\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = t^2 \\ dx = 2t\, dt \end{array} \right| = 2\int t \sin t\, dt\,.$$

Získaný integrál řešíme metodu per partes podobně jako příklad 1.3.1:

$$2\int t\sin t\, dt = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin t & v = t \\ u = -\cos t & v' = 1 \end{array} \right| = 2(-t\cos t + \int \cos t\, dt) = 2(-t\cos t + \sin t) + C =$$

$$= 2(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}) + C\,.$$

Sami vyzkoušejte, že pro volbu $t = -\sqrt{x}$ tj. $t \in (-\infty,0)$ dostaneme stejný výsledek.

Příklad 1.4.9. Vypočtěte integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Řešení:

Funkce $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ je spojitá pro $x \in (-\infty,\infty)$. Položíme $x = \operatorname{cotg} t$. Funkce $\operatorname{cotg} t$ je pro $t \in (0,\pi)$ klesající a zobrazuje tento interval na interval $(-\infty,\infty)$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = \operatorname{cotg} t \\ dx = \dfrac{-1}{\sin^2 t} dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 t}} \frac{-1}{\sin^2 t} dt = -\int \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t}}} \frac{1}{\sin^2 t} dt =$$

$$= -\int \frac{|\sin t|}{\sin^2 t} dt = -\int \frac{1}{\sin t} dt\,,$$ neboť pro $t \in (0,\pi)$ je $\sin t > 0$.

Dostali jsme integrál, který jsme řešili v příkladu 1.4.6.

$$-\int \frac{1}{\sin t} dt = -\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + C = -\ln \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arccotg} x\right) + C\,.$$

Poznámka

Pokud zadáme integrál nějakému matematickému programu (např. Derive, Maple, *Mathematica), získáme výsledek* $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. *Na první pohled se zdá, že se jedná o úplně jinou funkci. Derivováním se však snadno přesvědčíme, že výsledek je správný. Znamená to, že programy použily jinou metodu výpočtu, než jsme uvedli my.*

V literatuře [9] lze nalézt postup, jak převést jeden výsledek na druhý. Druhé řešení můžeme dostat následujícím postupem:

✖ Provedeme substituci $\sqrt{1+x^2}=t-x$.

Po umocnění uvedené rovnice snadno vypočteme $x=\dfrac{t^2-1}{2t}$ a tedy $dx=\dfrac{2t^2+2}{4t^2}dt$.

Dosazením do integrálu dostaneme:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{1}{t-\dfrac{t^2-1}{2t}}\frac{2(t^2+1)}{4t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.$$

Jelikož je $x+\sqrt{x^2+1}>0$, dostaneme $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, což je hledaný výsledek.

Poznámka

Použitá substituce patří mezi Eulerovy substituce použitelné při výpočtu složitějších integrálů z racionální funkce, která navíc obsahuje výraz typu $\sqrt{ax^2+bx+c}$. *Podrobnější informace naleznete v literatuře* [6], [9], [14], [17].

Příklad 1.4.10. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$.

Řešení:

Funkce $\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$ je definována pro $x\in<0,\infty)$. Ve funkci se vyskytují mocniny $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}$.

Zavedeme substituci $x=t^k$ tak, abychom odstranili všechny odmocniny ve výrazu. V našem případě bude k nejmenší společný násobek čísel 2 a 3. Pro $x=t^6$ bude $\sqrt{x}=t^3$ a $\sqrt[3]{x}=t^2$. Analogicky jako v příkladu 1.4.8 budeme volit $t=\sqrt[6]{x}$ pro $t\in<0,\infty)$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3}{1+t^2} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^8}{1+t^2} dt = 6\int \left(t^8 : (t^2+1)\right) dt =$$

$$= 6\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t \right) + C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[6]{x^3}}{3} - \sqrt[6]{x} + \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} \right) + C .$$

Kontrolní otázky

1. Uveďte princip substituční metody.
2. Kdy a za jakých podmínek použijeme substituci typu $\varphi(x) = u$?
3. Kdy a za jakých podmínek použijeme substituci typu $x = \varphi(t)$?
4. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$?
5. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \cos x \sin x \, dx$?
6. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$?
7. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$?

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int x^2 \sqrt[3]{x^3+3}\,dx$ b) $\int \frac{x}{\left(x^2+4\right)^6} dx$ c) $\int \frac{3x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}} dx$

d) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ e) $\int \frac{3}{2-5x} dx$ f) $\int \sqrt{7-3x}\,dx$

2. a) $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx$ b) $\int \cos^3 x \sin x \, dx$ c) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$

d) $\int e^{\cos^2 x} \sin 2x \, dx$ e) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}} dx$ f) $\int \frac{\ln x - 2}{x\sqrt{\ln x}} dx$

3. a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+3}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x-\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}dx$ f) $\displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt[4]{\sin x+\cos x}}dx$

4. a) $\displaystyle\int \frac{3^x}{4+9^x}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\ln^2(\operatorname{tg} x)}{\sin x\cos x}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$ e) $\displaystyle\int \frac{\arccos x-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}}{9+4x^2}dx$

5. a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)\sqrt{x-3}}dx$

d) $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,dx$ e) $\displaystyle\int \cos\sqrt[3]{x}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{1}{4}\left(x^2+3\right)^{\frac{2}{3}}+C$; b) $\frac{-1}{10\left(x^2+4\right)^5}+C$; c) $\frac{9}{8}\left(x^4+1\right)^{\frac{2}{3}}+C$; d) $-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$;

e) $-\frac{3}{5}\ln|2-5x|+C$; f) $-\frac{2}{9}(7-3x)^{\frac{3}{2}}+C$. **2.** a) $\frac{1}{5}\ln^5 x+C$; b) $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$;

c) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+C$; d) $-e^{\cos^2 x}+C$; e) $-2\sqrt{2+\cos x}+C$; f) $2\sqrt{\ln x}\left(\frac{\ln x}{3}-1\right)+C$.

3. a) $-2\ln\left|\cos\sqrt{x}\right|+C$; b) $-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}}+C$; c) $\ln\left(\sin^2 x+3\right)+C$;

d) $\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+x^2\right)-\operatorname{arctg}^2 x\right)+C$; e) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}^{\frac{3}{2}} e^x+C$; f) $-\frac{4}{3}(\cos x+\sin x)^{\frac{3}{4}}+C$.

4. a) $\frac{1}{2\ln 3}\operatorname{arctg}\frac{3^x}{2}+C$; b) $\sqrt{x}(\ln x-2)+C$; c) $\frac{1}{3}\ln^3(\operatorname{tg} x)+C$; d) $\arcsin\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)+C$;

e) $\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\arccos^2 x+C$; f) $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}^2\frac{2x}{3}+C$. **5.** a) $3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$;

b) $4\sqrt{x}-x-4\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C$; c) $2\sqrt{x-3}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-3}{2}}+C$;

d) $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}+C$; e) $3\left(\sqrt[3]{x^2}\sin\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x}-2\sin\sqrt[3]{x}\right)+C$;

f) $-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arccotg}\frac{x}{3}\right)\right|+C$.

Kontrolní test

1. Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu $\int\frac{3}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$?

   a) $\frac{1}{x}=t$, b) $\ln x=t$,

   c) $\ln^2 x=t$, d) $\sqrt{1-\ln^2 x}=t$.

2. Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu $\int\sin^3 x\cos 2x\,dx$?

   a) $\cos x=t$, b) $\sin x=t$,

   c) $\cos 2x=t$, d) $\sin^3 x=t$.

3. Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$?

   a) $x=t^2$, b) $\frac{1}{\sqrt{x}}=t$,

   c) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}=t$, d) $x=t^4$.

4. Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu $\int\frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$?

   a) $e^{2x}=t$, b) $e^x=t$,

   c) $e^{3x}=t$, d) $e^{2x}+1=t$.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int(x+2)e^{x^2+4x+5}dx$.

   a) $e^{x^2+4x+5}+C$, b) $(x+2)e^{x^2+4x+5}-e^{x^2+4x+5}+C$,

   c) $2e^{x^2+4x+5}+C$, d) $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+5}+C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}\,dx$.

a) $\arcsin 3^x + C$, b) $\ln 3 . \arcsin 3^x + C$,

c) $\frac{1}{\ln 3}\arcsin 3^x + C$, d) $2\sqrt{1-9^x}$.

7. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$.

a) $2\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$, b) $\operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$,

c) $\ln\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$, d) $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$.

8. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$?

a) $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} - x + C$, b) $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} - \sqrt{1+x^2} + C$,

c) $\frac{1}{2}(1+x^2) - \ln\sqrt{1+x^2} + C$, d) $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + \sqrt{1+x^2} + C$.

9. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int \cos^3 x\,dx$?

a) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$, b) $-\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + C$,

c) $x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$, d) $x + \frac{1}{3}\sin^3 x + C$.

10. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int \frac{\sqrt{e^x}}{e^x + 4}\,dx$?

a) $\ln(e^x + 4) + C$, b) $\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2} + C$,

c) $2\sqrt{e^x} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{e^x}}{2} + C$, d) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{e^x}}{2} + C$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. d); 4. b); 5. d); 6. c); 7. a); 8. b); 9. a); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.4 znovu a propočítat další úlohy k samostatnému řešení.

Shrnutí lekce

Při výpočtu integrálů je často používána substituční metoda. Substituční metodou lze řešit dva typy úloh. V prvním typu integrálů se snažíme integrand upravit na dva činitele, z nichž jeden je složenou funkcí proměnné x s vnitřní funkcí $\varphi(x)$ a druhý je derivací této funkce $\varphi'(x)$. Tedy se snažíme integrál upravit na tvar $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$. Jestliže nyní položíme $\varphi(x) = u$, je $\varphi'(x)dx = du$ a daný integrál převedeme na integrál $\int f(u)\,du$. Méně často používáme druhý typ substituce. Integrál $\int f\left(x\right)dx$ lze někdy substitucí $x = \varphi(t)$, a tedy $dx = \varphi'(t)\,dt$, převést na jednodušší integrál $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. Uvedené metody budou úspěšné, pokud umíme vypočítat nové integrály. Tento postup lze realizovat, pokud jsou splněny podmínky uvedené ve větách v této kapitole. Při výpočtu integrálů substituční metodou obvykle počítáme formálně podle uvedených vztahů, dokud nenalezneme primitivní funkci. Obvykle teprve potom zkontrolujeme, zda jsou splněny předpoklady použité věty. O správnosti výsledku se můžeme snadno přesvědčit derivováním nalezené primitivní funkce. Úspěch při integrování substituční metodou závisí na obratnosti a zkušenosti, abychom dopředu viděli, na jaký integrál určitou substitucí upravíme původní integrál, případně jak integrál upravit, abychom v integrované funkci viděli tvar $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. V některých případech můžeme integrál řešit pomocí různých substitucí.

1.5. Integrace racionálních funkcí

Průvodce studiem

V předcházejících kapitolách jsme se naučili počítat neurčité integrály úpravou na základní integrály, metodou per partes a substituční metodou. V této kapitole se budeme podrobněji zabývat integrováním racionálních funkcí. Uvedeme podrobný postup rozkladu racionálních funkcí na součet parciálních zlomků a integraci těchto parciálních zlomků. Podle uvedeného postupu můžeme integrovat libovolnou racionální funkci. Racionální funkce můžeme dostat i po některých substitucích. Nejprve zopakujeme polynomické a racionální funkce, uvedeme některé základní vlastnosti těchto funkcí.

Cíle

Seznámíte se s postupem integrace racionálních funkcí a se základními integrály, které dostaneme po rozložení racionální funkce na součet parciálních zlomků.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte pojem primitivní funkce k dané funkci, znáte základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1., umíte vypočítat jednoduché integrály úpravou integrované funkce (integrandu) a substituční metodou. V této kapitole se vyskytne jen několik málo typů integrálů.

Výklad

Polynomy a jejich vlastnosti

S polynomy jste se seznámili již v Matematice 1. Připomeňme definici polynomické funkce.

Definice 1.5.1.

Polynomem $P_m(x)$ stupně m nazýváme funkci

$$P_m(x) = a_m x^m + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_m \neq 0.$$

Reálná čísla $a_0, a_1, \ldots, a_m$ jsou koeficienty polynomu.

Polynom je funkce, která vznikne konečným počtem operací součet, rozdíl a součin funkcí $y = konst$ a $y = x$.

Stručně můžeme polynom zapsat $P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$, $a_n \neq 0$.

Číslo m nazýváme **stupněm polynomu** $P_m(x)$.

Pro polynom 1. stupně (tj. polynom tvaru $y = ax + b,\ a \neq 0$) se používá také termín **lineární polynom** a pro polynom 2. stupně (tj. polynom tvaru $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$) se používá také termín **kvadratický polynom**.

Integrace polynomické funkce je velmi snadná, neboť vystačíme se základními pravidly pro integraci (věta 1.2.1) a s integrací mocninné funkce (vzorec [3] v tabulce 1.2.1).

Řešené úlohy

Příklad 1.5.1. Vypočtěte integrál $\int (2x^5 - x^3 + 3x^2 + 6x - 1)\, dx$.

Řešení:

$$\int (2x^5 - x^3 + 3x^2 + 6x - 1)\, dx = 2\int x^5 dx - \int x^3 dx + 3\int x^2 dx + 6\int x dx - \int dx =$$

$$= 2\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - x + C = \frac{x^6}{3} - \frac{x^4}{4} + x^3 + 3x^2 - x + C .$$

Výklad

Polynomy hrají v matematické analýze velmi důležitou roli. Polynomy jsou spojité funkce definované pro všechna reálná x. Jestliže dva polynomy spolu sečteme, odečteme nebo vynásobíme, dostaneme opět polynom.

Polynomy můžeme také mezi sebou dělit. V tomto případě však obecně výsledkem nebude polynom, ale funkce, kterou nazýváme **racionální** (racionální lomená): $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Je-li $Q_n(x)$ polynom n-tého stupně, nazývá se rovnice $Q_n(x) = 0$ **algebraická rovnice** n-tého stupně.

Definice 1.5.2.
Číslo α , pro které platí $Q_n(\alpha) = 0$, se nazývá **kořen polynomu** Q a výraz $x - \alpha$ se nazývá **kořenový činitel** polynomu Q.

Dovedete nalézt kořeny rovnice $Q_n(x)=0$ pro polynomy 1. a 2. stupně. Pro polynomy vyšších stupňů se jedná o složitější úlohu, kterou dovedeme vyřešit v některých speciálních případech. Velmi často je pro nalezení kořenů nutno použít numerických metod, o nichž se dozvíte více ve speciálním předmětu Numerické metody.

V algebře se dokazuje, že každý polynom $Q_n(x)$, který není konstanta, má v oboru komplexních čísel n kořenů.

Věta 1.5.1.

Každý polynom $Q_n(x)=a_nx^n+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ stupně $n\geq 1$ lze **rozložit na součin kořenových činitelů**

$Q_n(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \ldots\ (x-\alpha_n)$,

kde $\alpha_1,\alpha_2,\ \ldots\ ,\alpha_n$ jsou konstanty (obecně komplexní).

Poznámka

1. Čísla $\alpha_1,\alpha_2,\ \ldots\ ,\alpha_n$ nemusí být navzájem různá. Tedy rovnice může mít vícenásobné kořeny. Pokud kořen α_j je r-násobný, můžeme místo r součinů $(x-\alpha_j)(x-\alpha_j)\ \ldots\ (x-\alpha_j)$ psát $(x-\alpha_j)^r$.

2. Kořeny $\alpha_1,\alpha_2,\ \ldots\ ,\alpha_n$ mohou být reálné nebo komplexní.

Věta 1.5.2.

Pokud má polynom r-násobný komplexní kořen $\alpha=c+d\,i$ (c,d jsou reálná čísla), pak také komplexně sdružené číslo $\overline{\alpha}=c-d\,i$ je r-násobným kořenem tohoto polynomu.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.2. Rozložte na součin kořenových činitelů $Q_5(x)=3x^5+24x^3-27x$.

Řešení:

Řešíme rovnici $3x^5+24x^3-27x=0$. Rovnici upravíme vytknutím $3x$. Dostaneme $3x(x^4+8x^2-9)=0$. Jedno řešení je $x_1=0$. Další kořeny získáme řešením rovnice $x^4+8x^2-9=0$. Po zavedení pomocné proměnné $t=x^2$ dostaneme kvadratickou rovnici $t^2+8t-9=0$, která má kořeny $t_1=1$ a $t_2=-9$, čili $x^2=1$ a $x^2=-9$.

Odtud $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 3i$, $x_5 = -3i$.

Jelikož je koeficient u nejvyšší mocniny roven 3, můžeme polynom zapsat ve tvaru:

$Q_5(x) = 3x^5 + 24x^3 - 27x = 3x(x-1)(x+1)(x-3i)(x+3i)$.

Výklad

Je nepříjemné, že se ve výsledném rozkladu v příkladu 1.5.2 objevují imaginární čísla $+3i$ a $-3i$. Pokud vynásobíme odpovídající kořenové činitele, dostaneme kvadratický polynom $(x-3i)(x+3i) = x^2 + 9$. Rozklad polynomu z příkladu 1.5.2 bude mít tvar

$Q_5(x) = 3x^5 + 24x^3 - 27x = 3x(x-1)(x+1)(x^2+9)$.

Tento postup můžeme zobecnit. Má-li polynom kořen $\alpha = c + d\,i$ má podle věty 1.5.2 také komplexně sdružený kořen $\overline{\alpha} = c - d\,i$. Pokud vynásobíme odpovídající kořenové činitele, dostaneme kvadratický polynom, který nemá imaginární koeficienty:

$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = (x-(c+d\,i))(x-(c-d\,i)) = x^2 - 2cx + c^2 + d^2 = x^2 + px + q$, kde

$p = -2c$ a $q = c^2 + d^2$. Uvědomme si, že diskriminant $D = p^2 - 4q$ je záporný, neboť

$D = p^2 - 4q = 4c^2 - 4c^2 - 4d^2 = -4d^2 < 0$.

Je-li komplexně sdružený kořen $c \pm d \cdot i$ s násobný, dostaneme

$(x-\alpha)^s (x-\overline{\alpha})^s = (x^2 + px + q)^s$.

Pokud tuto úvahu zobecníme, dostaneme důležitou větu o **rozkladu polynomu na základní součin** v reálném oboru:

Věta 1.5.3.

Každý polynom $Q_n(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ stupně $n \geq 1$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru:

$Q_n(x) = a_n (x-\alpha_1)^{r_1} \ \dots\ (x-\alpha_u)^{r_u} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \ \dots\ (x^2 + p_v x + q_v)^{s_v}$

se vzájemně různými reálnými kořeny α_i, $i = 1, 2, \dots u$ a vzájemně různými kvadratickými polynomy $x^2 + p_j x + q_j$, $j = 1, 2, \dots v$, které nemají reálné kořeny.

Poznámka

1. Stručně lze říci, že každý polynom s reálnými koeficienty stupně $n \geq 1$ lze rozložit na součin polynomů prvního a druhého stupně, přičemž polynomy druhého stupně se dále nedají rozložit na součin polynomů prvního stupně.

2. Je zřejmé, že platí $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_u + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_v)$.

Věta 1.5.3 nám sice zaručuje možnost rozkladu polynomu na základní součin, avšak praktické provedení nemusí být jednoduché. V mnoha případech potřebujeme provést rozklad polynomu Q, který je již částečně rozložen.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.3. Rozložte na základní součin polynom $Q(x) = (x^5 - x^2)(x^5 + x^2)(1 - x^4)$.

Řešení:

Je zřejmé, že polynom *Q(x)* je 14. stupně. Polynom *Q(x)* není rozložen na základní součin, neboť se v něm vyskytují polynomy vyššího než 2. stupně. Proto jednotlivé činitele dále rozložíme:

$(x^5 - x^2) = x^2(x^3 - 1) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1)$,

$(x^5 + x^2) = x^2(x^3 + 1) = x^2(x+1)(x^2 - x + 1)$,

$(1 - x^4) = -(x^4 - 1) = -(x-1)(x+1)(x^2 + 1)$.

Takže $Q(x) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1)x^2(x+1)(x^2 - x + 1)(-1)(x-1)(x+1)(x^2 + 1) =$

$= -x^4(x-1)^2(x+1)^2(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)$.

Uvědomte si, že $x^4 = (x-0)^4$, tedy se jedná o polynom 1. stupně, který přísluší čtyřnásobnému kořenu $x = 0$. Koeficient $a_n = -1$.

Výklad

Rozklad racionální funkce na součet parciálních zlomků

Definice 1.5.3.

Racionální funkcí *R(x)* nazveme funkci, která je podílem dvou polynomů $P_m(x)$ a $Q_n(x)$:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad Q_n(x) \neq 0 .$$

Poznámky

Definičním oborem racionální funkce R(x) je množina všech reálných čísel x, které nejsou reálnými kořeny rovnice $Q_n(x) = 0$.

Definice 1.5.4.

Racionální funkce $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ se nazývá **ryze lomená**, je-li stupeň m polynomu $P_m(x)$ menší než stupeň n polynomu $Q_n(x)$, tj. $m<n$. Je-li $m \ge n$, pak se funkce *R(x)* nazývá **neryze lomená** racionální funkce.

Jestliže je funkce *R(x)* neryze lomená racionální funkce, pak můžeme polynom $P_m(x)$ v čitateli dělit polynomem $Q_n(x)$ ve jmenovateli. Podílem bude polynom $P_{m_1}(x)$ a zbytek dělení bude polynom $P_{m_2}(x)$, jehož stupeň m_2 je nižší než *n*, tj. $m_2<n$. To můžeme vyjádřit větou.

Věta 1.5.4.

Každou neryze lomenou racionální funkci můžeme vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce, tj. $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=P_{m_1}(x)+\dfrac{P_{m_2}(x)}{Q_n(x)}$, kde $m_2<n$.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.4. Vyjádřete racionální funkci $R(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x-1}{x^2-x+1}$ jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Řešení:

Polynom $P_3(x)=x^3+2x^2+x-1$ v čitateli racionální funkce je 3. stupně a polynom $Q_2(x)=x^2-x+1$ ve jmenovateli má stupeň 2. Polynomy můžeme vydělit.

$$
\begin{array}{l}
(x^3+2x^2+x-1):(x^2-x+1)=x+3 \\
\underline{-(x^3-x^2+x)} \\
\quad 3x^2 \qquad -1 \\
\quad \underline{-(3x^2-3x+3)} \\
\qquad\quad 3x-4 \ \ \text{... zbytek}
\end{array}
$$

Danou racionální funkci proto můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2-x+1}=x+3+\frac{3x-4}{x^2-x+1}.$$

Průvodce studiem

Hlavním výsledkem předcházející části je věta 1.5.4. Je-li dána neryze lomená racionální funkce, provedeme dělení polynomu $P_m(x)$ v čitateli polynomem $Q_n(x)$ ve jmenovateli racionální funkce. Dostaneme polynom a ryze lomenou racionální funkci. Stačí tedy, když se v dalším omezíme na takové racionální funkce $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, v nichž má čitatel nižší stupeň než jmenovatel (ryze lomené racionální funkce). V další části si ukážeme, jak lze ryze lomené racionální funkce rozložit na součet několika jednodušších zlomků, které bychom již uměli integrovat.

Výklad

Ve větě 1.5.3 jsme ukázali, že každý polynom s reálnými koeficienty stupně $n \geq 1$ lze rozložit na součin polynomů prvního a druhého stupně, přičemž polynomy druhého stupně se již nedají rozložit na součin polynomů prvního stupně s reálnými kořeny (mají komplexně sdružené kořeny). Budeme se snažit racionální funkci rozložit na součet jednoduchých racionálních funkcí, které mají ve jmenovateli mocniny kořenových činitelů $(x-\alpha)$ a kvadratických polynomů (x^2+px+q).

Definice 1.5.5.

Částečnými (parciálními) **zlomky** nazýváme racionální funkce tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)^{k_1}} \quad \text{nebo} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{k_2}} \quad ,$$

kde *A, M, N, p, q* jsou reálná čísla, k_1, k_2 jsou přirozená čísla a polynom x^2+px+q nemá reálné kořeny ($D = p^2-4q < 0$).

Poznámky

1. Parciální zlomky prvního typu odpovídají reálným kořenům jmenovatele a parciální zlomky druhého typu odpovídají dvojicím komplexně sdružených kořenů.

2. Ryze lomenou racionální funkci R(x) lze vyjádřit ve tvaru

$R(x) = R_1(x) + R_2(x) + \ldots + R_s(x)$, *kde* $R_1(x)$, $R_2(x)$, ... $R_s(x)$ *jsou parciální zlomky. Pro integraci ryze lomené racionální funkce stačí umět integrovat tyto parciální zlomky.*

Pro snazší pochopení a jednoduchost uvedeme tvar rozkladu racionální funkce na součet parciálních zlomků podle toho, jaké kořeny má polynom $Q_n(x)$ ve jmenovateli racionální funkce. Postupně se budeme zabývat čtyřmi základními případy.

A. Rozklad pro reálné různé kořeny polynomu $Q_n(x)$

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má k ($k \le n$) reálných různých kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ (jednoduché kořeny), pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na

součet parciálních zlomků: $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{A_1}{x-\alpha_1} + \dfrac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \dfrac{A_k}{x-\alpha_k} + R_{k+1}(x) \dots$,

kde $A_1, A_2, \dots, A_k$ jsou reálné konstanty.

Nalezneme konstanty $A_1, A_2, \dots, A_k$ tak, abychom po sečtení všech parciálních zlomků dostali danou racionální funkci *R(x)*. Jednotlivé parciální zlomky pak můžeme snadno integrovat.

Poznámka

Polynom $Q_n(x)$ může mít vedle k reálných různých kořenů ještě reálné násobné kořeny nebo kořeny komplexně sdružené.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.5. Vypočtěte integrál $\int \dfrac{x^2 - 8x + 3}{x^3 - 4x^2 + 3x} dx$.

Řešení:

Výpočet můžeme rozdělit do pěti kroků:

1. Polynom v čitateli je stupně $m = 2$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má stupeň $n = 3$. Jelikož je $m < n$, je daná funkce ryze lomená racionální funkce (není nutno dělit polynomy).
2. Polynom ve jmenovateli $Q_3(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ rozložíme na základní součin podle věty 1.5.3. Dostaneme $Q_3(x) = x(x^2 - 4x + 3) = x(x-1)(x-3)$. To znamená, že polynom ve jmenovateli má reálné jednoduché kořeny $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.
3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{x^2-8x+3}{x^3-4x^2+3x}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x-3}\ .$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu A_1, A_2, A_3. Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_3(x)=x^3-4x^2+3x$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$x^2-8x+3=A_1(x-1)(x-3)+A_2x(x-3)+A_3x(x-1)\ .$$

Tuto rovnici lze řešit několika způsoby:

a) **Dosazovací metoda.** Oba polynomy se musí rovnat pro libovolné hodnoty *x*.

Dosadíme-li obecně tři různé hodnoty *x*, dostaneme tři rovnice pro tři neznámé koeficienty A_1, A_2, A_3. Tuto soustavu snadno vyřešíme. Pokud má polynom *Q(x)* reálné kořeny, je výhodné dosadit právě tyto kořeny.

Pro $x=0$ dostaneme: $3=3A_1+0A_2+0A_3$. Tedy $A_1=1$.

Pro $x=1$ dostaneme: $-4=0A_1-2A_2+0A_3$. Tedy $A_2=2$.

Pro $x=3$ dostaneme: $-12=0A_1+0A_2+6A_3$. Tedy $A_3=-2$.

b) **Srovnávací metoda.** Rovnice představuje rovnost dvou polynomů.

Rovnost nastane, jestliže se budou rovnat koeficienty polynomu na levé straně a odpovídající koeficienty polynomu na pravé straně rovnice.

$$x^2-8x+3=A_1(x-1)(x-3)+A_2x(x-3)+A_3x(x-1)$$

$$x^2-8x+3=A_1(x^2-4x+3)+A_2(x^2-3x)+A_3(x^2-x)$$

$$x^2-8x+3=x^2(A_1+A_2+A_3)+x(-4A_1-3A_2-A_3)+3A_1$$

Koeficienty u x^2: $1=A_1+A_2+A_3$

Koeficienty u x^1: $-8=-4A_1-3A_2-A_3$

Koeficienty u x^0: $3=3A_1$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $A_1=1$, $A_2=2$, $A_3=-2$.

Metody můžeme kombinovat.

c) **Kombinace metod a), b).**

Metodou a) získáme několik rovnic, zbývající rovnice doplníme metodou b). Tento postup budeme používat v některých dalších příkladech.

5. Integrujeme získané parciální zlomky:

$$\int \frac{x^2-8x+3}{x^3-4x^2+3x}dx = \int\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x-3}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{-2}{x-3}\right)dx =$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + 2\int \frac{1}{x-1}dx - 2\int \frac{1}{x-3}dx = \ln|x| + 2\ln|x-1| - 2\ln|x-3| + C =$$

$$= \ln \frac{|x|(x-1)^2}{(x-3)^2} + C \ .$$

V případě reálných jednoduchých kořenů polynom $Q_n(x)$ dostaneme pouze integrály parciálních zlomků typu

$$\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A \ \ln|x-\alpha| + C \,.$$

Poznámka

Předcházející integrál jsme vypočetli podle vzorce [13] *nebo* [16] *z tabulky 1.2.1. Můžeme použít substituci* $x-\alpha = t$.

B. Rozklad pro reálné násobné kořeny polynomu $Q_n(x)$

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má r-násobný ($r \le n$) kořen α, pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_1}{x-\alpha} + \frac{B_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{B_r}{(x-\alpha)^r} + R_{r+1}(x) + \ \ldots \ ,$$

kde $B_1, B_2, \ \ldots \ , B_r$ jsou reálné konstanty.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.6. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx$.

Řešení:

Výpočet opět rozdělíme do pěti kroků:

1. Polynom v čitateli je stupně $m = 4$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má také stupeň $n = 4$. Jelikož není $m < n$, je daná funkce neryze lomená racionální funkce a musíme polynomy vydělit.

$$(x^4-2x^3+3x^2-x+1):(x^4-3x^3+3x^2-x) = 1$$

$$\frac{-(x^4-3x^3+3x^2-x)}{x^3 \qquad\qquad +1}$$

Danou racionální funkci proto můžeme podle věty 1.5.4 zapsat ve tvaru

$$\frac{x^4-2x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=1+\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} .$$

Konstanta 1 je zvláštní případ polynomu nultého stupně a zbývající racionální funkce je již ryze lomená. Tuto racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků.

2. Polynom ve jmenovateli $Q_4(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$ rozložíme na základní součin podle věty 1.5.3. Dostaneme $Q_4(x)=x(x^3-3x^2+3x-1)=x(x-1)^3$. To znamená, že polynom ve jmenovateli má jednoduchý reálný kořen $x_1=0$ a trojnásobný reálný kořen $x_{2,3,4}=1$.

3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků (případ A pro $x_1=0$ a B pro $x_{2,3,4}=1$):

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3} .$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu A, B_1, B_2, B_3. Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_4(x)=x(x-1)^3$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$x^3+1=A(x-1)^3+B_1x(x-1)^2+B_2x(x-1)+B_3x$$

Pro nalezení neznámých koeficientů použijeme nejprve dosazovací metodu (viz příklad 1.5.5). Do získané rovnice dosadíme reálné kořeny polynomu ve jmenovateli racionální funkce:

Pro $x=0$ dostaneme: $1=-A+0B_1+0B_2+0B_3$. Tedy $A=-1$.

Pro $x=1$ dostaneme: $2=0A+0B_1+0B_2+1B_3$. Tedy $B_3=2$.

Jelikož již nemáme další kořeny, můžeme dosadit dvě jiná reálná čísla a dostaneme dvě rovnice pro dosud neznámé koeficienty B_1 a B_2.

Pro výpočet zbývajících koeficientů můžeme také použít srovnávací metodu (viz příklad 1.5.5):

$$x^3+1=A(x-1)^3+B_1x(x-1)^2+B_2x(x-1)+B_3x$$

$$x^3+1=A(x^3-3x^2+3x-1)+B_1(x^3-2x^2+x)+B_2(x^2-x)+B_3x$$

$$x^3+1=(A+B_1)x^3+(-3A-2B_1+B_2)x^2+(3A+B_1-B_2+B_3)x-A$$

Koeficienty u x^3: $1 = A + B_1$

Koeficienty u x^2: $0 = -3A - 2B_1 + B_2$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $B_1 = 2$, $B_2 = 1$.

5. Integrujeme získané parciální zlomky:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} dx = \int (1 + \frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}) dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3} \right) dx = \int \left(1 + \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right) dx =$$

$$= x - \ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{2(x-1)^2} = x + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} - \frac{x}{(x-1)^2} + C$$

V případě reálných násobných kořenů polynomu $Q_n(x)$ dostaneme integrály parciálních zlomků typu

$$\int \frac{B_1}{x-\alpha} dx = B_1 \int \frac{1}{x-\alpha} dx = B_1 \ln|x-\alpha| + C$$

a

$$\int \frac{B_k}{(x-\alpha)^k} dx = B_k \int (x-\alpha)^{-k} dx = \frac{B_k}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C, \text{ pro } k \ge 2.$$

Poznámka

Předcházející integrál jsme vypočetli podle vzorce [16] *z tabulky 1.2.1. Použili jsme substituci* $x - \alpha = t$:

$$\int \frac{B_k}{(x-\alpha)^k} dx = \left| \begin{matrix} x-\alpha = t \\ dx = dt \end{matrix} \right| = B_k \int \frac{dt}{t^k} dt = B_k \int t^{-k} dt = B_k \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= \frac{B_k}{(1-k)t^{k-1}} + C = \frac{B_k}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C, \ pro \ k \ge 2.$$

C. Rozklad pro komplexně sdružené kořeny polynomu $Q_n(x)$

Z věty 1.5.3 o rozkladu polynomu na základní součin již víme, že pokud má polynom komplexní kořen $\alpha = c + d\,i$, má také komplexně sdružený kořen $\overline{\alpha} = c - d\,i$ a z polynomu $Q_n(x)$ můžeme vytknout kvadratický polynom $x^2 + px + q$, kde diskriminant $D = p^2 - 4q < 0$. V tomto případě můžeme polynom $Q_n(x)$ zapsat ve tvaru $Q_n(x) = (x^2 + px + q)Q_{n-2}(x)$.

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má komplexně sdružené kořeny (jednoduché), pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x^2 + px + q)Q_{n-2}(x)} = \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} + \dots ,$$

kde *M, N* jsou reálné konstanty.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.7. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^3 + x^2 + 2}{x^3 + 1}\,dx$.

Řešení:

Jako v předcházejících příkladech rozdělíme výpočet do pěti kroků:

1. Polynom v čitateli je stupně $m = 5$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má stupeň $n = 3$. Jelikož není $m < n$, je daná funkce neryze lomená racionální funkce a musíme polynomy vydělit.

$$\begin{array}{l}
(x^5 + x^3 + x^2 + 2) : (x^3 + 1) = x^2 + 1 \\
\underline{-(x^5 + \qquad x^2)} \\
\qquad\quad x^3 + 2 \\
\qquad\ \underline{-(x^3 + 1)} \\
\qquad\qquad\quad 1
\end{array}$$

Danou racionální funkci proto můžeme podle věty 1.5.4 zapsat ve tvaru

$$\frac{x^5 + x^3 + x^2 + 2}{x^3 + 1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^3 + 1}.$$

Racionální funkci $\frac{1}{x^3+1}$ rozložíme na součet parciálních zlomků.

2. Polynom ve jmenovateli $Q_3(x) = x^3 + 1$ rozložíme na základní součin podle věty 1.5.3. Dostaneme $Q_3(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$. (Pro rozklad jsme použili vzorec $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$). To znamená, že polynom ve jmenovateli má reálný jednoduchý kořen $x_1 = -1$ a komplexně sdružené kořeny, protože diskriminant kvadratické rovnice $x^2 - x + 1 = 0$ je záporný: $D = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$.
3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků (případ A pro $x_1 = -1$ a C pro trojčlen $x^2 - x + 1$):
$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1} \ .$$
4. Nalezneme konstanty rozkladu *A, M, N.* Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_3(x) = x^3 + 1$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:
$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Mx + N)(x+1) \, .$$
Pro nalezení neznámých koeficientů použijeme nejprve dosazovací metodu (viz příklad 1.5.5). Do získané rovnice dosadíme reálný kořen polynomu ve jmenovateli racionální funkce:

Pro $x = -1$ dostaneme $1 = A(1+1+1) + 0$. Tedy $A = \frac{1}{3}$.

Pro výpočet zbývajících koeficientů použijeme srovnávací metodu (viz příklad 1.5.5):

Koeficienty u x^2: $0 = A + M$

Koeficienty u x^0: $1 = A + N$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $M = -\frac{1}{3}$, $N = \frac{2}{3}$.
5. Integrujeme získané parciální zlomky (nezapomeňme na polynom získaný dělením v kroku 1):
$$\int \frac{x^5 + x^3 + x^2 + 2}{x^3+1}\,dx = \int (x^2 + 1 + \frac{1}{x^3+1})\,dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+1} \right) dx \ .$$

První integrál je snadný, známe jej z případu A:

$$\int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| + C_1 \ .$$

Druhý integrál se budeme snažit upravit tak, abychom v čitateli zlomku získali derivaci jmenovatele.

$$\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{6}\int \frac{-3}{x^2-x+1}dx \ .$$

Dostaneme dva integrály. První integrujeme pomocí vzorce [13] z tabulky 1.2.1 (fakticky použijeme substituci $x^2-x+1=t$):

$$-\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + C_2 = -\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + C_2 \ .$$

Doplněním na čtverec upravíme druhý integrál tak, aby bylo možno použít vzorec [14] z tabulky 1.2.1:

$$-\frac{1}{6}\int \frac{-3}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_3 \ .$$

Sečtením integrálů, které jsme postupně vypočítali, dostaneme výsledek:

$$\int \frac{x^5+x^3+x^2+2}{x^3+1}dx = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \ .$$

Poznámka

Při výpočtu integrálu z parciálního zlomku $\int \frac{Mx+N}{x^2-x+1}dx$ *jsme integrand upravovali tak, abychom dostali zlomek, který bude mít v čitateli derivaci jmenovatele a zlomek s konstantou v čitateli:*

$\int \frac{Mx+N}{x^2-x+1}dx = \int \left(\frac{K(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{L}{x^2-x+1}\right)dx$. *Pro méně zdatné počtáře bude proto výhodnější ve 3. kroku rozložit tuto racionální funkci na dva zlomky s konstantami K a L.*

Postup můžeme zobecnit a modifikovat rozklad pro případ komplexně sdružených kořenů:

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má komplexně sdružené kořeny (jednoduché), pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{P_m(x)}{(x^2+px+q)Q_{n-2}(x)}=\frac{K(2x+p)}{x^2+px+q}+\frac{L}{x^2+px+q}+\dots ,$$

kde *K, L* jsou reálné konstanty.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.8. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int\frac{x^5+x^3+x^2+2}{x^3+1}dx$.

Řešení:

Kroky 1 a 2 jsou stejné jako v příkladu 1.5.7. V kroku 3 budeme postupovat podle návodu uvedeného v předcházející poznámce.

3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků (případ A pro $x_1=-1$ a C pro trojčlen x^2-x+1):

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{K(2x-1)}{x^2-x+1}+\frac{L}{x^2-x+1} .$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu *A,K,L*. Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_3(x)=x^3+1$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$1=A(x^2-x+1)+K(2x-1)(x+1)+L(x+1) .$$

Jako v příkladu 1.5.7 dostaneme $A=\dfrac{1}{3}$.

Pro výpočet zbývajících koeficientů použijeme srovnávací metodu (viz příklad 1.5.5):

Koeficienty u x^2: $0=A+2K$

Koeficienty u x^0: $1=A-K+L$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $K=-\dfrac{1}{6},\ L=\dfrac{1}{2}$.

5. Výpočet integrálů je již uveden v kroku 5 příkladu 1.5.7.

Jestliže má polynom $Q_n(x)$ komplexně sdružené kořeny (jednoduché), dostaneme integrály parciálních zlomků typu

$$\int \frac{K(2x+p)}{x^2+px+q}dx = K \ln\left|x^2+px+q\right| + C$$

a

$$\int \frac{L}{x^2+px+q}dx = L\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C \ .$$

Poznámka

První integrál jsme vypočetli podle vzorce [13] *z tabulky 1.2.1. Prakticky používáme substituci* $x^2+px+q=t$. *Druhý integrál*

$$\int \frac{L}{x^2+px+q}dx = L\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx = L\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C \, .$$

Tento vzorec si jistě nebudeme pamatovat. Podstatné je, že uvedený integrál upravíme na typ $\int \frac{1}{a^2+t^2}dt$, *kde* $t = x+\frac{p}{2}$ *a výsledkem bude funkce* arctg( ) *podle vzorce* [14] *z tabulky 1.2.1.*

D. Rozklad pro násobné komplexně sdružené kořeny polynomu $Q_n(x)$

Tento případ uvádíme pro úplnost, abychom vyčerpali všechny možnosti. Základní princip rozkladu je jednoduchý a pečlivý čtenář jistě racionální funkci snadno rozloží na parciální zlomky. Výpočet je však pracnější, neboť budeme počítat minimálně 4 koeficienty a i při vlastní integraci racionálních funkcí budeme řešit obtížnější integrál.

Z věty 1.5.3 o rozkladu polynomu na základní součin již víme, že pokud má polynom k-násobný komplexní kořen $\alpha = c + d\,i$, má také k-násobný komplexně sdružený kořen $\bar{\alpha} = c - d\,i$ a z polynomu $Q_n(x)$ můžeme vytknout kvadratický polynom $(x^2+px+q)^k$, kde diskriminant $D = p^2 - 4q < 0$. V tomto případě můžeme polynom $Q_n(x)$ zapsat ve tvaru $Q_n(x) = (x^2+px+q)^k Q_{n-2k}(x)$. Rozklad na parciální zlomky je již zřejmý z případů B a C.

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má k-násobné komplexně sdružené kořeny, pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{P_m(x)}{(x^2+px+q)^k Q_{n-2k}(x)}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k},$$

kde $M_1, N_1, \ldots, M_k, N_k$ jsou reálné konstanty.

Poznámka

Podobně, jak bylo uvedeno v poznámce u případu C, je výhodnější provést rozklad na parciální zlomky tak, abychom měli v čitateli násobek derivace jmenovatele a konstantu. $\dfrac{M_jx+N_j}{(x^2+px+q)^j}=\dfrac{K_j(2x+p)+L_j}{(x^2+px+q)^j}$, $j=1,2,\ldots,k$. *Zjednoduší nám to další úpravy.*

Řešené úlohy

Příklad 1.5.9. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int\frac{2x^2-4x+5}{(x^2+2)^2}dx$.

Řešení:

Výpočet opět rozdělíme do pěti kroků:

1. Polynom v čitateli je stupně $m=2$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má stupeň $n=4$. Daná funkce je ryze lomená racionální funkce.

2. Polynom ve jmenovateli $Q_4(x)=(x^2+2)^2$ má dvojnásobné komplexně sdružené kořeny $x=\pm\sqrt{2}\,i$ a je již rozložen na základní součin.

3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{2x^2-4x+5}{(x^2+2)^2}=\frac{K_1(2x)}{x^2+2}+\frac{L_1}{x^2+2}+\frac{K_2(2x)}{(x^2+2)^2}+\frac{L_2}{(x^2+2)^2}.$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu K_1, L_1, K_2, L_2. Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_4(x)=(x^2+2)^2$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$2x^2-4x+5=2x(x^2+2)K_1+(x^2+2)L_1+2xK_2+L_2 .$$

Pro výpočet neznámých koeficientů použijeme srovnávací metodu a dostaneme:

$K_1=0$, $L_1=2$, $K_2=-2$, $L_2=1$.

5. Integrujeme získané parciální zlomky:

$$\int \frac{2x^2-4x+5}{(x^2+2)^2}dx = \int \left(\frac{2}{x^2+2} + \frac{-2(2x)}{(x^2+2)^2} + \frac{1}{(x^2+2)^2} \right) dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{2}{x^2+2} + \int \frac{1}{(x^2+2)^2} dx \ .$$

První integrál jsme vypočítali podle vzorce [14] z tabulky 1.2.1, druhý snadno vypočteme substitucí $x^2+2=t$. Zbývající integrál $\int \frac{1}{(x^2+2)^2}dx$ vypočteme metodou per partes:

$$\int \frac{1}{x^2+2}dx = \left| \begin{matrix} u'=1 & v=\dfrac{1}{x^2+2} \\ u=x & v'=\dfrac{-2x}{(x^2+2)^2} \end{matrix} \right| = \frac{x}{x^2+2} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+2)^2}dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+2} + 2\int \frac{x^2+2-2}{(x^2+2)^2}dx = \frac{x}{x^2+2} + 2\int \frac{1}{x^2+2}dx - 4\int \frac{1}{(x^2+2)^2}dx$$

Dostáváme rovnici

$$\int \frac{1}{x^2+2}dx = \frac{x}{x^2+2} + 2\int \frac{1}{x^2+2}dx - 4\int \frac{1}{(x^2+2)^2}dx ,$$

ze které vypočítáme hledaný integrál:

$$\int \frac{1}{(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2} + \int \frac{1}{x^2+2}dx \right) = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) .$$

Sečtením s již vypočtenými integrály dostaneme

$$\int \frac{2x^2-4x+5}{(x^2+2)^2}dx = \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{2}{x^2+2} + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C =$$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x+8}{4(x^2+2)} + C \ .$$

Jestliže má polynom $Q_n(x)$ komplexně sdružené násobné kořeny, dostaneme integrály parciálních zlomků uvedené ve variantě C a dále pro $k \geq 2$ integrály

$\int \frac{K(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{K}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C$ a integrál typu

$$\int \frac{L}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{L}{\left((x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^k}dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ t = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx \\ a^2 = q - \frac{p^2}{4} \end{array} \right| = \int \frac{L}{\left(t^2+a^2\right)^k}dx \ .$$

Poznámka

První integrál jsme snadno vypočetli substitucí $x^2+px+q=t$. *Druhý integrál můžeme po substituci vypočítat metodou per partes stejně jako jsme to udělali v příkladu 1.5.9. Pohodlnější je použít rekurentní formuli*

$$\int \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt = \frac{1}{(2k-2)a^2} \cdot \frac{x}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)a^2}\int \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}dt$$

, kterou lze odvodit metodou per partes (odvození najdete např. v [6], [9], [14], [17]).

Kontrolní otázky

1. Jaký tvar má polynomická funkce?
2. Popište rozklad polynomu na kořenové činitele.
3. Co rozumíme rozkladem polynomu na základní součin?
4. Jaký tvar má racionální funkce? Jaký má definiční obor?
5. Kdy je racionální funkce ryze lomená?
6. Vyjádřete racionální funkci $R(x) = \dfrac{x^6+x^2}{x^2+1}$ jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.
7. Co jsou to parciální zlomky?
8. Uveďte rozklad na parciální zlomky pro reálné různé kořeny jmenovatele racionální funkce.

9. Uveďte rozklad na parciální zlomky pro reálné násobné kořeny jmenovatele racionální funkce.
10. Uveďte rozklad na parciální zlomky pro komplexně sdružené kořeny jmenovatele racionální funkce.
11. Jak můžeme nalézt koeficienty rozkladu na parciální zlomky?
12. Uveďte kroky, kterými postupujeme při integraci racionální funkce.
13. Jaké integrály dostaneme při integraci parciálního zlomku $\dfrac{A}{(x-\alpha)^{k_1}}$?
14. Jaké integrály dostaneme při integraci parciálního zlomku $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{k_2}}$?
15. Je možné, abychom jako výsledek integrace racionální funkce dostali racionální funkci?

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-6x+5}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2-3x-4}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^2+8x+12}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{4x^2-12x-10}{x^3-2x^2-5x+6}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{x^3+3}{x^2-3x}dx$ f) $\displaystyle\int \frac{\frac{3}{2}x^2-30}{x^3-4x^2-20x+48}dx$

2. a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$ b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{-x^3+2x^2+1}{x(x+1)^3}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{5x^3-20x^2-70x+78}{\left(x^2+4x+4\right)\left(x^2-10x+25\right)}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{2x^3-11x^2+4x+-4}{x^4-2x}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3+3x^2+2x+1}{x^5-3x^4+3x^3+x^2}dx$

3. a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+6}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+2x+2}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-6x+12}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3x+3}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x^2-x+1}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{3x^4-9x^3+13x^2-x+2}{x^2+2x+2}dx$

4. a) $\int \frac{x+2}{x^4-16}dx$ b) $\int \frac{x-3}{x^4-81}dx$ c) $\int \frac{x+8}{x^3+8}dx$

d) $\int \frac{3x+1}{x^3-1}dx$ e) $\int \frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1}dx$

f) $\int \frac{x^2-2x-7}{(x^2-2x+1)(x^2+2x+5)}dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{5}{2}\ln|x-5|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$; b) $\frac{17}{5}\ln|x-4|-\frac{2}{5}\ln|x+1|+C$;

c) $x-\frac{17}{2}\ln|x+6|+\frac{1}{2}\ln|x+2|+C$; d) $3\ln|x-1|+2\ln|x+2|-\ln|x-3|+C$;

e) $\frac{1}{2}x^2+3x+10\ln|x-3|-\ln|x|+C$; f) $\frac{1}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x+4|+\frac{3}{2}\ln|x-6|+C$.

2. a) $\ln|x-1|-\ln|x|+\frac{1}{x}+C$; b) $2\ln|x+2|-2\ln|x+1|-\frac{3}{x+2}+C$;

c) $\ln|x|-2\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+C$; d) $2\ln|x+2|+3\ln|x-5|+\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-5}+C$;

e) $5\ln|x|-3\ln|x-2|+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+C$; f) $2\ln|x-1|-\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$.

3. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{2}}+C$; b) $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\operatorname{arctg}(x+1)+C$;

c) $\ln\left|x^2-6x+12\right|+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{3}}+C$; d) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+3x+3\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+C$;

e) $\frac{5}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; f) $x^3+x+\ln\left|x^2-3x+4\right|+\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{7}}+C$.

4. a) $\frac{1}{8}\ln|x-2|-\frac{1}{16}\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$; b) $\frac{1}{18}\ln|x+3|-\frac{1}{36}\ln\left|x^2+9\right|-\frac{1}{18}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$;

c) $\frac{1}{2}\ln|x+2|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2-2x+4\right|-\frac{5}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$;

d) $\frac{4}{3}\ln|x-1|-\frac{2}{3}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

e) $\frac{1}{2}x^2+x+\ln\left|x^2-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+\operatorname{arctg}x+C$;

f) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$.

Kontrolní test

1. Rozložte na základní součin polynom $(x^3+1)(x^2-1)(x^2-x^5)$.

   a) $(x^2-1)(x+1)(1-x)x^2(x^2-x+1)(x^2+x+1)$,

   b) $x^2(x+1)^2(x-1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,

   c) $-x^2(x+1)^2(x-1)^2(x^2-x+1)(x^2+x+1)$,

   d) $-x^2(x+1)^2(x-1)^2(x^2+x+1)^2$.

2. Určete kořeny polynomu x^3+x^2-4x-4.

   a) -1, 2, -2, b) 1, 2, -2, c) 1, -1, 2, d) -1, 2, 2.

3. Určete kořeny polynomu $x^3-3x^2-9x+27$.

   a) 9, 3, -3, b) -9, 3, -3, c)-27, 3, -9, d) -3, 3, 3.

4. Kolik konstant je třeba určit při rozkladu funkce $R(x)=\frac{x^2+1}{x^4+2x^3+2x^2}$ na parciální zlomky?

   a) 3, b) 4, c) 2, d) 5.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\frac{1-4x}{x^3+x^2-2x}dx$.

   a) $\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x+2|+C$, b) $-\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x-2|+C$,

   c) $-\frac{1}{2}\ln|x|+\ln|x-1|-\frac{3}{2}\ln|x+2|+C$, d) $-\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x+2|+C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\frac{x^5+x^4-8}{x(x+2)(x-2)}dx$.

   a) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{(x+2)^3}{x^2(x-2)^5}\right|+C$, b) $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+4x-\ln\left|\frac{x(x-2)^3}{(x+2)^5}\right|+C$,

   c) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$, d) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^3}{(x+2)^5}\right|+C$.

7. Rozložte funkci $R(x)=\dfrac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}$ na parciální zlomky.

a) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{(x-2)^3}+\dfrac{1}{(x-2)^4}$, b) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^3}-\dfrac{1}{(x-2)^4}$,

c) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{(x-2)^3}+\dfrac{1}{(x-2)^4}$, d) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-2)^3}-\dfrac{1}{(x-2)^4}$.

8. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int\frac{3x-4}{(x-2)(x-1)^3}\,dx$.

a) $2\ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}+C$, b) $2\ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|+\dfrac{4x-5}{2(x-1)^2}+C$,

c) $2\ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|+\dfrac{4x-3}{2(x-1)^2}+C$, d) $2\ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|-\dfrac{4x-5}{2(x-1)^2}+C$.

9. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int\frac{dx}{1-x^4}$.

a) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$, b) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$,

c) $\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$, d) $\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

10. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int\frac{3x^2-3x+5}{x^3-2x^2+5x}\,dx$.

a) $\ln|x|+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C$,

b) $\ln|x|+\ln(x^2-2x+5)+\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C$,

c) $\ln|x|-\ln(x^2-2x+5)-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-1)+C$,

d) $\ln|x|+\ln(x^2-2x+5)+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C$.

Výsledky testu

1. c); 2. a); 3. d); 4. b); 5. d); 6. c); 7. a); 8. b); 9. a); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.5 znovu.

Shrnutí lekce

V této kapitole jsme se podrobněji zabývali integrováním racionálních funkcí. Racionální funkce můžeme dostat i po některých substitucích, jak uvidíme v další kapitole. Integrace racionální funkce sestává z pěti kroků:

1. Pokud racionální funkce není ryze lomená, nejprve vydělíme polynom v čitateli polynomem ve jmenovateli racionální funkce a dostaneme polynom a ryze lomenou racionální funkci.
2. Nalezneme kořeny polynomu ve jmenovateli racionální funkce a tento polynom rozložíme na základní součin.
3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků.
4. Nalezneme koeficienty tohoto rozkladu.
5. Integrujeme získané parciální zlomky.

Rozklad na parciální zlomky závisí na tom, zda polynom ve jmenovateli má jednoduché reálné kořeny, násobné reálné kořeny, komplexní kořeny nebo násobné komplexní kořeny. Pokud jsou kořeny reálné nebo jednoduché komplexní, je vlastní integrace snadná. Princip rozkladu na parciální zlomky je jednoduchý, ale vlastní realizace může být časově náročná v závislosti na tom, kolik koeficientů musíme počítat. Pokud se nejedná o jednoduché školské úlohy, bude nejobtížnější druhý krok, neboť dovedeme dobře řešit kvadratické rovnice, pro polynomy 3. a 4. stupně existují poměrně složité vzorce, ale řešení rovnic vyšších stupňů je obecně problém.

Při integraci parciálních zlomků můžeme dostat pouze tyto funkce:

1. Polynomy.
2. Násobky ryze lomených racionálních funkcí typu $\dfrac{1}{(x-\alpha)^j}$ a $\dfrac{1}{(x^2+px+q)^j}$.
3. Násobky logaritmů $\ln|x-\alpha|$ a $\ln\left|x^2+px+q\right|$.
4. Funkce arcustangens.

Některé další integrály (např. integrály z iracionálních funkcí, goniometrických funkcí) můžeme vhodnou substitucí převést na integrály z racionálních funkcí. V další kapitole se proto budeme podrobněji zabývat integrováním goniometrických funkcí.

1.6. Integrace goniometrických funkcí

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme podrobněji zabývat integrací funkcí, které jsou složené z goniometrických funkcí. Takové integrály se často vyskytují v praktických aplikacích. Budeme se s nimi setkávat hlavně při výpočtu vícenásobných integrálů v Matematice III.

Při výpočtu integrálů tohoto typu je obvykle používána substituční metoda. Některé integrály se také dají vypočítat metodou per partes. Vhodnou substitucí lze dané integrály často převést na integrály z racionálních funkcí, které jsme se naučili integrovat v předcházející kapitole. Pro jednotlivé typy integrálů přehledně uvedeme vhodnou metodu výpočtu.

Cíle

Seznámíte se s postupy, které jsou vhodné při integraci funkcí složených z goniometrických funkcí. Uvedeme základní typy těchto integrálů a nejvhodnější metody integrace těchto funkcí.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1 a umíte vypočítat integrály substituční metodou, metodou per partes a umíte integrovat racionální funkce. Předpokládáme, že znáte základní vlastnosti goniometrických funkcí a důležité vztahy, které pro ně platí.

Integrály typu $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

Výklad

Nejprve se budeme zabývat integrály typu $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, kde *m, n* jsou celá čísla. Jeden takový integrál jsme již počítali, viz příklad 1.4.2. Integrály tohoto typu budeme velmi často dostávat při výpočtu dvojných a trojných integrálů v předmětu Matematika III. Postup výpočtu závisí na tom, zda jsou čísla *m*, *n* sudá nebo lichá. Nejprve uvedeme přehledně postup pro jednotlivé možnosti a pak pro každou možnost vypočítáme příklad, na kterém postup objasníme.

Výpočet integrálů typu $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, kde $m,\ n \in \mathbf{Z}$:

a)	m je liché	substituce $\cos x = t$,
b)	n je liché	substituce $\sin x = t$,
c)	m i n sudé, alespoň jedno záporné	substituce $\operatorname{tg} x = t$,
d)	m i n sudé nezáporné	použijeme vzorce pro dvojnásobný úhel $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.1. Vypočtěte integrál $\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx$.

Řešení:

V tomto případě je $m = 5$, $n = 2$, takže budeme volit substituci $\cos x = t$. Pro diferenciál dostáváme $-\sin x\, dx = dt$. Z integrované funkce si tedy „vypůjčíme“ jeden sinus pro diferenciál a zbývající siny snadno převedeme na funkci kosinus pomocí známého vztahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dostaneme:

$$\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x\, dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \cos^2 x \sin x\, dx =$$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \cos^2 x \sin x\, dx = \left| \begin{array}{c} \text{substituce:} \\ \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = -\int \left(1-t^2\right)^2 t^2 dt =$$

$$= -\int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt = -\frac{t^7}{7} + 2\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C .$$

Poznámky

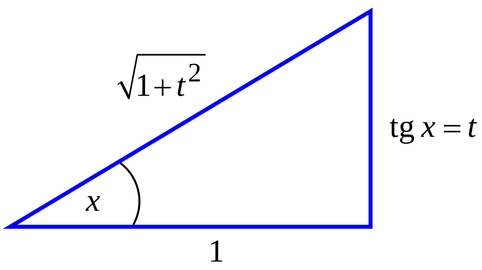
1. Jsou-li lichá m i n, můžeme si vybrat, jakou substituci použijeme, zda a) nebo b). Takovou úlohu jsme již řešili v příkladu 1.4.2.

2. Obecně si stačí pamatovat, že v případě liché mocniny použijeme jednu funkci sinus (resp. kosinus) pro diferenciál a zbývající mocninu (bude sudá) převedeme na druhou funkci (kosinus, resp. sinus) a tu také položíme rovnu nové proměnné.

Příklad 1.5.2. Vypočtěte integrál $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\,dx$.

Řešení:

V tomto případě je $m=2$, $n=-8$. Jelikož je $n<0$, budeme volit substituci $\operatorname{tg} x = t$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pro hodnoty z uvedeného intervalu je $x = \operatorname{arctg} t$, a tedy diferenciál $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Pro výpočet integrálu ještě potřebujeme vyjádřit funkce $\sin x$ a $\cos x$ pomocí funkce $\operatorname{tg} x$. Potřebné vztahy snadno odvodíme z pravoúhlého trojúhelníka, jehož jeden úhel má velikost *x*. Jestliže přilehlou odvěsnu zvolíme rovnu 1, bude mít protilehlá odvěsna velikost $\operatorname{tg} x = t$. Z Pythagorovy věty vypočteme velikost přepony $\sqrt{1+t^2}$. Z definic funkcí sinus a kosinus (poměr velikostí protilehlé, resp. přilehlé odvěsny ku přeponě) dostaneme:



$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ a } \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} .$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ \operatorname{tg} x = t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^8} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{\dfrac{t^2}{1+t^2}}{\dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^4}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2\left(1+t^2\right)^4}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt =$$

$$= \int t^2\left(1+t^2\right)^2 dt = \int t^2\left(1+2t^2+t^4\right)dt = \int \left(t^2+2t^4+t^6\right)dt = \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{2}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + C .$$

Příklad 1.5.3. Vypočtěte integrál $\int \sin^4 x\,dx$.

Řešení:

Máme $m=4$ a $n=0$. Jelikož je $m>0$ a je sudé, snížíme mocninu použitím vzorce pro poloviční úhel.

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2})dx = \frac{1}{4}\left[x-\frac{2\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{\sin 4x}{4}\right]+C =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right]+C\ .$$

Poznámka

Integrál z funkcí $\cos 2x$ *a* $\cos 4x$ *jsme vypočetli podle vzorce* [16] *z tabulky 1.2.1. Prakticky používáme substituci* $2x = t$ *, resp.* $4x = t$.

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Výklad

V další části se budeme zabývat integrály racionálních funkcí, které dostaneme z funkcí $\sin x$, $\cos x$ a reálných čísel pomocí konečného počtu aritmetických operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení). Často jsou tyto integrály značeny jako integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)dx$, kde $R(u,v)$ představuje racionální funkci dvou proměnných $u = \sin x$ a $v = \cos x$.

Jedná se například o integrály funkcí:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x},$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x},$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}.$$

Poznámka

Pokud bychom mezi výchozí funkce přidali ještě funkce $\operatorname{tg} x$ *a* $\operatorname{cotg} x$, *nedostaneme nic nového, neboť* $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *a* $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. *Po úpravě dostaneme opět racionální funkci vytvořenou ze sinů a kosinů.*

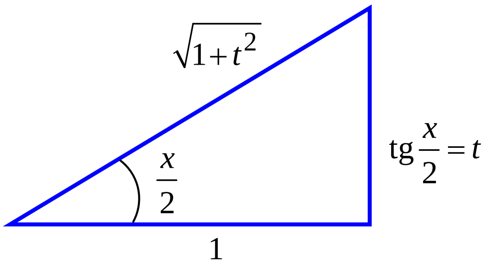
Univerzální substituce

Ukážeme, že integrál typu $\int R(\sin x, \cos x)dx$ můžeme substitucí

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\,, \qquad x \in (-\pi, \pi)$$

převést na integrál racionální lomené funkce. K tomu musíme nejprve funkce $\sin x$ a $\cos x$ vyjádřit pomocí $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Analogicky jako v příkladu 1.5.2. snadno odvodíme potřebné vztahy pro poloviční úhel $\frac{x}{2}$ z pravoúhlého trojúhelníka. Jestliže přilehlou odvěsnu zvolíme rovnu 1, bude mít



protilehlá odvěsna velikost $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Z Pythagorovy věty vypočteme velikost přepony $\sqrt{1+t^2}$. Z definic funkcí sinus a kosinus (poměr velikostí protilehlé resp. přilehlé odvěsny ku přeponě) dostaneme:

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ a } \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

S použitím vzorců pro dvojnásobný úhel

($\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$) získáme

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}\,,$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Podstatné je, že po substituci dostáváme místo funkcí sinus a kosinus racionální funkce.

Ze vztahu $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ pro $x \in (-\pi, \pi)$ dostáváme $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, a tedy $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. Po dosazení dostáváme integrál racionální funkce

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt \ .$$

Shrnutí:

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)dx$ můžeme řešit substitucí

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\,, \qquad x \in (-\pi, \pi)\,.$$

Pak vyjádříme

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt\,.$$

Řešené úlohy

Příklad 1.5.4. Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{\sin x}dx\,,\ \ x \in (0, \pi)\,.$

Řešení:

Uvedený integrál jsme již jednou řešili substitucí (příklad 1.4.6). Z výše odvozených vztahů snadno dostaneme:

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C\,.$$

Příklad 1.5.5. Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{\cos x - 2\sin x + 3}dx$.

Řešení:

Použijeme substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Z výše odvozených vztahů snadno dostaneme:

$$\int \frac{1}{\cos x - 2\sin x + 3}dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - 2\frac{2t}{1+t^2} + 3}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1-t^2-4t+3+3t^2}dt =$$

$$= \int \frac{2}{2t^2-4t+4}dt = \int \frac{1}{t^2-2t+2}dt = \int \frac{1}{t^2-2t+1+1}dt = \int \frac{1}{1+(t-1)^2}dt =$$

$$= \operatorname{arctg}(t-1) + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1) + C\,.$$

Příklad 1.5.6. Vypočtěte integrál $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\,dx$.

Řešení:

Použijeme substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Z výše odvozených vztahů dostaneme:

$$\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\,dx=\int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int \frac{2+2t}{2t^2-2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=$$

$$=\int \frac{2(t+1)}{(t^2-t)(1+t^2)}\,dt=\int \frac{2(t+1)}{t(t-1)(1+t^2)}\,dt$$

Dostali jsme integrál z racionální funkce ryze lomené. Pro rozklad racionální funkce na parciální zlomky použijeme postup uvedený v kapitole 1.5. Polynom ve jmenovateli má reálné kořeny $t_1=0$, $t_2=1$ a komplexně sdružené kořeny $t_{3,4}=\pm i$. Rozklad na součet parciálních zlomků bude mít tvar:

$$\frac{2(t+1)}{t(t-1)(1+t^2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C2t}{1+t^2}+\frac{D}{1+t^2}\,.$$

Nalezneme neznámé koeficienty *A, B, C, D* rozkladu z rovnice

$$2(t+1)=A(t-1)(1+t^2)+Bt(1+t^2)+C2t^2(t-1)+Dt(t-1)\,.$$

Dostaneme: $A=-2,\ \ B=2,\ \ C=0,\ \ D=-2$.

Integrujeme parciální zlomky:

$$\int \frac{2(t+1)}{t(t-1)(1+t^2)}dt=\int \left(\frac{-2}{t}+\frac{2}{t-1}+\frac{-2}{1+t^2}\right)dt=-2\ln|t|+2\ln|t-1|-2\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=-2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|-2\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C=2\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|-x+C\,.$$

Poznámka

Substitucí $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ *pro* $x\in(-\pi,\pi)$ *můžeme řešit každý integrál typu* $\int R(\sin x,\cos x)dx$.

Vzniklé racionální funkce však mohou být komplikované a integrace pracná. V některých speciálních případech může k cíli rychleji vést substituce $\sin x=t$, $\cos x=t$, *případně* $\operatorname{tg}x=t$.

Kontrolní otázky

1. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu typu $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, $m, n \in \mathbf{Z}$, je-li m liché?
2. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu typu $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, $m, n \in \mathbf{Z}$, je-li n liché?
3. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu typu $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, $m, n \in \mathbf{Z}$, jsou-li m i n sudé?
4. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$?
5. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \, dx$?
6. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \frac{1}{\sin^3 x} \, dx$?
7. Jaký postup zvolíte při výpočtu integrálu $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$?
8. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \, dx$?
9. Jakou funkci představuje zápis $R(\sin x, \cos x)$?
10. Kdy je vhodná univerzální substituce $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$?
11. Je vhodná univerzální substituce při výpočtu integrálu $\int \frac{1}{2 - \cos x} \, dx$?
12. Při výpočtu integrálu $\int \frac{\sin x}{2 - \cos x} \, dx$ je vhodnější jiná než univerzální substituce. Jaká?

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int \cos^3 x \, dx$ b) $\int \sin^5 x \, dx$ c) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

d) $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$ e) $\int \sin^4 x \, dx$ f) $\int \cos^4 x \, dx$

g) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ h) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx$ i) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx$

j) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$ k) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$ l) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

2. a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4\sin x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{2+\cos^2 x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{3+\sin^2 x}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$ f) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\sin x}\cos^5 x\,dx$

3. a) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x\cos x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$ e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}\,dx$

4. a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sin x - 7\cos x - 7}$ e) $\displaystyle\int \frac{\sin x - 1}{\cos x - 1}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$; b) $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$; c) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$;

d) $\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C$; e) $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$; f) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$;

g) $\cos x + \dfrac{1}{\cos x} + C$; h) $\sin x + \dfrac{2}{\sin x} - \dfrac{1}{3\sin^3 x} + C$; i) $\ln|\cos x| + \dfrac{1}{2\cos^2 x} + C$;

j) $\cos x + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\cos x + 1}{\cos x - 1}\right| + C$; k) $-\sin x + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C$; l) $\dfrac{x}{8} - \dfrac{\sin 4x}{32} + C$.

2. a) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sin x}{\sin x + 4}\right| + C$; b) $\dfrac{1}{2}\cos^2 x - 3\cos x + 6\ln|\cos x + 2| + C$; c) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{\sqrt{2}} + C$;

d) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{3}}\right) + C$; e) $\dfrac{5}{2}\sqrt{\cos^5 x} - 2\sqrt{\cos x} + C$;

f) $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\sin^4 x} - \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\sin^8 x} + \dfrac{3}{14}\sqrt[3]{\sin^{14} x} + C$.

3. a) $\operatorname{tg} x - x + C$; b) $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C$;

c) $\ln|\operatorname{tg} x| + C$; d) $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\operatorname{tg} x\right) + C$; e) $\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} + C$; f) $\ln|\operatorname{tg} x + 1| - 2x + C$.

4. a) $\ln\left|\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C$; b) $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$; c) $\dfrac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$; d) $\dfrac{1}{4}\ln\left|4\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 7\right| + C$;

e) $\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$; f) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

Kontrolní test

1. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$?

   a) $\cos x=t$, b) $\sin x=t$,

   c) univerzální, d) $\operatorname{tg} x=t$.

2. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int\sin^7 x\,dx$?

   a) $\cos x=t$, b) $\sin x=t$,

   c) univerzální, d) $\operatorname{tg} x=t$.

3. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int\frac{dx}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}$?

   a) univerzální, b) $\sin x=t$,

   c) $\operatorname{tg} x=t$, d) $\cos x=t$.

4. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\cos^5 x\,dx$.

   a) $\sin x+\frac{2}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$, b) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$,

   c) $\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C$, d) $\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

   a) $-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+C$, b) $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$,

   c) $-\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+C$, d) $\frac{3}{\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

   a) $\frac{1}{8}(x-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{6}\sin^3 2x)+C$, b) $\frac{1}{6}(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin^3 2x)+C$,

   c) $\frac{1}{8}(\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{6}\sin^3 x)+C$, d) $\frac{1}{6}(x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{6}\sin^3 2x)$.

7. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} dx$ (lze i bez substituce).

a) $-\operatorname{cotg} x + 2\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C,$ b) $\frac{1}{\operatorname{tg} x} + 2\operatorname{cotg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C,$

c) $-\operatorname{cotg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^3 x + C,$ d) $-\operatorname{tg} x + 2\operatorname{cotg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$

8. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\cos^3 x}{2 - \sin x} dx.$

a) $-\frac{1}{2}\sin^2 x - 2\sin x - 3\ln|\sin x - 2| + C,$ b) $\frac{1}{2}\sin^2 x + 2\sin x - 3\ln|2 - \sin x| + C,$

c) $\frac{1}{2}\sin^2 x - 2\sin x + 3\ln|2 - \sin x| + C,$ d) $\frac{1}{2}\sin^2 x + 2\sin x + 3\ln|\sin x - 2| + C.$

9. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}.$

a) $2\ln\left|1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|,$ b) $\ln|1 + \operatorname{tg} x| + C,$ c) $\ln\left|1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$ d) $2\ln|1 + \operatorname{tg} x| + C.$

10. Bez použití univerzální substituce vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1}{1 - \sin x} dx.$

a) $-\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C,$ b) $\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C,$ c) $\operatorname{cotg} x - \frac{1}{\cos x} + C,$ d) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} + C.$

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. c); 4. b); 5. b); 6. c); 7. a); 8. d); 9. c); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.6 znovu a propočítat další úlohy k samostatnému řešení.

Shrnutí lekce

V praktických aplikacích se velmi často vyskytují integrály, které obsahují goniometrické funkce. Při výpočtu integrálů tohoto typu je obvykle užívána substituční metoda. V této kapitole jsou přehledně uvedeny substituce používané pro základní typy integrálů, se kterými se často setkáváme. Často se vyskytují integrály, které je možno řešit několika způsoby. Je dobré zvolit takovou metodu, která povede nejrychleji k cíli. Obvykle postupujeme takto:

- Nejprve uvažíme, zda nelze použít substituci $\sin x = t$ nebo $\cos x = t$,
- pak zkoušíme, zda není vhodná substituce $\operatorname{tg} x = t$,
- nakonec se pokusíme problém vyřešit univerzální substitucí $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$.

1.7. Neelementární integrály

Výklad

Každá funkce $f(x)$, která je spojitá na otevřeném intervalu I, má na tomto intervalu primitivní funkci. V předcházejících kapitolách jsme se zabývali metodami výpočtu primitivních funkcí. Každá primitivní funkce byla vyjádřena konečným výrazem obsahujícím známé elementární funkce (např. x^3, $\sqrt[5]{x^3}$, $\sqrt{a^2-x^2}$, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\operatorname{arctg} x$, ...).

Existují však spojité funkce jedné proměnné, jejichž primitivní funkce nelze vyjádřit pomocí konečného počtu elementárních funkcí. Takovými funkcemi jsou např. funkce

$$\sin x^2,\ \cos x^2,\ e^{x^2},\ e^{-x^2},\ \frac{e^x}{x},\ \frac{\sin x}{x},\ \frac{\cos x}{x},\ \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}.$$

K těmto funkcím sice primitivní funkce existují, ale nelze je vyjádřit elementárními funkcemi v konečném tvaru. V tomto případě integrál takové funkce představuje neelementární funkci, kterou nazýváme **vyšší transcendentní funkce**.

Obecně nelze říci, kdy se nám nedaří nalézt primitivní funkci, protože jsme použili nevhodnou metodu a kdy z toho důvodu, že ji nelze vyjádřit v konečném tvaru (jde o vyšší transcendentní funkci). Tuto otázku dovedeme odpovědět jen u některých integrálů, u nichž víme, že se jedná o vyšší transcendentní funkce:

$\int e^{-x^2}dx$ (Gaussova funkce), $\int \frac{e^x}{x}dx = \int \frac{\ln t}{t}dt$ (integrální logaritmus), $\int \frac{\sin x}{x}dx$ (integrální sinus), $\int \frac{\cos x}{x}dx$ (integrální kosinus), $\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$, $|k|<1$ (eliptický integrál prvního druhu), $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ (Fresnelovy integrály).

Integrály tohoto typu se vyskytují v řadě praktických aplikací např. v teorii chyb, pravděpodobnosti a statistice.

Jistou výhodou při počítání integrálů je fakt, že v případě pochybností můžeme správnost výpočtu ověřit zkouškou, neboť z definice primitivní funkce plyne

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Pokud je náš výpočet správný, zderivováním výsledné funkce dostaneme integrovanou funkci.

2. URČITÝ INTEGRÁL

Průvodce studiem

V předcházející kapitole jsme se seznámili s pojmem neurčitý integrál, který dané funkci přiřazoval opět funkci (přesněji množinu funkcí). V této kapitole se budeme věnovat určitému integrálu, který dané funkci přiřazuje číslo.

Určitý integrál má využití ve velkém množství aplikací. Pomocí určitého integrálu můžeme počítat obsahy ploch, délky křivek, objemy a pláště rotačních těles, statické momenty rovinných obrazců, křivek a rotačních těles, souřadnice těžiště. Velké množství aplikací naleznete ve fyzice (výpočet rychlosti, dráhy, práce, ...). Další aplikace naleznete v ekonomice, financích, pravděpodobnosti a statistice a v mnoha dalších oborech.

Existuje několik přístupů, jak vybudovat pojem určitý integrál a tomu odpovídá několik druhů určitých integrálů (Newtonův, Riemannův, Lebesgueův). Podle způsobu zavedení se mění třída integrovatelných funkcí. Dnes bývá obvyklé používat definici, jak ji zavedl významný německý matematik B. Riemann (1826 – 1866). Potřeba vybudování tohoto pojmu vychází z potřeb řešení geometrických problémů a problémů klasické mechaniky. Množina funkcí, které jsou integrovatelné v Riemannově smyslu je dostatečně široká pro inženýrskou praxi. Způsob zavedení je východiskem pro numerické výpočty určitých integrálů.

2.1. Pojem Riemannova určitého integrálu

Cíle

Seznámíte se s pojmem Riemannova integrálu funkce jedné proměnné a geometrickým významem tohoto integrálu.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte pojem primitivní funkce, neurčitý integrál a jejich výpočet.

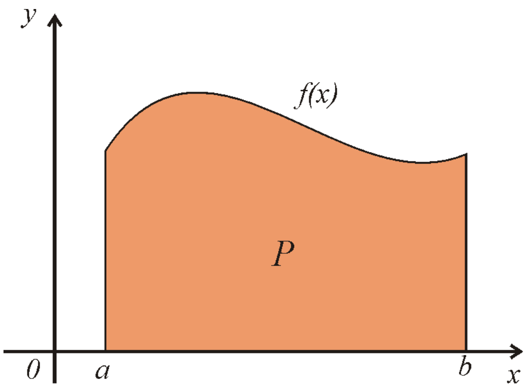
Výklad

Historickou motivací pro vznik určitého integrálu byl výpočet obsahů ploch. Tento problém řešili již staří Egypťané v souvislosti s určováním velikostí pozemků, jejichž velikost se měnila v důsledku záplav Nilu. Problém řešili tak, že danou plochu rozdělili na trojúhelníky, spočítali jejich obsahy a ty pak sečetli. Tyto metody později rozvinuli staří Řekové. V 16. a 17. století byla velká pozornost věnována studiu křivek, byla rozvíjena klasická mechanika. Vzniká otázka, jakým způsobem je vhodné definovat obsah obecných útvarů, které se nedají rozložit na konečný počet trojúhelníků.

Motivace

Zabývejme se následující úlohou:

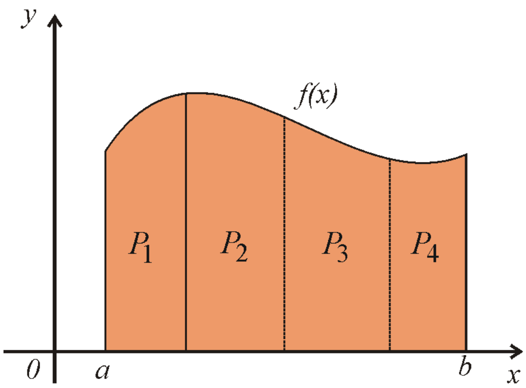
Mějme funkci $f(x)$, která je spojitá a nezáporná na intervalu $< a,b >$. Geometrický útvar ohraničený shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x (obr. 2.1.1) nazveme „křivočarý lichoběžník“. Naším úkolem je vypočítat obsah tohoto útvaru.



Obr. 2.1.1. Křivočarý lichoběžník

Ze střední školy znáte vztahy pro výpočet obsahu trojúhelníka, obdélníka, kruhu a možná několika dalších jednoduchých obrazců. Pro obecnou funkci $y = f(x)$ však zatím obsah obrazce na obr. 2.1.1 vypočítat nedovedeme. Navrhněme, jak vypočítat obsah tohoto útvaru alespoň přibližně:

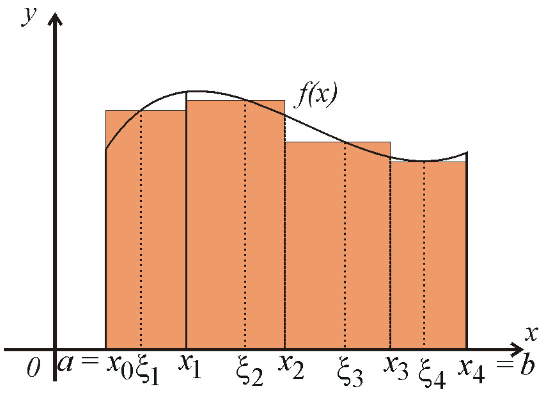
1. Rozdělíme obrazec rovnoběžkami s osou y na „proužky“ (na ilustračním obrázku 2.1.2 jsou čtyři). Je zřejmé, že obsah obrazce dostaneme jako součet obsahů jednotlivých proužků. V uvedeném případě $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$.



Obr. 2.1.2. Rozdělení na „proužky"

2. Vypočteme obsah jednotlivých „proužků“. Jelikož shora jsou ohraničeny funkcí $f(x)$, provedeme výpočet přibližně. Funkci v daném pásku nahradíme funkční hodnotou $f(\xi)$ v nějakém bodě ξ, který jsme zvolili v základně tohoto „proužku“. Daný proužek tedy

aproximujeme obdélníčkem. Tím se dopouštíme určité chyby, neboť někde obdélníček přesahuje funkci $f(x)$ a někde je zase nižší.



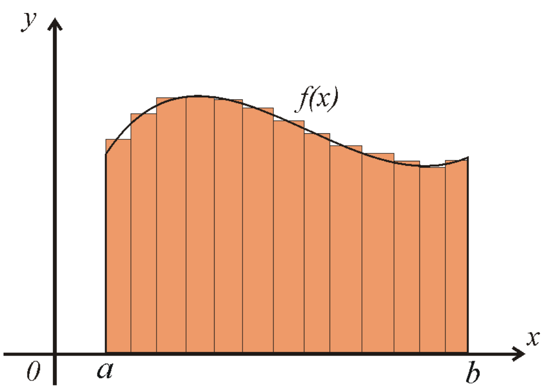
Obr. 2.1.3. Aproximace obrazce obdélníčky

Obsah obrazce na obr. 2.1.2 bude přibližně roven součtu obsahů jednotlivých obdélníčků:

$$P \doteq (x_1 - x_0) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + (x_3 - x_2) f(\xi_3) + (x_4 - x_3) f(\xi_4) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

3. Dá se předpokládat, že pro „rozumné“ funkce bude chyba tím menší, čím větší bude počet proužků, na které byl obrazec rozdělen (obr. 2.1.4).



Obr. 2.1.4. Zvětšení počtu obdélníčků

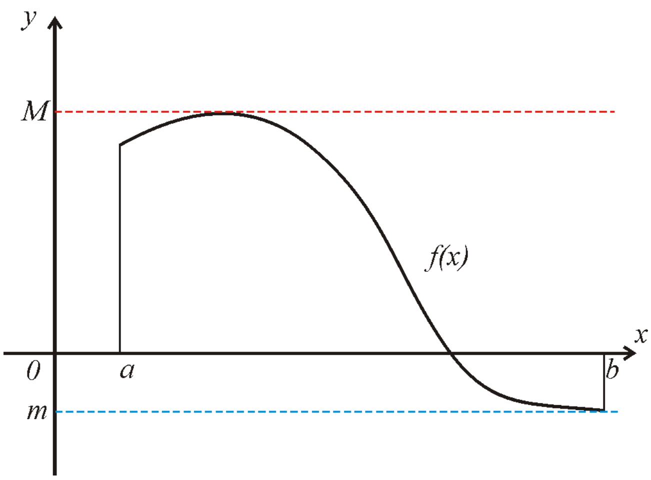
Budeme-li počet „proužků“ neomezeně zvětšovat a současně je zužovat, měla by se přibližná hodnota daná součtem obdélníčků stále více přibližovat obsahu P daného obrazce. Tedy obsah P dostaneme jako limitu pro nekonečný počet obdélníčků.

K podobnému problému dospějeme při řešení jednoduché úlohy z klasické mechaniky. Chceme vypočítat práci, která se vykoná při přímočarém pohybu, má-li síla směr dráhy. Nechť na hmotný bod pohybující se po dráze $< a, b >$ působí síla $f(x)$. Je-li tato síla konstantní, je vykonaná práce rovna součinu síly a dráhy. Pokud se velikost síly mění (dána funkcí $f(x)$ na intervalu $< a, b >$) můžeme postupovat tak, že dráhu rozdělíme na dílčí intervaly a v každém použijeme hodnotu síly $f(\xi_i)$ v nějakém bodě dílčího intervalu. Tedy stejně jako v předcházející úloze je celková vykonaná práce aproximována součtem práce na dílčích intervalech. Limitním přechodem, kdy zvyšujeme počet dělících bodů, přičemž se šířka dílčích intervalů blíží k nule, dostaneme celkovou práci.

Analogický postup použijeme při zavedení určitého integrálu.

Definice určitého integrálu

Definice určitého integrálu je poměrně složitá. K pojmu určitý integrál dospějeme následujícím způsobem. Uvažujme funkci $y = f(x)$, která je definována na **uzavřeném intervalu** $< a,b >$ a je na tomto intervalu **spojitá a ohraničená**. Musejí tedy existovat konstanty m a M takové, že pro všechna $x \in < a,b >$ platí $m \le f(x) \le M$.



Obr. 2.1.5. Ohraničená funkce na uzavřeném intervalu $< a,b >$

Výklad omezíme na funkce po částech spojité na intervalu $< a,b >$, tj. na funkce, které mají na tomto intervalu konečný počet bodů nespojitosti (body nespojitosti 1. druhu). S takto definovaným určitým integrálem vystačíme při běžných aplikacích integrálního počtu v přírodních a technických vědách.

Poznámka

1. Předpoklad ohraničené funkce na uzavřeném intervalu je podstatný. Někdy lze pojem Riemannova integrálu rozšířit i na případy, kdy funkce není ohraničená nebo interval není uzavřený. Pak mluvíme o nevlastních integrálech (kap. 2.5).

Definice 2.1.1.

Říkáme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $< a,b >$ integrovatelná (schopná integrace), je-li na něm ohraničená a aspoň po částech spojitá.

Postup při zavedení pojmu určitý integrál:

1. Interval $<a,b>$ rozdělíme na n dílčích intervalů. Množinu dělících bodů $D_n = \{x_0, x_1, \ \dots \ , x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \ \dots \ x_{n-1} < x_n = b$, nazveme **dělením intervalu** $<a,b>$ na n intervalů $<x_{i-1}, x_i>, \ i = 1, 2, \ \dots \ , n$.

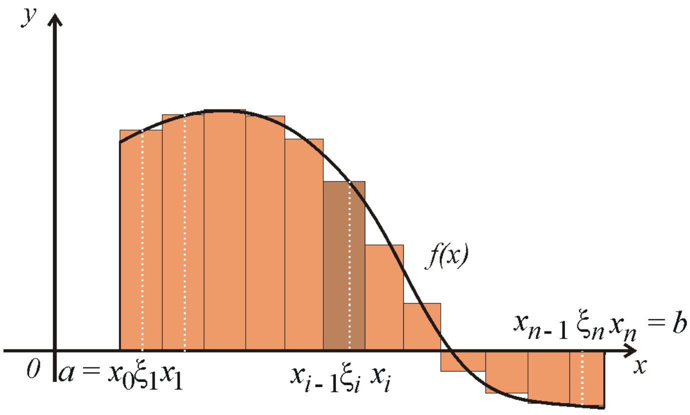
   Číslo $\nu(D_n) = \max\limits_{i=1,\dots,n} (x_i - x_{i-1})$ budeme nazývat **normou dělení** D_n. Toto číslo nám říká, jaká je délka největšího intervalu v daném dělení. Samozřejmě intervalů s touto maximální délkou může být více, případně mohou být intervaly stejně dlouhé (ekvidistantní body). Norma dělení charakterizuje, jak je dělení jemné.

2. V každém dílčím intervalu dělení D_n vybereme jeden bod $\xi_i \in <x_{i-1}, x_i>, \ i = 1, 2, \ \dots \ , n$. Množinu těchto bodů $R_n = \{\xi_1, \xi_2, \ \dots \ , \xi_n\}$ budeme nazývat **výběrem reprezentantů** příslušných k dělení D_n.

3. Pro dané dělení D_n intervalu $<a,b>$ a výběr reprezentantů R_n vytvoříme součet

   $\sigma(f, D_n, R_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Tato suma se nazývá **integrálním součtem funkce *f*** nebo také **Riemannův součet** (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 – 1866). Geometrický význam tohoto součtu je znázorněn na obr. 2.1.6. Jedná se vlastně o součet obsahů obdélníků se základnami $(x_i - x_{i-1})$ a výškami $f(\xi_i)$, kde $i = 1, 2, \ \dots \ , n$. Je zřejmé, že pro $f(\xi_i) < 0$ bude hodnota pro daný obdélník záporná. Označení $\sigma(f, D_n, R_n)$ znamená, že integrální součet závisí na funkci *f*, na konkrétním dělení D_n a na výběru reprezentantů R_n.

4. Budeme vytvářet integrální součty pro stále jemnější dělení D_n intervalu $<a,b>$ při libovolných výběrech reprezentantů R_n. Pokud bude existovat limita integrálních součtů $\sigma(f, D_n, R_n)$ pro $n \to \infty$ a normu dělení $\nu(D_n) \to 0$ nezávisle na výběrech reprezentantů, nazveme ji určitý integrál funkce $f(x)$ na intervalu $<a,b>$.



Obr. 2.1.6. Integrální součet funkce *f*

Definice 2.1.2.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $< a,b >$, D_n je dělení intervalu $< a,b >$ a R_n výběr reprezentantů. Řekneme, že funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na intervalu $< a,b >$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbf{R}$ s vlastností

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, R_n) = I$$

pro libovolnou posloupnost dělení D_n, pro kterou platí $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$ při libovolné volbě reprezentantů R_n. Číslo *I* nazýváme **určitý (Riemannův) integrál** funkce f na intervalu $< a,b >$ a píšeme $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Číslo *a* nazýváme **dolní mez**, číslo *b* **horní mez**, interval $< a,b >$ **integrační obor** a funkci f **integrand**.

Geometrický význam určitého integrálu

Je-li $f(x) \ge 0$ na intervalu $< a,b >$, pak $\int\limits_a^b f(x)dx$ představuje obsah „křivočarého lichoběžníka“ ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x (obr. 2.1.1).

Poznámky

1. Zápis neurčitého integrálu $\int f(x)dx$ *a určitého integrálu* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *je formálně velmi* *podobný. U určitého integrálu jsou pouze navíc integrační meze. To má za následek, že je studenti považují prakticky za stejné. Určitý a neurčitý integrál se však zásadně liší!*

*Výsledkem **neurčitého integrálu** je **funkce** (množina funkcí),*

*výsledkem **určitého integrálu** je **číslo**. Přestože se jedná o zcela odlišné pojmy, existuje mezi nimi důležitá souvislost, jak uvidíme dále (věta 2.2.1).*

2. Z konstrukce určitého integrálu je zřejmé, že výsledek nezávisí na tom, jak označíme integrační proměnnou. Tedy $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$.

3. Symbol integrálu $\int$ *vznikl protažením písmene S, které označovalo sumu. Z definice určitého integrálu vidíme, o jakou sumu (integrální součet) se jedná.*

4. Postup uvedený v předcházející části jsme mohli realizovat nejlépe s použitím počítače. Daný interval $< a,b >$ *bychom rozdělili ekvidistantními body na dostatečný počet dílčích intervalů (třeba milion), jako reprezentanty bychom zvolili levé nebo pravé hranice těchto dílčích intervalů. Snadno naprogramujeme výpočet integrálního součtu. Pokud určitý integrál existuje, bude tento integrální součet jistou aproximací určitého integrálu. Uvedený postup je základem obdélníkové metody numerického výpočtu určitých integrálů. Těmito postupy a odhadem chyby se zabývá numerická matematika.*

2.2. Výpočet a vlastnosti určitého integrálu

Cíle

Základní věta integrálního počtu (Newton – Leibnizova) nám umožní výpočet určitých integrálů. Poznáte základní vlastnosti určitých integrálů.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte zavedení a význam určitého integrálu, pojem primitivní funkce, neurčitý integrál a jeho výpočet.

Výpočet určitého integrálu

Výklad

V předcházející kapitole jsme uvedli definici určitého integrálu. Kromě konstantní funkce (určitý integrál je vlastně obsah obdélníka) jsme dosud nebyli schopni žádný integrál spočítat. Následující věta je pojmenována podle dvou matematiků, kteří se zasloužili o vybudování základů integrálního počtu funkce jedné proměnné – Newtona a Leibnize (Isaac Newton 1643-1727, Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716).

Věta 2.2.1. (Newtonova – Leibnizova formule)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $<a,b>$ a $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu $<a,b>$, pak

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Důkaz:

Ukážeme, že rozdíl $F(b) - F(a)$ je pro libovolné dělení D_n intervalu $<a,b>$ roven integrálnímu součtu $\sigma(f, D_n, R_n)$.

Zvolme libovolné dělení $D_n = \{x_0, x_1, \ \dots \ , x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \ \dots \ < x_{n-1} < x_n = b$, intervalu $<a,b>$. Jelikož $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu $<a,b>$, splňuje v každém subintervalu $<x_{i-1}, x_i>$, $i = 1, 2, \ \dots \ , n$ předpoklady Lagrangeovy věty (věta 3.2.5, Matematika I, část II). To znamená, že existují čísla $\xi_i \in <x_{i-1}, x_i>$ taková, že platí $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Protože $F'(\xi_i) = f(x_i)$, dostáváme $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Sečtením přes všechna i dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \ \dots\ + F(x_n) - F(x_{n-1}) =$$

$$= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)\,.$$

Obdrželi jsme, že pro libovolné dělení D_n je integrální součet

$$\sigma(f, D_n, R_n) = F(b) - F(a)\,.$$

Podle předpokladu je funkce $f(x)$ integrovatelná, což znamená, že pro zjemňující se dělení s normou dělení $\nu(D_n) \to 0$ bude integrální součet konvergovat k jisté konstantě I (hodnotě integrálu $\int_a^b f(x)dx$). Hodnota integrálního součtu je vždy rovna $F(b) - F(a)$. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, R_n) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,.$$

Poznámky

1. Pro rozdíl $F(b) - F(a)$ *se vžil zápis* $[F(x)]_a^b$, *takže Newtonovu – Leibnizovu formuli obvykle zapisujeme ve tvaru* $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

2. Z věty 1.1.1 víme, že k dané funkci existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se liší konstantou. Je otázkou, jaký výsledek dostaneme pro jinou primitivní funkci $G(x) = F(x) + C$. *Snadno zjistíme, že* $G(b) - G(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$. *Tedy hodnota integrálu nezávisí na integrační konstantě C. Proto v dalších příkladech integrační konstantu nebudeme používat.*

3. Newtonova – Leibnizova formule může být použita pro definování určitého integrálu a historicky byl určitý integrál nejprve definován tímto způsobem. Tento integrál je nazýván ***Newtonův určitý integrál*** *funkce* $f(x)$. *U funkcí spojitých na integračním intervalu jsou si oba integrály (tj. Newtonův a Riemannův) rovny. Obecně tak tomu není.*

4. Newtonovu - Leibnizovu formuli lze zobecnit i na ohraničené, po částech spojité funkce. Výpočet však vyžaduje určité opatrnosti, abychom vhodnou volbou integrační konstanty dostali funkci $F(x)$ *spojitou na* $< a,b >$.

Řešené úlohy

Příklad 2.2.1. Vypočtěte integrál $\int_1^2 x^3 dx$.

Řešení:

Funkce $f(x) = x^3$ je spojitá pro každé $x \in \boldsymbol{R}$ a primitivní funkci k ní nalezneme pomocí vzorce v tab. 1.2.1. S využitím Newtonovy – Leibnizovy formule dostaneme

$$\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

Příklad 2.2.2. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$.

Řešení:

Funkce $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ je spojitá pro každé $x \in \boldsymbol{R}$.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int_0^1 1 - \frac{1}{x^2+1} dx = \left[x - \operatorname{arctg} x\right]_0^1 =$$

$$= (1 - \operatorname{arctg} 1) - (0 - \operatorname{arctg} 0) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Příklad 2.2.3. Vypočtěte integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$.

Řešení:

Funkce $f(x) = \sin 2x$ je spojitá pro každé x, pro nalezení primitivní funkce použijeme vztah [16] v tabulce základních integrálů (tab. 1.2.1).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\cos\frac{2\pi}{2}}{2} + \frac{\cos 0}{2} = -\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1.$$

Příklad 2.2.4. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

Řešení:

Funkce $f(x)=\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}$ je spojitá pro každé $x \in \boldsymbol{R}$. Primitivní funkci jsme již hledali v příkladu 1.2.5.

$$\int_0^1 \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}dx = \int_0^1 (e^{2x}-e^x+1)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x\right]_0^1 =$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^2-e+1\right)-\left(\frac{1}{2}e^0-e^0+0\right)=\frac{1}{2}e^2-e+1-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}e^2-e+\frac{3}{2}.$$

(Při úpravě čitatele zlomku jsme použili vztah $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$).

Příklad 2.2.5. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$. **(Výstražný)**

Řešení:

Pokud budeme postupovat zcela mechanicky, dostaneme:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx = \left[\ln|x|\right]_{-1}^1 = \ln 1 - \ln 1 = 0.$$

Avšak funkce $f(x)=\frac{1}{x}$ není na intervalu $<-1,1>$ spojitá (alespoň po částech). V bodě $x=0$ má bod nespojitosti 2. druhu, není tedy v okolí počátku ohraničená. Vzhledem k tomu nelze použít Newtonovu – Leibnizovu formuli (není na daném intervalu definován Newtonův integrál). Získaný výsledek je nesprávný. Správný výsledek si ukážeme později.

Vlastnosti určitého integrálu

Výklad

V této části uvedeme základní vlastnosti určitého (Riemannova) integrálu, které budeme v dalším běžně používat při praktických výpočtech.

Věta 2.2.2.

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $<a,b>$ a c je libovolná konstanta. Pak platí

a) $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$$

b) $$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Důkaz:

Z definice Riemannova integrálu pro normální posloupnost dělení dostáváme:

a) $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)](x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

b) $$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = c \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = c\int_a^b f(x)dx.$$

Poznámky

1. První vlastnost se nazývá aditivita vzhledem k integrandu, druhá homogenita .

2. Podobné vlastnosti měl i neurčitý integrál (věta 1.2.1). Vlastnost aditivity snadno rozšíříme na libovolný konečný počet sčítanců.

Příklad 2.2.6. Vypočtěte integrál $\int_4^{20} \frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}}\,dx$.

Řešení:

Funkce $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}}$ je spojitá pro $x \geq 4$, tedy na oboru integrace je spojitá. Integrovanou funkci nejprve rozšíříme součtem odmocnin.

$$\int_4^{20} \frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}}\,dx = \int_4^{20} \frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}} \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}}\,dx =$$

$$= \int_4^{20} \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}}{(x+5)-(x-4)}\,dx = \int_4^{20} \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}}{9}\,dx$$

Použijeme větu 2.2.2 a integrál rozdělíme na součet dvou integrálů:

$$\int_4^{20} \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}}{9}\,dx = \frac{1}{9}\int_4^{20} \sqrt{x+5}dx + \frac{1}{9}\int_4^{20} \sqrt{x-4}dx = \frac{1}{9}\left[\frac{(x+5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^{20} + \frac{1}{9}\left[\frac{(x-4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^{20} =$$

$$= \frac{2}{27}\left(25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{2}{27}\left(16^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{27}\left(25\sqrt{25} - 9\sqrt{9}\right) + \frac{2}{27}\left(16\sqrt{16} - 0\right) =$$

$$= \frac{2}{27}(125-27+64) = \frac{2}{27}162 = 2\cdot 6 = 12.$$

Pro výpočet integrálů byl použit vztah [16] z tabulky základních integrálů (tab. 1.2.1).

Příklad 2.2.7. Vypočtěte integrál $\int_2^{4} \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$.

Řešení:

Jmenovatel integrované racionální funkce se nesmí rovnat nule $x^3-x^2 = x^2(x-1) \neq 0$

Funkce $f(x)=\frac{x^3+1}{x^3-x^2}$ má body nespojitosti $x=0$ a $x=1$, tedy na oboru integrace je spojitá. Interand je racionální funkce, musíme nejprve provést rozklad na součet parciálních zlomků (viz kap. 1.5).

1. Polynom v čitateli je stupně $m=3$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má také stupeň $n=3$. Jelikož není $m<n$, je daná funkce neryze lomená racionální funkce a

musíme polynomy vydělit.

$$\begin{array}{l} (x^3+1):(x^3-x^2)=1 \\ \underline{-(x^3-x^2)} \\ \qquad x^2+1 \end{array}$$

Danou racionální funkci proto můžeme podle věty 1.5.4 zapsat ve tvaru

$$\frac{x^3+1}{x^3-x^2}=1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2} \; .$$

2. Polynom ve jmenovateli $Q_3(x)=x^3-x^2$ rozložíme na základní součin podle věty 1.5.3. Dostaneme $Q_3(x)=x^2(x-1)$.
3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B}{x-1} \; .$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu A_1, A_2, B (viz kap. 1.5). Dostaneme

$$A_1=-1, \;\; A_2=-1, \;\; \mathrm{B}=2 \, .$$

5. Integrujeme získané parciální zlomky:

$$\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx=\int_2^4\left(1+\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\right)dx=\int_2^4 dx-\int_2^4\frac{1}{x}dx-\int_2^4\frac{1}{x^2}dx+2\int_2^4\frac{1}{x-1}dx=$$

$$=\left[x\right]_2^4-\left[\ln|x|\right]_2^4+\left[\frac{1}{x}\right]_2^4+2\left[\ln|x-1|\right]_2^4=(4-2)-(\ln 4-\ln 2)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+2(\ln 3-\ln 1)=$$

$$=2-\frac{1}{4}-\ln 4+\ln 2+2\ln 3=\frac{7}{4}+\ln\frac{9}{2} \; .$$

Definice 2.2.1.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $<a,b>$. Pak

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \, .$$

Poznámky

1. Pro spojité funkce (Newtonův integrál) je uvedená vlastnost triviální, neboť

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx \ .$$

2. Důsledkem této definice, je následující vlastnost pro každou integrovatelnou funkci

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \, .$$

Věta 2.2.3.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $< a,b >$ a c je libovolné reálné číslo $a < c < b$. Pak je $f(x)$ integrovatelná na intervalech $< a,c >$ a $< c,b >$ a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \, .$$

Poznámky

1. Vlastnost se nazývá aditivita určitého integrálu vzhledem k mezím.

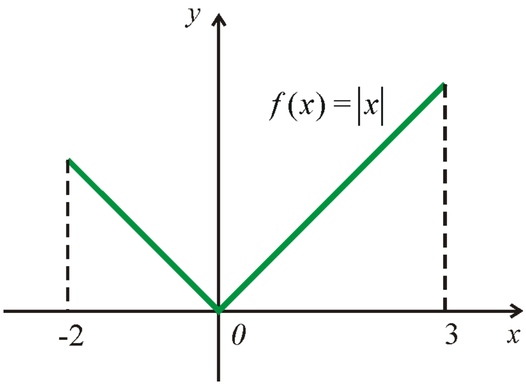
2. Větu lze zobecnit na libovolný konečný počet částečných intervalů a tedy na konečný počet sčítanců.

3. Větu využíváme zejména v případech, kdy integrand nemá na intervalu $< a,b >$ jednotný analytický předpis.

Příklad 2.2.8. Vypočtěte integrál $\int_{-2}^{3} |x| \, dx$.

Řešení:

Z definice absolutní hodnoty platí $|x| = \begin{cases} -x & \text{pro } x \in < -2, 0 >, \\ x & \text{pro } x \in < 0, 3 >, \end{cases}$ viz obr. 2.2.1.



Obr. 2.2.1. Graf funkce $f(x)=|x|,\ x\in<-2,3>$

Funkce je integrovatelná, protože je na daném intervalu spojitá a ohraničená. Podle věty 2.2.3 bude platit

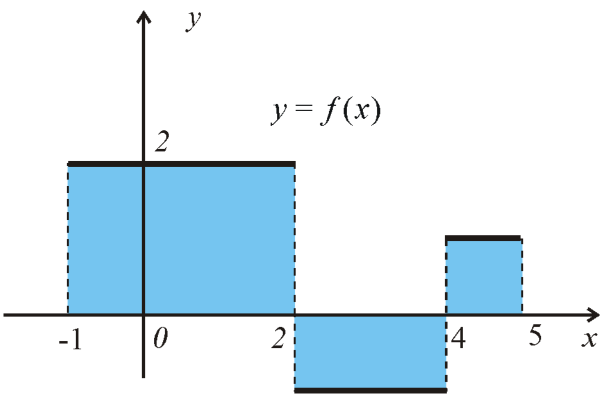
$$\int_{-2}^{3}|x|\,dx=\int_{-2}^{0}|x|\,dx+\int_{0}^{3}|x|\,dx=-\int_{-2}^{0}x\,dx+\int_{0}^{3}x\,dx=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3}=$$

$$=-(0-2)+\left(\frac{9}{2}-0\right)=\frac{13}{2}.$$

Příklad 2.2.9. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{5} f(x)dx$, kde $f(x)=\begin{cases}2 & \text{pro } x\in<-1,2>,\\ -1 & \text{pro } x\in(2,4),\\ 1 & \text{pro } x\in<4,5>.\end{cases}$.

Řešení:

Daná funkce je ohraničená a má dva body nespojitosti $x=2$ a $x=4$ (obr. 2.2.2).



Obr. 2.2.2. Graf funkce z příkladu 2.2.9

Podle věty 2.2.3 bude platit

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx=\int_{-1}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{5} f(x)dx=\int_{-1}^{2}2dx+\int_{2}^{4}(-1)dx+\int_{4}^{5}1dx.$$

Všimněte si, že jsme u druhého integrálu mlčky změnili hodnoty funkce *f(x)* v krajních bodech na -1. To nemá vliv na hodnotu integrálu. Dostaneme

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx = 2[x]_{-1}^{2} - [x]_{2}^{4} + [x]_{4}^{5} = 2(2-(-1)) - (4-2) + (5-4) = 5.$$

Výsledek je dán součtem obsahů dvou obdélníků a čtverce. Plocha druhého obdélníka je však brána záporně!

Věta 2.2.4.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $<a,b>$ a pro všechna $x \in <a,b>$ je $f(x) \geq 0$. Pak platí $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Důkaz:

Plyne přímo z definice Riemannova integrálu (def. 2.1.2).

Poznámka

Uvedenou vlastnost můžeme často použít k jisté hrubé kontrole výsledku. Je-li integrovaná funkce nezáporná, nemůže vyjít záporná hodnota určitého integrálu.

Věta 2.2.5.

Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na intervalu $<a,b>$ a pro všechna $x \in <a,b>$ je $f(x) \leq g(x)$. Pak platí $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Důkaz:

Podle předpokladu je $g(x) - f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in <a,b>$. Podle věty 2.2.4 bude $\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0$. Odtud s použitím věty 2.2.2 dostaneme tvrzení.

Věta 2.2.6. (Věta o střední hodnotě integrálního počtu.)

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $<a,b>$. Pak existuje číslo $\xi \in <a,b>$ takové, že platí

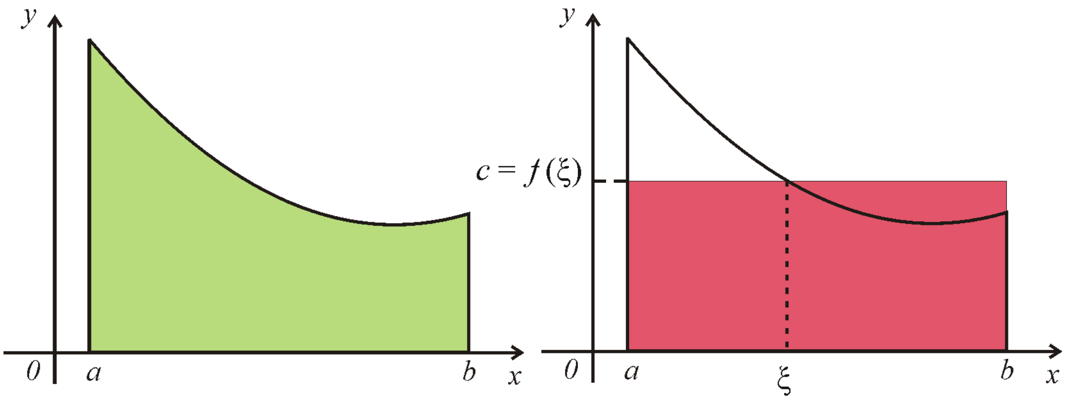
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Číslo $c = f(\xi)$ se nazývá **střední hodnota funkce** $f(x)$ na intervalu $<a,b>$.

Důkaz:

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $< a,b >$ a $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu $< a,b >$, tedy $F'(x) = f(x)$. Funkce $F(x)$ je spojitá a splňuje předpoklady Lagrangeovy věty (věta 3.2.5, Matematika 1, část II). To znamená, že existuje číslo $\xi \in < a,b >$ takové, že platí $F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a)$. Odtud a z věty 2.2.1 dostaneme $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

Předcházející věta má názorný geometrický význam. Pro jednoduchost předpokládejme, že funkce $f(x)$ je spojitá a nezáporná. Z motivace na začátku kapitoly 2.1 víme, že $\int_a^b f(x)dx$ vyjadřuje obsah obrazce ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Věta říká, že lze nad intervalem $< a,b >$ sestrojit obdélník se stejným obsahem. Výška je rovna funkční hodnotě ve vhodném bodě $\xi \in < a,b >$, aby $c = f(\xi) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$.



Obr. 2.2.3. Geometrický význam věty o střední hodnotě

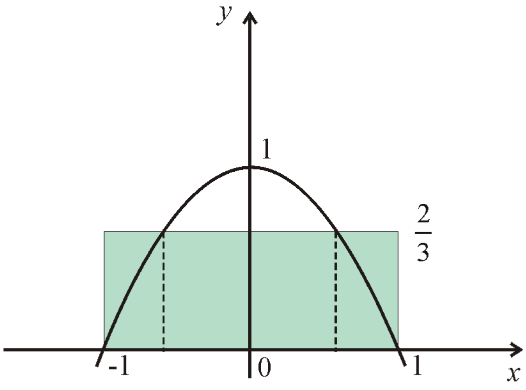
Z obrázku je zřejmé, že bod ξ nemusí být určen jednoznačně (přímka $y = c$ může graf funkce protnout několikrát).

Příklad 2.2.10. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x) = 1 - x^2$ na intervalu $< -1,1 >$.

Řešení:

$$c = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{2}{3}.$$

Obsah obrazce pod parabolou lze vyjádřit jako obsah obdélníka s jednou stranou $<-1,1>$ délky 2 a velikost druhé strany bude $\frac{2}{3}$ (obr. 2.2.4).



Obr. 2.2.4. Střední hodnota funkce $f(x)=1-x^2$ na intervalu $<-1,1>$

Určeme ještě, ve kterém bodě $\xi \in <-1,1>$ je střední hodnota rovna funkční hodnotě funkce $f(x)=1-x^2$. Řešíme rovnici

$\frac{2}{3}=1-x^2$ a dostaneme $\xi=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ (dva body s touto vlastností).

Příklad 2.2.11. Rychlost určitého objektu $v(t)$ v metrech za sekundu se v průběhu prvních 20 sekund pohybu měnila. Od začátku pohybu ($t=0$) byl 4 sekundy pohyb rovnoměrně zrychlený $v(t)=0,5t$, od 4. do 10. sekundy se pohyboval konstantní rychlostí $v(t)=2$, posledních 10 sekund byla rychlost $v(t)=0,8t-6$ m/s. Určete střední hodnotu rychlosti objektu (průměrnou rychlost) za 20 sekund. Ve kterém časovém okamžiku jel touto rychlostí?

Řešení:

$$c=\frac{1}{20}\int_0^{20} v(t)dt=\frac{1}{20}\left[\int_0^4 0,5t dt+\int_4^{10} 2dt+\int_{10}^{20}(0,8t-6)dt\right]=$$

$$=\frac{1}{20}\left[\left[\frac{0,5t^2}{2}\right]_0^4+\left[2t\right]_4^{10}+\left[\frac{0,8t^2}{2}-6t\right]_{10}^{20}\right]=\frac{1}{20}\left[4+12+60\right]=\frac{76}{20}=3,8 \text{ m/s.}$$

Jelikož je funkce $v(t)$ spojitá na intervalu $<0,20>$, určitě existuje alespoň jeden časový okamžik, kdy se objekt pohyboval právě touto rychlostí. Z konstrukce grafu funkce je zřejmé, že tento okamžik nastal mezi 10. a 20. sekundou (průměrná rychlost je větší než 2) a na jeho určení je nutno řešit rovnici $3{,}8 = 0{,}8t - 6$. Dostaneme $\xi = 12{,}25$ sekund.

Kontrolní otázky

1. Které funkce jsou Riemannovsky integrovatelné?.
2. Formulujte větu, pomocí které se provádí výpočet určitého integrálu.
3. Vysvětlete rozdíl mezi definicí Newtonova a Riemannova integrálu.
4. Uveďte vlastnost určitého integrálu.
5. Jak vypočtete integrál $\int_{-7}^{5} |x+1|\,dx$?
6. Jak vypočtěte integrál $\int_{0}^{\pi} |\cos x|\,dx$?
7. Ukažte, že platí vztah $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0$, kde $n \in \boldsymbol{N}$.
8. Jaká je střední hodnota funkce $f(x) = \sin x$ na intervalu $< 0, \pi >$?

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int_{1}^{3} x^2 dx$ b) $\int_{-1}^{3} \left(x^2 + 6x - 2\right) dx$ c) $\int_{-3}^{2} \left(3x^3 - x^2 + 1\right) dx$

d) $\int_{2}^{6} \frac{1}{x} dx$ e) $\int_{0}^{2} \frac{1}{x+1} dx$ f) $\int_{1}^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} dx$

2. a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$ b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x\,dx$ c) $\int_{0}^{\pi} \cos^2 2x\,dx$

d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\,dx$ e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\, x\,dx$ f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

3. a) $\int_0^6 e^{3x}dx$ b) $\int_0^1 \left(5^x-3^x\right)^2 dx$ c) $\int_0^2 \sqrt{e^{5x}}dx$

d) $\int_0^1\int \frac{e^x}{e^x+3}dx$ e) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}dx$ f) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$

4. a) $\int_1^9 \frac{3x+2}{x}dx$ b) $\int_{-1}^1 \frac{x^5}{x+2}dx$ c) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

d) $\int_5^7 \frac{3x+5}{x^2-3x-4}dx$ e) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+7}$ f) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x-1)}$

5. a) $\int_{-1}^2 |x|\,dx$ b) $\int_1^4 \left|x^3-8\right|dx$ c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,dx$

d) $\int_{-1}^2 2^{|x|}dx$ e) $\int_2^4 \left|x^2-4x+3\right|dx$ f) $\int_{-1}^2 \left(|x|-3|x-1|\right)dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{26}{3}$; **b)** $\frac{76}{3}$; **c)** $-\frac{665}{12}$; **d)** $\ln 3$; **e)** $\ln 3$; **f)** 2. **2. a)** $2-\frac{\pi}{4}$; **b)** 0; **c)** $\frac{\pi}{2}$; **d)** $\frac{1}{2}$;

e) $1-\frac{\pi}{4}$; **f)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **3. a)** $\frac{1}{3}\left(e^{18}-1\right)$; **b)** $\frac{12}{\ln 5}-\frac{28}{\ln 15}+\frac{4}{\ln 3}$; **c)** $\frac{2}{5}\left(e^5-1\right)$; **d)** $\ln\left(\frac{e+3}{4}\right)$;

e) $\ln 2$; **f)** $\ln 3$. **4. a)** $24+4\ln 3$; **b)** $\frac{35}{15}-32\ln 3$; **c)** $\operatorname{arctg} 4-\operatorname{arctg} 2$;

d) $\frac{17}{5}\ln 3-\frac{6}{5}\ln 2+\frac{2}{5}\ln 6$; **e)** $\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$; **f)** $\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$. **5. a)** $\frac{5}{2}$; **b)** $\frac{193}{4}$; **c)** 2; **d)** $\frac{4}{\ln 2}$; **e)** 2;

f) -5.

Kontrolní test

1. Vypočtěte integrál $\int_1^8 \frac{2-x}{\sqrt[3]{x^5}}dx.$

   a) $2\sqrt[3]{2}$, b) $-\frac{3}{4}$, c) $\frac{3}{4}$, d) $-\frac{3}{8}$.

2. Vypočtěte integrál $\int_0^{\ln 2} (e^x - e^{-x})dx.$

a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{5}{2}$, c) $\frac{3}{2}$, d) $-\frac{1}{2}$.

3. Vypočtěte integrál $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$

a) $2+\frac{4}{3}\sqrt{3}$, b) $2-\frac{4}{3}\sqrt{3}$, c) 0, d) $-\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

4. Vypočtěte integrál $\int_0^{2\pi} (2+\cos\varphi)d\varphi.$

a) 8π, b) 4π, c) 10π, d) 9π.

5. Čemu se rovná integrál $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^2-3x+2}dx$?

a) $\frac{1}{8}+8\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{1}{2}$, b) $\frac{13}{8}+8\ln\frac{3}{2}-8\ln 2$,

c) $\frac{13}{8}+8\ln 3-15\ln 2$, d) $\frac{1}{8}-8\ln 3+15\ln 2$.

6. Čemu se rovná integrál $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$?

a) $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$, b) $\ln 8-\ln 5$, c) $\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5$, d) $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{5}$.

7. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{3} |4-2x|\,dx.$

a) 6, b) 8, c) 10, d) 4.

8. Vypočtěte integrál $\int_0^5 f(x)dx$, kde $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{pro } 0\le x\le 2,\\ 4x-x^2 & \text{pro } 2\le x\le 3,\\ 3 & \text{pro } 3\le x\le 5. \end{cases}$

a) $\frac{25}{3}$, b) 14, c) $\frac{89}{3}$, d) $\frac{41}{3}$.

9. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $<1, 4>$.

a) $\dfrac{20}{3}$, b) $\dfrac{20}{9}$, c) $\dfrac{24}{9}$, d) $\dfrac{32}{9}$.

10. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ na intervalu $<1;1{,}5>$.

a) $\ln\dfrac{6}{5}$, b) $2\ln\dfrac{5}{6}$, c) $2\ln 3+\ln 2$, d) $2\ln\dfrac{6}{5}$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. b); 4. d); 5. c); 6. a); 7. c); 8. d); 9. b); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 2.1 a 2.2 znovu.

Shrnutí lekce

Hlavním záměrem kapitol 2.1 a 2.2 bylo zavést pojem určitého Riemannova integrálu a uvést základní vlastnosti tohoto integrálu, které jsou využívány při praktickém výpočtu. Riemannův integrál je pro spojité funkce totožný s integrálem Newtonovým. Zjednodušeně řečeno - Riemannův integrál můžeme vždy v konkrétních výpočtech počítat jako integrál Newtonův, tedy prostřednictvím primitivních funkcí. A s těmi již v tuto chvíli máme dostatek zkušeností.

Definovat Riemannův určitý integrál je bezesporu mnohem obtížnější, než zavést pojem určitého integrálu Newtonova. Proč se tedy Riemannovým integrálem v tomto úvodním kurzu zabýváme? Především pro jeho názornou geometrickou interpretaci. Pro spojitou nezápornou funkci odpovídá totiž její Riemannův integrál na zadaném uzavřeném intervalu plošnému obsahu oblasti vymezené zadaným intervalem a grafem integrované funkce. O dalších užitečných aplikacích Riemannova integrálu se můžete dočíst v kapitole 3.

2.3. Metoda per partes pro určité integrály

Cíle

Seznámíte se s použitím metody per partes při výpočtu určitých integrálů. Základní typy integrálů, které lze touto metodou vypočítat jsou stejné, jako při výpočtu neurčitých integrálů v kap. 1.3.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte princip metody per partes a víte, pro které typy integrálů je tato metoda vhodná. Předpokládá se znalost pojmu určitý integrál a dovednost počítat určité integrály pomocí Newtonovy – Leibnizovy formule.

Výklad

Při výpočtu složitějších integrálů používáme i u určitých integrálů metodu per partes a substituční metodu.

Při výpočtu určitých integrálů ze složitějších funkcí můžeme postupovat v zásadě dvěma způsoby:

- Oddělíme fázi nalezení primitivní funkce od fáze výpočtu určitého integrálu. Nejprve si nevšímáme mezí a počítáme pouze neurčitý integrál. Po vypočítání vybereme jednu z nalezených primitivních funkcí (obvykle volíme integrační konstantu $C = 0$) a podle Newtonovy – Leibnizovy formule dosadíme horní a dolní mez.
- Neoddělujeme fázi výpočtu primitivní funkce od výpočtu určitého integrálu. U metody per partes průběžně dosazujeme meze do již vypočtené části primitivní funkce, u substituční metody změníme integrační meze, jak uvidíme v další kapitole.

V dalším se zaměříme na druhou možnost výpočtu.

Věta 2.3.1.

Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu $< a, b >$ spojité derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, pak platí

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx = \left[u(x) \cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx .$$

Důkaz:

Ze spojitosti derivací $u'(x)$ a $v'(x)$ plyne, že jsou spojité i funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu $< a, b >$. Potom budou spojité a tedy integrovatelné i součiny $u'(x) \cdot v(x)$ a $u(x) \cdot v'(x)$.

Podle věty 2.2.2 bude integrovatelná i funkce $u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$. K ní primitivní funkce je $u(x)\cdot v(x)$, protože $\left[u(x)\cdot v(x)\right]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$. Podle Newtonovy – Leibnizovy formule platí $\int\limits_a^b \left[u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\right]dx=\left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b$. Pomocí věty 2.2.2 dostaneme $\int\limits_a^b u'(x)\cdot v(x)dx+\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)dx=\left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b$ a po úpravě obdržíme tvrzení věty.

Poznámka

Praktické použití metody per partes je zcela analogické jako v případě neurčitého integrálu (kap. 1.3). Zejména platí návody, pro které funkce je metoda per partes vhodná.

Řešené úlohy

Příklad 2.3.1. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^\pi x^2\sin x\,dx$

Řešení:

Předvedeme první způsob výpočtu, kdy nejprve nalezneme primitivní funkci a teprve potom dosadíme meze:

$$\int x^2\sin x\,dx=\left|\begin{matrix}u'=\sin x & v=x^2\\ u=-\cos x & v'=2x\end{matrix}\right|=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u'=\cos x & v=2x\\ u=\sin x & v'=2\end{matrix}\right|=-x^2\cos x+2x\sin x-2\int\sin x\,dx=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C\,.$$

Použijeme jednu z primitivních funkcí pro $C=0$ a dostaneme

$$\int\limits_0^\pi x^2\sin x\,dx=\left[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\right]_0^\pi=(-\pi^2(-1)+0+2(-1))-(0+0+2)=$$

$$=\pi^2-4\,.$$

Při druhém způsobu výpočtu použijeme větu 2.3.1:

$$\int\limits_0^\pi x^2\sin x\,dx=\left|\begin{matrix}u'=\sin x & v=x^2\\ u=-\cos x & v'=2x\end{matrix}\right|=\left[-x^2\cos x\right]_0^\pi+\int\limits_0^\pi 2x\cos x\,dx=$$

$$= \begin{vmatrix} u' = \cos x & v = 2x \\ u = \sin x & v' = 2 \end{vmatrix} = (\pi^2 - 0) + \left[2x\sin x\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \pi^2 + (0-0) + 2\left[\cos x\right]_0^{\pi} =$$

$$= \pi^2 + 2(-1-1) = \pi^2 - 4\,.$$

Výhoda druhého způsobu spočívá v tom, že meze průběžně dosazujeme do částečně vypočtené primitivní funkce a nemusíme ji neustále opisovat až do konce výpočtu. Výpočet se tím zkrátí a zpřehlední. V dalších příkladech budeme používat tento způsob výpočtu.

Příklad 2.3.2. Vypočtěte integrál $\int_0^2 (x^2 - x)e^x dx$.

Řešení:

$$\int_0^2 (x^2 - x)e^x dx = \begin{vmatrix} u' = e^x & v = x^2 - x \\ u = e^x & v' = 2x-1 \end{vmatrix} = \left[(x^2 - x)e^x\right]_0^2 - \int_0^2 (2x-1)e^x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u' = e^x & v = 2x-1 \\ u = e^x & v' = 2 \end{vmatrix} = \left[(4-2)e^2 - 0\right] - \left[(2x-1)e^x\right]_0^2 + \int_0^2 2e^x dx =$$

$$= 2e^2 - \left[3e^2 + e^0\right] + 2\left[e^x\right]_0^2 = -e^2 - 1 + 2\left(e^2 - e^0\right) = e^2 - 3\,.$$

Příklad 2.3.3. Vypočtěte integrál $\int_1^e \ln x\, dx$.

Řešení:

$$\int_1^e \ln x\, dx = \begin{vmatrix} u' = 1 & v = \ln x \\ u = x & v' = \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \left[x\ln x\right]_1^e - \int_1^e 1\, dx = (e\ln e - \ln 1) - \left[x\right]_1^e =$$

$$= (e - 0) - (e - 1) = 1\,.$$

Příklad 2.3.4. Vypočtěte integrál $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx$.

Řešení:

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx = \begin{vmatrix} u' = x & v = \operatorname{arctg} x \\ u = \dfrac{x^2}{2} & v' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{vmatrix} = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx =$$

$$=\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}-0\right)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left[x-\operatorname{arctg}x\right]_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

Příklad 2.3.5. Nalezněte rekurentní formuli pro výpočet integrálu

$$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx\,,\qquad n=0,1,2,\dots .$$

Řešení:

Pro $n=0$ je $S_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$ a pro $n=1$ je $S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

Pro $n\geq 2$ metodou per partes dostaneme:

$$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx=\begin{vmatrix}u'=\sin x & v=(\sin x)^{n-1}\\ u=-\cos x & v'=(n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x\end{vmatrix}=\left[-\cos x(\sin x)^{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)(\sin x)^{n-2}\cos^2 x\,dx=\left[0-0\right]+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)(\sin x)^{n-2}(1-\sin^2 x)\,dx=$$

$$=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{n-2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx\right)=(n-1)(S_{n-2}-S_n).$$

Z rovnice $S_n=(n-1)(S_{n-2}-S_n)$ snadno dostaneme

$S_n=\dfrac{n-1}{n}S_{n-2}\qquad (n\geq 2)$. Tato rekurentní formule nám umožní vypočítat uvedený integrál pro libovolnou mocninu $n\geq 2$. Například:

$$S_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^3 dx=\frac{3-1}{3}S_1=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3},$$

$$S_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^4 dx=\frac{4-1}{4}S_2=\frac{3}{4}\frac{2-1}{2}S_0=\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}.$$

Kontrolní otázky

1. Proč je integrační metoda nazývána per partes?
2. Jak se liší výpočet určitého integrálu metodou per partes od použití této metody v neurčitém integrálu.
3. Jak by se podle věty 2.3.1 vypočítal integrál typu $\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx$?
4. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin x \, dx$?
5. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_1^e x^3 \ln x \, dx$?
6. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_e^{2e} \ln^2 x \, dx$?
7. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_0^{\pi} e^{2x} \sin x \, dx$?
8. Vypočtěte integrál $\int_0^1 xe^{-x} \, dx$.
9. Vypočtěte integrál $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\pi} (x-1)\sin x \, dx$.
10. Odvoďte rekurentní formuli pro výpočet integrálu $L_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (\ln x)^n \, dx$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \, dx$ b) $\int_0^{\ln 2} xe^{-x} dx$ c) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx$

d) $\int_0^1 xe^{3x} dx$ e) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$ f) $\int_0^1 \left(x^2+2x\right)e^{\frac{x}{3}} \, dx$

2. a) $\displaystyle\int_1^e x^3 \ln x\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 (3x+2)\ln x\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 4x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$ e) $\displaystyle\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x\,dx$ f) $\displaystyle\int_1^e x\ln^2 x\,dx$

3. a) $\displaystyle\int_1^{e^3} \ln x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^e \ln^2 x\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos x\,dx$ e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln(x+2)\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} 2x\,dx$

4. a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x\,dx$

d) $\displaystyle\int_{e^{-\pi}}^{e^\pi} \sin(\ln x)\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\sin^2 x\,dx$ f) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi e^x \cos x\,dx$

5. a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\sin^2 x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^e \ln^3 x\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{1}{2}$; **b)** $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$; **c)** π^2-4; **d)** $\frac{2}{9}e^3$; **e)** -2π; **f)** $27\sqrt[3]{e}-36$. **2. a)** $\frac{1}{16}\left(3e^4+1\right)$; **b)** $10\ln 2-\frac{17}{4}$; **c)** $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **d)** $\frac{2}{3}$; **e)** $\frac{4}{9}\left(2e^3+1\right)$; **f)** $\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)$. **3. a)** $2e^3+1$; **b)** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$; **c)** $e-2$; **d)** $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{1}{2}$; **e)** $3\ln 3-2$; **f)** $\frac{\pi}{8}-\frac{\ln 2}{4}$. **4. a)** $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$; **b)** $-\frac{1}{2}\left(e^\pi+1\right)$; **c)** $\frac{1}{5}\left(2e^\pi+1\right)$; **d)** $\frac{1}{2}\left(e^\pi+e^{-\pi}\right)$; **e)** $\frac{3}{5}\left(e^{-\pi}-1\right)$; **f)** $-\frac{1}{2}\left(e^\pi+e^{-\pi}\right)$.

5. a) $\frac{\pi}{2}+\ln 2$; **b)** $6-2e$; **c)** $\frac{e}{2}-1$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos x\, dx$.

   a) $\frac{\pi}{2}$, b) 1, c) 0, d) π.

2. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{0} x^2 e^{-x} dx$.

   a) $2+e$, b) $-2-e$, c) $-2+e$, d) -2.

3. Vypočtěte integrál $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\, dx$.

   a) $\frac{1}{4}(\pi-1)$, b) $\frac{1}{4}(\pi+1)$, c) $\frac{\pi}{4}$, d) $\frac{1}{4}$.

4. Čemu se rovná integrál $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$?

   a) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \ln 2$, b) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \ln 2$, c) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{1}{2}\ln 4$, d) $\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}\ln 4$.

5. Čemu se rovná integrál $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$?

   a) $\frac{\pi}{6}\sqrt{3} - \ln 2$, b) $-\frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \ln 2$, c) $-\frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \ln 2$, d) $-\frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln\sqrt{3}$.

6. Čemu se rovná integrál $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\, dx$?

   a) 1, b) $e+1$, c) $1-e$, d) $2e+1$.

7. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{1} \ln(x^2+1)\, dx$.

   a) 0, b) $2\ln 2 - 4 + \pi$, c) $2\ln 2 + \pi$, d) $-2 + \frac{\pi}{2}$.

8. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-1}^{0} x \operatorname{arc\,cotg} x \, dx$.

a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{2}(1+\pi)$, c) $\frac{1}{2}(1-\pi)$, d) $-\frac{\pi}{2}$.

9. Vypočtěte integrál $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} x^2 \ln x \, dx$.

a) $\frac{2}{9}(e^3 - \frac{1}{e^3})$, b) $\frac{2}{9}(e^3 + \frac{1}{e^3})$, c) $\frac{2}{9}(e^3 - \frac{2}{e^3})$, d) $\frac{2}{9}(e^3 + \frac{2}{e^3})$.

10. Odvoďte rekurentní vzorec pro výpočet integrálu $S_n = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx,\ n = 0,1,2,\ldots$.

a) $S_0 = \pi,\ S_1 = 0,\ S_n = \frac{n+1}{n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$, b) $S_0 = \pi,\ S_1 = 2,\ S_n = \frac{n+1}{n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$,

c) $S_0 = \pi,\ S_1 = 2,\ S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$, d) $S_0 = \pi,\ S_1 = 2,\ S_n = \frac{1}{1-n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$.

.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. b); 4. a); 5. c); 6. a); 7. b); 8. c); 9. d); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.
V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.3 a 2.3 znovu.

Shrnutí lekce

Použití metody per partes v určitém integrálu je zcela analogické jako v případě neurčitého integrálu. Typy integrálů řešitelných metodou per partes jsou uvedeny v kapitole 1.3. Při výpočtu určitých integrálů metodou per partes průběžně dosazujeme meze do částečně vypočtené primitivní funkce a nemusíme ji neustále opisovat až do konce výpočtu. Výpočet se tím zkrátí a zpřehlední.

2.4. Substituční metoda pro určité integrály

Cíle

Seznámíte se s použitím substituční metody při výpočtu určitých integrálů. Základní typy integrálů, které lze touto metodou vypočítat, jsou podobné jako při výpočtu neurčitých integrálů v kap. 1.4.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte princip substituční metody a víte, pro které typy integrálů je tato metoda vhodná. Předpokládá se znalost pojmu určitý integrál a dovednost počítat určité integrály pomocí Newtonovy – Leibnizovy formule.

Výklad

Jak již bylo uvedeno v předcházející kapitole, můžeme při výpočtu určitých integrálů ze složitějších funkcí postupovat v zásadě dvěma způsoby:

- Oddělíme fázi nalezení primitivní funkce od fáze výpočtu určitého integrálu. Nejprve si nevšímáme mezí a počítáme pouze neurčitý integrál. Po vypočítání vybereme jednu z nalezených primitivních funkcí (obvykle volíme integrační konstantu $C = 0$) a podle Newtonovy – Leibnizovy formule dosadíme horní a dolní mez.
- Neoddělujeme fázi výpočtu primitivní funkce od výpočtu určitého integrálu. U substituční metody kromě zavedení správné substituce ještě určíme nové meze a již se nemusíme vracet k původní proměnné.

První způsob nebude čtenáři patrně dělat problémy. Proto se v dalším zaměříme na druhou možnost výpočtu, která je kratší a elegantnější. Vzorce pro integraci substituční metodou v určitém integrálu připomínají vztahy uvedené ve větách 1.4.1 a 1.4.2.

Věta 2.4.1. (Integrování substituční metodou $\varphi(x) = u$)

Nechť funkce $f(u)$ je spojitá na intervalu $<\alpha,\beta>$. Nechť funkce $u = \varphi(x)$ má spojitou derivaci $\varphi'(x)$ na intervalu $<a,b>$ a nechť pro každé $x \in <a,b>$ platí $\alpha \le \varphi(x) \le \beta$, $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$ (tedy funkce φ zobrazuje interval $<a,b>$ na interval $<\alpha,\beta>$).

Potom platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u)du .$$

Důkaz:

Z předpokladů věty vyplývá, že existují integrály na levé i pravé straně tvrzení věty 2.4.1. Z toho plyne, že existuje primitivní funkce $F(u)$ k funkci $f(u)$ na intervalu $<\alpha,\beta>$.

Podle věty 1.4.1 je funkce $F(\varphi(x))$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$. Proto podle Newtonovy – Leibnizovy formule (věta 2.2.1) platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(u)du .$$

Poznámky

1. Při výpočtu určitého integrálu zavedeme vhodnou substituci $u=\varphi(x)$ a vypočteme diferenciál $du=\varphi'(x)dx$ jako u neurčitého integrálu. Navíc musíme ještě určit nové meze. „Staré“ meze a, b jsou pro původní proměnnou x. „Nová“ proměnná u bude mít meze $\alpha=\varphi(a)$, $\beta=\varphi(b)$.

2. V řešených příkladech vyznačíme změnu mezí takto: $a\mapsto\varphi(a)$ (staré dolní mezi a odpovídá nová dolní mez $\varphi(a)$), resp. $b\mapsto\varphi(b)$ (staré horní mezi b odpovídá nová horní mez $\varphi(b)$).

3. V konkrétním případě se může stát, že $\varphi(a)>\varphi(b)$ (nová dolní mez je větší než mez horní). Podle definice 2.2.1 můžeme meze zaměnit a znaménko integrálu se změní na opačné. Pokud dostaneme $\varphi(a)=\varphi(b)$, je podle poznámky k definici 2.2.1 integrál roven nule a nemusíme dále počítat.

Řešené úlohy

Příklad 2.4.1. Vypočtěte integrál $\int_0^2 3x\sqrt{5+x^2}\,dx$.

Řešení:

a) Bylo by možno nejprve vypočítat neurčitý integrál (nalézt primitivní funkci) jako v příkladu 1.4.4.

$$\int 3x\sqrt{5+x^2}\,dx = \left|\begin{matrix}\text{substituce:}\\ 5+x^2=u\\ 2xdx=du\end{matrix}\right| = \frac{3}{2}\int 2x\sqrt{5+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int\sqrt{u}\,du = \frac{3}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = u^{\frac{3}{2}}+C =$$

$= \sqrt{\left(5+x^2\right)^3} + C.$

Použijeme primitivní funkci pro $C = 0$ (jiné C se stejně odečte): $F(x) = \sqrt{\left(5+x^2\right)^3}$ a z Newtonovy – Leibnizovy věty dostáváme:

$$\int_0^2 3x\sqrt{5+x^2}\,dx = \left[F(x)\right]_0^2 = \left[\sqrt{\left(5+x^2\right)^3}\right]_0^2 = \sqrt{\left(5+2^2\right)^3} - \sqrt{\left(5+0^2\right)^3} = 27 - 5\sqrt{5}.$$

b) Praktičtější je počítat podle věty 2.4.1 (při substituci určit nové meze). Použijeme substituci $5 + x^2 = u$. Nová dolní mez bude $u = 5 + 0^2 = 5$ a nová horní mez je $u = 5 + 2^2 = 9$. Celý výpočet bude vypadat takto:

$$\int_0^2 3x\sqrt{5+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int_0^2 2x\sqrt{5+x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ 5+x^2 = u\\ 2x\,dx = du\\ 0 \mapsto 5,\ 2 \mapsto 9\end{array}\right| = \frac{3}{2}\int_5^9 \sqrt{u}\,du = \frac{3}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_5^9 = \left[u^{\frac{3}{2}}\right]_5^9 =$$

$$9^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}} = 27 - 5\sqrt{5}.$$

Příklad 2.4.2. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

Řešení:

Použijeme substituci $\ln x = u$. Funkce $\varphi(x) = \ln x$ je spojitá na intervalu $<1, e>$ a má na něm spojitou derivaci. Pro $x \in <1, e>$ bude $0 \le \ln x \le 1$.

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ \ln x = u\\ \frac{1}{x}\,dx = du\\ 1 \mapsto 0,\ \mathrm{e} \mapsto 1\end{array}\right| = \int_0^1 u^2\,du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Poznámka

Při výpočtu musíme dávat pozor, zda jsou splněny podmínky věty 2.4.1. U neurčitých integrálů se můžeme po výpočtu dodatečně derivováním přesvědčit, zda jsme postupovali správně. U určitých integrálů tuto možnost zkoušky nemáme.

Příklad 2.4.3. Vypočtěte integrál $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{5+\sin^2 x}\,dx$.

Řešení:

Použijeme substituci $\sin x = u$. Pro novou dolní mez dostaneme $\sin(-\pi)=0$ a pro horní mez vyjde $\sin\pi = 0$. Podle poznámky k definici 2.2.1 bude výpočet integrálu krátký:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{5+\sin^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ \sin x = u\\ \cos x dx = du\\ -\pi \mapsto 0,\ \pi \mapsto 0\end{array}\right| = \int_0^0 \frac{1}{5+u^2}\,du = 0\ .$$

Příklad 2.4.4. Vypočtěte integrál $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

Řešení:

Provedeme jednoduchou úpravu, abychom nalezli vhodnou substituci:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^3 x}\,dx\,.$$

Je zřejmé, že vhodná substituce je $\cos x = u$, neboť $-\sin x\,dx = du$. Pro novou dolní mez vyjde $\cos 0 = 1$ a pro horní mez dostaneme $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, takže nová dolní mez je větší než nová horní mez. Podle definice 2.2.1 obrátíme meze a změníme znaménko integrálu:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ \cos x = u\\ -\sin x dx = du\\ 0 \mapsto 1,\ \frac{\pi}{4} \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right| = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-u^2}{u^3}\,du = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1-u^2}{u^3}\,du = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)du =$$

$$\left[-\frac{1}{2u^2} - \ln|u|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = -\frac{1}{2} - \ln 1 + \frac{1}{2\frac{2}{4}} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\ln 2 - \ln 2 = \frac{1}{2}(1-\ln 2)\,.$$

Výklad

Větu 2.4.1. můžeme použít i v opačném směru (zprava doleva). V běžných úlohách nebývá integrační proměnnou *u*, ale obvykle běžně používáme proměnnou *x*, což je jen jiné písmenko ve vztazích. To odpovídá substituci typu $x = \varphi(t)$ v neurčitém integrálu, která je popsána ve větě 1.4.2. V určitém integrálu budeme muset po uvedené substituci změnit meze. V tomto případě vlastně známe hodnoty $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$. Musíme nalézt hodnoty *a* a *b*, aby byly splněny předpoklady věty 2.4.1. V praxi obvykle bývá funkce $x = \varphi(t)$ taková, že lze zvolit interval $< a, b >$ tak, aby na něm byla funkce $\varphi(t)$ ryze monotonní, tj. aby jej prostě zobrazila na zadaný integrační obor $< \varphi(a), \varphi(b) >$.

Příklad 2.4.5. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-1}^{1} x^2 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

Řešení:

Integrovaná funkce je spojitá pro $x \in < -1, 1 >$, takže určitý integrál existuje.

Použijeme substituci

$x = \sin t$, takže $dx = \cos t dt$. Transformujme meze integrálu:

Pro $x_1 = -1$ je $-1 = \sin t_1$, takže $t_1 = -\frac{\pi}{2}$. Pro $x_2 = 1$ je $1 = \sin t_2$, takže $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Protože na intervalu $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$ je funkce $x = \sin t$ monotonně rostoucí a tento interval se uvedenou funkcí zobrazí na interval $< -1, 1 >$, lze psát

$$\int\limits_{-1}^{1} x^2 \sqrt{1-x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ -1 \mapsto -\frac{\pi}{2},\ 1 \mapsto \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{\cos^2 t}\, \cos t\, dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t |\cos t| \cos t\, dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t\, dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin^2(2t)\, dt .$$

V předcházející úpravě jsme využili skutečnosti, že pro $t \in < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$ je $\cos t \geq 0$, a tedy $|\cos t| = \cos t$. Po užití známého vztahu $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ dostáváme integrál typu

$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ (viz kapitola 1.6).

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}(1-\cos 4t)\, dt = \frac{1}{8}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}.$$

Příklad 2.4.6. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$. ✖

Řešení:

Integrovaná funkce je spojitá pro každé reálné x, takže určitý integrál existuje.

Použijeme substituci

$x = \operatorname{tg} t$, takže $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$. (Je možno použít i substituci $x = \operatorname{cotg} t$). Transformujme meze integrálu:

Pro $x_1 = 0$ je $0 = \operatorname{tg} t_1$, takže $t_1 = 0$. Pro $x_2 = 1$ je $1 = \operatorname{tg} t_2$, takže $t_2 = \frac{\pi}{4}$. Protože na intervalu $< 0, \frac{\pi}{4} >$ je funkce $x = \operatorname{tg} t$ monotonně rostoucí a tento interval $< 0, \frac{\pi}{4} >$ se funkcí $x = \varphi(t) = \operatorname{tg} t$ zobrazí na interval $< 0,1 >$, lze psát

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = \operatorname{tg} t \\ dx = \dfrac{1}{\cos^2 t} dt \\ 0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto \dfrac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}\, \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}}\, \frac{1}{\cos^2 t} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\, \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{|\cos t|} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 t} dt .$$

V předcházející úpravě jsme využili skutečnosti, že pro $t \in < 0, \frac{\pi}{4} >$ je $\cos t > 0$, a tedy $|\cos t| = \cos t$. Dostáváme integrál typu $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$. Jelikož $n = -3$ je liché, řešíme integrál opět substitucí, a to $\sin t = v$ (viz kapitola 1.6). Bylo by možno použít rovněž univerzální substituci $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = v$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\cos^4 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)^2}\,dt = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ \sin t = v \\ \cos t dt = dv \\ 0 \mapsto 0,\ \frac{\pi}{4} \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dv}{(1-v^2)^2} =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dv}{(1-v)^2(1+v)^2}\,.$$

Dostáváme integrál z racionální funkce, kdy polynom ve jmenovateli má reálné násobné kořeny. Je nutno provést rozklad racionální funkce na součet parciálních zlomků (viz kapitola 1.5).

$$\frac{1}{(1-v)^2(1+v)^2} = \frac{A_1}{1-v} + \frac{A_2}{(1-v)^2} + \frac{B_1}{1+v} + \frac{B_2}{(1+v)^2}$$

Nalezneme konstanty rozkladu A_1, A_2, B_1, B_2. Rovnici vynásobíme polynomem $Q_4(v) = (1-v)^2(1+v)^2$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$1 = A_1(1-v)(1+v)^2 + A_2(1+v)^2 + B_1(1-v)^2(1+v) + B_2(1-v)^2$$

Pro $v = 1$ dostaneme $1 = 0A_1 + 4A_2 + 0B_1 + 0B_2$. Tedy $A_2 = \frac{1}{4}$.

Pro $v = -1$ dostaneme $1 = 0A_1 + 0A_2 + 0B_1 + 4B_2$. Tedy $B_2 = \frac{1}{4}$.

Pro výpočet zbývajících koeficientů můžeme použít srovnávací metodu (viz příklad 1.5.5):

Koeficienty u v^3: $0 = -A_1 + B_1$

Koeficienty u v^0: $1 = A_1 + A_2 + B_1 + B_2$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $A_1 = \frac{1}{4}$, $B_1 = \frac{1}{4}$.

Integrujeme získané parciální zlomky:

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dv}{(1-v)^2(1+v)^2} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1}{1-v} + \frac{1}{(1-v)^2} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{(1+v)^2} \right] dv =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\ln|1-v| + \frac{1}{1-v} + \ln|1+v| - \frac{1}{1+v} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{2v}{1-v^2} + \ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right| \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} + \ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\right] = \frac{1}{4}\left[2\sqrt{2} + \ln\left|\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right|\right] = \frac{1}{4}\left[2\sqrt{2} + \ln\left|\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{2}\right|\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\sqrt{2} + \ln(3+2\sqrt{2})\right].$$

Poznámky

1. Úlohu lze rovněž řešit substitucí $\sqrt{1+x^2} = t - x$. *Postup výpočtu je popsaný v poznámce k příkladu 1.4.8.*

2. Tento příklad nám ukazuje, že výpočet určitého integrálu i zdánlivě jednoduché funkce může být pracný a zdlouhavý. Je věcí cviku zvolit co nejúspornější postup. U takových příkladů nám mohou hodně pomoci vhodné počítačové programy.

3. Pokud zadáme integrál nějakému matematickému programu (např. Derive, Maple, Mathematica), získáme výsledek $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1)$. *Na první pohled se zdá, že se jedná o úplně jinou funkci. Snadno se však přesvědčíme, že* $-2\ln(\sqrt{2}-1) = \ln(3+2\sqrt{2})$ *a tedy* $-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{4}\ln(3+2\sqrt{2})$.

Integrace sudých nebo lichých funkcí

Výklad

Výpočet určitého integrálu je jednodušší, pokud je integrovaná funkce sudá nebo lichá na intervalu $< -a, a >$. Připomeňme si definici 1.4.3 z část Matematika I.

Funkce f se nazývá **sudá** , jestliže $\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$ (graf funkce je souměrný podle osy y).

Funkce f se nazývá **lichá,** jestliže $\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$ (graf funkce je souměrný podle počátku).

Věta 2.4.2. (Integrál sudé, popř. liché funkce)

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $<-a,a>$.

Je-li $f(x)$ na intervalu $<-a,a>$ sudá, pak

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx\,,$$

Je-li $f(x)$ na intervalu $<-a,a>$ lichá, pak

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0\,.$$

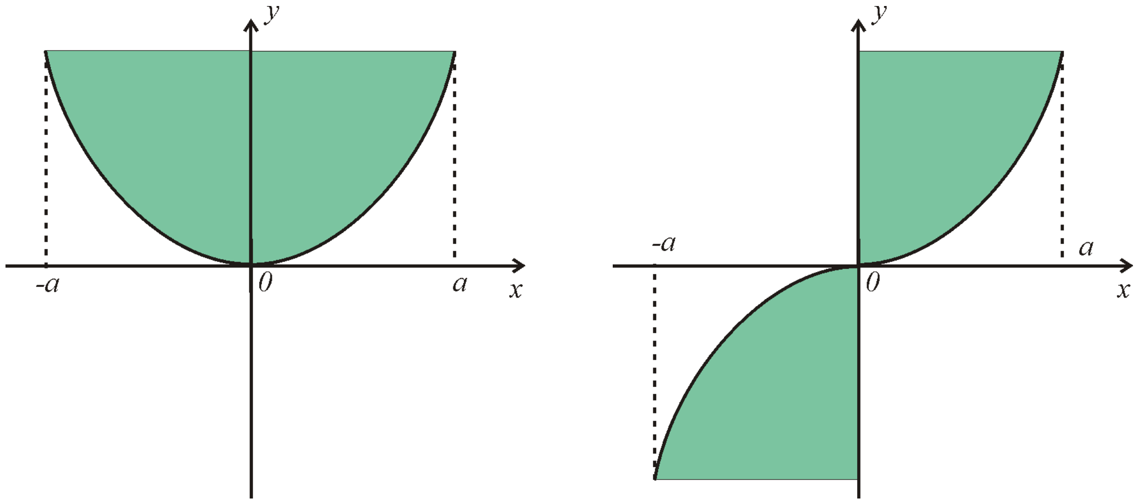
Důkaz: Je-li $f(x)$ na intervalu $<-a,a>$ sudá, pak platí $f(-x) = f(x)$. Integrál můžeme zapsat jako součet integrálů (věta 2.2.3):

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx\,.$$

První integrál řešíme substitucí $-x = t$, z níž plyne $dx = -dt$, meze $0 \mapsto 0$, $-a \mapsto a$.

Dostaneme $\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx\,.$

Druhou část věty o integraci liché funkce dokážeme analogicky.



$f(-x) = f(x)$ $\qquad$ $f(-x) = -f(x)$

Obr. 2.4.1. Integrál ze sudé a z liché funkce

Příklad 2.4.7. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Řešení:

Tuto úlohu jsme již řešili v příkladu 2.4.5. Integrovaná funkce je sudá pro každé $x \in \boldsymbol{R}$, protože

$f(-x) = (-x)^2\sqrt{1-(-x)^2} = x^2\sqrt{1-x^2} = f(x)$.

Podle věty 2.4.2 můžeme výpočet poněkud zjednodušit, neboť stačí počítat integrál na intervalu $< 0,1 >$, kdy máme jednodušší dolní mez.

$$\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \quad \ldots \quad = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt = \quad \ldots \quad = \frac{1}{4}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} \ .$$

Příklad 2.4.8. Vypočtěte integrál $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos 2x\,dx$.

Řešení:

Jelikož $\sin(-x) = -\sin x$ a $\cos(-x) = \cos x$ snadno ukážeme, že integrovaná funkce je lichá:

$f(-x) = \sin^3(-x)\cos(-2x) = -\sin^3 x\cos 2x = -f(x)$.

Podle věty 2.4.2 není nutno integrál vůbec počítat, neboť

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos 2x\,dx = 0 \ .$$

Ověřte výpočtem platnost uvedeného výsledku!

? **Kontrolní otázky** **?**

1. Uveďte princip substituční metody při výpočtu určitého integrálu.
2. Čím se při výpočtu odlišuje substituční metoda pro určitý integrál od substituční metody pro integrál neurčitý?

3. Ukažte, že $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ pro lichou funkci *f(x)*.

4. Ukažte, že platí $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(a+b-x)dx$.

5. Ukažte, že platí $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{a} f(-x)dx$

6. Zdůvodněte, proč jsou všechny následující integrály rovny nule.

$$\int\limits_{-1}^{1} \sin 3x \cos 5x \, dx, \quad \int\limits_{-a}^{a} \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}} dx, \quad \int\limits_{0}^{2\pi} \sin x \sqrt{\cos^3 x + 1} \, dx, \quad \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} x \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx.$$

7. Ukažte, že $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0$ pro $m \neq n$ a $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \pi$ pro $m = n$.

Návod: Užijte vztah $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int\limits_{0}^{1} x\left(2x^2-1\right)^{10} dx$ b) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}} dx$ c) $\int\limits_{0}^{4} x^3 \sqrt{x^2+9} dx$

d) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ e) $\int x^2 \sin\left(1-x^3\right) dx$ f) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

2. a) $\int\limits_{0}^{\pi} e^{\cos x} \sin x \, dx$ b) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ c) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

d) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+x} \, dx$ e) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$ f) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

3. a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin^3 x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x\,dx$ c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x\sqrt{\sin x}}dx$

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{3\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$ e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\sin 2x}$ f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}dx$

4. a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

d) $\displaystyle\int_1^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x^2}}dx$ e) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x-1}{\sqrt{4x-2}}dx$ f) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\,dx$

5. a) $\displaystyle\int_1^2 x\ln\left(1+x^2\right)dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x+1}dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$ e) $\displaystyle\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$ f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x\,dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{1}{22}$; **b)** 0; **c)** $\frac{1412}{5}$; **d)** 1; **e)** $\frac{1}{3}(1-\cos 1)$; **f)** $2\sqrt{\ln 3+1}-2$. **2. a)** $e-\frac{1}{e}$; **b)** $\operatorname{arctg} e-\frac{\pi}{4}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$; **e)** $\frac{1}{2}$; **f)** $\ln 2$. **3. a)** $\frac{1}{16}$; **b)** $-\frac{1}{4}\ln 2$; **c)** $2\left(\sqrt{2}-1\right)$; **d)** $\frac{9}{32}\left(7\sqrt[3]{4}-12\right)$; **e)** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$; **f)** $\frac{\ln 3}{2}$. **4. a)** $2\left(\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$; **b)** $4-2\operatorname{arctg} 2$; **c)** $2\ln 2-1$; **d)** $8+\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$; **e)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; **f)** $1+\frac{\pi}{2}$. **5. a)** $\frac{5}{2}\ln 5-\ln 2-\frac{3}{2}$; **b)** $4-\pi$; **c)** $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}-\ln 2$; **d)** $\frac{3\pi}{8}$; **e)** $\frac{3}{2}$; **f)** 0.

Kontrolní test

1. Vypočtěte integrál $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$.

a) $7-2\ln 2$, b) $7+2\ln 2$, c) $12+2\ln 2$, d) $15+2\ln 2$.

2. Vypočtěte integrál $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

a) $\frac{\pi}{12}$, b) π, c) $\frac{\pi}{6}$, d) $\frac{\pi}{3}$.

3. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}}\,dx$.

a) $\frac{\pi}{18}$, b) $\frac{\pi}{6}$, c) $\frac{1}{3}$, d) $\frac{\pi}{3}$.

4. Vypočtěte integrál $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg}^3 x\,dx$.

a) $1-\ln 2$, b) $1+\frac{1}{2}\ln 2$, c) $1-\frac{1}{2}\ln 2$, d) $1+\ln 2$.

5. Vypočtěte integrál $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}+1}\,dx$.

a) $\frac{3}{2}\ln 3$, b) $4+\ln 3$, c) $\ln 3$, d) $\frac{3}{2}$.

6. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{x^9}{(1+x^5)^3}\,dx$.

a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{1}{8}$, c) $\frac{9}{40}$, d) $\frac{1}{40}$.

7. Vypočtěte integrál $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx$.

a) $8+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$, b) $8+\frac{3}{2}\pi\sqrt{3}$, c) $8+\frac{2}{3}\pi\sqrt{3}$, d) $8+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

8. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2}\, dx$.

a) $\frac{846}{105}$, b) $\frac{831}{105}$, c) $\frac{848}{105}$, d) $\frac{851}{105}$.

9. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{3+e^x}\, dx$.

a) $4+\pi$, b) $4-\frac{\pi}{2}$, c) $4+\frac{\pi}{2}$, d) $4-\pi$.

10. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$.

a) $\frac{4}{3}$, b) 0, c) $\frac{2}{3}$, d) $\frac{3}{2}$.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. a); 4. c); 5. a); 6. d); 7. b); 8. c); 9. d); 10. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.
V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.4 a 2.4 znovu.

Shrnutí lekce

Substituční metoda patří k nejčastěji používaným metodám výpočtu určitých integrálů. Jsou možné dva postupy výpočtu. V prvním případě vhodnou substitucí vypočteme neurčitý integrál (nalezneme primitivní funkci) a teprve potom pomocí Newtonovy – Leibnizovy formule dosadíme horní a dolní mez. Výhodnější bývá druhá možnost, kdy vedle zavedení správné substituce ještě určíme nové meze a již se nemusíme vracet k původní proměnné.

2.5. Nevlastní integrály

Cíle

V této kapitole poněkud rozšíříme definici Riemannova určitého integrálu i na případy, kdy je integrační obor neohraničený (tj. $(-\infty, b>$, $<a, \infty)$, případně $(-\infty, \infty)$) nebo je neohraničená integrovaná funkce. Tyto zobecněné určité integrály se nazývají nevlastní. Seznámíme se se dvěma typy nevlastních integrálů.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte pojem určitý integrál, předpoklady existence a vlastnosti určitého integrálu, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu. Předpokládá se znalost pojmu limita funkce a postupy výpočtu těchto limit (Matematika I, kapitoly 2.1. 2.2).

Výklad

V definici Riemannova určitého integrálu $\int_a^b f(x)dx$ jsme vycházeli ze dvou předpokladů:

1. Integrační obor je konečný **uzavřený interval** $<a, b>$.
2. Integrovaná funkce $f(x)$ je na tomto intervalu ohraničená (ohraničená zdola i shora viz obr. 2.1.5).

Integrály definované za těchto předpokladů nazýváme **vlastní integrály**.

Jestliže se v určitém integrálu objeví neohraničený interval nebo neohraničená funkce, hovoříme o **nevlastních integrálech**. Rozeznáváme dva druhy nevlastních integrálů:

1. Je-li interval, na kterém integrujeme, neohraničený, hovoříme o **nevlastním integrálu prvního druhu** (nevlastní integrál na neohraničeném intervalu). Jde o integrály typu

   $$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx, \quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \; .$$

2. Je-li integrovaná funkce v intervalu $<a, b>$ neohraničená (tedy nespojitá), hovoříme o **nevlastních integrálech druhého druhu**.

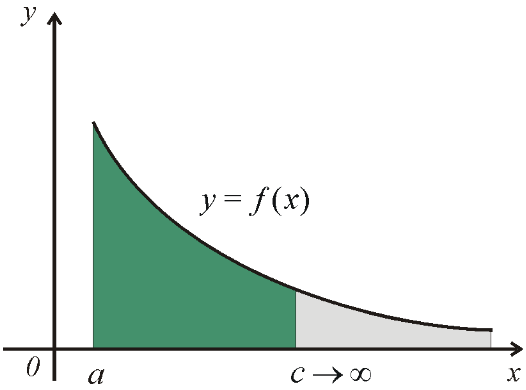
Může se vyskytnout i kombinace uvedených dvou typů, například integrál $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$.

Nevlastní integrály 1. druhu (integrály na neohraničeném intervalu)

Uvažujme funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $< a,\infty)$, $a \in \boldsymbol{R}$. Předpokládejme, že pro každé $c \in < a,\infty)$ existuje určitý integrál $\int_a^c f(x)dx$. Pak můžeme definovat funkci F vztahem

$$F(c) = \int_a^c f(x)dx\,, \quad c \geq a\,.$$

Nyní budeme neomezeně zvětšovat horní mez c a budeme sledovat, jak se chová veličina $F(c)$. Situace je znázorněna na obrázku 2.5.1.



Obr. 2.5.1. Definice nevlastního integrálu na neohraničeném intervalu $< a,\infty)$

Zelená plocha představuje hodnotu integrálu $\int_a^c f(x)dx$. Při posouvání $c \to \infty$ nás bude zajímat, zda se hodnota tohoto integrálu blíží k nějakému konečnému číslu L (tj. zda existuje konečná limita) nebo tato hodnota roste nade všecky meze (limita je $+\infty$ nebo $-\infty$), případně hodnota neexistuje (hodnota osciluje).

Definice 2.5.1. (Definice nevlastního integrálu 1. druhu)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá pro všechna čísla $c \geq a$, pak integrál tvaru

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

nazýváme **nevlastní integrál prvního druhu** (na nekonečném intervalu) a přiřazujeme mu hodnotu rovnou limitě

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)dx = L\,.$$

Je-li L konečné číslo, říkáme, že uvažovaný **nevlastní integrál konverguje** (je konvergentní). V opačném případě, tj. když limita je nevlastní ($L=+\infty$ nebo $L=-\infty$) nebo neexistuje, říkáme, že **nevlastní integrál diverguje** (je divergentní).

Řešené úlohy

Příklad 2.5.1. Vypočtěte integrál $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$.

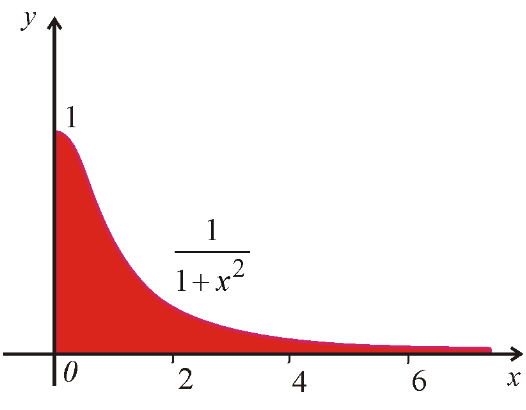
Řešení:

Budeme postupovat podle definice 2.5.1. Nejprve nalezneme pomocnou funkci horní meze $F(c)=\int_a^c f(x)dx$ a potom spočítáme její limitu $L=\lim_{c\to+\infty} F(c)$.

$$F(c)=\int_0^c \frac{1}{1+x^2}dx=\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^c=\operatorname{arctg} c-\operatorname{arctg} 0=\operatorname{arctg} c \text{ , takže}$$

$$L=\lim_{c\to+\infty} F(c)=\lim_{c\to+\infty} \operatorname{arctg} c=\frac{\pi}{2}.$$

Integrál tedy konverguje a platí $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.



Obr. 2.5.2. Graf funkce $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ pro $x\geq 0$

Příklad 2.5.2. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

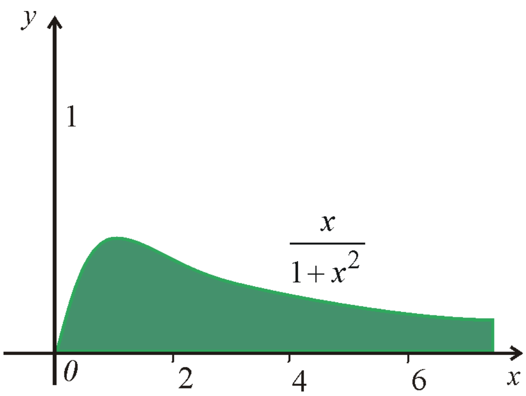
Řešení:

Postupujeme stejně jako v předcházejícím příkladu.

$$F(c) = \int\limits_0^c \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^c \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^c = \frac{1}{2}\ln(1+c^2) \text{ , takže}$$

$$L = \lim_{c\to+\infty} F(c) = \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(1+c^2) = +\infty\,.$$

Integrál tedy diverguje.



Obr. 2.5.3. Graf funkce $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ pro $x \geq 0$

Příklad 2.5.3. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^{\infty} \cos x\,dx$.

Řešení:

V tomto případě je

$$F(c) = \int\limits_0^c \cos x\,dx = [\sin x]_0^c = \sin c \text{ , takže}$$

$L = \lim\limits_{c\to+\infty} F(c) = \lim\limits_{c\to+\infty} \sin c$ neexistuje (hodnoty funkce oscilují mezi -1 a +1.

Integrál tudíž rovněž diverguje.

Příklad 2.5.4. Pro která p je nevlastní integrál $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$, $p > 0$ konvergentní?

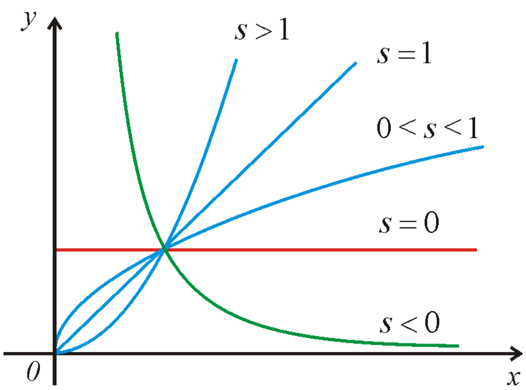
Řešení:

Nejprve počítejme tento integrál pro $p \neq 1$.

$$F(c) = \int\limits_1^c \frac{1}{x^p} \, dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^c = \frac{1}{1-p}\left(c^{1-p} - 1\right).$$

Musíme určit limitu $\lim\limits_{c \to +\infty} c^{1-p}$. Jedná se o mocninnou funkci s exponentem $s = 1 - p$.

Na obrázku 2.5.4 jsou grafy mocninné funkce $y = x^s$, $x > 0$ pro různá s (viz Matematika I, kapitola 1.5.4).



Obr. 2.5.4. Graf funkce $y = x^s$, $s \in \boldsymbol{R}$, $x > 0$

Z grafu 2.5.4 vidíme, že pro $s = 1 - p > 0$ (tedy pro $p < 1$) je $\lim\limits_{c \to +\infty} c^{1-p} = +\infty$, a proto

$$L = \lim_{c \to +\infty} F(c) = \frac{1}{1-p} \lim_{c \to +\infty} \left(c^{1-p} - 1\right) = +\infty \text{, integrál diverguje.}$$

Pro $s = 1 - p < 0$ (tedy pro $p > 1$) je $\lim\limits_{c \to +\infty} c^{1-p} = 0$, a proto

$$L = \lim_{c \to +\infty} F(c) = \frac{1}{1-p} \lim_{c \to +\infty} \left(c^{1-p} - 1\right) = \frac{-1}{1-p} = \frac{1}{p-1} \text{, integrál konverguje.}$$

Ještě musíme uvažovat možnost, že $p = 1$. V tomto případě

$$F(c) = \int\limits_1^c \frac{1}{x} \, dx = [\ln x]_1^c = \ln c - \ln 1 = \ln c \text{, pak}$$

$L = \lim_{c\to+\infty} F(c) = \lim_{c\to+\infty} \ln c = +\infty$, integrál diverguje.

Shrnutí: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx \quad \begin{cases} \text{konverguje} & \text{pro } p > 1 \\ \text{diverguje} & \text{pro } p \le 1 \end{cases}$.

Poznámky

1. Hranice mezi konvergencí a divergencí je $p = 1$.

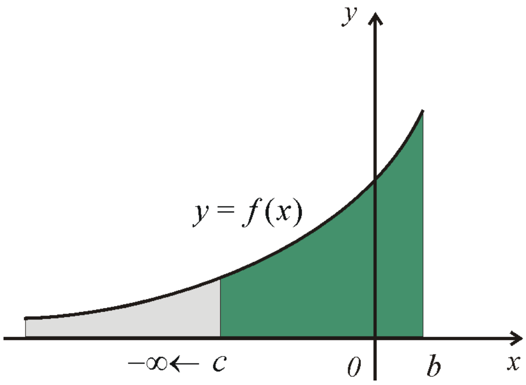
2. Stejný výsledek dostaneme i pro případy, kdy dolní mez integrálu nebude 1, ale libovolné číslo $d > 0$.

Výklad

Naprosto analogicky definujeme nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ na intervalu $(-\infty, b>$, $b \in \boldsymbol{R}$. Předpokládejme, pro každé $c \in (-\infty, b>$ existuje určitý integrál $\int_c^b f(x)dx$.

Pak můžeme definovat funkci G vztahem

$G(c) = \int_c^b f(x)dx$, $c \le b$ a vyšetřujeme limitu $L = \lim_{c\to-\infty} G(c)$. Terminologie je stejná jako v definici 2.5.1.



Obr. 2.5.5. Definice nevlastního integrálu na neohraničeném intervalu $(-\infty, b>$

Poznámka

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$ a konvergují-li pro libovolné číslo a oba *nevlastní integrály* $L_1 = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $L_2 = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, *pak definujeme nevlastí integrál na intervalu* $(-\infty,\infty)$*:* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = L_1 + L_2$.

Příklad 2.5.5. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 e^{x^3} dx$.

Řešení:

Funkce $f(x) = x^2 e^{x^3}$ je spojitá pro všechna reálná x. Nalezněme nejprve primitivní funkci k dané funkci:

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t = \frac{1}{3}e^{x^3} + C .$$

$$G(c) = \int\limits_c^0 x^2 e^{x^3} dx = \left[\frac{1}{3} e^{x^3} \right]_c^0 = \frac{1}{3}\left(1 - e^{c^3}\right),\ \text{takže}$$

$$L = \lim_{c \to -\infty} G(c) = \lim_{c \to -\infty} \frac{1}{3}\left(1 - e^{c^3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lim_{c \to -\infty} e^{c^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}0 = \frac{1}{3} .$$

Integrál tedy konverguje a platí $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}$.

Příklad 2.5.6. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$.

Řešení:

Integrál rozdělíme na dva nevlastní integrály např.

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+x^2} dx + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$. Pro první integrál platí

$$G(c) = \int\limits_c^0 \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{4}\int\limits_c^0 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{2} \right]_c^0 = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{c}{2} ,$$

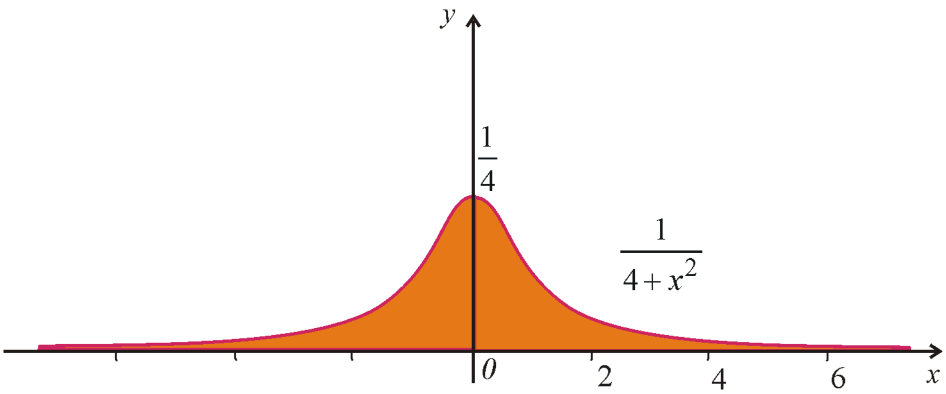
$$L_1 = \lim_{c\to-\infty} G(c) = \lim_{c\to-\infty} \left(-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{c}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ (konverguje).}$$

Pro druhý integrál dostaneme

$$F(c) = \int_0^c \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{4}\int_0^c \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_0^c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{c}{2},$$

$$L_2 = \lim_{c\to\infty} F(c) = \lim_{c\to\infty} \left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{c}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ (konverguje).}$$

Tedy $L_1 = L_2$. To nás nepřekvapuje, protože integrovaná funkce $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$ je sudá (graf je souměrný podle osy y).



Obr. 2.5.6. Graf funkce $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$

Proto $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}dx = L_1 + L_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (integrál konverguje).

Poznámka

Pomocí nevlastního integrálu 1. druhu definujeme pro $x > 0$ ***funkci Gama****:*

$\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ *, která má řadu zajímavých vlastností. Například platí*

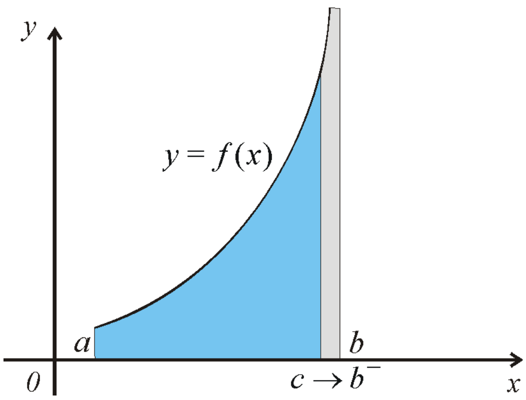
$\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$ *pro* $n \in \mathbf{N}$.

Nevlastní integrály 2. druhu (integrály z neohraničené funkce)

Uvažujme funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $< a,b)$, $a,b \in \boldsymbol{R}$, $a < b$. Předpokládejme, že je tato funkce spojitá na intervalu $< a,c)$ pro každé $c \in < a,b)$ (tedy existuje určitý integrál $\int_a^c f(x)dx$), zatímco $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$. Pak můžeme definovat funkci F vztahem

$$F(c) = \int_a^c f(x)dx\,, \quad a \le c < b\,.$$

Nyní budeme sledovat, jak se chová veličina $F(c)$, když se horní mez c přibližuje k bodu b zleva. Situace je znázorněna na obrázku 2.5.7.



Obr. 2.5.7. Definice nevlastního integrálu z neohraničené funkce na intervalu $< a,b)$

Modrá plocha představuje hodnotu integrálu $\int_a^c f(x)dx$. Při posouvání $c \to b^-$ nás bude zajímat, zda se hodnota tohoto integrálu blíží k nějakému konečnému číslu L (tj. zda existuje konečná limita), nebo zda se tato hodnota nekonečně zvětšuje (limita je $+\infty$ nebo $-\infty$), případně hodnota neexistuje (hodnota osciluje).

Definice 2.5.2. (Definice nevlastního integrálu 2. druhu)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $< a,b)$, zatímco $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$, pak integrál tvaru

$$\int_a^b f(x)dx$$

nazýváme **nevlastní integrál druhého druhu** (neohraničené funkce) a přiřazujeme mu hodnotu rovnou limitě

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx = L\,.$$

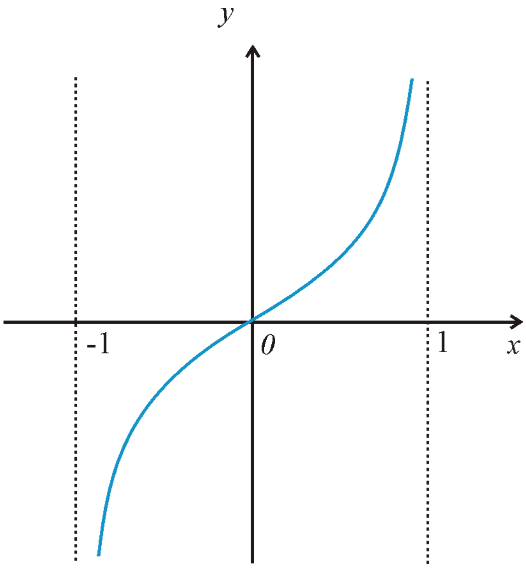
Je-li L konečné číslo, říkáme, že uvažovaný **nevlastní integrál konverguje** (je konvergentní). V opačném případě, tj. když limita je nevlastní ($L=+\infty$ nebo $L=-\infty$) nebo neexistuje, říkáme, že **nevlastní integrál diverguje** (je divergentní).

Řešené úlohy

Příklad 2.5.7. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Řešení:

Integrovaná funkce je spojitá na intervalu $\langle a,b)$ a v bodě $x=1$ není definována (obr. 2.5.8). Protože platí $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$, jedná se o nevlastní integrál 2. druhu (z neohraničené funkce).



Obr. 2.5.8. Graf funkce $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Nejprve nalezneme pomocnou funkci $F(c) = \displaystyle\int_0^c f(x)dx$, $0 \le c < 1$ a potom spočítáme její limitu zleva $L = \displaystyle\lim_{c\to 1^-} F(c)$.

$$F(c)=\int_0^c \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ 1-x^2=t\\ -2xdx=dt\\ xdx=-\frac{1}{2}dt\\ 0\mapsto 1,\ c\mapsto 1-c^2\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int_1^{1-c^2}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^{1-c^2}=\left[\sqrt{t}\right]_{1-c^2}^{1}=$$

$=1-\sqrt{1-c^2}$. Vypočteme limitu pro $c\to 1^-$:

$$L=\lim_{c\to 1^-}F(c)=\lim_{c\to 1^-}\left(1-\sqrt{1-c^2}\right)=1-0=1\,.$$

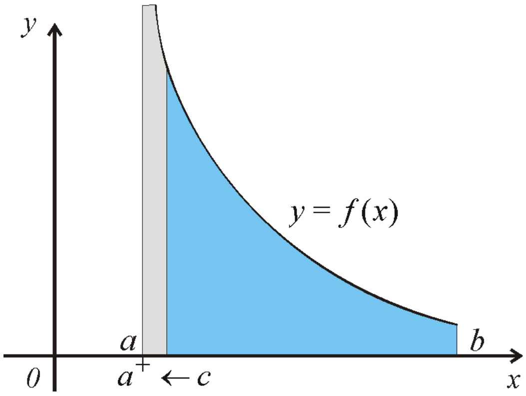
Integrál je tedy konvergentní a platí: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=1$.

Výklad

Naprosto analogicky definujeme nevlastní integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ na intervalu $(a,b>,\ a,b\in \boldsymbol{R},\ a<b$. Předpokládejme, že je tato funkce spojitá na intervalu $(c,b>$ pro každé $c\in(a,b>$ (tedy existuje určitý integrál $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$), zatímco $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$. Pak můžeme definovat funkci G vztahem

$$G(c)=\int_c^b f(x)dx\,,\quad a<c\le b\,.$$

Vyšetřujeme limitu pro $c\to a^+$. Terminologie a označení jsou stejné jako v definici 2.5.2.



Obr. 2.5.9. Definice nevlastního integrálu z neohraničené funkce na intervalu $(a, b>$

Poznámka

Má-li integrovaná funkce více bodů, v nichž je funkce neohraničená ($\lim f(x) = \infty$), rozdělíme interval integrace na tolik dílčích intervalů, aby v každém z nich byl jediný bod v horní nebo v dolní mezi, ve kterém je limita nevlastní. Konvergují-li nevlastní integrály ve všech těchto dílčích intervalech, pak za jeho hodnotu na celém intervalu považujeme součet jeho hodnot na dílčích intervalech. Je-li nevlastní integrál divergentní aspoň na jednom dílčím intervalu, považujeme jej za divergentní na celém intervalu.

Řešené úlohy

Příklad 2.5.8. Vypočtěte integrál $\int_0^4 \frac{1}{x}\,dx$.

Řešení:

Integrovaná funkce je spojitá na intervalu $(0, 4>$ a v bodě $x = 0$ není definována. Protože platí $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$, jedná se o nevlastní integrál 2. druhu (z neohraničené funkce). Grafem funkce je rovnoosá hyperbola s asymptotami $x = 0$ a $y = 0$.

Nejprve vypočteme určitý integrál na intervalu $(c, 4>$, $0 < c \le 4$:

$$G(c) = \int_c^4 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_c^4 = \ln 4 - \ln c.$$

Nyní vypočteme limitu pro $c \to 0^+$:

$L = \lim_{c\to 0^+} G(c) = \lim_{c\to 0^+} \left(\ln 4 - \ln c\right) = \ln 4 - (-\infty) = +\infty$. Integrál je tedy divergentní.

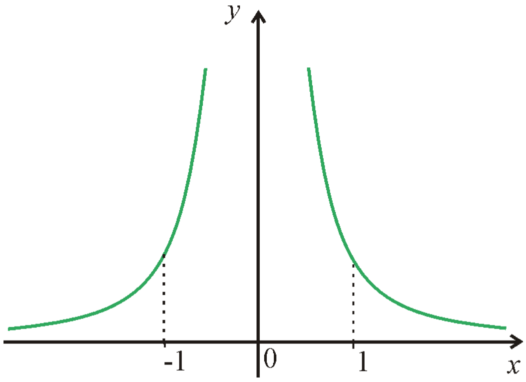
Příklad 2.5.9. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$.

Řešení:

Studenti obvykle postupují následujícím způsobem:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 + (-1) = -2 .$$

Někteří studenti dvakrát podtrhnou výsledek a jsou spokojeni, jak to lehce zvládli. Přemýšlivé studenty výsledek zarazí. Vždyť pro integrační obor $< -1,1 >$ je integrand vždy kladný ($\frac{1}{x^2} > 0$, viz obr. 2.5.10), a tedy hodnota integrálu musí být kladná (lze ji interpretovat jako obsah plochy pod danou funkcí). Kde je chyba?



Obr. 2.5.10. Graf funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Je zřejmé, že daná funkce je na intervalu $< -1,1 >$ neohraničená a není definována v bodě $x = 0$. Rozdělíme tento interval na dílčí intervaly, aby nevlastní limita byla vždy jen v jednom krajním bodě intervalu:

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}dx$ a budeme počítat dva nevlastní integrály.

$F(c) = \int_{-1}^{c} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{c} = -\frac{1}{c} - 1$ a $L = \lim_{c\to 0^-} F(c) = \lim_{c\to 0^-} \left(-\frac{1}{c} - 1\right) = \frac{-1}{0^-} - 1 = +\infty$.

Proto $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx$ diverguje. Pro druhý integrál vypočteme (podle předcházející poznámky to není nutné):

$$G(c) = \int_{c}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{c}^{1} = -1 + \frac{1}{c} \quad L = \lim_{c \to 0^+} F(c) = \lim_{c \to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{c} \right) = -1 + \frac{1}{0^+} = +\infty .$$

Proto také $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ diverguje.

Shrnutí: Integrál $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ je divergentní.

Poznámka

1. Nevlastní integrál prvního druhu (na neohraničeném intervalu) poznáte snadno, neboť v mezích figuruje symbol $+\infty$ nebo $-\infty$. Problematičtější je situace u nevlastních integrálů druhého druhu, neboť na první pohled nemusí být patrné, že je integrand neohraničená funkce, a že se jedná o nevlastní integrál. Pokud bude student postupovat, jako by se jednalo o „obyčejný“ integrál, může dostat nesprávný výsledek.

2. To, že v některém bodě není integrovaná funkce definována ještě neznamená, že musí jít o nevlastní integrál. Například funkce $\frac{\sin x}{x}$ není definována pro $x = 0$, ale $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, a tedy funkce je ohraničená. Proto integrál $\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ není nevlastní, ale jedná se o „obyčejný“ integrál. To, že nám bude výpočet tohoto integrálu dělat potíže (viz kapitola 1.7), je jiný problém. Bude nutno použít nějakou numerickou metodu.

Kontrolní otázky

1. Zapište definici nevlastního integrálu na intervalu $(-\infty, b>$, $b \in \boldsymbol{R}$ (analogie definice 2.5.1).
2. Kdy je nevlastní integrál konvergentní a kdy je divergentní?
3. Jaký je rozdíl mezi nevlastními integrály prvního a druhého druhu?

4. Zapište definici nevlastního integrálu na intervalu $(a,b>$, $a,b\in \boldsymbol{R}$, $a<b$, jestliže $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ (analogie definice 2.5.2).

5. Je nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4}dx$ konvergentní?.

6. Jsou integrály $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ a $\int\limits_0^1 x\ln x dx$ nevlastní?

7. Pro která p je integrál $\int\limits_0^1\frac{1}{x^p}dx$ konvergentní? (Analogie příkladu 2.5.4.)

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ b) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ c) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^3+1}{x^4}\,dx$

d) $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}$ e) $\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2+2x+5}$ f) $\int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^2+x+1}$

g) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$ h) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ i) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x}$

2. a) $\int\limits_1^{+\infty}3^{-2x}\,dx$ b) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx$ c) $\int\limits_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

d) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx$ e) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$ f) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

g) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx$ h) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ i) $\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx$

3. a) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}$ b) $\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ c) $\int\limits_0^1\ln x\,dx$

d) $\int\limits_{-8}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ e) $\int\limits_1^4\frac{dx}{(x-1)^3}$ f) $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4. a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x\cos x}$ c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$

d) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$ e) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$ f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) diverguje; **b)** 1; **c)** diverguje; **d)** $\frac{\pi}{8}$; **e)** $\frac{3\pi}{8}$; **f)** $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; **g)** $\frac{\pi\sqrt{5}}{5}$; **h)** π; **i)** $\ln 2$.

2. a) $\frac{1}{18\ln 3}$; **b)** diverguje; **c)** 1; **d)** 0; **e)** $\frac{\pi^2}{8}$; **f)** $1-\frac{1}{e}$; **g)** $\frac{\pi^3}{12}$; **h)** $\frac{\pi}{4}$; **i)** $-\frac{1}{2}$. **3. a)** $\frac{5}{2}$; **b)** $2\sqrt{2}$; **c)** -1; **d)** $\frac{15}{2}$; **e)** diverguje; **f)** π. **4. a)** 1; **b)** diverguje; **c)** diverguje; **d)** $-\frac{1}{4}$; **e)** $\ln 3$; **f)** diverguje.

Kontrolní test

1. Rozhodněte, zda nevlastní integrál $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ je

a) 1. druhu a rovná se 3, b) 2. druhu a diverguje,

c) 2. druhu a rovná se 3, d) 1. druhu a diverguje.

2. Rozhodněte, zda nevlastní integrál $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$ je

a) 1. druhu a rovná se $\frac{1}{3}$, b) 2. druhu a rovná se $\frac{1}{3}$,

c) 1. druhu a diverguje, d) 2. druhu a diverguje.

3. Rozhodněte, zda nevlastní integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ je

a) 2. druhu a diverguje, b) 1. druhu a rovná se π,

c) 2. druhu a rovná se π, d) 1. druhu a diverguje.

4. Rozhodněte, zda nevlastní integrál $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$ je

a) 1. druhu a diverguje, b) 1. druhu a rovná se $-\frac{2}{e}$,

c) 2. druhu a diverguje, d) 2. druhu a rovná se $-\frac{2}{e}$.

5. Vypočtěte nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{3+x^2}$.

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$, b) $-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$, c) $\frac{\pi}{2}$, d) diverguje.

6. Vypočtěte nevlastní integrál $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

a) $\frac{\pi}{4}$, b) diverguje, c) $-\frac{\pi}{4}$, d) 0.

7. Vypočtěte nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$.

a) $\frac{1}{2}$, b) $-\frac{1}{2}$, c) diverguje, d) 0.

8. Vypočtěte nevlastní integrál $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \operatorname{tg} x\,dx$.

a) 0, b) $\ln 2$, c) diverguje, d) $-\ln 2$.

9. Vypočtěte nevlastní integrál $\int\limits_{0}^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

a) 0, b) -1, c) diverguje, d) 1.

10. Vypočtěte nevlastní integrál $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

a) $-6\sqrt[3]{2}$, b) diverguje, c) 0, d) $6\sqrt[3]{2}$.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. b); 4. d); 5. a); 6. a); 7. b); 8. c); 9. d); 10. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.5 znovu.

Shrnutí lekce

Rozlišujeme dva druhy nevlastních integrálů. Jednak může být integrál nevlastní kvůli tomu, že je integrační obor neohraničený (nevlastní integrály prvního druhu) nebo není na integračním oboru ohraničená integrovaná funkce (nevlastní integrály druhého druhu). Je-li funkce $f(x)$ definována na intervalu $a \le x < b,\ \ b \in \boldsymbol{R}$ zprava otevřeném a integrovatelná na každém dílčím uzavřeném intervalu $< a, c >,\ \ c < b$, pak definujeme nevlastní integrál prvního druhu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_a^c f(x)dx$ na intervalu $< a, \infty)$, resp. nevlastní integrál druhého druhu $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c\to b^-} \int\limits_a^c f(x)dx$ pro funkci $f(x)$ neohraničenou pro $x \to b^-$.

Analogicky se zavedou nevlastní integrály na zleva otevřeném intervalu $a < x \le b,\ \ a \in \boldsymbol{R}$.

3. APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

V matematice, ale zejména v přírodních a technických vědách, existuje nepřeberné množství problémů, při jejichž řešení je nutno tím či oním způsobem použít integrálního počtu. V této kapitole uvádíme stručný přehled těch nejběžnějších aplikací určitých integrálů v geometrii a ve fyzice.

Budeme se zabývat výpočtem délek, obsahů a objemů. Během dosavadní školní docházky jste si vytvořili jistou intuitivní představu, co je to délka křivky, obsah nějakého geometrického obrazce či objem tělesa. Seznámili jste se se vzorci pro výpočet délky úsečky nebo kružnice, dovedete vypočítat obsah trojúhelníka, obdélníka, čtverce, kruhu, objem krychle, kvádru, jehlanu, koule a dalších obrazců či těles.

Jistě máte představu, že pravidelný pětiúhelník má určitý obsah, i když neznáte vzorec pro jeho výpočet. Dovedete však tento pětiúhelník rozložit na konečný počet trojúhelníků a po určité námaze byste vypočítali obsah pětiúhelníka jako součet obsahů těchto trojúhelníků. Vzniká otázka, jak definovat obsahy obecnějších obrazců, které nelze rozložit na konečný počet trojúhelníků.

Vzhledem k určení a rozsahu těchto studijních materiálů není možné přesně zavést pojmy délka, obsah a objem. Precizním zavedením těchto pojmů se zabývá teorie míry, což je poměrně náročná matematická partie. Pro potřeby inženýrské praxe vystačíme s jednoduchými objekty, kde je intuitivně jasné, že mají určitou délku, obsah, resp. objem. Budeme se zabývat výpočtem těchto veličin.

Při řešení geometrických a fyzikálních úloh postupujeme ve dvou krocích:

1. Převedeme řešení úlohy na výpočet určitého integrálu.
2. Tento určitý integrál vypočítáme.

3.1. Obsah rovinné oblasti

Cíle

Seznámíte se se základní aplikací určitého integrálu – výpočtem obsahu křivočarého lichoběžníka a obsahu složitějších rovinných oblastí.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že jste si prostudovali zavedení pojmu určitý integrál (kapitola 2.1), kde je výpočet obsahu křivočarého lichoběžníka užitý jako motivace zavedení určitého integrálu. Dále předpokládáme, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu.

Výklad

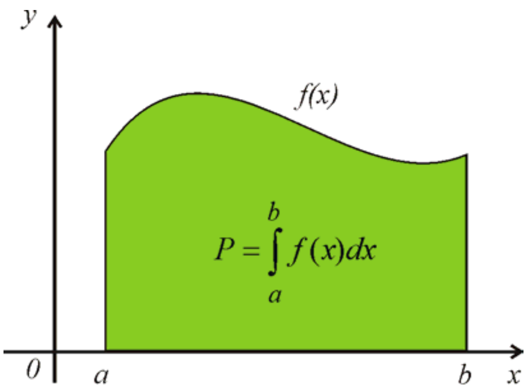
Věta 3.1.1.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $< a,b >$ a je na něm nezáporná. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x platí

$$P = \int_a^b f(x)dx \,.$$

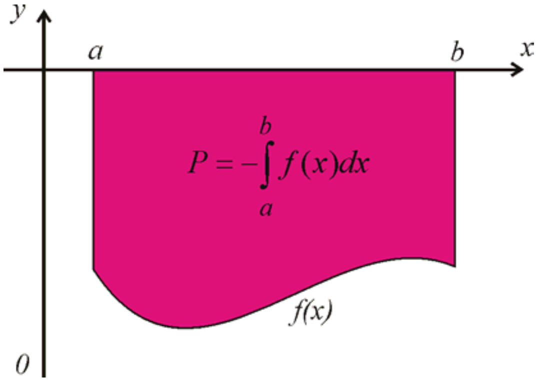
Důkaz:

Tvrzení plyne z definice Riemannova určitého integrálu (definice 2.1.2).



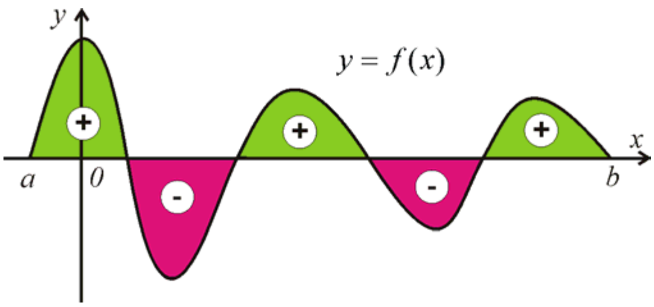
Obr. 3.1.1. Obsah křivočarého lichoběžníka pro nezápornou funkci ($f(x) \geq 0$)

Uvedený vztah pro obsah křivočarého lichoběžníka platí pro **nezápornou funkci** $f(x)$ na intervalu $< a,b >$. Z definice určitého integrálu je zřejmé, že pro funkci $f(x)$, která je naopak na intervalu $< a,b >$ **nekladná** ($f(x) \leq 0$), bude určitý integrál $\int_a^b f(x)dx \leq 0$, a proto obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného zdola grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x bude $P = -\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$ (obr. 3.1.2).



Obr. 3.1.2. Obsah křivočarého lichoběžníka pro nekladnou funkci ($f(x)\le 0$)

V obecném případě může funkce $f(x)$ libovolně měnit znaménko. Při výpočtu obsahu plochy ohraničené grafem funkce $f(x)$ a osou x na intervalu $<a,b>$ je nutno brát části nad osou x kladně a části pod osou x záporně. Pokud bychom vypočetli integrál $\int_a^b f(x)dx$ na celém intervalu, odečítaly by se kladné a záporné části (obr. 3.1.3).



Obr. 3.1.3. Obsah plochy mezi osou x a grafem funkce $f(x)$ se znaménky

Větu 3.1.1. můžeme zobecnit na případ, kdy je obrazec zdola ohraničen další funkcí $g(x)$.

Věta 3.1.2.

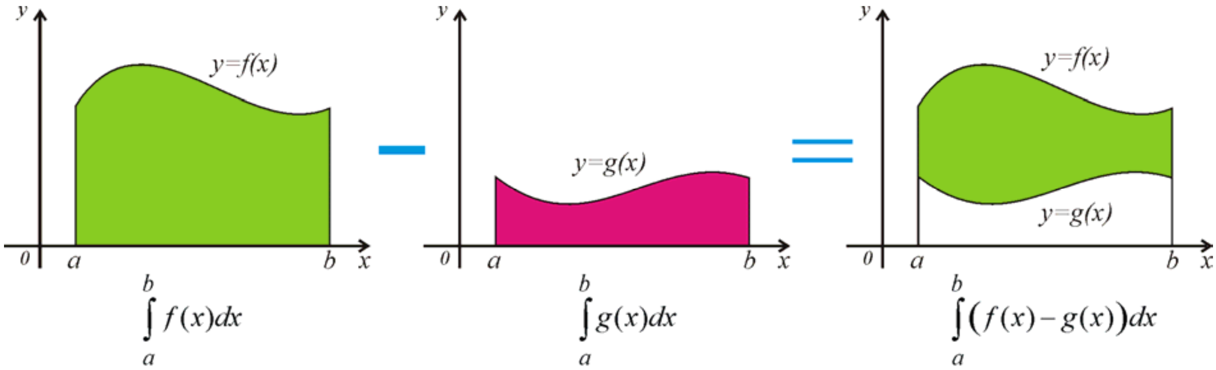
Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné a platí $g(x)\le f(x)$ pro každé $x\in<a,b>$. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného zdola grafem funkce $g(x)$, shora grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x=a$, $x=b$ platí

$$P=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx\,.$$

Důkaz:

Jsou-li obě funkce $f(x)$ a $g(x)$ nezáporné, je obsah uvažovaného křivočarého lichoběžníka roven rozdílu obsahu plochy pod grafem funkce $f(x)$ a obsahu plochy pod grafem funkce $g(x)$, viz obr. 3.1.4.

$$P = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$



Obr. 3.1.4. Obsah plochy mezi funkcemi $g(x)$ a $f(x)$ na intervalu $< a,b >$

Obecně by mohly funkce $f(x)$ a $g(x)$ protínat osu *x* (část obrazce by ležela pod osou *x*). V tomto případě stačí k oběma funkcím přičíst vhodnou konstantu *C*, aby byly obě funkce $f(x)+C$ a $g(x)+C$ nezáporné. Obsah uvažovaného křivočarého lichoběžníka se tím nezmění.

$$P = \int_a^b [f(x)+C]dx - \int_a^b [g(x)+C]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b Cdx - \int_a^b g(x)dx - \int_a^b Cdx = \int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx\,.$$

Poznámky

1. Z důkazu věty 3.1.2 vyplývá, že při výpočtu obsahu křivočarého lichoběžníka mezi grafy dvou funkcí $g(x) \le f(x)$ není důležité, zda tento obrazec nebo jeho část leží pod osou x.

2. Věta 3.1.1 je speciálním případem věty 3.1.2 pro $g(x) = 0$.

Grafem funkce $y = f(x)$ je křivka. Tato funkce (křivka) může být dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in < \alpha, \beta >$. Proměnnou *t* nazýváme parametr (ve fyzice mívá obvykle význam času a funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mohou udávat *x*-ovou a *y*-ovou souřadnici pohybujícího se bodu). Pro výpočet obsahu křivočarého lichoběžníka (obr. 3.1.1) ohraničeného funkcí danou parametrickými rovnicemi můžeme modifikovat větu 3.1.1 následujícím způsobem:

Věta 3.1.3.

Nechť funkce *f* je dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ jsou spojité pro $t \in < \alpha, \beta >$. Je-li funkce $\varphi(t)$ ryze monotonní a má spojitou derivaci na intervalu $< \alpha, \beta >$, přičemž $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$, pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce *f*, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou *x* platí

$$P = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt \right|.$$

Důkaz:

Je-li funkce $x = \varphi(t)$ ryze monotonní na intervalu $< \alpha, \beta >$, pak k ní existuje inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$. Rovnici křivky můžeme proto psát ve tvaru $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$.

Uvažovaná plocha bude mít obsah

$$P = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b \psi(\varphi^{-1}(x))dx \right|.$$

Odtud substitucí $x = \varphi(t)$, ze které plyne $dx = \varphi'(t)dt$, dostaneme

$$P = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt \right|.$$

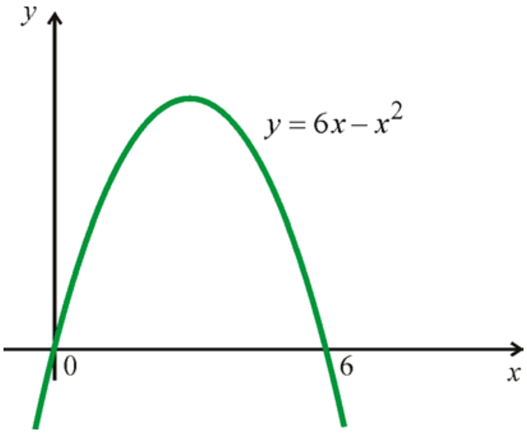
Řešené úlohy

Příklad 3.1.1. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = 6x - x^2$ a osou *x*.

Řešení:

U příkladů tohoto typu je dobré si udělat náčrtek. Je zadána kvadratická funkce, tedy grafem bude parabola. Nejprve upravíme rovnici paraboly, abychom nalezli její vrchol.

$y = 6x - x^2 = -(x^2 - 6x) = -(x-3)^2 + 9$. Z rovnice $y - 9 = -(x-3)^2$ je zřejmé, že vrchol paraboly je v bodě $V = (3,9)$ a ramena paraboly budou orientována směrem dolů (obr. 3.1.5). Řešením rovnice $6x - x^2 = 0$ dostaneme průsečíky dané paraboly s osou x: $a = 0$ a $b = 6$.



Obr. 3.1.5. Graf funkce $y = 6x - x^2$

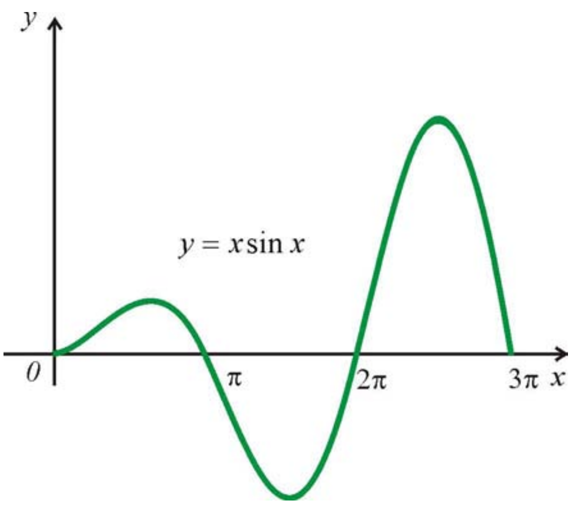
Hledaný obsah je

$$P = \int_0^6 (6x - x^2)dx = \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^6 = 108 - 2 \cdot 36 = 36 .$$

Příklad 3.1.2. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = x \sin x$, osou x a přímkami $x = 0$, $x = 3\pi$.

Řešení:

Na intervalu $< 0, 3\pi >$ je $x \geq 0$, avšak funkce $\sin x$ bude měnit znaménko. Proto bude $x \sin x \geq 0$ pro $x \in < 0, \pi >$, $x \sin x \leq 0$ pro $x \in < \pi, 2\pi >$ a $x \sin x \geq 0$ pro $x \in < 2\pi, 3\pi >$ (obr. 3.1.6).



Obr. 3.1.6. Graf funkce $y = x \sin x$

Hledaný obsah bude sestávat ze tří částí:

$$P = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} x\sin x\,dx .$$

Potřebnou primitivní funkci k funkci $y = x\sin x$ nalezneme metodou per partes:

$$\int x\sin x\,dx = \begin{vmatrix} u' = \sin x & v = x \\ u = -\cos x & v' = 1 \end{vmatrix} = -x\cos x + \int \cos x\,dx = \sin x - x\cos x .$$

Dosadíme příslušné meze:

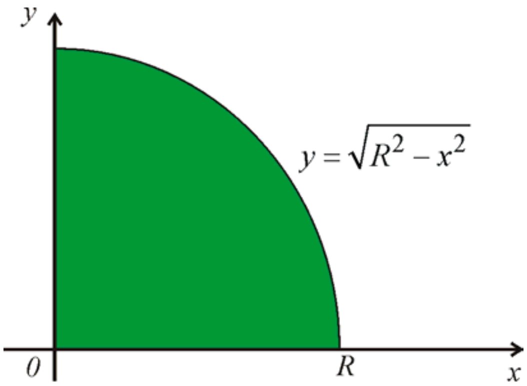
$$P = \left[\sin x - x\cos x\right]_0^{\pi} - \left[\sin x - x\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} + \left[\sin x - x\cos x\right]_{2\pi}^{3\pi} =$$

$$= \left[0 - \pi(-1) - 0 + 0\right] - \left[0 - 2\pi - 0 + \pi(-1)\right] + \left[0 - 3\pi(-1) - 0 + 2\pi\right] = \pi + 3\pi + 5\pi = 9\pi .$$

Příklad 3.1.3. Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu kruhu o poloměru R.

Řešení:

Vzorec pro výpočet obsahu kruhu jistě znáte už ze základní školy. Dosud jste však neměli dostatečné znalosti, abyste mohli dokázat platnost tohoto vzorce. Střed kruhu umístíme do počátku, což nemá vliv na obsah kruhu. Rovnice hraniční kružnice bude $x^2 + y^2 = R^2$. Pro jednoduchost vypočteme obsah jedné čtvrtiny kruhu ležící v prvním kvadrantu a potom výsledek vynásobíme čtyřmi. Pro $x \in \langle 0, R \rangle$ z rovnice kružnice dostaneme $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.



Obr. 3.1.7. Obsah čtvrtiny kruhu

Pro obsah celého kruhu bude platit $P = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$. Podobný integrál jsme již počítali. Podívejte se na příklad 1.4.7. Použijeme substituční metodu:

$$P=4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ x=R\sin t\\ dx=R\cos t\,dt\\ 0\mapsto 0,\quad R\mapsto \dfrac{\pi}{2}\end{array}\right|=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\;R\cos t\,dt=$$

$$=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t dt=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=2R^2\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2R^2\left[\frac{\pi}{2}-0\right]=\pi R^2\,.$$

Poznámka

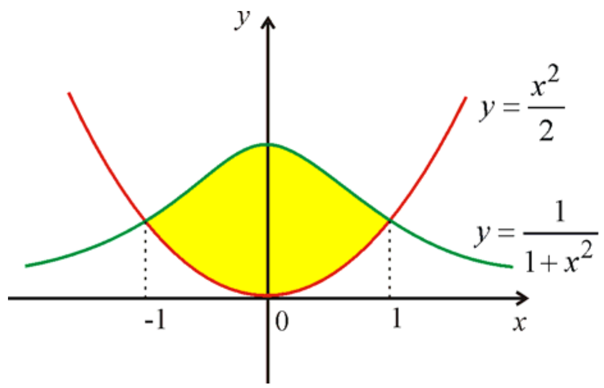
Při úpravě (výpočet odmocniny $\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}$ *) jsme využili toho, že pro* $x\in<0,\frac{\pi}{2}>$ *je* $\cos x\geq 0$.

Příklad 3.1.4. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

$$y=\frac{1}{1+x^2}\ \text{ a }\ y=\frac{x^2}{2}.$$

Řešení:

Je zřejmé, že funkce $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ bude vždy kladná a největší hodnoty nabude pro $x=0$. Grafem druhé funkce je parabola (obr. 3.1.8).



Obr. 3.1.8. Obrazec ohraničený křivkami $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ a $y=\dfrac{x^2}{2}$

Nejprve musíme nalézt průsečíky daných křivek. Řešíme rovnici

$\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}$. Po úpravě dostaneme $x^4+x^2-2=0$, tedy $(x^2-1)(x^2+2)=0$.

Uvedená rovnice má dva reálné kořeny $x_1=-1$ a $x_1=1$.

Podle věty 3.1.2 je obsah oblasti ohraničené danými křivkami roven

$$P=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=2\left[\operatorname{arctg}x-\frac{x^3}{6}\right]_0^1=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}.$$

Poznámka

Využili jsme toho, že oblast je souměrná podle osy y (integrand je sudá funkce).

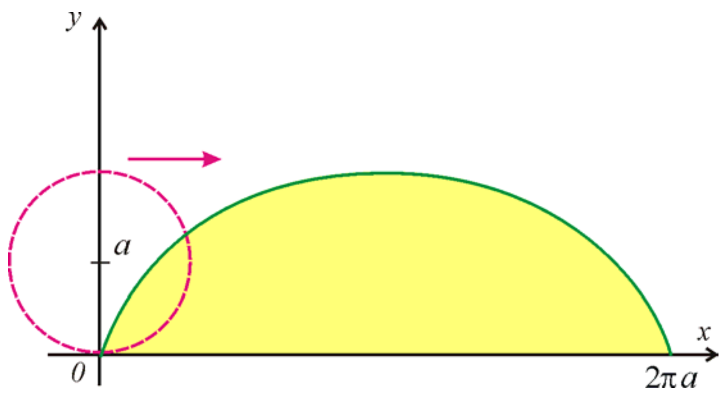
Příklad 3.1.5. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného osou x a jedním obloukem prostá cykloidy.

Řešení:

Prostá cykloida je křivka, kterou opisuje bod pevně spojený s kružnicí o poloměru a při kotálení kružnice po přímce (obr. 3.1.9). Tato cykloida má parametrické rovnice:

$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in\boldsymbol{R}$.

První oblouk cykloidy dostaneme pro parametr $t\in<0,2\pi>$.



Obr. 3.1.9. První oblouk cykloidy

Protože $dx=a(1-\cos t)dt$, dostaneme z věty 3.1.3

$$P=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}) dt = a^2 \left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = a^2 \left[2\pi + \pi \right] = 3\pi a^2 .$$

Poznámka

Body uvnitř kružnice by při kotálení kružnice po přímce opisovaly ***zkrácenou cykloidu*** *a myšlené body vně tzv.* ***prodlouženou cykloidu****. Cykloida se v přírodě a technice objevuje na nečekaných místech a v různých zajímavých souvislostech. Například vlny na vodě mají tvar cykloidy, s oblibou se využívají cykloidiální ozubená kola v převodovkách, cykloida snese největší zatížení, což má využití v mostních a tunelových konstrukcích (nové tunely pražského metra, tunel Mrázovka), dále je užíván cykloidiální výřez na carvingových lyžích.*

Kontrolní otázky

1. Uveďte vzorec pro výpočet obsahu obrazce ohraničeného osou x a grafem funkce $y = f(x)$, která protíná osu x ve dvou bodech.
2. Jak se liší vztahy pro výpočet obsahu křivočarého lichoběžníka ohraničeného grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x pro nezápornou a pro nekladnou funkci $f(x)$?
3. Jak vypočítáme obsah rovinného obrazce ohraničeného dvěma funkcemi $g(x) \le f(x)$?.
4. Jak vypočítáme obsah rovinného obrazce ohraničeného dvěma funkcemi, pokud celá oblast leží pod osou x (tj. $g(x) \le f(x) < 0$)?
5. Jak vypočítáte obsah obrazce ohraničeného funkcí $y = \sin 2x$ a osou x pro $x \in < 0, 2\pi >$.
6. Určete parametr k tak, aby obsah oblasti ohraničené parabolou $y = x - x^2$ a přímkou $y = kx$ byl roven $\frac{9}{2}$.
7. Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu elipsy o poloosách a a b. (Parametrické rovnice této elipsy jsou $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in < 0, 2\pi >$).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

a) $y = 4 - x^2; \quad y = 0$ b) $y = 6x - x^2; \quad y = 0$

c) $y = 4 - x^2; \quad y = x^2$

d) $y = -x^2 + 4x - 2; \quad x + y = 2$

e) $y = x^2 - 2x; \quad y = x$

f) $y = x^2; \quad x = y^2$

g) $y = x^2 - x - 6; \quad y = -x^2 + 5x + 14$

h) $y = x^3; \quad y = 4x$

i) $xy = 4; \quad x + y = 5$

j) $y = \operatorname{tg} x; \quad y = 0; \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

k) $y = \sin x; \quad y = \dfrac{2x}{\pi}$

l) $y = e^x; \quad y = e^{-x}; \quad x = \ln 2$

2. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

a) $y = \ln^2 x; \quad y = \ln x$

b) $y = \sin x; \quad y = \cos x; \quad x = \dfrac{\pi}{4}; \quad x = \dfrac{3\pi}{4}$

c) $y = \arcsin x; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = 1$

d) $y = \dfrac{x^2}{4}; \quad y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$

e) $y = 2^x; \quad x = -1; \quad x = 0; \quad y = 0$

f) $y = 2x^3; \quad y = \dfrac{2}{x}; \quad x - y = 1; \quad x \geq 0$

3. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného

a) parabolou $y = x^2 - 2x + 2$, její tečnou v bodě $(3,5)$ a souřadnicovými osami.

b) křivkou $y = e^x$, její tečnou v bodě $(0,1)$ a přímkou $x = -1$.

c) grafem funkce $y = x^3 + x^2 - 6x$ pro $-3 \leq x \leq 3$ a osou x.

d) parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jejími tečnami v bodech $(1,3)$ a $(4,0)$.

4. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného osou x a křivkou zadanou parametrickými rovnicemi

a) $x = 3t^2,\ y = 3t - t^3; \quad -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$

b) $x = 2\sin t,\ y = 2\cos t; \quad 0 \leq t \leq \pi \ x = 2\sin t, \quad y = 2\cos t; \quad 0 \leq t \leq \pi$

c) $x = 2(t - \sin t),\ y = 2(1 - \cos t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

d) $x = 3\sin^3 t,\ y = 3\cos^3 t; \quad 0 \leq t \leq \pi$

e) $x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t^3; \quad 0 \leq t \leq 2$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. **a)** $\frac{32}{3}$; **b)** 36; **c)** $\frac{16\sqrt{2}}{3}$; **d)** $\frac{9}{2}$; **e)** $\frac{9}{2}$; **f)** $\frac{1}{3}$; **g)** $\frac{343}{3}$; **h)** 8; **i)** $\frac{15}{2}-8\ln 2$; **j)** $\frac{\ln 2}{2}$; **k)** $2-\frac{\pi}{2}$; **l)** $\frac{1}{2}$. **2.** **a)** $3-e$; **b)** $\sqrt{2}$; **c)** $\frac{\pi}{2}-1$; **d)** $\pi-\frac{4}{3}$; **e)** $\frac{1}{2\ln 2}$; **f)** $\frac{1}{2}+2\ln 2$.

3. **a)** $\frac{23}{8}$; **b)** $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$; **c)** $\frac{86}{3}$; **d)** $\frac{9}{4}$. **4.** **a)** $\frac{72\sqrt{3}}{5}$; **b)** 2π; **c)** 12π; **d)** $\frac{27\pi}{8}$; **e)** $\frac{7}{15}$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $xy = 6$ a $x + y - 7 = 0$.

   a) $\frac{35}{2}-6\ln 6$, b) $\frac{35}{2}+6\ln 6$, c) $\frac{35}{2}-\ln 6$, d) $\frac{35}{2}+\ln 6$.

2. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $y = x^2 - 8x + 14$ a $y = -x^2 + 4x + 14$.

   a) 144, b) 72, c) 36, d) 108.

3. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $y^2 = 2x + 1$ a $x - y - 1 = 0$.

   a) $\frac{14}{3}$, b) $\frac{29}{3}$, c) $\frac{28}{3}$, d) $\frac{16}{3}$.

4. Vypočtěte obsah rovinné oblasti dané nerovnostmi $x^2 + y^2 \le 8$ a $2y \ge x^2$.

   a) $\frac{2}{3}+\pi$, b) $\frac{4}{3}+2\pi$, c) $-\frac{8}{3}+2\pi$, d) $\frac{8}{3}+2\pi$.

5. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $y = \operatorname{tg} x$, $y = \frac{2}{3}\cos x$ a $y = 0$.

   a) $\frac{1}{3}-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\frac{1}{3}-\ln 2$, c) $\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$, d) $\frac{1}{3}+\ln 2$.

6. Vypočtěte obsah rovinné oblasti dané nerovnostmi $y \le 4$, $x^2 \ge y$ a $x^2 \le 4y$.

   a) $\frac{16}{3}$, b) 20, c) 40, d) $\frac{32}{3}$.

7. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$ a $x = 0$.

   a) $\ln 2$, b) $\frac{\pi}{2}+\ln 2$, c) $\frac{\pi}{2}$, d) $\frac{\pi}{2}-\ln 2$.

8. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami

$k_1 : x = a\cos t,\quad y = b\sin t,\quad k_2 : x = b\cos t,\ y = b\sin t,\ a > b > 0$ konst., pro

$t \in < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$.

a) $\pi b(a-b)$, b) $\pi a(a-b)$, c) $\frac{\pi b}{2}(a-b)$, d) $\frac{\pi a}{2}(a-b)$.

9. Vypočtěte obsah smyčky křivky $x = 3t^2,\ y = 3t - t^3,\ -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$.

a) $\frac{36}{5}\sqrt{3}$, b) $\frac{72}{5}\sqrt{3}$, c) $\frac{6}{5}\sqrt{3}$, d) $\frac{12}{5}\sqrt{3}$.

10. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = \frac{\ln x}{4x}$ a $y = x\ln x$.

a) $\frac{3}{16} + \frac{1}{8}(\ln^2 2 + \ln 2)$, b) $\frac{1}{8}\ln 2(1 + \ln 2) - \frac{3}{16}$,

c) $\frac{3}{16} + \frac{1}{8}(\ln^2 2 - \ln 2)$, d) $\frac{3}{16} - \frac{1}{8}(\ln 2 + \ln^2 2)$.

Výsledky testu

1. a); 2. b); 3. d); 4. b); 5. c); 6. d); 7. a); 8. c); 9. b); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.
V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.1 znovu.

Shrnutí lekce

Z definice Riemannova určitého integrálu vyplývá, že integrál $\int_a^b f(x)dx$ pro nezápornou funkci $f(x)$ na intervalu $< a, b >$ dává obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x. Jestliže funkce $f(x)$ na uvedeném intervalu protíná osu x, je nutno rozdělit obrazec na části nad osou x a na části pod osou x, kde jsou hodnoty určitého integrálu z dané funkce záporné. Při výpočtu obsahu rovinného obrazce ohraničeného zdola grafem funkce $g(x)$ a shora grafem funkce $f(x)$ pro $x \in < a, b >$ není důležité, zda obrazec nebo jeho část leží pod osou x.

3.2. Délka oblouku křivky

Cíle

Seznámíte se s další aplikací určitého integrálu – výpočtem délky křivky.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že jste si prostudovali zavedení pojmu určitý integrál (kapitola 2.1). Dále předpokládáme, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu. Budeme také používat parametrické rovnice křivky.

Výklad

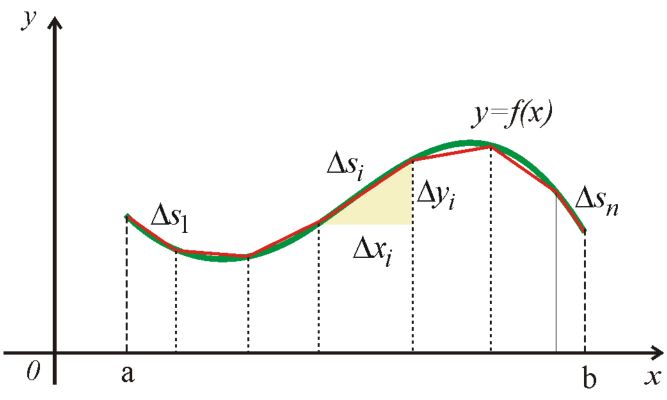
Mějme část rovinné křivky dané rovnicí $y = f(x)$ pro $a \le x \le b$ (obr. 3.2.1). Zajímá nás, jaká je délka této křivky.

Předpokládejme, že jsou funkce $f(x)$ a její derivace $f'(x)$ spojité na intervalu $< a, b >$. Budeme postupovat analogicky jako při zavedení Riemannova určitého integrálu (kap. 2.1). Křivku nahradíme lomenou čarou, která se bude skládat z n úseček (obr. 3.2.1). Z Pythagorovy věty bude délka i – té úsečky rovna

$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$. Norma dělení bude $\nu(D_n) = \max\limits_{i=1,\dots,n} \Delta x_i$.

Délka celé křivky bude přibližně rovna součtu délek jednotlivých úseček:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \, .$$



Obr. 3.2.1. Aproximace křivky $y = f(x)$ lomenou čarou

Je zřejmé, že pro zvětšující se počet dílčích úseček budeme dostávat přesnější aproximaci délky oblouku křivky. Pro $n \to \infty$ a normu dělení $\nu(D_n) \to 0$ bude $\Delta x \to dx$, $\Delta y \to dy$ a pro délku uvažované křivky dostaneme:

$$s = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\ .$$

Jelikož $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ (Matematika I, část II, kapitola 3.6), snadno vztah upravíme na tvar

$$s = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\ dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx = \int_a^b \sqrt{1 + [\,f'(x)]^2}\ dx\,.$$

Věta 3.2.1.

Nechť je funkce $f(x)$ definovaná na intervalu $< a, b >$ a má zde spojitou derivaci. Pak délka této křivky

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [\,f'(x)]^2}\ dx\,.$$

Křivka nemusí být vždy zadána explicitní funkcí $y = f(x)$, může být dána rovněž parametrickými rovnicemi

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)\,, \quad t \in < \alpha, \beta >\,.$$

Křivku si můžeme představit jako trajektorii, kterou urazí bod, který se v čase spojitě pohybuje v rovině. Spojité funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ udávají x-ovou a y-ovou souřadnici pohybujícího se bodu. Délka takové křivky je z fyzikálního hlediska vlastně dráha, kterou bod urazí od okamžiku α do okamžiku β.

Věta 3.2.2.

Nechť je křivka dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in < \alpha, \beta >$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $< \alpha, \beta >$. Pak je délka této křivky

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\ dt\,.$$

Důkaz: Funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $<\alpha,\beta>$, pak platí

$dx=\varphi'(t)dt$ a $dy=\psi'(t)dt$. Dosazením do vztahu

$$s=\int_a^b\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)dt]^2+[\psi'(t)dt]^2}=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$$

dostaneme tvrzení věty.

Poznámka

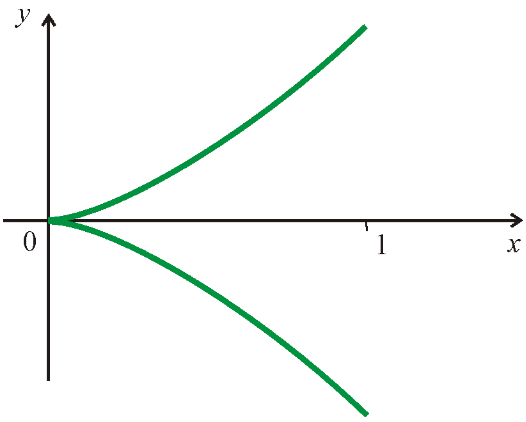
Libovolnou funkci $y=f(x)$, $x\in<a,b>$ *můžeme snadnou parametrizovat, když položíme* $x=t$, $y=f(t)$, $t\in<a,b>$. *Jelikož* $\varphi'(t)=1$, *vidíme, že tvrzení věty 3.2.1 je speciálním případem věty 3.2.2.*

Řešené úlohy

Příklad 3.2.1. Vypočtěte délku semikubické (Neilovy) paraboly $y^2=x^3$ na intervalu $<0,1>$.

Řešení:

Křivka se skládá ze dvou částí $y=x^{\frac{3}{2}}$ a $y=-x^{\frac{3}{2}}$ symetrických podle osy *x* (obr.3.2.2).



Obr. 3.2.2. Graf semikubické paraboly $y^2=x^3$ pro $x\in<0,1>$

Délka bude rovna dvojnásobku délky části nad osou *x*. Použijeme vztah z věty 3.2.1, kde

$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ a $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

$$s = 2\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\; dx = 2\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{16}{27}\left[\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{16}{27}\left[\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right].$$

Poznámka

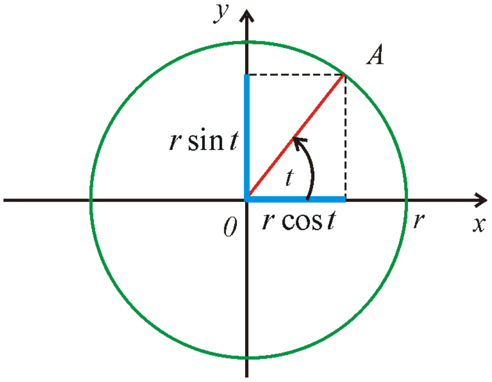
Integrál pro výpočet délky křivky obsahuje odmocninu. Proto se nám i pro jednoduché funkce stane, že neumíme příslušný integrál vypočítat. V takovém případě bude nutno použít nějakou numerickou metodu nebo některý matematický program (např. Derive, Maple, Mathematica).

Příklad 3.2.2. Vypočtěte délku kružnice o poloměru $r > 0$.

Řešení:

Bez újmy na obecnosti uvažujme kružnici se středem v počátku. Rovnice této kružnice je $x^2 + y^2 = r^2$. Odtud $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, přičemž $x \in < -r, r >$. Vezmeme rovnici horní půlkružnice $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ a vypočítáme její derivaci $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Problém je v tom, že derivace není definována pro $x = r$ a $x = -r$. Předpoklady věty 3.2.1 nejsou tedy splněny.

Snadno najdeme parametrické rovnice kružnice. Z definice funkcí sinus a kosinus určíme polohu libovolného bodu $A = (x, y)$ ležícího na kružnici (obr. 3.2.3).



Obr. 3.2.3. Odvození parametrických rovnic kružnice

Hledané parametrické rovnice kružnice budou:

$x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in < 0, 2\pi >$.

Měníme-li úhel t od nuly do 2π, oběhne bod A celou kružnici. Pro výpočet délky kružnice použijeme větu 3.2.2.

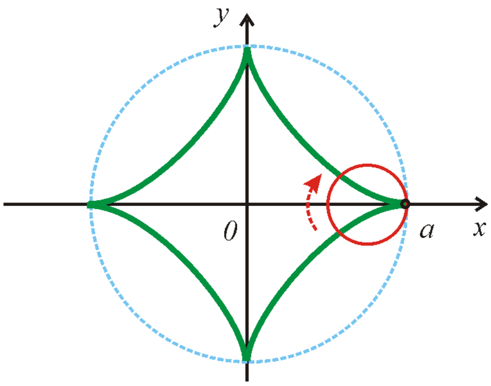
Jelikož $\varphi'(t) = (r\cos t)' = -r\sin t$ a $\psi'(t) = (r\sin t)' = r\cos t$, dostáváme

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{[-r\sin t]^2+[r\cos t]^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{2\pi} r\,dt=r[t]_0^{2\pi}=2\pi r\,.$$

Příklad 3.2.3. Vypočtěte délku asteriody.

Řešení:

Asteroida je zvláštním případem hypocykloidy. Hypocykloida je cyklická křivka, kterou vytvoří bod pevně spojený s kružnicí, která se valí (kotálí) po vnitřní straně nehybné kružnice. Asteroidu dostaneme v případě, kdy se kružnice o poloměru $r=\frac{a}{4}$ (na obr. 3.2.4 červená) kotálí po vnitřní straně kružnice poloměru $R=a$.



Obr. 3.2.4. Asteroida

Parametrické rovnice asteroidy jsou

$x=a\cos^3 t\,,\quad y=a\sin^3 t\,,\quad t\in<0,2\pi>.$

Protože asteroida je symetrická podle obou souřadnicových os, stačí, určíme-li délku její jedné čtvrtiny v prvním kvadrantu, tj. pro $t\in<0,\frac{\pi}{2}>$. Tím se také vyhneme problémům se znaménky goniometrických funkcí sinus a kosinus v dalších kvadrantech. Vypočteme derivace parametrických rovnic a dosadíme do vztahu ve větě 3.2.2.

$x'=3a\cos^2 t(-\sin t)\,,$

$y'=3a\sin^2 t\cos t\,,$

$$\frac{s}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left[-3a\cos^2 t\sin t\right]^2+\left[3a\sin^2 t\cos t\right]^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)}dt=$$

$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=\frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=$$

$$= \frac{3a}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3a}{4}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{3a}{4}(-1-1) = \frac{3a}{2}.$$

Délka celé asteroidy je tedy $s = 4\frac{3a}{2} = 6a$.

Poznámky

1. Při integraci jsme použili známý vztah $\sin 2t = 2\sin t\cos t$.

2. Vztah pro výpočet délky křivky dané parametrickými rovnicemi lze snadno rozšířit i na prostorové křivky. Přibude pouze třetí souřadnice bodu křivky. Křivka bude mít parametrické rovnice

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \zeta(t)$, $t \in <\alpha, \beta>$.

Pro její délku bude (za předpokladu spojitých derivací $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\zeta'(t)$*) platit*

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\zeta'(t)]^2}\, dt.$$

Podrobnější informace naleznete v Matematice III v kapitole Křivkový integrál.

Příklad 3.2.4. Vypočtěte délku elipsy.

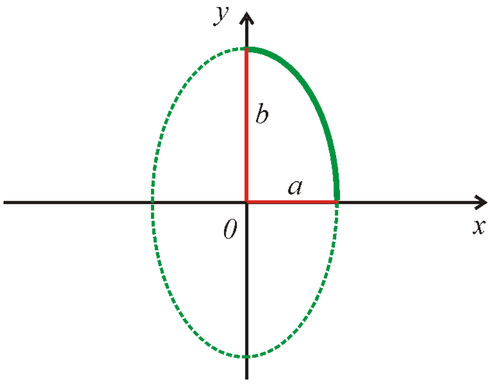
Řešení:

Vzorec pro výpočet obsahu elipsy jste si již odvodili v kapitole 3.1. (Kontrolní otázka.)

Elipsa s poloosami *a*, *b* (předpokládejme $0 < a < b$, obr. 3.2.5) má parametrické rovnice

$x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in <0, 2\pi>$,

pokud vedlejší poloosa leží v ose *x* a hlavní poloosa v ose *y*.



Obr. 3.2.5. Elipsa o poloosách *a*, *b*

Protože elipsa je symetrická podle obou souřadnicových os, stačí, určíme-li délku její jedné čtvrtiny v prvním kvadrantu, tj. pro $t \in < 0, \frac{\pi}{2} >$. Vypočteme derivace parametrických rovnic a dosadíme do vztahu ve větě 3.2.2.

$x' = -a \sin t$,

$y' = b \cos t$,

$$\frac{s}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[-a\sin t]^2 + [b\cos t]^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2(1-\sin^2 t)}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2)\sin^2 t}\,dt = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2}\sin^2 t}\,dt =$$

$$= b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\,dt\,,\ \text{kde jsme označili } \frac{b^2 - a^2}{b^2} = k^2\,.$$

Délka celé elipsy bude $s = 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\,dt$.

Problém spočívá v tom, že primitivní funkci nelze vyjádřit pomocí konečného počtu elementárních funkcí. Podívejte se na kapitolu 1.7. Pro konkrétní hodnoty *a* a *b* bude nutno použít vhodnou numerickou metodu některého matematického programu (např. Derive, Maple, Mathematica).

Poznámka

Integrál typu $E(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\,dt$ *je označován jako eliptický integrál druhého druhu, neboť je jím vyjádřena délka elipsy.*

Kontrolní otázky

1. Uveďte vztah pro výpočet délky křivky $y = f(x)$ pro $x \in < a, b >$.
2. Uveďte vztah pro výpočet délky křivky dané parametrickými rovnicemi.

3. Jaká je délka řetězovky $y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ pro $x\in<-1,1>$?
4. S řetězovkou se můžeme setkat v architektuře. Tvar této křivky mají samonosné klenby starých staveb stejně jako některé moderní stavby. Zadejte slovo „řetězovka“ do Vašeho vyhledávače (např. Google). Jak vypadá graf této křivky?
5. Jak vypočtete velikost dráhy, kterou urazí bod od $t=0$ do $t=3$ při pohybu po křivce dané parametrickými rovnicemi $x=5t^{2}$, $y=t^{3}$?
6. Sestavte integrál pro výpočet délky paraboly $y=x^{2}$, $-1\le x\le 1$. Navrhněte metodu řešení tohoto integrálu. (Využijte příkladů 2.4.6 a poznámky k příkladu 1.4.8).
7. Sestavte integrál pro výpočet délky kubické paraboly $y=x^{3}$, $0\le x\le 2$. Zkuste integrál řešit pomocí některého matematického programu (např. Derive, Maple, Mathematica).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte délku křivky

a) $y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2};\quad 0\le x\le 3$

b) $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^{2}};\quad -1\le x\le 1$

c) $y=\ln x\,;\quad \sqrt{3}\le x\le \sqrt{8}$

d) $y=1-\ln(\cos x)\,;\quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}$

e) $y^{2}=4x^{3};\quad 0\le x\le 2;\quad y>0$

f) $y=\ln(1-x^{2})\,;\quad 0\le x\le \dfrac{1}{2}$

g} $y=\dfrac{x^{2}}{4}-\dfrac{\ln x}{2};\quad 1\le x\le e$

2. Vypočtěte délku křivky

a) $x=2\cos t,\ y=2\sin t;\quad 0\le t\le \pi$

b) $x=2\cos^{3}t,\ y=2\sin^{3}t;\quad 0\le t\le 2\pi$

c) $x=t^{2},\ y=t-\dfrac{t^{3}}{3};\quad 0\le t\le \sqrt{3}$

d) $x=(3t-\sin t),\ y=3(1-\cos t)$; $0\le t\le 2\pi$

e) $x=\cos t+t\sin t,\ y=\sin t-t\cos t;$ $0\le t\le 2\pi$

f) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{1}{2}\left(e^3-\frac{1}{e^3}\right)$; **b)** 4; **c)** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; **d)** $\ln\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right)$; **e)** $\frac{2}{27}\left(\sqrt{19^3}-1\right)$; **f)** $2\ln 3-\frac{1}{2}$; **g)** $\frac{e^2-1}{4}$. **2. a)** 2π; **b)** 12; **c)** $2\sqrt{3}$; **d)** 24; **e)** $2\pi^2$; **f)** 48.

Kontrolní test

1. Vypočtěte délku oblouku křivky $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ pro $1\le x\le e$.

   a) $\frac{1}{4}(e^2-1)$, b) $\frac{1}{4}(e^2+1)$, c) $\frac{1}{2}(e^2+1)$, d) $\frac{1}{2}e^2+1$.

2. Vypočtěte délku oblouku křivky $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ pro $0\le x\le 1$.

   a) $2\sqrt{2}$, b) $2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$, c) $4-2\sqrt{2}$, d) $4+\sqrt{2}$.

3. Vypočtěte délku oblouku křivky $y=\frac{2+x^6}{8x^2}$ pro $1\le x\le 2$.

   a) $\frac{33}{16}$, b) $\frac{33}{8}$, c) 2, d) $\frac{27}{16}$.

4. Vypočtěte obvod křivočarého trojúhelníka, jehož strany tvoří oblouky křivek $x^2+y^2=6$ a $5x^3=y^2$.

   a) $\frac{134}{27}+\sqrt{6}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, b) $\frac{134}{27}+2\sqrt{6}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$,

   c) $\frac{134}{27}+2\sqrt{6}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, d) $\frac{67}{27}+2\sqrt{6}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

5. Vypočtěte délku oblouku křivky $y=\ln(1+e^x)-\ln(e^x-1)$ pro $\ln 2\le x\le\ln 5$.

   a) $4\ln 2+\ln 5$, b) $8\ln 2-2\ln 5$, c) $\ln\frac{5}{16}$, d) $\ln\frac{16}{5}$.

6. Vypočtěte délku oblouku křivky $y = 2\ln\dfrac{4}{4-x^2}$ pro $0 \le x \le 1$.

a) $\ln 9 - 1$, b) $1 + 2\ln 3$, c) $1 - 2\ln 3$, d) $1 + \ln 3$.

7) Vypočtěte délku smyčky křivky $x = t^2,\ y = t - \dfrac{1}{3}t^3$ pro $-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$.

a) $2\sqrt{3}$, b) $4\sqrt{3}$, c) $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$, d) $8\sqrt{3}$.

8) Vypočtěte délku jednoho oblouku prosté cykloidy $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$ konst., ($0 \le t \le 2\pi$).

a) $4a$, b) $6a$, c) $12a$, d) $8a$.

9) Vypočtěte délku oblouku křivky $x = \dfrac{1}{3}t^3,\ y = 4 - \dfrac{1}{2}t^2$ mezi průsečíky s osami souřadnic v 1. kvadrantu.

a) $\dfrac{26}{3}$, b) $\dfrac{39}{2}$, c) 9, d) $\dfrac{28}{3}$.

10) Vypočtěte délku oblouku křivky $x = \cos t + \ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2},\ y = \sin t$ pro $\dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

a) $\ln\dfrac{1}{2}$, b) 1, c) $\ln 2$, d) 2.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. a); 4. c); 5. d); 6. a); 7. b); 8. d); 9. a); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.2 znovu.

Shrnutí lekce

Další možností použití určitého integrálu je výpočet délky křivky. Z Pythagorovy věty odvodíme základní vztah pro výpočet délky křivky $s = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Jednoduchou úpravou dostaneme vzorec $s=\int\limits_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\, dx$ pro výpočet délky křivky zadané explicitní funkcí $y=f(x)$, $x\in<a,b>$ a vzorec $s=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}\, dt$ pro délku křivky, která je dána parametrickými rovnicemi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in<\alpha,\beta>$. Problém je v tom, že velmi často neumíme integrál, který obsahuje odmocninu, vypočítat pomocí elementárních funkcí. V těchto případech nezbývá než použít nějakou přibližnou metodu. Vztah pro výpočet délky křivky lze rozšířit i na křivky v prostoru. Podrobnosti naleznete v textu Matematika III, kapitola 4.6.2.

3.3. Objem rotačního tělesa

Cíle

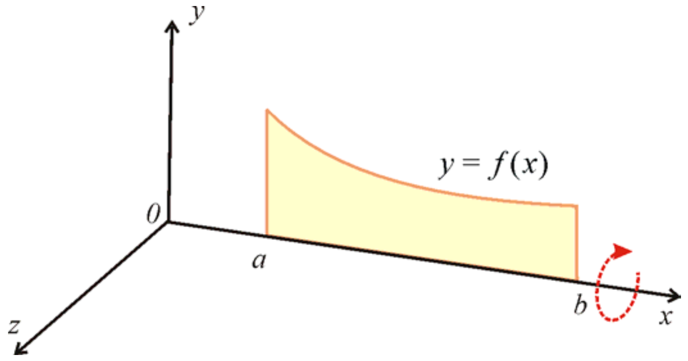
Seznámíte se s další aplikací určitého integrálu – výpočtem objemu rotačního tělesa.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že jste si prostudovali zavedení pojmu určitý integrál (kapitola 2.1). Dále předpokládáme, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu.

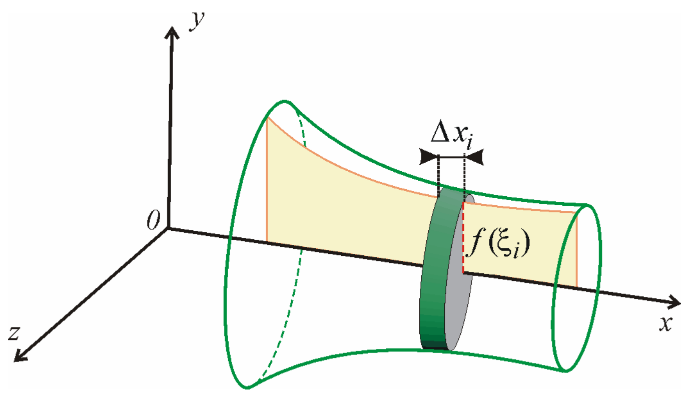
Výklad

Uvažujme křivočarý lichoběžník ohraničený shora grafem nezáporné funkce $f(x)$, přímkami $x=a$, $x=b$ a osou x. Rotací tohoto křivočarého lichoběžníka kolem osy x vznikne rotační těleso. Naším cílem bude vypočítat objem tohoto tělesa.



Obr. 3.3.1. Rotace křivočarého lichoběžníka

Budeme postupovat analogicky jako při zavedení Riemannova určitého integrálu (kap. 2.1). Řezy kolmými na osu x rozdělíme rotační těleso na n tenkých plátků tloušťky Δx (můžete si představit, že těleso krájíte na kráječi jako šunku).



Obr. 3.3.2. Rozřezání tělesa na tenké plátky

Každý plátek můžeme aproximovat válečkem, jehož podstavou je kruh o poloměru $f(\xi_i)$ s výškou Δx_i (obr. 3.3.2). Objem *i* - tého válečku bude $\Delta V_i = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$.

Objem celého tělesa bude přibližně roven součtu objemů jednotlivých plátků (válečků):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i .$$

Čím bude dělení intervalu $< a,b >$ jemnější, tím méně se bude součet objemů plátků $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$ lišit od objemu daného tělesa. Proto objem definujeme jako limitu tohoto součtu pro $n \to \infty$, když zároveň všechny délky $\Delta x_i \to 0$. Klademe

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

Věta 3.3.1.

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervalu $< a,b >$. Pak rotační těleso, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora funkcí $f(x)$, osou *x* a přímkami $x = a$, $x = b$ kolem osy *x*, má objem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

Graf nezáporné funkce $y = f(x)$ může být popsán parametrickými rovnicemi

$x = \varphi(t)$,

$y = \psi(t)$, $t \in < \alpha, \beta >$.

Je-li funkce $x = \varphi(t)$ ryze monotonní na intervalu $< \alpha, \beta >$, pak k ní existuje inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$. Rovnici křivky můžeme proto psát ve tvaru $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$. Uvažované rotační těleso bude mít objem $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_a^b \psi^2(\varphi^{-1}(x))dx$.

Odtud substitucí $x = \varphi(t)$, ze které plyne $dx = \varphi'(t)dt$, dostaneme

$$V = \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\left|\varphi'(t)\right|dt .$$

Věta 3.3.2.

Nechť funkce f je dána parametrickými rovnicemi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in<\alpha,\beta>$, přičemž funkce $\varphi(t)$ má spojitou derivaci na intervalu $<\alpha,\beta>$ a funkce $\psi(t)$ je spojitá a nezáporná na intervalu $<\alpha,\beta>$. Pak pro objem rotačního tělesa, které vznikne rotací elementární oblasti

$\varphi(\alpha)\le x\le\varphi(\beta)$,

$0\le y\le\psi(t)$,

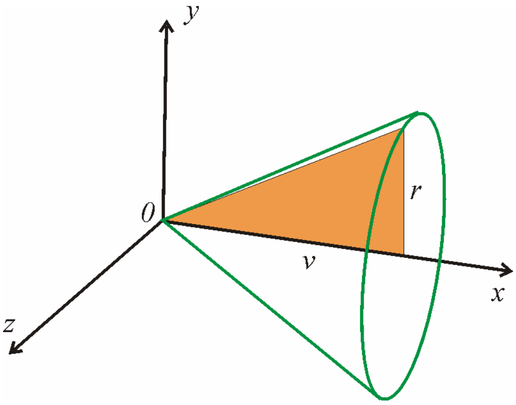
kolem osy x, platí $V=\int_{\alpha}^{\beta}\psi^2(t)\left|\varphi'(t)\right|dt$.

Řešené úlohy

Příklad 3.3.1. Ověřte vzorec pro výpočet objemu kuželu s poloměrem podstavy r a výškou v.

Řešení:

Vrchol kuželu umístíme do počátku souřadné soustavy tak, aby osa kužele splývala s osou x. Plášť kužele vznikne rotací přímky $y=\frac{r}{v}x$ kolem osy x pro $x\in<0,v>$ (obr. 3.3.3).



Obr. 3.3.3. Objem kužele

Dosazením do vztahu z věty 3.3.1 dostaneme

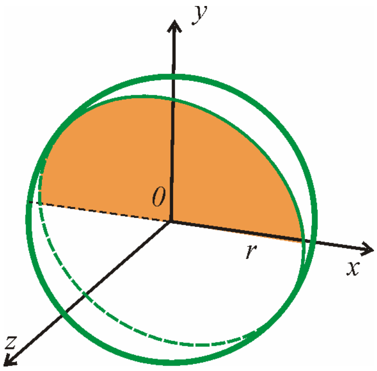
$$V=\pi\int_0^v\left(\frac{r}{v}x\right)^2dx=\pi\frac{r^2}{v^2}\int_0^v x^2dx=\pi\frac{r^2}{v^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v=\frac{1}{3}\pi r^2 v,$$

což je vztah, který znáte z geometrie.

Příklad 3.3.2. Odvoďte vztah pro výpočet objemu koule o poloměru $r > 0$.

Řešení:

Rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem r je $x^2 + y^2 = r^2$. Odtud $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, přičemž $x \in < -r, r >$. Rotací horní půlkružnice $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ dostaneme plášť koule.



Obr. 3.3.4. Objem koule

Pro její objem bude platit

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi \int_{0}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r =$$

$$= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

Poznámka

Při výpočtu jsme využili skutečnosti, že funkce $(r^2 - x^2)$ *je sudá. Podle věty 2.4.2 bude integrál s mezemi* $< -r, r >$ *roven dvojnásobku integrálu s mezemi* $< 0, r >$*. Je to logické, neboť objem celé koule se rovná dvojnásobku objemu polokoule.*

Pro výpočet objemu koule můžeme také využít parametrické rovnice horní půlkružnice:

$x = r\cos t$,

$y = r\sin t$, $\quad t \in < 0, \pi >$ (viz příklad 3.2.2).

Jelikož $\varphi'(t) = (r\cos t)' = -r\sin t$, dostaneme po dosazení do vztahu z věty 3.3.2

$$V = \pi \int_0^{\pi} r^2 \sin^2 t \, r \sin t \, dt = \pi r^3 \int_0^{\pi} \sin^3 t \, dt = \pi r^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) \sin t \, dt = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ \cos t = u \\ -\sin t \, dt = du \\ 0 \mapsto 1, \;\; \pi \mapsto -1 \end{array} \right| =$$

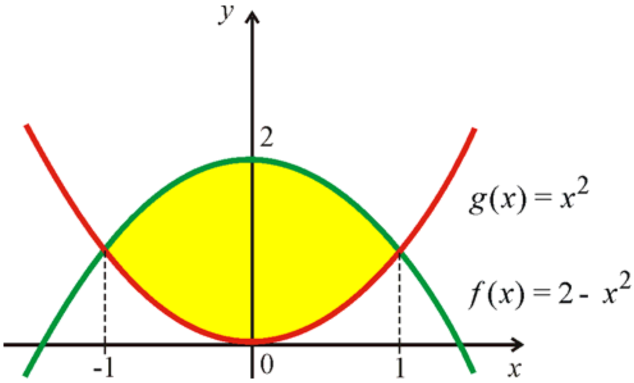
$$= \pi r^3 \int_1^{-1} (-1)(1-u^2)du = \pi r^3 2\int_0^1 (1-u^2)du = 2\pi r^3 \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

Příklad 3.3.3. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami

$y = x^2$ a $y = 2 - x^2$ kolem osy x.

Řešení:

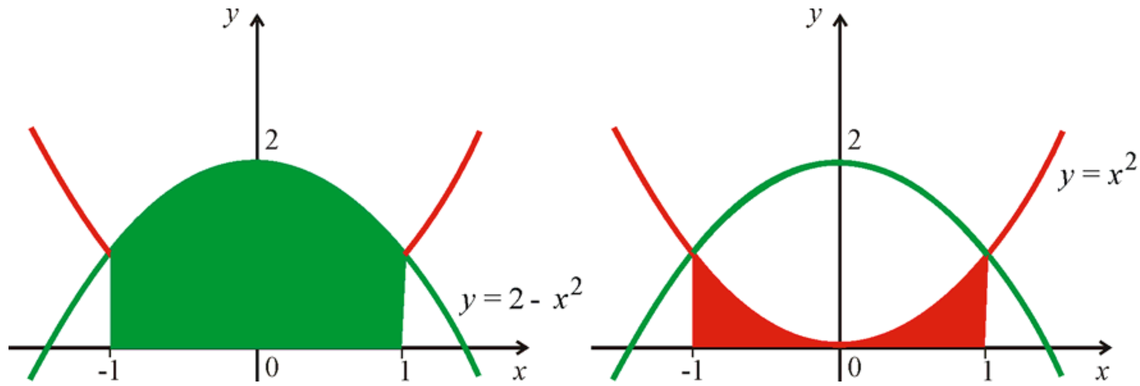
Oblast je ohraničená dvěma parabolami, viz. obr. 3.3.5.



Obr. 3.3.5. Oblast z příkladu 3.3.3

Křivky $f(x) = 2 - x^2$ a $g(x) = x^2$ se protínají v bodech $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$.

Hledaný objem dostaneme, když od objemu tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $f(x) = 2 - x^2$ kolem osy x pro $x \in < -1, 1 >$, odečteme objem tělesa, které vznikne rotací obrazce pod křivkou $g(x) = x^2$ na stejném intervalu (obr. 3.3.6).



$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left(2 - x^2\right)^2 dx - \pi \int_{-1}^{1} \left(x^2\right)^2 dx$$

Obr. 3.3.6. Odečtení objemů dvou těles

Pro objem rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $y = x^2$ a $y = 2 - x^2$ kolem osy x, dostaneme:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx-\pi\int_a^b g^2(x)dx=\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2)^2dx-\pi\int_{-1}^{1}(x^2)^2dx=\pi\int_{-1}^{1}\left[(2-x^2)^2-(x^2)^2\right]dx=$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\left[(4-4x^2+x^4)-x^4\right]dx=\pi\int_{-1}^{1}(4-4x^2)\,dx=4\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=8\pi\int_0^1(1-x^2)dx=$$

$$=8\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=8\pi\left[1-\frac{1}{3}\right]=\frac{16}{3}\pi\,.$$

Poznámka

Upozornění!

Pro výpočet objemu rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $g(x)\le f(x)$ kolem osy x pro $x\in\langle a,b\rangle$, použijeme vztah

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx-\pi\int_a^b g^2(x)dx=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx\,.$$

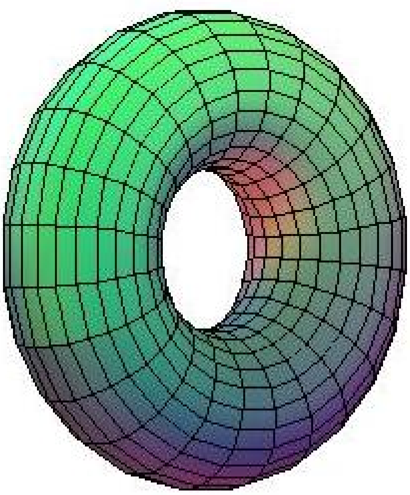
Často se setkáváme s chybou, kdy je umocněn rozdíl funkcí.

Vztah $V=\pi\int_a^b[f(x)-g(x)]^2dx$ *je evidentně nesprávný!*

Příklad 3.3.4. Vypočtěte objem rotačního anuloidu.

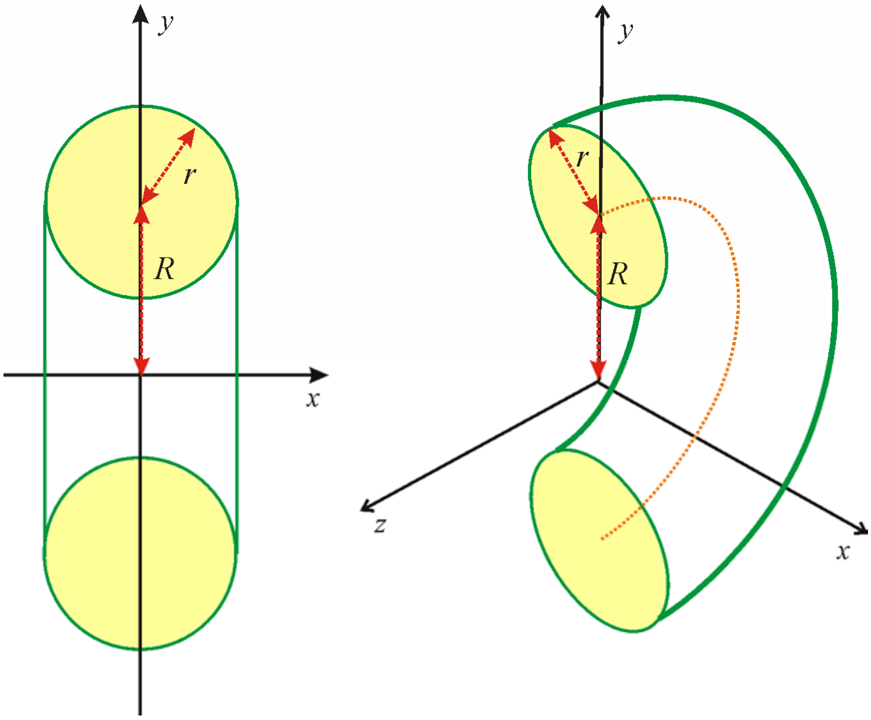
Řešení:

Anuloid (torus), viz obr. 3.3.7, je těleso vytvořené rotací kruhu kolem přímky ležící v rovině tohoto kruhu a neprotínající kruh.



Obr. 3.3.7. Anuloid

Střed kruhu o poloměru r umístíme na osu y do vzdálenosti R od počátku, kde $r < R$ (obr. 3.3.8). Tento kruh necháme rotovat kolem osy x.



Obr. 3.3.8. Vznik anuloidu rotací kruhu kolem osy x

Hranici rotujícího kruhu tvoří kružnice, která má rovnici

$x^2 + (y - R)^2 = r^2$. Odtud $y - R = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

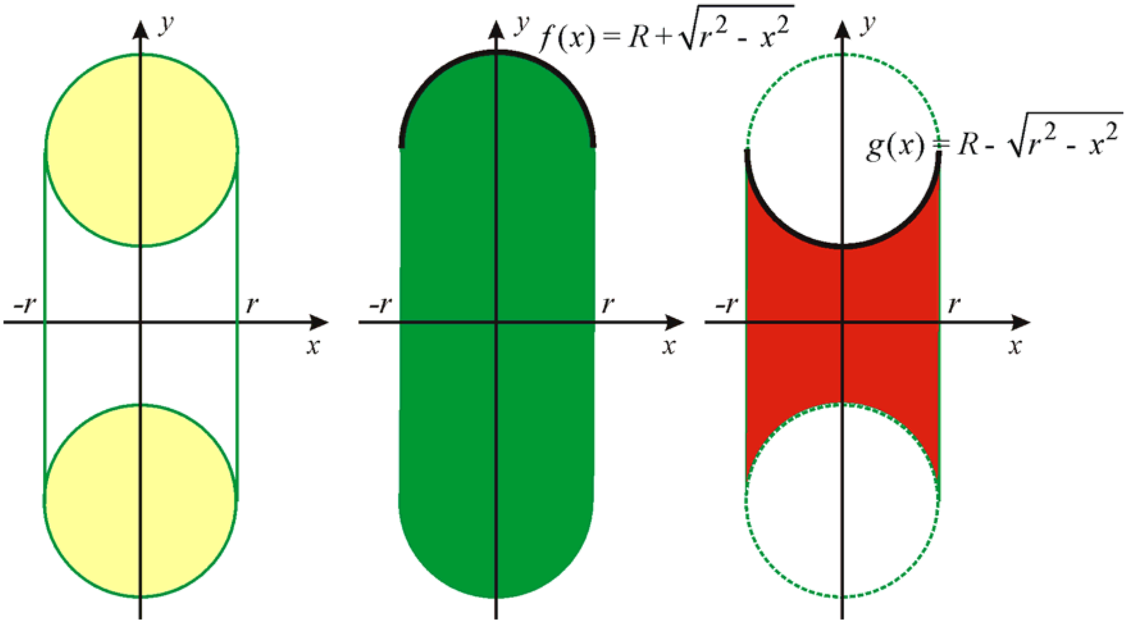
Podobně jako v předcházejícím příkladu je hranice rotující oblasti tvořena dvěma křivkami $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ a $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ pro $x \in < -r, r >$. Objem anuloidu dostaneme jako rozdíl objemů dvou těles (obr. 3.3.9):

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx == \pi \int_{-r}^{r} \left[\left(R + \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 \right] dx =$$

$$= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 8\pi R \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = r \sin u \\ dx = r \cos u\, du \\ 0 \mapsto 0,\ \mathrm{r} \mapsto \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 8\pi R \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 u}\ r \cos u\, du =$$

$$= 8\pi R r^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 u}\ \cos u\, du = 8\pi R r^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du = 8\pi R r^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2u}{2} du =$$

$$= 4\pi R r^2 \left[u + \frac{\sin 2u}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi R r^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 R r^2 .$$



$$V = \pi \int_{-r}^{r} f^2(x)\,dx - \pi \int_{-r}^{r} g^2(x)\,dx$$

Obr. 3.3.9. Výpočet objemu anuloidu

Poznámka

Při výpočtu integrálu byla použita substituční metoda. Podobné integrály jsme již několikrát počítali - viz příklady 1.4.7 nebo 2.4.5.

Příklad 3.3.5. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného osou x a jedním obloukem cykloidy kolem osy x.

Řešení:

S cykloidou jsme se podrobněji seznámili v příkladu 3.1.5. Cykloida (obr. 3.1.9) má parametrické rovnice:

$x = a(t - \sin t)$,

$y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $t \in \boldsymbol{R}$.

První oblouk cykloidy dostaneme pro parametr $t \in < 0, 2\pi >$.

Protože $dx = a(1 - \cos t)dt$, dostaneme z věty 3.3.2:

$$V = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2 a(1-\cos t)\, dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\, dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt =$$

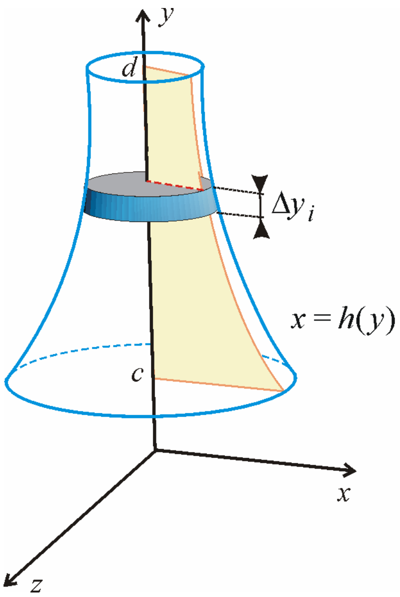
$$= \pi a^3 \left(\left[t - 3\sin t\right]_0^{2\pi} + 3\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt - \int_0^{2\pi} (1-\sin^2 t)\cos t\, dt \right) = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ \sin t = u \\ \cos t\, dt = du \\ 0 \mapsto 0,\ 2\pi \mapsto 0 \end{array} \right| =$$

$$= \pi a^3 \left(2\pi + \frac{3}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^0 (1-u^2)\, du \right) = \pi a^3 (2\pi + 3\pi - 0) = 5\pi^2 a^3 .$$

Výklad

V předcházející části byl plášť rotačního tělesa vytvořen rotací spojité křivky $y = f(x)$, kolem osy x.

Zcela analogicky můžeme určit objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikl rotací spojité křivky $x = h(y)$ pro $y \in < c, d >$ kolem osy y (obr. 3.3.10).



Obr. 3.3.10. Rotace křivočarého lichoběžníka kolem osy y

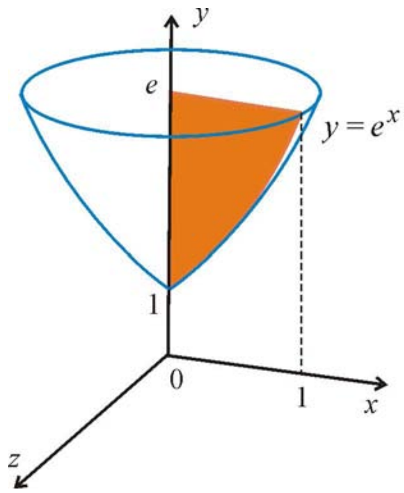
Objem vypočteme ze vztahu:

$$V = \pi \int_c^d h^2(y)\, dy .$$

Příklad 3.3.6. Vypočtěte objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = e^x$ pro $x \in <0,1>$ kolem osy y.

Řešení:

Funkce $y = e^x$ je prostá na definičním oboru a inverzní funkce k ní bude $x = \ln y$, $y > 0$. Pro $x \in <0,1>$ bude $y \in <1, e>$ (obr. 3.3.11).



Obr. 3.3.11. Rotace křivky $y = e^x$ kolem osy y

Objem rotačního tělesa bude:

$$V = \pi \int_1^e \ln^2 y \, dy = \left| \begin{matrix} u' = 1 & v = \ln^2 y \\ u = y & v' = (2 \ln y) \dfrac{1}{y} \end{matrix} \right| = \pi \left(\left[y \ln^2 y \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln y \, dy \right) =$$

$$= \pi \left([e - 0] - 2 \int_1^e \ln y \, dy \right) = \left| \begin{matrix} u' = 1 & v = \ln y \\ u = y & v' = \dfrac{1}{y} \end{matrix} \right| = \pi \left(e - 2 [y \ln y]_1^e + 2 \int_1^e 1 \, dy \right) =$$

$$= \pi \left(e - 2e + 2 [y]_1^e \right) = \pi (e - 2e + 2e - 2) = \pi (e - 2) .$$

Kontrolní otázky

1. Uveďte vztah pro výpočet objemu tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x.
2. Uveďte vztah pro výpočet objemu tělesa při rotaci kolem osy x, je-li rotující křivka dána parametrickými rovnicemi.

3. Jak bude vypadat vztah pro výpočet objemu tělesa, jestliže křivka daná parametrickými rovnicemi bude rotovat kolem osy y?
4. Jak vypočtete objem tělesa, jehož plášť vytvoří křivka $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, při rotaci kolem osy x? Jaký bude objem při rotaci kolem osy y?
5. Jak vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří křivka $y = \sqrt{1 + x^2}$, $0 \le x \le 1$, při rotaci kolem osy x. Jaké těleso vznikne?
6. Jak vypočtete objem rotačního elipsoidu, jehož plášť vytvoří elipsa $2x^2 + y^2 = 4$ při rotaci kolem osy x (kolem osy y)?

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného zadanými křivkami kolem osy x:

a) $y = x^2; \quad x = y^2$

b) $y = x^2; \quad x = y^3$

c) $y = x^2; \quad y = 1 - x^2$

d) $y = x; \quad y = \dfrac{1}{x}; \quad x = 2$

e) $y = 2 - 2x^2; \quad y = 1 - x^2$

f) $y = \operatorname{tg} x; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

g) $y = \arcsin x; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = 1$

h) $xy = 4; \quad y = 0; \quad x = 1; \quad x = 4$

i) $y = 2^x; \quad 3x - 4y + 5 = 0$

j) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x - 3}}; \quad y = 0; \quad |x| = 1$

k) $x^2 + y^2 = 4; \quad x + y = 2$

l) $y = \sin x; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = \pi$

2. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného zadanými křivkami kolem osy y:

a) $y = x^2; \quad x = y^2$

b) $y^2 + x - 4 = 0; \quad x = 0$

c) $y = \sin x; \quad y = \dfrac{1}{2}; \quad x = 0$

d) $y = e^{-x}; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = 1$

e) $y^2 = x^3; \quad y = 0; \quad x = 1$

f) $y = \dfrac{x^2}{2}; \quad y = \dfrac{|x|}{2}$

g) $4y = x^2; \quad 4x = y^2$

h) $y = \ln x; \quad y = 0; \quad y = 1; \quad x = 0$

3. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného osou x a danou, parametricky popsanou, křivkou při rotaci kolem osy x:

a) $x = t^2,\ y = t - \dfrac{t^3}{3};\quad 0 \le t \le \sqrt{3}$

b) $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t;\quad 0 \le t \le 2\pi$

c) $x = \sin^3 t,\ y = \cos^3 t;\quad 0 \le t \le \pi$

d) $x = 3\sin t,\ y = 3\cos t;\quad 0 \le t \le \pi$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\dfrac{3\pi}{10}$; **b)** $\dfrac{2\pi}{5}$; **c)** $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$; **d)** $\dfrac{11\pi}{6}$; **e)** $\dfrac{16\pi}{5}$; **f)** $\pi - \dfrac{\pi^2}{4}$; **g)** $\dfrac{\pi^3}{4} - 2\pi$; **h)** 12π; **i)** $\dfrac{\pi}{2}\left(7 - \dfrac{15}{4\ln 2}\right)$; **j)** $\pi(9 - 8\ln 2)$; **k)** $\dfrac{8\pi}{3}$; **l)** $\dfrac{\pi^2}{2}$. **2. a)** $\dfrac{3\pi}{10}$; **b)** $\dfrac{512\pi}{15}$; **c)** $\dfrac{\pi^3}{72} + \dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{6} - \pi$; **d)** $2\pi\left(1 - \dfrac{2}{e}\right)$; **e)** $\dfrac{4\pi}{7}$; **f)** $\dfrac{\pi}{12}$; **g)** $\dfrac{96\pi}{5}$; **h)** $\dfrac{\pi}{2}\left(e^2 + 1\right)$. **3. a)** $\dfrac{3\pi}{4}$; **b)** 5π; **c)** $\dfrac{32\pi}{105}$; **d)** 36π.

Kontrolní test

1. Vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk křivky $y = \operatorname{tg} x$ pro $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ rotací kolem osy x.

   a) $\pi(4-\pi)$, b) $\pi(1-\pi)/4$, c) $\pi(4-\pi)/4$, d) $\pi(1-\pi)$.

2. Vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk křivky $xy = 6$ pro $1 \le x \le 10$ otáčením kolem osy x.

   a) 36π, b) $32{,}4\pi$, c) $39{,}6\pi$, d) $5{,}4\pi$.

3. Vypočtěte objem tělesa, které vytvoří rovinný obrazec ohraničený osami x, y a obloukem křivky $y = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ otáčením kolem osy x.

   a) $\frac{5}{12}\pi^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$, b) $\frac{5}{12}\pi^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$, c) $\frac{5}{12}\pi^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$, d) $\frac{5}{12}\pi^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$.

4. Vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk řetězovky $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ pro $-2 \le x \le 2$.

   a) $\frac{\pi}{4}(e^4 + 8 + e^{-4})$, b) $\frac{\pi}{4}(e^4 + 8 - e^{-4})$,

   c) $\frac{\pi}{2}(e^4 - 8 + e^{-4})$, d) $\frac{\pi}{2}(e^4 + 8 - e^{-4})$.

5. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničené křivkami $y = 2(\frac{x}{5})^2$ a $y = 2\left|\frac{x}{5}\right|$ kolem osy x.

   a) $\frac{8}{3}\pi$, b) $\frac{8}{5}\pi$, c) $\frac{16}{5}\pi$, d) $\frac{16}{3}\pi$.

6. Vypočtěte objem úseče koule o poloměru r, je-li výška úseče $v < r$.

   a) $\pi v^2(r - \frac{1}{3}v)$, b) $\pi v^2(2r - \frac{1}{3}v)$,

   c) $\pi v^2(r - \frac{2}{3}v)$, d) $2\pi v^2(r - \frac{1}{3}v)$.

7. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti ohraničené křivkami $x^2 - y^2 = 1$ a $x^2 + 4y^2 = 16$ v polorovině $x \geq 0$ kolem osy x.

   a) $\frac{16}{3}\pi$, b) $\frac{20}{3}\pi$, c) $\frac{14}{3}\pi$, d) $\frac{10}{3}\pi$.

8. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti ohraničené křivkami $x^2 - y^2 = 1$ a $x^2 + 4y^2 = 16$ v polorovině $x \geq 0$ kolem osy y.

   a) $10\pi\sqrt{3}$, b) $24\pi\sqrt{3}$, c) $4\pi\sqrt{3}$, d) $20\pi\sqrt{3}$.

9. Vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk křivky $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$ pro $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ otáčením kolem osy x.

   a) $3\pi(\sqrt{2}+8)$, b) $3\pi(5\sqrt{2}+8)$ c) $3\pi(5\sqrt{2}-8)$, d) $3\pi(-5\sqrt{2}+8)$.

10. Vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk křivky $x = \cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $y = \sin t$ pro $\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ otáčením kolem osy x.

    a) $\frac{\pi}{3}$, b) $\frac{\pi}{6}$, c) $\frac{\pi}{2}$, d) $\frac{\pi}{4}$.

Výsledky testu

1\. c); 2. b); 3. a); 4. b); 5. d); 6. a); 7. c); 8. d); 9. d); 10. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.3 znovu.

Shrnutí lekce

Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka $0 \leq y \leq f(x)$ pro $a \leq x \leq b$ kolem osy x, vypočteme ze vztahu $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$. Analogicky pro objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka $0 \leq x \leq h(y)$ pro $c \leq y \leq d$

kolem osy y, užijeme vztah $V = \pi \int_{c}^{d} h^2(y)\, dy$. Jelikož se v integrandu vyskytuje druhá mocnina, nečiní obvykle výpočet příslušného integrálu větší problémy.

Objemy obecnějších těles, která nejsou rotační, lze vypočítat pomocí dvojných nebo trojných integrálů. Podrobnosti naleznete v textu Matematika III.

3.4. Obsah pláště rotačního tělesa

Cíle

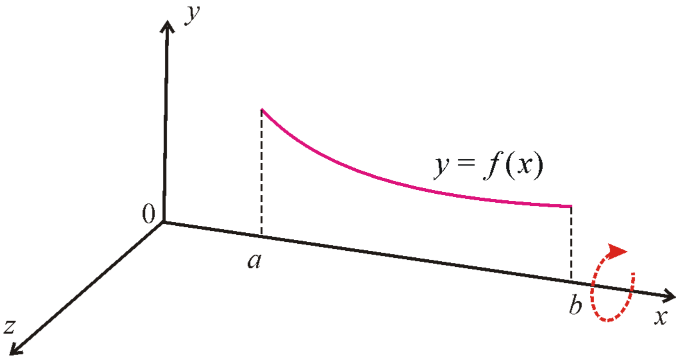
Seznámíte se s další aplikací určitého integrálu – výpočtem obsahu pláště rotačního tělesa.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že jste si prostudovali zavedení pojmu určitý integrál (kapitola 2.1). Dále předpokládáme, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu. Budeme také používat vztahy pro výpočet délky oblouku křivky (kapitola 3.2).

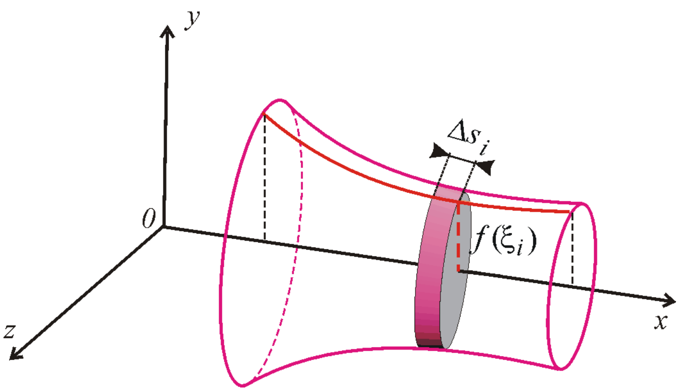
Výklad

Uvažujme nezápornou funkci $f(x)$ na intervalu $< a, b >$. Naším úkolem bude vypočítat obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu této funkce kolem osy x (obr.3.4.1).



Obr. 3.4.1. Rotace křivky kolem osy x

Budeme postupovat analogicky jako při výpočtu objemu rotačního tělesa (kap. 3.3). Řezy kolmými na osu x rozdělíme rotační těleso na n tenkých plátků. (Opět si můžete představit, že těleso krájíte na kráječi jako šunku. Tentokrát nás zajímá slupka jednotlivých plátků.)



Obr. 3.4.2. Rozřezání tělesa na tenké plátky

Každý plátek můžeme aproximovat komolým kuželem, jehož plášť vytvoří úsečka Δs_i rotující kolem osy x (obr. 3.4.2). Plášť i - tého komolého kuželu bude $\Delta S_i \approx 2\pi f(\xi_i)\Delta s_i$.

Obsah pláště celého tělesa bude přibližně roven součtu obsahů plášťů jednotlivých plátků (komolých kuželů):

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i)\Delta s_i \; .$$

Čím bude dělení intervalu $< a, b >$ jemnější, tím méně se bude součet obsahů plášťů plátků $\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$ lišit od obsahu pláště daného tělesa. Proto obsah pláště definujeme jako limitu tohoto součtu pro $n \to \infty$, když zároveň všechny délky $\Delta s_i \to 0$. Klademe

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\, ds \, .$$

Z kapitoly 3.2 víme, že pro element délky křivky platí

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + [\, f'(x)]^2}\, dx$. Dosazením za ds dostaneme:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [\, f'(x)]^2}\, dx \, .$$

Věta 3.4.1.

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervalu $< a, b >$ a má zde spojitou derivaci $f'(x)$. Pak pro obsah rotační plochy vzniklé rotací oblouku křivky $y = f(x)$ kolem osy x platí

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [\, f'(x)]^2}\, dx \, .$$

Poznámka

Vzorec z věty 3.4.1 můžeme zapsat ve tvaru

$S = 2\pi \int_a^b y\, ds = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$. *Tento vzorec můžeme snadno použít i v případě, že je uvažovaná křivka dána parametrickými rovnicemi.*

Je-li rotující křivka popsána parametrickými rovnicemi

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in < \alpha, \beta >$,

pak pro ds platí (věta 3.2.2) $ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$.

Pro výpočet obsahu plochy, která byla vytvořena rotací uvedené křivky kolem osy *x*, dostáváme:

$$S = 2\pi \int_a^b y\, ds = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt .$$

Věta 3.4.2.

Nechť je funkce *f* dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in < \alpha, \beta >$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $< \alpha, \beta >$ a funkce $\psi(t)$ je nezáporná na intervalu $< \alpha, \beta >$. Pak pro obsah plochy, která vznikne rotací grafu funkce f kolem osy *x* platí

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt .$$

Řešené úlohy

Příklad 3.4.1. Vypočtěte obsah pláště rotačního kužele, který je vytvořen úsečkou $y = x$ pro $x \in < 0,3 >$ rotující kolem osy *x*.

Řešení:

V příkladu 3.3.1 jsme již počítali objem kuželu (obr. 3.3.3).

Pro danou úsečku $y = x$ pro $x \in < 0,3 >$ dostáváme

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+1^2}\,dx = \sqrt{2}dx\,.$$

Obsah pláště rotačního kužele bude

$$S = 2\pi\int_0^3 y\,ds = 2\pi\int_0^3 x\sqrt{2}\,dx = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 9\pi\sqrt{2}\,.$$

Příklad 3.4.2. Odvoďte vztah pro výpočet povrchu koule o poloměru $r > 0$.

Řešení:

Rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem r je $x^2 + y^2 = r^2$. Odtud $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, přičemž $x \in < -r, r >$. Rotací horní půlkružnice $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ dostaneme plášť koule (viz obr. 3.3.4).

Před dalším výpočtem si upravíme výraz $1+(y')^2$.

$$y' = \frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,,$$

$$1+(y')^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}\,.$$

Pro povrch koule bude z věty 3.4.1 platit

$$S = 2\pi\int_{-r}^{r} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}dx = 2\pi r\int_{-r}^{r} dx = 2\pi r\,[x]_{-r}^{r} = 4\pi r^2\,.$$

Dostali jsme známý vztah pro povrch koule.

Poznámka

Musíme přiznat, že předcházející výpočet nebyl zcela korektní, protože derivace funkce $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ *není definována pro* $x = \pm r$. *Nejsou tedy splněny předpoklady věty 3.4.1.*

Mohli bychom to napravit tak, že bychom počítali integrál na intervalu $< -r+\varepsilon, r-\varepsilon >$, *kde* $\varepsilon > 0$ *je malé číslo (vlastně bychom z koule odřezali dva malé vrchlíky). Plášť koule bez vrchlíků by byl* $S = 4\pi r(r-\varepsilon)$. *Pro* $\varepsilon \to 0$ *dostaneme očekávaný výsledek.*

Pro výpočet povrchu koule můžeme také využít parametrické rovnice horní půlkružnice:

$x = r\cos t\,,$

$y = r\sin t\,,\quad t \in < 0, \pi >$ (viz příklad 3.2.2).

Po dosazení do vztahu z věty 3.4.2 dostaneme

$$S = 2\pi\int_0^{\pi} \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt = 2\pi\int_0^{\pi} r\sin t\sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2}\,dt =$$

$$= 2\pi r^2\int_0^{\pi} \sin t\sqrt{[\sin t]^2 + [\cos t]^2}\,dt = 2\pi r^2\int_0^{\pi} \sin t\ dt = 2\pi r^2\,[-\cos t]_0^{\pi} = 4\pi r^2 .$$

Příklad 3.4.3. Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotaci asteroidy kolem osy *x*.

Řešení:

Postup výpočtu bude analogický jako v příkladu 3.2.3. Vznik asteroidy je objasněn na obrázku 3.2.4.

Parametrické rovnice asteroidy jsou

$x = a\cos^3 t$,

$y = a\sin^3 t$, $a > 0$.

Vzhledem k symetrii asteroidy se můžeme omezit na $t \in < 0, \frac{\pi}{2} >$. Rotací dostaneme polovinu rotační plochy. Pro její obsah platí (srovnej s příkladem 3.2.3):

$$\frac{S}{2} = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{\left[-3a\cos^2 t\sin t\right]^2 + \left[3a\sin^2 t\cos t\right]^2}\,dt = 2\pi a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t(3a\sin t\cos t)\ dt =$$

$$= 6\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t\ dt = 6\pi a^2\left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6\pi a^2}{5} .$$

Obsah celé rotační plochy bude dvojnásobný:

$$S = 2\frac{6\pi a^2}{5} = \frac{12\pi a^2}{5} .$$

Příklad 3.4.4. Vypočtěte povrch rotačního anuloidu.

Řešení:

S anuloidem jsme se podrobně seznámili v příkladu 3.3.4. Podívejte se na obrázky 3.3.7 a 3.3.8. Povrch anuloidu je složený ze dvou ploch.

První vznikne rotací křivky $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ (obr. 3.3.9), druhá plocha vznikne rotací křivky $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ pro $x \in < -r, r >$ kolem osy *x*.

Je zřejmé, že $f'(x) = -g'(x)$ a proto $1 + [f'(x)]^2 = 1 + [g'(x)]^2$.

Povrch anuloidu bude

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx + 2\pi \int_{-r}^{r} g(x)\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} [f(x) + g(x)]\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = 2\pi \int_{-r}^{r} 2R\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx =$$

$$= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = 4\pi R \pi r = 4\pi^2 rR .$$

Využili jsme toho, že $\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \pi r$, neboť hodnota integrálu je rovna délce poloviny kružnice o poloměru *r*.

Kontrolní otázky

1. Uveďte vztah pro výpočet obsahu rotační plochy, která vznikne rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy *x*.
2. Uveďte vztah pro výpočet obsahu rotační plochy, je-li rotující křivka dána parametrickými rovnicemi a rotuje kolem osy *x*.
3. Jak bude vypadat vztah pro výpočet obsahu rotační plochy, jestliže křivka daná parametrickými rovnicemi bude rotovat kolem osy *y*?
4. Odvoďte vztah pro výpočet obsahu pláště rotačního kužele s poloměrem podstavy *r* a výškou *v*. (Viz příklad 3.3.1.)
5. Jak vypočtete obsah pláště rotačního komolého kužele, který vznikne rotací křivky $y = kx$, $0 < a \le x \le b$ kolem osy *x*?
6. Jak vypočtete obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky dané parametrickými rovnicemi $x = 2t + 1$, $y = 4 - t$ pro $t \in < 0, 4 >$ kolem osy *x*? Jaké těleso vznikne?

7. Sestavte integrál pro výpočet obsahu rotační plochy, která vznikne rotací paraboly $y = x^2$ pro $0 \le x \le 2$ kolem osy x (kolem osy y). Zkuste integrál řešit pomocí některého matematického programu (např. Derive, Maple, Mathematica).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací dané křivky kolem osy x:

a) $y = x^3; \quad -\frac{2}{3} \le x \le \frac{2}{3}$

b) $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}; \quad 0 \le x \le 2$

c) $y^2 = 4x; \quad 0 \le x \le 3$

d) $y = \operatorname{tg} x; \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

e) $y = 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right); \quad 0 \le x \le 4$

f) $y = \sin x; \quad 0 \le x \le \pi$

2. Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací dané křivky kolem osy x:

a) $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t; \quad 0 \le t \le \pi$

b) $x = 3\cos^3 t,\ y = 3\sin^3 t; \quad 0 \le t \le \pi$

c) $x = 4(t - \sin t),\ y = 4(1 - \cos t); \quad 0 \le t \le 2\pi$

d) $x = \sin 2t,\ y = 2\sin^2 t; \quad 0 \le t \le \pi$

e) $x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t; \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

f) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 9$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\dfrac{196\pi}{729}$; **b)** $\pi\left(4+e^2-\dfrac{1}{e^2}\right)$; **c)** $\dfrac{56\pi}{3}$; **d)** $\dfrac{\pi}{2}\left[\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$;

e) $4\pi\left(4+e^2-\dfrac{1}{e^2}\right)$; **f)** $2\pi\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)$. **2. a)** 16π; **b)** $\dfrac{108\pi}{5}$; **c)** $\dfrac{512\pi}{3}$; **d)** $4\pi^2$;

e) $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{5}\left(e^{\pi}-2\right)$; **f)** $\dfrac{8748\pi}{5}$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte povrch vrchlíku kulové plochy o poloměru r, jehož výška je $v < r$.

   a) $2\pi rv$, b) $2\pi r(2r+v)$,

   c) πrv, d) $2\pi r(r+v)$.

2. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk paraboly $y=2\sqrt{x}$ pro $3\le x\le 8$ při otáčení kolem osy x.

   a) $\dfrac{76}{3}\pi$, b) 36π, c) $\dfrac{152}{3}\pi$, d) 152π.

3. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk křivky $y=(1-x)\sqrt{\dfrac{x}{3}}$ pro $\dfrac{1}{2}\le x\le 1$ při otáčení kolem osy x.

   a) $\dfrac{13}{24}\pi$, b) $\dfrac{\pi}{3}$, c) $\dfrac{\pi}{24}$, d) $\dfrac{\pi}{8}$.

4. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk řetězovky $y=\dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$, $a>0$ konst. pro $0\le x\le a$ rotací kolem osy x.

   a) $\dfrac{\pi a^2}{4}(e^2+e^{-2}+4)$, b) $\pi a^2(1+e^2-e^{-2})$,

   c) $\dfrac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)$, d) $\dfrac{\pi a^2}{4}(4-e^2+e^{-2})$.

5. Vypočtěte povrch tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti dané nerovnostmi $y \geq 0$,

$x^2 + y^2 \leq r^2, \quad x + y \leq r, \quad x \geq -\dfrac{r}{2}$, $r > 0$ konst. kolem osy x.

a) $\pi r^2 (1+\sqrt{2})$, b) $\pi r^2 (\frac{7}{4}+\sqrt{2})$, c) $\pi r^2 (\frac{5}{4}+\sqrt{2})$, d) $\pi r^2 (\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2})$.

6. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk paraboly $y = 4 - x^2$ pro $-2 \leq x \leq 2$ při otáčení kolem osy y.

a) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}+1)$, b) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$, c) $\frac{\pi}{3}(17\sqrt{17}-1)$, d) $\frac{\pi}{3}(17\sqrt{17}+1)$.

7. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk křivky $x = t^2,\ y = \dfrac{t^3}{3} - t$

pro $-\sqrt{3} \leq t \leq 0$ rotací kolem osy x.

a) 3π, b) 9π, c) 6π, d) 12π.

8. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk křivky $x = \sin 2t,\ y = 2\sin^2 t$ pro $0 \leq t \leq \pi$.

a) $8\pi^2$, b) $16\pi^2$, c) $12\pi^2$, d) $4\pi^2$.

9. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk křivky traktrix

$x = 2\cos t + 2\ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2},\ \ y = 2\sin t$ pro $\dfrac{\pi}{6} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ při otáčení kolem osy x.

a) 4π, b) 8π, c) $8\pi(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$, d) 2π.

10. Vypočtěte povrch tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk křivky $x = 4\cos t + 4,\ \ y = 4\sin t$ pro $0 \leq t \leq \dfrac{2}{3}\pi$ otáčením kolem osy x.

a) 48π, b) 36π, c) 60π, d) 54π.

Výsledky testu

1. a); 2. c); 3. d); 4. c); 5. b); 6. b); 7. a); 8. d); 9. a); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.4 znovu.

Shrnutí lekce

Obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky $y = f(x)$ pro $a \le x \le b$ kolem osy x, vypočteme podle vztahu $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$. Je-li křivka rotující kolem osy x popsána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ pro $t \in <\alpha, \beta>$, užijeme pro výpočet obsahu rotační plochy vztah $S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$. Stejně jako u integrálů pro výpočet délky křivky se nám stane, že neumíme integrál, který obsahuje odmocninu, vyjádřit pomocí elementárních funkcí. V těchto případech nezbývá než použít nějakou přibližnou metodu.

Obsahy obecnějších ploch, které nejsou rotační, lze vypočítat pomocí dvojných integrálů. Podrobnosti naleznete v textu Matematika III.

3.5. Fyzikální aplikace

Cíle

Seznámíte se s použitím určitého integrálu při výpočtu hmotnosti, statických momentů, souřadnic těžiště a momentů setrvačnosti.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že jste si prostudovali zavedení pojmu určitý integrál (kapitola 2.1). Dále předpokládáme, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu.

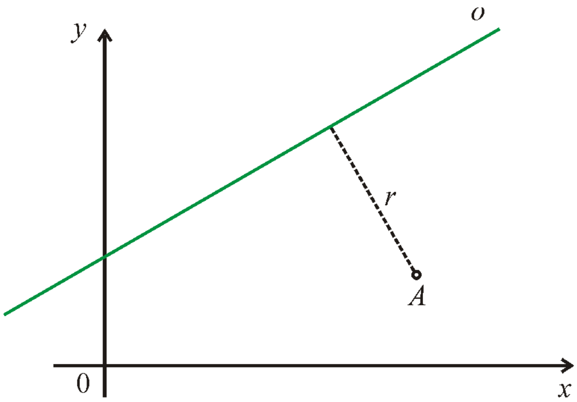
Výklad

Jak již bylo uvedeno v úvodu 3. kapitoly, existuje nepřeberné množství problémů, při jejichž řešení je používán integrální počet. V průběhu studia se seznámíte s použitím integrálů ve fyzice a v dalších odborných předmětech. V této kapitole se omezíme pouze na jednoduché aplikace v mechanice. Půjde o výpočet statických momentů, souřadnic těžiště a momentů setrvačnosti hmotných křivek a rovinných oblastí.

V obecném případě, kdy veličiny závisí na dvou nebo třech proměnných se k výpočtu používají dvojné nebo trojné integrály. Podrobnosti naleznete v textu Matematika III.

Těžiště a moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů

Připomeňme si, jak je v mechanice definován statický moment a moment setrvačnosti. Uvažujme v rovině jeden hmotný bod $A = (x, y)$ s hmotností m.



Obr. 3.5.1. Hmotný bod A v rovině

Statický moment hmotného bodu k libovolné ose o je dán vztahem

$$S_o = rm$$

a moment setrvačnosti uvedeného bodu při jeho rotaci kolem osy o je

$I_o = r^2 m$,

kde r je vzdálenost bodu od osy o (obr. 3.5.1). Pokud je uvažovanou osou osa x, je $r = y$ a pro osu y je $r = x$.

Mějme v rovině soustavu hmotných bodů $A_i = (x_i, y_i)$ s hmotnostmi m_i, $i = 1,\ldots,n$.

Celková hmotnost soustavy bude $\quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i$,

statický moment k ose x bude $\quad S_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i$,

statický moment k ose y bude $\quad S_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$

a momenty setrvačnosti budou $\quad I_x = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 m_i$, $I_y = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i$.

Těžiště $T = (\xi, \eta)$ je bod s touto vlastností: Kdyby do něj byla soustředěna všechna hmota soustavy, pak by tento bod měl stejné statické momenty k souřadnicovým osám, jako daná soustava hmotných bodů. Tedy pro těžiště platí

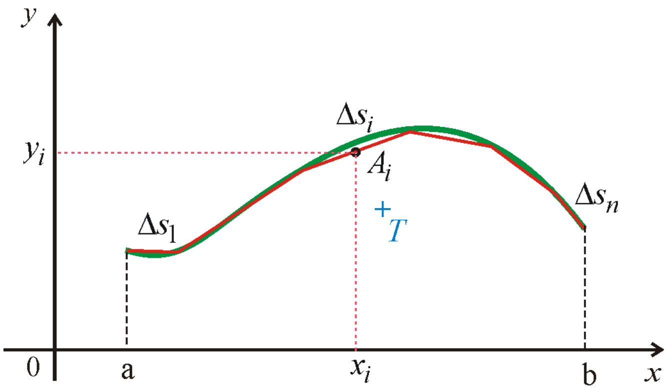
$\xi m = S_y$ a $\eta m = S_x$.

Odtud dostáváme pro souřadnice těžiště vztahy $\xi = \dfrac{S_y}{m}$, $\eta = \dfrac{S_x}{m}$.

Při výpočtu souřadnic těžiště hmotné křivky nebo rovinné oblasti budeme postupovat jako při zavedení určitého integrálu. Křivku (oblast) rozdělíme na malé elementy. Statické momenty (hmotnost) dostaneme jako součet statických momentů (hmotností) těchto elementů. Limitním přechodem pro $n \to \infty$ přejdou sumy na integrály.

Těžiště a moment setrvačnosti rovinné křivky

Křivku v rovině si můžeme představit jako kus drátu z materiálu, který má konstantní délkovou hustotu σ. Chceme nalézt souřadnice těžiště této křivky (obr. 3.5.2).



Obr. 3.5.2. Těžiště rovinné křivky

Předpokládejme, že je křivka dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in < \alpha, \beta >$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $< \alpha, \beta >$.

Její délka (věta 3.2.2) je $s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$.

Hmotnost křivky dostaneme jako součin délky a hustoty:

$$m = \sigma s = \sigma \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt .$$

Křivku můžeme aproximovat lomenou čárou složenou z úseček Δs_i, $i = 1, 2, ..., n$. Úsečky budou mít hmotnosti $m_i = \sigma \Delta s_i$, $i = 1, 2, ..., n$. V případě malých elementů si můžeme představit, že hmotnost je soustředěna do jednoho bodu $A_i = (x_i, y_i)$, který leží na dané úsečce Δs_i, $i = 1, 2, ..., n$. Statické momenty této lomené čáry budou

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i = \sigma \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta s_i ,$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i = \sigma \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta s_i .$$

Je zřejmé, že pro zvětšující se počet úseček budeme dostávat přesnější aproximace statických momentů. Pro $n \to \infty$ dostaneme (analogicky jako v kap. 3.2.)

$$S_x = \sigma \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt ,$$

$$S_y = \sigma \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt .$$

Podobně odvodíme vztahy pro momenty setrvačnosti při rotaci kolem osy *x*, resp. *y*.

Věta 3.5.1.

Nechť je křivka dána parametrickými rovnicemi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in<\alpha,\beta>$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $<\alpha,\beta>$. Je-li délková hustota σ křivky konstantní, pak má křivka hmotnost

$$m=\sigma\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ dt .$$

Pro statické momenty platí:

$$S_x=\sigma\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ dt ,$$

$$S_y=\sigma\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ dt .$$

Momenty setrvačnosti této křivky dostaneme ze vztahů:

$$I_x=\sigma\int_{\alpha}^{\beta}\psi^2(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ dt ,$$

$$I_y=\sigma\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ dt .$$

Těžiště $T=(\xi,\eta)$ má souřadnice $\xi=\dfrac{S_y}{m}$, $\eta=\dfrac{S_x}{m}$.

Je-li speciálně křivka grafem funkce $y=f(x)$ s konstantní délkovou hustotou, pak je $ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx$ (věta 3.2.1). Dostáváme následující modifikaci věty 3.5.1.

Věta 3.5.2.

Nechť je hmotná křivka určená explicitní rovnicí $y=f(x)$ se spojitou derivací $f'(x)$ na intervalu $<a,b>$ a konstantní délkovou hustotou σ. Pak má křivka hmotnost

$$m=\sigma\int_{a}^{b}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx .$$

Pro statické momenty platí:

$$S_x = \sigma \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx ,$$

$$S_y = \sigma \int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx .$$

Momenty setrvačnosti této křivky dostaneme ze vztahů:

$$I_x = \sigma \int_a^b f^2(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx ,$$

$$I_y = \sigma \int_a^b x^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx .$$

Těžiště $T = (\xi, \eta)$ má souřadnice $\xi = \dfrac{S_y}{m}$, $\eta = \dfrac{S_x}{m}$.

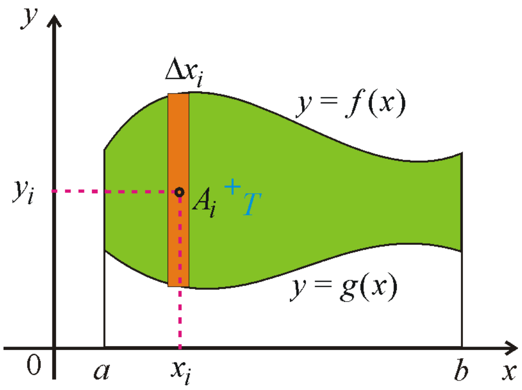
Těžiště a moment setrvačnosti rovinné oblasti

Uvažujme hmotnou rovinnou oblast ohraničenou zdola grafem funkce $g(x)$, shora grafem funkce $f(x)$, ($g(x) \le f(x)$) pro $x \in < a, b >$. Předpokládejme, že je plošná hustota σ v každém bodě tohoto obrazce konstantní.

Hmotnost rovinné oblasti dostaneme jako součin obsahu plochy oblasti (věta 3.1.2) a hustoty:

$$m = \sigma \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

Analogicky jako při zavedení určitého integrálu (kapitola 2.1) rozdělíme obrazec rovnoběžkami s osou y na n „proužků“ (obr. 3.5.3). Každý proužek můžeme aproximovat úzkým obdélníčkem šířky Δx_i, $i = 1, 2, ..., n$, který je zdola ohraničený funkční hodnotou $g(x_i)$ a shora funkční hodnotou $f(x_i)$. Tento obdélníček nahradíme těžištěm $A_i = (x_i, y_i)$ ležícím ve středu obdélníčku. Pro obdélníček bude $y_i = \dfrac{f(x_i) + g(x_i)}{2}$. Do tohoto bodu soustředíme hmotnost celého obdélníčku.



Obr. 3.5.3. Těžiště rovinné oblasti

Hmotnost i - tého obdélníčku bude

$$m_i = \sigma\left[f(x_i) - g(x_i)\right]\Delta x_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Statické momenty celé oblasti budou přibližně rovny

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i = \sigma \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}\left[f(x_i) - g(x_i)\right]\Delta x_i = \sigma \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n}\left[f^2(x_i) - g^2(x_i)\right]\Delta x_i,$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i = \sigma \sum_{i=1}^{n} x_i\left[f(x_i) - g(x_i)\right]\Delta x_i.$$

Je zřejmé, že pro zvětšující se počet obdélníčků budeme dostávat přesnější aproximace statických momentů. Pro $n \to \infty$ a $\Delta x_i \to 0$ dostaneme limitním přechodem

$$S_x = \sigma \frac{1}{2} \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx,$$

$$S_y = \sigma \int_a^b x\left[f(x) - g(x)\right] dx.$$

Podobně odvodíme vztahy pro momenty setrvačnosti při rotaci kolem osy x, resp. y.

Věta 3.5.3.

Nechť je hmotná rovinná oblast ohraničena křivkami $g(x)$ a $f(x)$, kde $g(x) \le f(x)$ na intervalu $< a, b >$. Pak hmotnost této oblasti s konstantní plošnou hustotou σ je

$$m = \sigma \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]\, dx.$$

Pro statické momenty platí:

$$S_x = \sigma \frac{1}{2} \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx ,$$

$$S_y = \sigma \int_a^b x \left[f(x) - g(x) \right] dx .$$

Momenty setrvačnosti této rovinné oblasti dostaneme ze vztahů:

$$I_x = \sigma \frac{1}{3} \int_a^b \left[f^3(x) - g^3(x) \right] dx ,$$

$$I_y = \sigma \int_a^b x^2 \left[f(x) - g(x) \right] dx .$$

Těžiště $T = (\xi, \eta)$ má souřadnice $\xi = \dfrac{S_y}{m}$, $\eta = \dfrac{S_x}{m}$.

Řešené úlohy

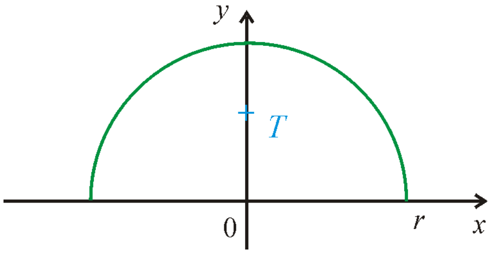
Příklad 3.5.1. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní půlkružnice $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$.

Řešení:

Parametrické rovnice půlkružnice jsou (viz příklad 3.2.2):

$x = r \cos t$,

$y = r \sin t$, $t \in < 0, \pi >$.



Obr. 3.5.4. Souřadnice těžiště homogenní půlkružnice

Je-li délková hustota σ konstantní, je hmotnost rovna součinu hustoty a délky půlkružnice:

$$m = \sigma s = \sigma \frac{1}{2} 2\pi r = \sigma \pi r .$$

Statické momenty jsou:

$$S_x = \sigma \int_0^{\pi} \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\ dt = \sigma \int_0^{\pi} r\sin t \sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2}\ dt = \sigma r^2 \int_0^{\pi} \sin t\, dt =$$

$$= \sigma r^2 [-\cos t]_0^{\pi} = \sigma 2r^2,$$

$$S_y = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\ dt = \sigma \int_0^{\pi} r\cos t \sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2}\ dt = \sigma r^2 \int_0^{\pi} \cos t\, dt =$$

$$= \sigma r^2 [\sin t]_0^{\pi} = 0.$$

Těžiště $T = (\xi, \eta)$ má souřadnice

$$\xi = \frac{S_y}{m} = 0 \text{ a } \eta = \frac{S_x}{m} = \frac{\sigma 2r^2}{\sigma \pi r} = \frac{2r}{\pi}.$$

$$T = (0, \frac{2r}{\pi}).$$

Poznámka

Statický moment S_y jsme nemuseli počítat, protože je evidentní, že pro danou půlkružnici musí těžiště ležet na ose y, a tedy je $S_y = 0$.

Příklad 3.5.2. Vypočtěte momenty setrvačnosti homogenní půlkružnice z příkladu 3.5.2 k souřadnicovým osám.

Řešení:

Moment setrvačnosti půlkružnice k ose *x*:

$$I_x = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\ dt = \sigma \int_0^{\pi} r^2 \sin^2 t \sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2}\ dt =$$

$$= \sigma r^3 \int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt = \sigma r^3 \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{\sigma r^3}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\sigma \pi r^3}{2}.$$

Moment setrvačnosti půlkružnice k ose *y*:

$$I_y = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\ dt = \sigma \int_0^{\pi} r^2 \cos^2 t \sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2}\ dt =$$

$$= \sigma r^3 \int_0^{\pi} \cos^2 t\, dt = \sigma r^3 \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\sigma r^3}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\sigma \pi r^3}{2}.$$

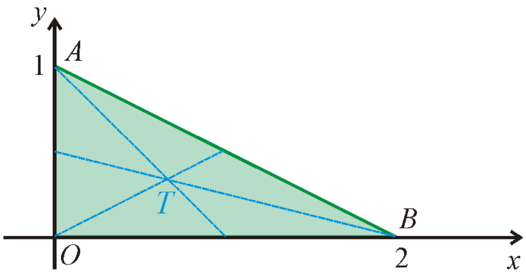
Příklad 3.5.3. Vypočtěte souřadnice těžiště trojúhelníka s vrcholy $O=(0,0)$, $A=(0,1)$ a $B=(2,0)$.

Řešení:

Strana AB daného trojúhelníka leží na přímce

$y-1=\frac{0-1}{2-0}(x-0)$, tj. $y=1-\frac{x}{2}$.

Rovinná oblast je ohraničena shora grafem funkce $f(x)=1-\frac{x}{2}$ a zdola grafem funkce $g(x)=0$ obr. 3.5.5.



Obr. 3.5.5. Těžiště trojúhelníka

Je-li plošná hustota σ konstantní, je hmotnost rovna součinu hustoty a obsahu trojúhelníka:

$$m=\sigma P=\sigma\frac{1}{2}2\cdot 1=\sigma .$$

Statické momenty jsou (připomínáme, že $g(x)=0$):

$$S_x=\sigma\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx=\sigma\frac{1}{2}\int_0^2(1-\frac{x}{2})^2\,dx=\sigma\frac{1}{2}\int_0^2(1-x+\frac{x^2}{4})\,dx=$$

$$=\sigma\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}\right]_0^2=\sigma\frac{1}{2}(2-2+\frac{2}{3})=\sigma\frac{1}{3}.$$

$$S_y=\sigma\int_a^b x\,f(x)\,dx=\sigma\int_0^2 x(1-\frac{x}{2})\,dx=\sigma\int_0^2(x-\frac{x^2}{2})\,dx=\sigma\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_0^2=$$

$$=\sigma\left[2-\frac{4}{3}\right]=\sigma\frac{2}{3}.$$

Těžiště $T=(\xi,\eta)$ má souřadnice

$$\xi=\frac{S_y}{m}=\frac{\sigma\frac{2}{3}}{\sigma}=\frac{2}{3} \text{ a } \eta=\frac{S_x}{m}=\frac{\sigma\frac{1}{3}}{\sigma}=\frac{1}{3}.$$

$T = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Poznámka

Těžiště trojúhelníka leží v průsečíku těžnic (spojnic vrcholů a středů stran). Těžiště rozděluje těžnici v poměru 1:2. Z podobných trojúhelníků je zřejmé, že x – ová souřadnice těžiště musí ležet v $\frac{1}{3}$ *strany OB a y – ová souřadnice těžiště musí ležet v* $\frac{1}{3}$ *strany OA. Proto* $\xi = \frac{1}{3}2 = \frac{2}{3}$ *a* $\eta = \frac{1}{3}1 = \frac{1}{3}$.

Příklad 3.5.4. Vypočtěte momenty setrvačnosti homogenního trojúhelníka z příkladu 3.5.3 při rotaci kolem osy x, resp. y.

Řešení:

Moment setrvačnosti trojúhelníka k ose x:

$$I_x = \sigma\frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)\,dx = \sigma\frac{1}{3}\int_0^2 (1-\frac{x}{2})^3\,dx = \sigma\frac{1}{3}\int_0^2 (1-3\frac{x}{2}+3\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8})\,dx =$$

$$= \sigma\frac{1}{3}\left[x-3\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}-\frac{x^4}{32}\right]_0^2 = \sigma\frac{1}{3}(2-3+2-\frac{1}{2}) = \sigma\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \sigma\frac{1}{6}.$$

Moment setrvačnosti trojúhelníka k ose y:

$$I_y = \sigma\int_a^b x^2 f(x)\,dx = \sigma\int_0^2 x^2\,(1-\frac{x}{2})\,dx = \sigma\int_0^2 (x^2-\frac{x^3}{2})\,dx = \sigma\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}\right]_0^2 =$$

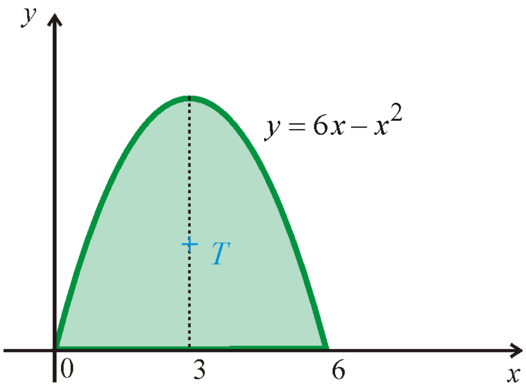
$$= \sigma\left[\frac{8}{3}-2\right] = \sigma\frac{2}{3}.$$

Příklad 3.5.5. Vypočtěte souřadnice těžiště rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = 6x - x^2$ a osou x.

Řešení:

Grafem paraboly $y = 6x - x^2$ jsme se podrobně zabývali v příkladu 3.1.1. Parabola protíná osu x v bodech $x = 0$ a $x = 6$.

Rovinná oblast je ohraničena shora křivkou $f(x) = 6x - x^2$ a zdola křivkou $g(x) = 0$ obr. 3.5.6.



Obr. 3.5.6. Těžiště rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = 6x - x^2$ a osou x

Je-li plošná hustota σ konstantní, je hmotnost rovna součinu hustoty a plochy oblasti ohraničené parabolou a osou x:

$$P = \sigma\int_0^6 (6x - x^2)dx = \sigma\left[3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^6 = \sigma(108 - 2\cdot 36) = 36\sigma .$$

Statické momenty jsou (připomínáme, že $g(x) = 0$):

$$S_x = \sigma\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx = \sigma\frac{1}{2}\int_0^6 (6x - x^2)^2\,dx = \sigma\frac{1}{2}\int_0^6 (36x^2 - 12x^3 + x^4)\,dx =$$

$$= \sigma\frac{1}{2}\left[12x^3 - 3x^4 + \frac{x^5}{5}\right]_0^6 = \sigma\frac{1}{2}\left[x^3(12 - 3x + \frac{x^2}{5})\right]_0^6 = \sigma\frac{1}{2}6^3(12 - 18 + \frac{36}{5}) =$$

$$= \sigma 108\frac{6}{5} = \sigma\frac{648}{5},$$

$$S_y = \sigma\int_a^b x\,f(x)\,dx = \sigma\int_0^6 x(6x - x^2)\,dx = \sigma\int_0^6 (6x^2 - x^3)\,dx = \sigma\left[2x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^6 =$$

$$= \sigma\left[2\cdot 6^3 - \frac{6^4}{4}\right] = \sigma 6^3(2 - \frac{3}{2}) = 108\sigma .$$

Těžiště $T = (\xi, \eta)$ má souřadnice

$$\xi = \frac{S_y}{m} = \frac{108\sigma}{36\sigma} = 3 \text{ a } \eta = \frac{S_x}{m} = \frac{\sigma\frac{648}{5}}{\sigma 36} = \frac{18}{5}.$$

$$T = (3, \frac{18}{5}).$$

Poznámka

Statický moment S_y *jsme nemuseli počítat. Protože je obrazec souměrný podle osy* $x=3$*, musí těžiště ležet na této ose, x - ová souřadnice těžiště musí být* $\xi=3$.

Kontrolní otázky

1. Uveďte vztah pro statický moment a moment setrvačnosti hmotného bodu.
2. Uveďte vztahy pro výpočet statických momentů a momentů setrvačnosti hmotné křivky dané parametrickými rovnicemi.
3. Jak vypočtete souřadnice těžiště homogenní hmotné křivky dané parametrickými rovnicemi?
4. Uveďte vztahy pro výpočet statických momentů a momentů setrvačnosti hmotné křivky dané explicitní rovnicí.
5. Uveďte vztahy pro výpočet statických momentů a momentů setrvačnosti hmotné rovinné oblasti hraničené křivkami $g(x)$ a $f(x)$, kde $g(x)\le f(x)$ na intervalu $<a,b>$.
6. Uveďte vztahy pro výpočet statických momentů a momentů setrvačnosti hmotné rovinné oblasti hraničené grafem spojité funkce $f(x)\ge 0$ a osou x na intervalu $<a,b>$.
7. Jak vypočtete souřadnice těžiště homogenní hmotné rovinné oblasti ohraničené křivkami $g(x)$ a $f(x)$, kde $g(x)\le f(x)$ na intervalu $<a,b>$?

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního rovinného obrazce ohraničeného křivkami

a) $y=2x-x^2;\quad y=0$

b) $y^2=6x;\quad x=5$

c) $y^2=4x;\quad x=0;\quad x=4$

d) $2y=x^2;\quad 2x=y^2$

e) $y=x^2;\quad y=\dfrac{2}{1+x^2}$

f) $y=\sin x;\quad y=0;\quad 0\le x\le \pi$

g) $y=\sin x;\quad y=\dfrac{2x}{\pi};\quad y=0$

h) $y = \sin x; \quad y = \frac{1}{2}; \quad 0 \le x \le \pi$

i) $x^2 + y^2 = 4; \quad y \ge 0$

2. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního rovinného obrazce

a) ohraničeného cykloidou $x = 3(t - \sin t), \; y = 3(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi$ a osou x.

b) který leží v prvním kvadrantu a jeho hranici tvoří asteroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ a obě souřadné osy.

c) ohraničeného křivkou $x = t^2 - t, \quad y = t^3 + t^2$ a osou x.

3. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního oblouku dané křivky:

a) $y = -\frac{x^2}{2} + 2; \quad -2 \le x \le 2$

b) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x; \quad 1 \le x \le 2$

c) $x = t^2, \; y = t - \frac{t^3}{3}; \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$

d) $x = 2\cos t, \; y = 2\sin t; \quad -\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{6}$

e) $x = 3\cos^3 t, \; y = 3\sin^3 t; \quad 0 \le t \le \pi$

f) $x = 2(t - \sin t), \; y = 2(1 - \cos t); \quad 0 \le t \le 2\pi$

g) $x = \cos t + t\sin t, \; y = \sin t - t\cos t; \quad 0 \le x \le \pi$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\left(1; \frac{2}{5}\right)$; **b)** $(3;0)$; **c)** $\left(\frac{6}{5};3\right)$; **d)** $\left(\frac{9}{10};\frac{9}{10}\right)$; **e)** $\left(0;\frac{15\pi+24}{30\pi-20}\right)$; **f)** $\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{8}\right)$;

g) $\left(\frac{4\pi(4\pi+3)}{\pi+4};\frac{5\pi}{6(\pi+4)}\right)$; **h)** $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{24\sqrt{3}-8\pi}\right)$; **i)** $\left(0;\frac{8}{3\pi}\right)$. **2. a)** $\left(3\pi;\frac{5}{2}\right)$;

b) $\left(\frac{2048}{315\pi};\frac{2048}{315\pi}\right)$; **c)** $\left(\frac{83}{77};\frac{9}{154}\right)$. **3. a)** $(0;0{,}971)$; **b)** $(1{,}52;0{,}397)$; **c)** $\left(\frac{7}{5};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$;

d) $\left(\frac{6}{\pi};0\right)$; **e)** $\left(0;\frac{6}{5}\right)$; **f)** $\left(2\pi;\frac{8}{3}\right)$; **g)** $\left(\frac{2\left(\pi^2-6\right)}{\pi^2};\frac{6}{\pi}\right)$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose y homogenní hmotné oblasti ohraničené křivkami $y=\frac{2}{1+x^2}$, $y=x^2$.

   a) $\sigma(\frac{18}{5}+\pi)$, b) $\sigma(\frac{18}{5}-\pi)$, c) $\sigma(\frac{18}{5}-\frac{\pi}{2})$, d) $\sigma(\frac{18}{5}+\frac{\pi}{2})$.

2 Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose y homogenního hmotného oblouku křivky dané parametricky $x=t^2$, $y=t-\frac{1}{3}t^3$ pro $0\le t\le\sqrt{3}$.

   a) $\frac{198}{35}\sigma\sqrt{3}$, b) $\frac{189}{35}\sigma\sqrt{3}$, c) $\frac{108}{35}\sigma\sqrt{3}$, d) $\frac{156}{35}\sigma\sqrt{3}$.

3) Vypočtěte statický moment vzhledem k ose x homogenního hmotného oblouku křivky $y=x^3$ pro $0\le x\le 1$.

   a) $\frac{\sigma}{54}(10\sqrt{10}+1)$, b) $\frac{\sigma}{54}(10\sqrt{10}-1)$, c) $\frac{\sigma}{108}(10\sqrt{10}-1)$, d) $\frac{\sigma}{108}(10\sqrt{10}+1)$.

4) Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní hmotné oblasti tvaru rovnoramenného trojúhelníka výšky v a základny velikosti a vzhledem k jeho základně.

   a) $\frac{1}{2}\sigma av^3$, b) $\frac{1}{4}\sigma av^2$, c) $\frac{1}{4}\sigma av^3$, d) $\frac{1}{2}\sigma av^2$.

5) Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní hmotné oblasti ohraničené elipsou $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $0<b<a$ konst. vzhledem k její hlavní ose.

   a) $\frac{1}{4}\sigma\pi ab^3$, b) $\frac{1}{4}\sigma\pi a^3b$, c) $\frac{1}{2}\sigma\pi ab^3$, d) $\frac{1}{2}\sigma\pi a^3b$.

6) Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního hmotného oblouku křivky $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ pro $1\le x\le e$ vzhledem k ose y.

a) $\frac{\sigma}{8}(e^4+2e^2-2)$, b) $\frac{\sigma}{8}(e^4+2e^2+3)$,

c) $\frac{\sigma}{8}(e^4+2e^2-3)$, d) $\frac{\sigma}{8}(e^4+2e^2+2)$.

7) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního hmotného oblouku asteroidy

$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ a>0$ konst. pro $0\le t\le\pi$.

a) $\left(0,\frac{1}{5}a\right)$, b) $\left(0,\frac{3}{5}a\right)$, c) $\left(\frac{2}{5}a,0\right)$, d) $\left(0,\frac{2}{5}a\right)$.

8) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní hmotné oblasti ohraničené křivkami $y=\sin x$ a

$y=\frac{1}{2}$ pro x maximálně z intervalu $\left(0,\pi\right)$.

a) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{8(3\sqrt{3}-\pi)}\right)$, b) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{3\sqrt{3}+2\pi}\right)$,

c) $\left(\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{8(3\sqrt{3}-\pi)},\frac{\pi}{2}\right)$, d) $\left(\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{3\sqrt{3}+2\pi},\frac{\pi}{2}\right)$.

9) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní hmotné oblasti ohraničené křivkami $x=1$ a

$y^2=x^3$.

a) $\left(0,\frac{5}{7}\right)$, b) $\left(\frac{5}{7},0\right)$, c) $\left(\frac{4}{7},0\right)$, d) $\left(0,\frac{4}{7}\right)$.

10) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního hmotného oblouku křivky $x=t^2,\ y=t-\frac{1}{3}t^3$

pro $0\le t\le\sqrt{3}$.

a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{7}{5}\right)$, b) $\left(\frac{5}{7},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{5}{7}\right)$, d) $\left(\frac{7}{5},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. b); 4. c); 5. a); 6. c); 7. d); 8. a); 9. b); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.5 znovu.

Shrnutí lekce

Integrální počet je používán v mnoha disciplínách i tam, kde bychom to neočekávali (např. ekonomie). V této kapitole jsme se omezili na jednoduché aplikace v mechanice. Odvodili jsme vztahy pro výpočet statických momentů, souřadnic těžiště a momentů setrvačnosti křivek a rovinných oblastí. Při výpočtech jsme se omezili na homogenní křivky a oblasti s konstantní hustotou. S výpočty statických momentů, souřadnic těžiště a momentů setrvačnosti křivek v prostoru, rovinných oblastí, těles i v případech, kdy se hustota spojitě mění, se seznámíte v Matematice III.

Za nejdůležitější v této kapitole považujeme metodu, jak lze odvodit potřebné vztahy. Z fyzikálních zákonů se odvodí vztahy pro velmi malé elementy. Provede se součet hodnot pro všechny elementy. Limitním přechodem pro počet elementů $n \to \infty$ přejdou sumy na integrály. Pochopením tohoto principu můžete odvozovat vztahy pro další veličiny.

Stejným způsobem postupovali i tvůrci integrálního počtu Newton a Leibniz.

Místo pro poznámky

Funkce více proměnných

Funkce více proměnných se v matematice začaly používat v rámci rozvoje analytické geometrie v prostoru s počátkem 18. stol.

I vy sami jste se již určitě s funkcemi více proměnných setkali. Již na střední škole se řeší úloha, jak vypočítat objem a povrch základních geometrických těles, např. krychle, koule, kvádru, atd. Položme si jednoduchou otázku. Jak se vypočítá objem kvádru? Odpověď na tuto otázku je dobře známá. Pro objem kvádru o hranách $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ platí vztah

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Zároveň jsme si uvedli první příklad funkce více proměnných, konkrétně v tomto případě funkce tří proměnných. Skutečně, na V můžeme nahlížet jako na funkci tří proměnných a, b a c. Za a, b a c dosazujeme konkrétní kladná reálná čísla, která mezi sebou násobíme. Výsledkem je opět číslo kladné reálné, které má význam objemu příslušného kvádru. Pro zápis této skutečnosti budeme používat analogické schéma jako pro funkci jedné proměnné ($f : \mathbb{R} \supseteq A \to \mathbb{R}$, $A \ni x \mapsto f(x) = y \in \mathbb{R}$), tj.

$$V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

resp.

$$V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ni [a, b, c] \mapsto V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c \in \mathbb{R}.$$

Každé trojici kladných reálných čísel se přiřadí jejich součin, což je opět kladné reálné číslo. Dalších podobných funkcí by se dala najít celá řada. Zkuste sami vymyslet nějaký další příklad funkce více proměnných.

4. Funkce více proměnných, definice, vlastnosti

Průvodce studiem

V rámci této kapitoly se seznámíme s funkcemi více proměnných, především se bude jednat o funkce dvou proměnných, které budeme chápat jako přirozené zobecnění pojmu funkce jedné proměnné. Ukážeme si, že ačkoliv se některé pojmy pro funkce více proměnných definují analogicky jako v případě funkcí jedné proměnné, tak jejich aplikace na konkrétní příklady je poměrně obtížná. Toto se týká především limit a spojitosti funkce více proměnných.

Cíle

Funkce více proměnných, funkce dvou proměnných, funkce tří proměnných, definiční obor, graf, vrstevnice, limita, spojitost.

Předpokládané znalosti

Funkce jedné proměnné, její definiční obor, funkční předpis, graf. Limita a spojitost funkce jedné proměnné, kuželosečky, soustavy rovnic.

4.1. Definice funkce více proměnných

Výklad

Definice 4.1.1.

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. **Funkcí více proměnných** budeme rozumět každé zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$. Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a značíme D_f.

Množina $\mathbb{R}^n$ je tvořená uspořádanými n-ticemi reálných čísel. Jedná se o zkrácený zápis kartézského součinu n množin reálných čísel, tj. $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n}$.

Poznámka

Připomeňme, že ***kartézským součinem*** *množin A a B rozumíme množinu*

$$A \times B = \{[a,b] \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Např. je-li $A = \{1,2,3\}$, $B = \{m,n\}$, pak

$$A \times B = \{[1,m],[1,n],[2,m][2,n],[3,m],[3,n]\}.$$

Prvky množiny $\mathbb{R}^n$, uspořádané n-tice, značíme $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$. Funkce více proměnných je tedy zobrazení, které každému bodu $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathrm{D}_f$ přiřadí jediné reálné číslo $y \in \mathbb{R}$. Používáme zápis $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nebo zkráceně $y = f(X)$. Číslu y říkáme **funkční hodnota** v bodě X.

Poznámka

1. *V souladu s terminologií, kterou používáme u funkce jedné proměnné, $x_1, x_2 \ldots, x_n$ budeme nazývat* ***nezávislé proměnné***, ***argumenty*** *funkce f, y bude* ***závislá proměnná***.

2. *Pro funkci dvou proměnných volíme místo $y = f(x_1, x_2)$ označení*

$$z = f(x,y).$$

3. *Pro funkci tří proměnných volíme místo $y = f(x_1, x_2, x_3)$ označení*

$$u = f(x,y,z).$$

4. *Není-li zadán definiční obor, pak se jím rozumí maximální „přípustná“ podmnožina v $\mathbb{R}^n$, tj. množina bodů, ve kterých má daná funkce smysl, ve kterých existuje funkční hodnotu.*

5. *Kromě označení D_f pro definiční obor funkce se také používá $\mathrm{D}(f)$, $\mathrm{Dom}\, f$.*

Řešené úlohy

Příklad 4.1.1. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce

$$z = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Řešení: Sestavíme jednotlivé omezující podmínky, které nám vymezí hledanou podmnožinu v $\mathbb{R}^2$.

1. Logaritmus je schopen působit pouze na kladná reálná čísla, tedy

$$x+1>0 \quad \Rightarrow \quad x>-1.$$

2. Neumíme dělit nulou. Proto ve zlomku musí být jmenovatel různý od nuly, což nám dává podmínku

$$\sqrt{4-x^2-y^2} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 4-x^2-y^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 \neq 4.$$

3. Odmocnina je schopna působit pouze na reálná čísla nezáporná,

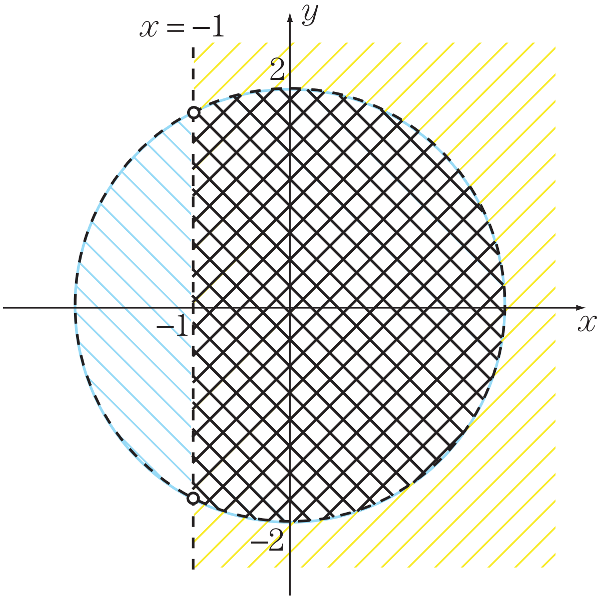
$$4-x^2-y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 \leq 4.$$

Všechny tři podmínky musí platit současně, každá z nich vymezuje podmnožinu v $\mathbb{R}^2$. Definičním oborem bude průnik jednotlivých podmnožin, Obr. 4.1.1.

Podmínka 1. určuje množinu uspořádaných dvojic reálných čísel $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, pro které platí $x>-1$. Jedná se o polorovinu s hraniční přímkou $x=-1$, ta ale do této množiny nepatří. Proto ji v grafickém vyjádření vyznačíme čárkovaně.

Podmínka 2. určuje množinu bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, pro které platí $x^2+y^2 \neq 4$. Jedná se o všechny body roviny, které neleží na kružnici se středem v počátku a s poloměrem 2. Tuto skutečnost vyznačíme tak, že do grafického vyjádření nakreslíme čárkovaně kružnici se středem v počátku a poloměrem 2. Bude to znamenat, že body, které leží na této kružnici, do definičního oboru nepatří.

Podmínka 3. určuje množinu bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, pro které platí $x^2+y^2 \leq 4$. Jedná se o kruh se středem v počátku a poloměrem 2.



Obr. 4.1.1

Příklad 4.1.2. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce

$$z = \sqrt{y \sin x}.$$

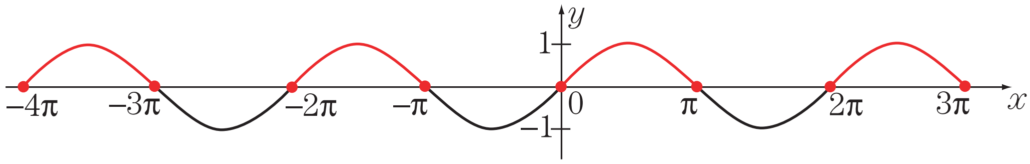
Řešení: Zformulujeme omezující podmínku na definiční obor, $y \sin x \geq 0$. Tato nerovnice je splněna, když oba činitelé jsou buď současně nezáporní, nebo současně nekladní,

$$y \sin x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (y \geq 0 \wedge \sin x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge \sin x \leq 0).$$

Zbývá diskutovat podmínku $\sin x \geq 0$ resp. $\sin x \leq 0$. Řešením první nerovnice je sjednocení intervalů

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle 0 + k2\pi, \pi + k2\pi \rangle, \text{ kde } \mathbb{Z} \text{ je množina celých čísel.}$$

Pro hodnoty x z těchto intervalů je funkce $\sin x$ nezáporná, červená část sinusoidy, Obr. 4.1.2.

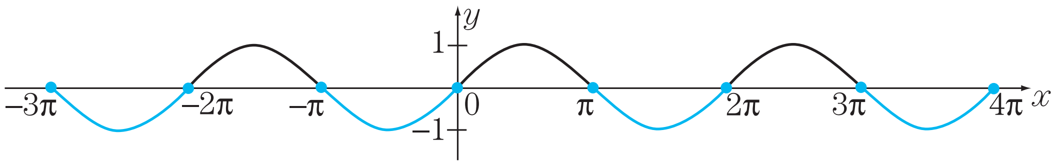


Obr. 4.1.2

Řešením druhé nerovnice je sjednocení intervalů

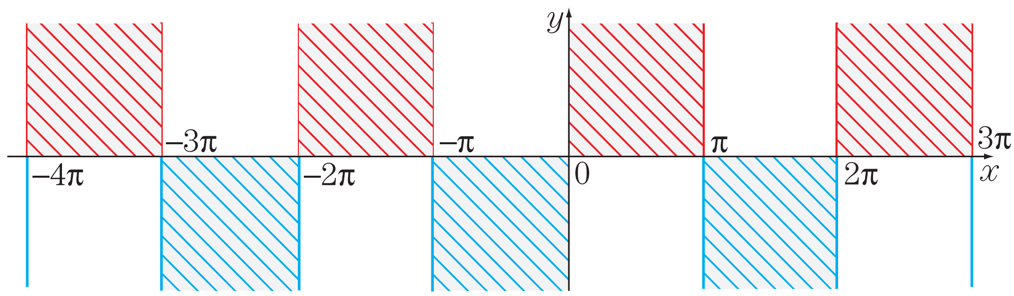
$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle -\pi + k2\pi, 0 + k2\pi \rangle.$$

Pro hodnoty x z těchto intervalů je funkce $\sin x$ nekladná, modrá část sinusoidy, Obr. 4.1.3.



Obr. 4.1.3

Grafické vyjádření definičního oboru zadané funkce je na Obr. 4.1.4.



Obr. 4.1.4

Vezmeme-li např. $x \in (0, \pi)$, hodnota funkce $\sin x \geq 0$ a současně musí být $y \geq 0$.

Příklad 4.1.3. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce

$$z = \arcsin(x + y).$$

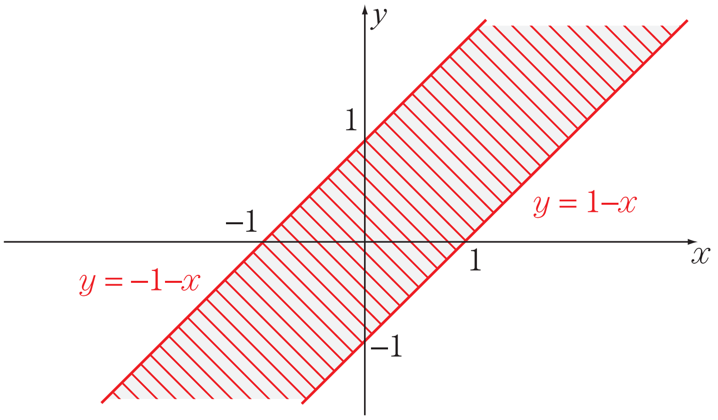
Řešení: Funkce arkus sinus je schopna působit pouze na reálná čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Musíme zařídit, že argument funkce arkus sinus bude nabývat jen hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Dostáváme omezující podmínku na definiční obor ve tvaru $-1 \leq x + y \leq 1$. Jedná se o systém dvou nerovnic,

$$-1 \leq x + y \quad \wedge \quad x + y \leq 1.$$

Řešením pak bude

$$-1 - x \leq y \quad \wedge \quad y \leq 1 - x.$$

Definičním oborem je průnik dvou poloprostorů s hraničními přímkami $y = -1-x$ a $y = 1-x$. Nejdříve zakreslíme hraniční přímky a pak vyznačíme vlastní průnik poloprostorů, viz. Obr. 4.1.5.



Obr. 4.1.5

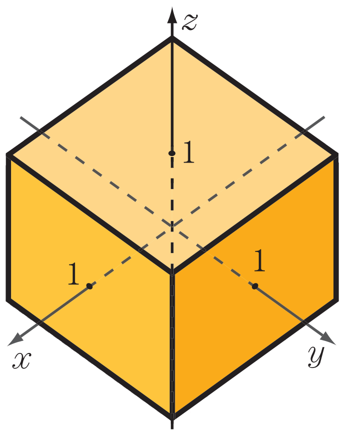
Příklad 4.1.4. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce tří proměnných

$$u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z.$$

Řešení: Funkce arkus sinus je schopna působit jen na čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$,

$$-1 \le x \le 1 \ \wedge\ -1 \le y \le 1 \ \wedge\ -1 \le z \le 1.$$

Definiční obor: $\mathrm{D}_u = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| \le 1 \wedge |y| \le 1 \wedge |z| \le 1\}$, jedná se o krychli se středem v počátku a délkou hrany 2.



Obr. 4.1.6

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \dfrac{x+y-5}{x-y+8}$.

2. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{16-x^2-4y^2}$.

3. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{y^2-1}$.

4. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \ln x + \ln y - ln(1-x-y)$.

5. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \ln(y(x+2))$.

6. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \dfrac{1}{\arcsin x \cdot \arccos y}$.

7. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = (1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \arccos 2x$.

8. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \arccos(x-y^2+1)$.

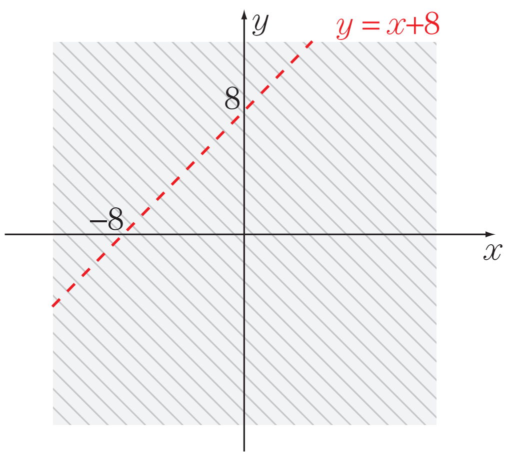
9. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{\cos(2x-y)}$.

10. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \operatorname{tg}(\arcsin(x+y))$.

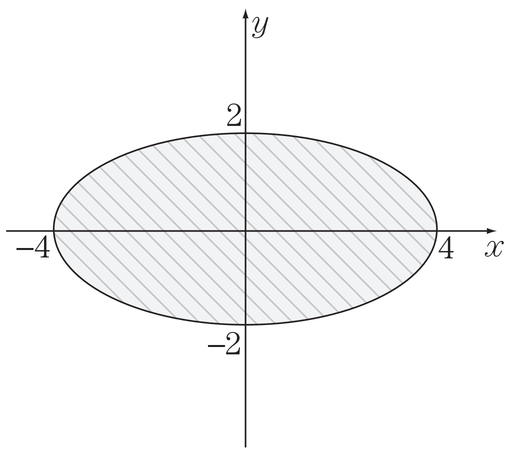
Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. Omezující podmínka: $x-y+8 \neq 0$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x+8\}$, Obr. 4.1.7.

2. Omezující podmínka: $16-x^2-4y^2 \geq 0$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2 \leq 16\}$, Obr. 4.1.8.



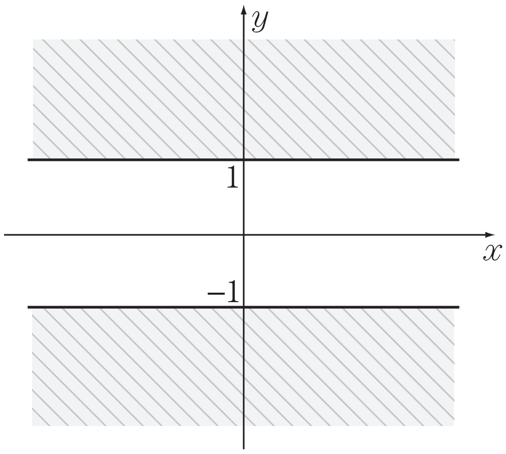
Obr. 4.1.7



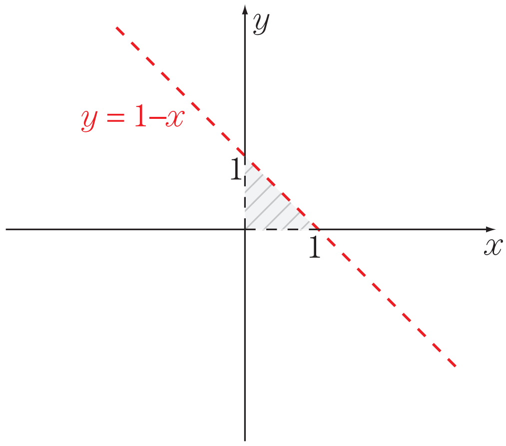
Obr. 4.1.8

3. Omezující podmínka: $y^2-1 \geq 0$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 \geq 1\}$, Obr. 4.1.9

4. Omezující podmínky: $x > 0 \wedge y > 0 \wedge 1-x-y > 0$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \wedge y > 0 \wedge y < 1-x\}$, Obr. 4.1.10.



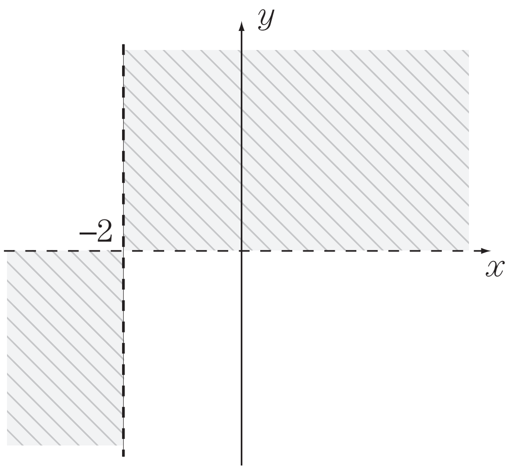
Obr. 4.1.9



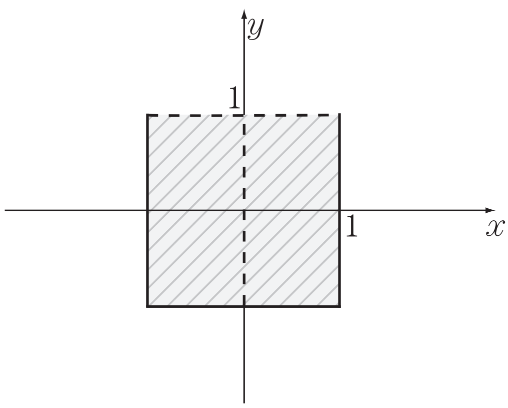
Obr. 4.1.10

5. Omezující podmínky: $y(x+2) > 0$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, (y > 0 \wedge x+2 > 0) \vee (y < 0 \wedge x+2 < 0)\}$, Obr. 4.1.11.

6. Omezující podmínky: $\arcsin x \neq 0 \wedge -1 \leq x \leq 1 \wedge \arccos y \neq 0 \wedge -1 \leq y \leq 1$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0 \wedge -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y < 1\}$, Obr. 4.1.12.



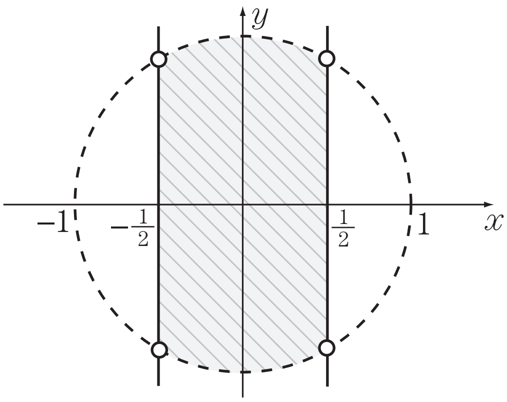
Obr. 4.1.11



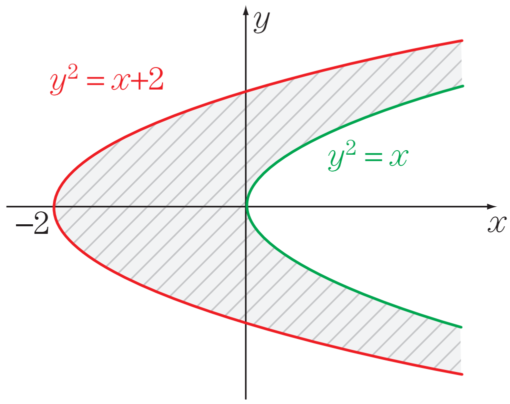
Obr. 4.1.12

7. Omezující podmínky: $1-x^2-y^2 \geq 0 \wedge \sqrt{1-x^2-y^2} \neq 0 \wedge -1 \leq 2x \leq 1$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < 1 \wedge -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\}$, Obr. 4.1.13.

8. Omezující podmínka: $-1 \leq x-y^2+1 \leq 1$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 \leq x+2 \wedge x \leq y^2\}$, Obr. 4.1.14.



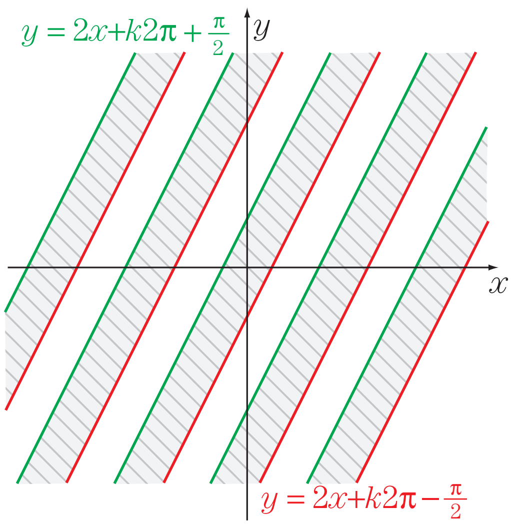
Obr. 4.1.13



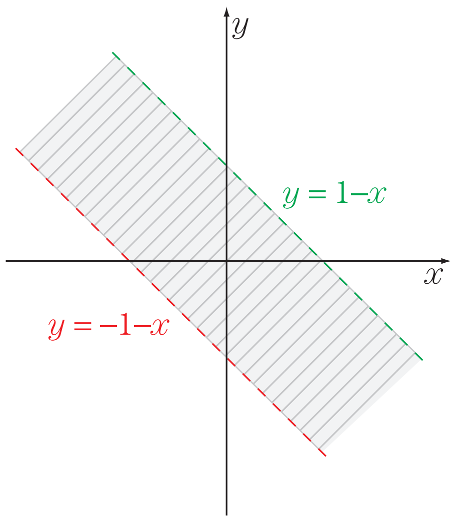
Obr. 4.1.14

9. Omezující podmínka: $\cos(2x-y) \geq 0$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x-y \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle\}$, Obr. 4.1.15.

10. Omezující podmínky: $\arcsin(x+y) \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \wedge -1 \leq x+y \leq 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 < x+y < 1\}$, Obr. 4.1.16.



Obr. 4.1.15

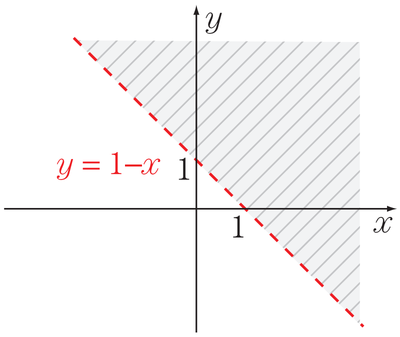


Obr. 4.1.16

Kontrolní test

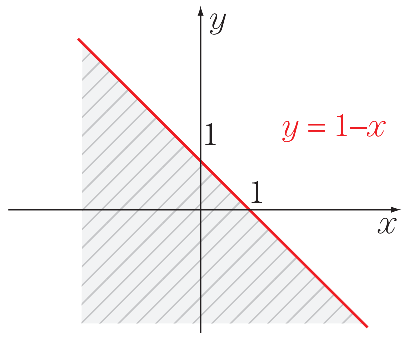
1. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{\ln(x+y)}$.

a) $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 1 - x\}$



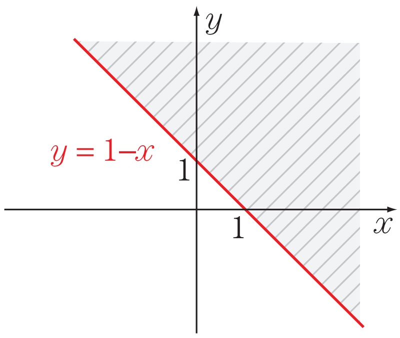
Obr. 4.1.17

b) $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq 1 - x\}$



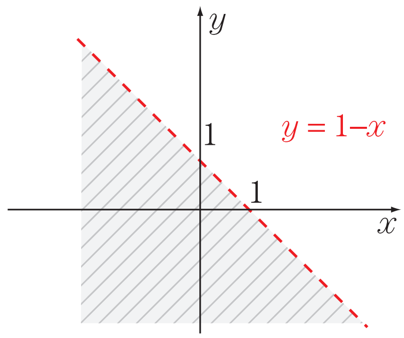
Obr. 4.1.18

c) $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 1 - x\}$



Obr. 4.1.19

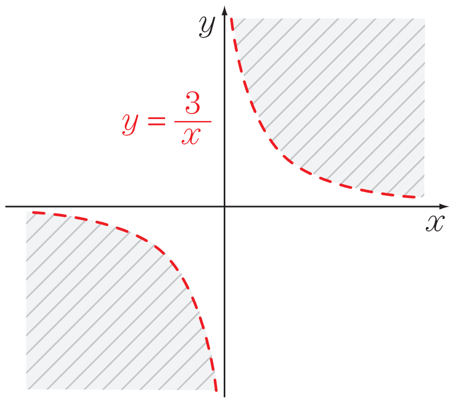
d) $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y < 1 - x\}$



Obr. 4.1.20

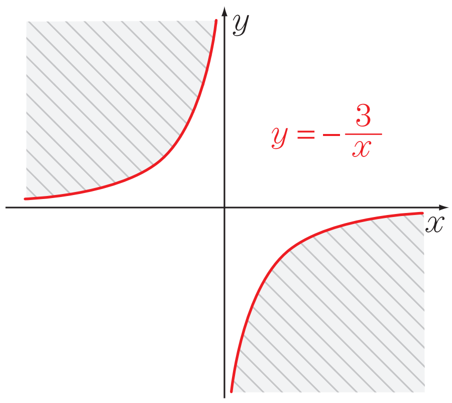
2. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \ln(xy - 3)$.

a) $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy > 3\}$



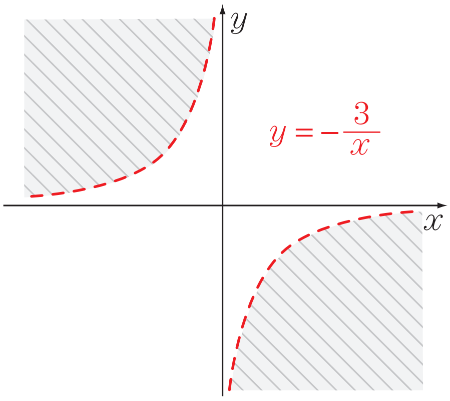
Obr. 4.1.21

b) $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \leq -3\}$



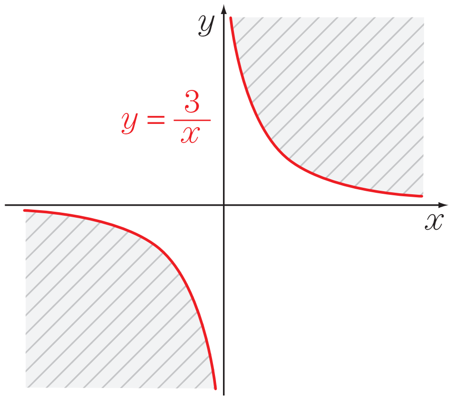
Obr. 4.1.22

c) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy < -3\}$



Obr. 4.1.23

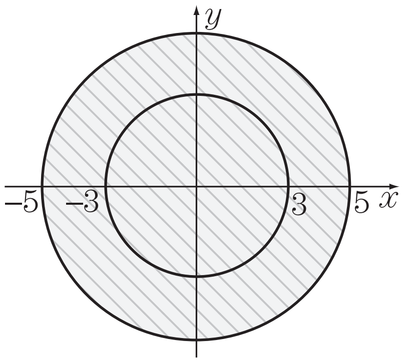
d) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \geq 3\}$



Obr. 4.1.24

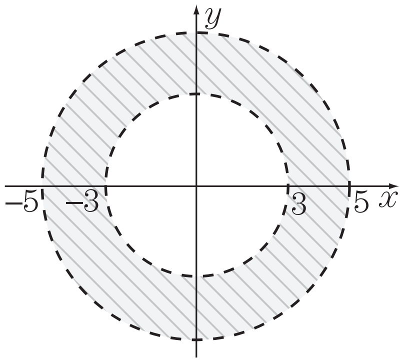
3. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \arcsin \dfrac{x^2 + y^2 - 17}{8}$.

a) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 9 \vee x^2 + y^2 \leq 25\}$



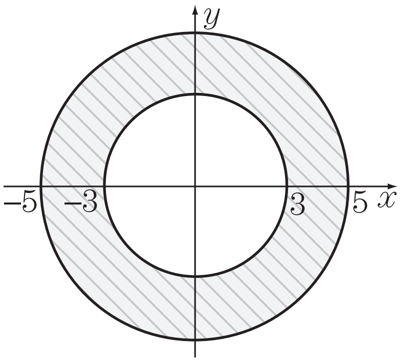
Obr. 4.1.25

b) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 > 9 \wedge x^2 + y^2 < 25\}$



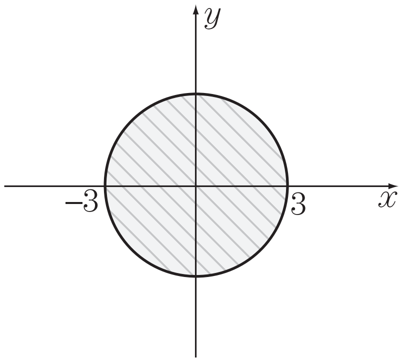
Obr. 4.1.26

c) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \geq 9 \wedge x^2 + y^2 \leq 25\}$



Obr. 4.1.27

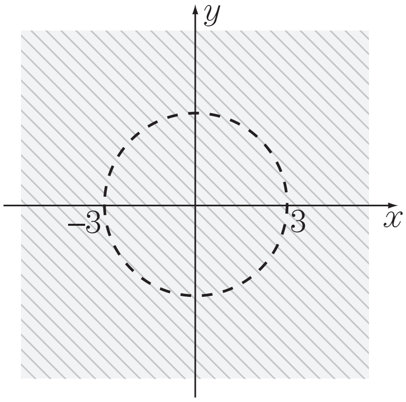
d) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 9\}$



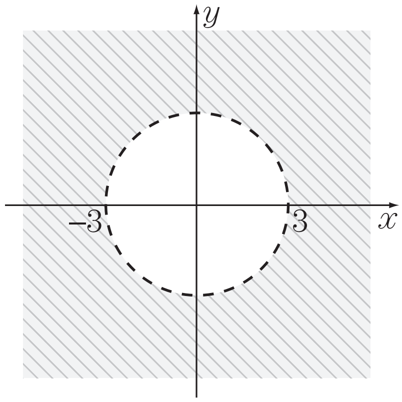
Obr. 4.1.28

4. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$.

a) $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \neq 9\}$ b) $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 > 9\}$

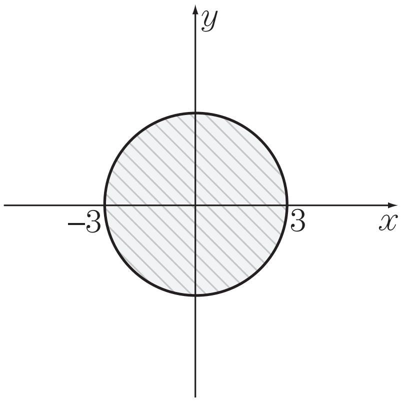


Obr. 4.1.29

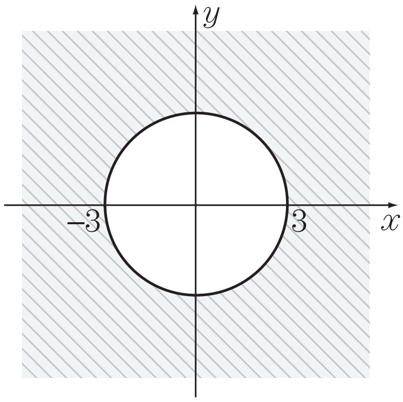


Obr. 4.1.30

c) $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 9\}$ d) $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \geq 9\}$



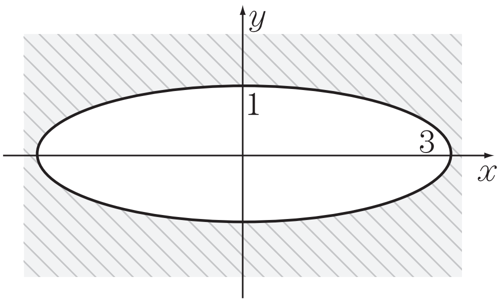
Obr. 4.1.31



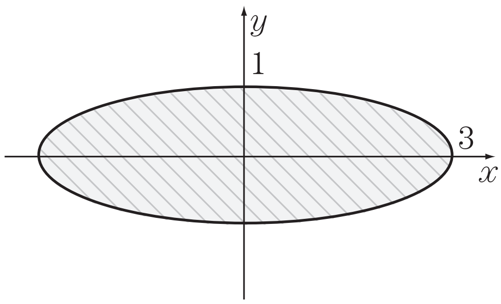
Obr. 4.1.32

5. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \arccos\left(\dfrac{2x^2}{9} + 2y^2 - 1\right)$.

a) $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+9y^2 \geq 9\}$ b) $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+9y^2 \leq 9\}$

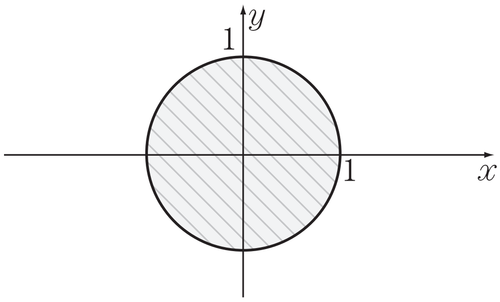


Obr. 4.1.33



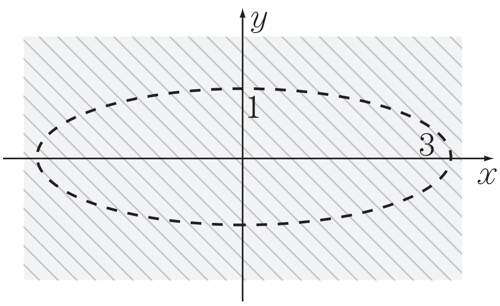
Obr. 4.1.34

c) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$



Obr. 4.1.35

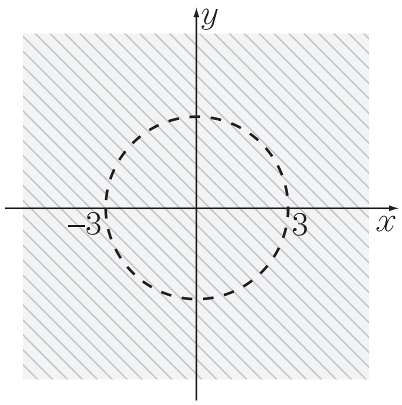
d) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 9y^2 \neq 9\}$



Obr. 4.1.36

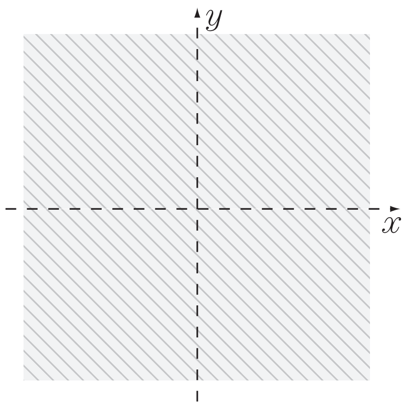
6. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \dfrac{1}{2 + \sin(x^2 + y^2 - 9)}$.

a) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 9\}$



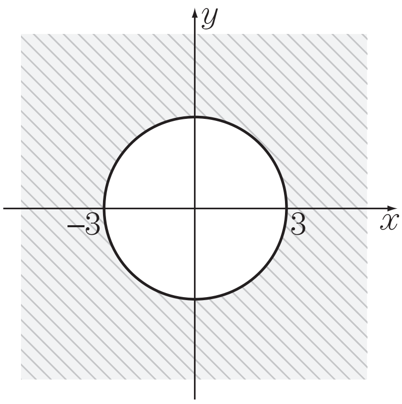
Obr. 4.1.37

b) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$



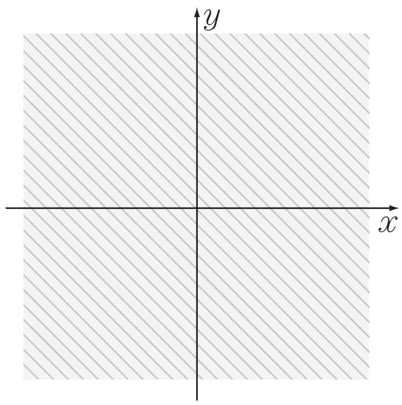
Obr. 4.1.38

c) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 9\}$



Obr. 4.1.39

d) $D_z = \mathbb{R}^2$

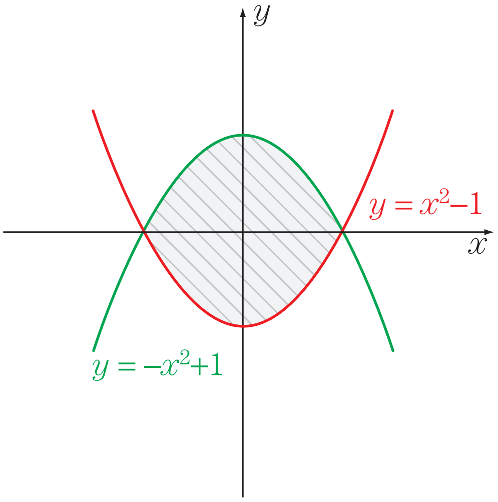


Obr. 4.1.40

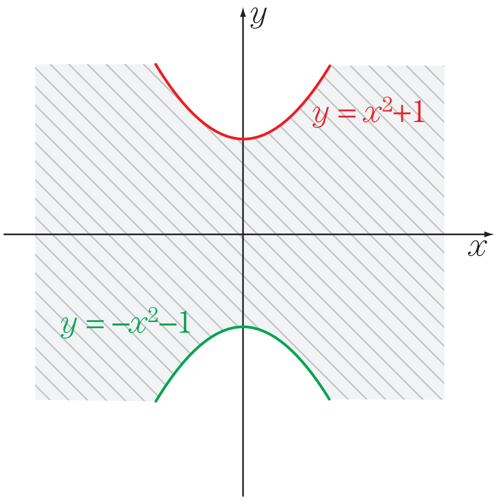
7. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{1 - x^2 + y} + \sqrt{1 - x^2 - y}$.

a) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq x^2 - 1 \wedge y \leq -x^2 + 1\}$

b) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq x^2 + 1 \wedge y \geq -x^2 - 1\}$



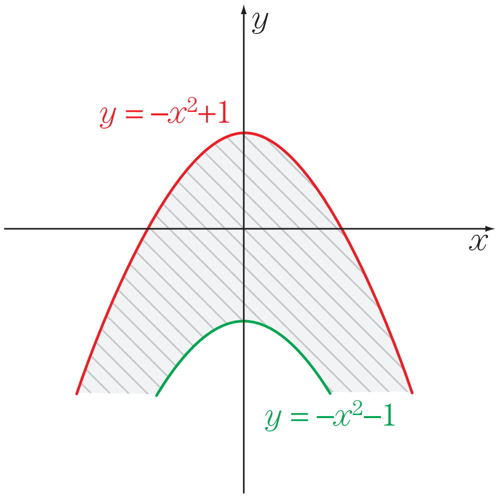
Obr. 4.1.41



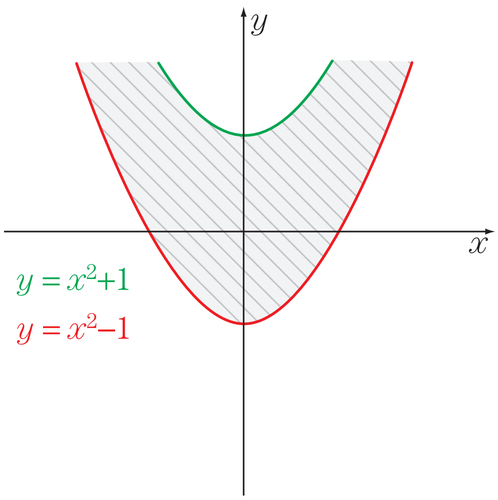
Obr. 4.1.42

c) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq -x^2 + 1 \wedge y \geq -x^2 - 1\}$

d) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq x^2 + 1 \wedge y \geq x^2 - 1\}$



Obr. 4.1.43

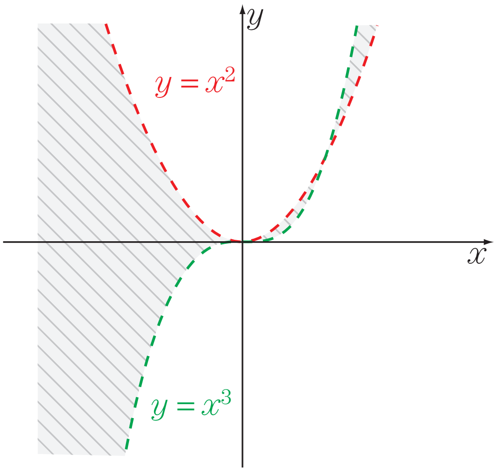


Obr. 4.1.44

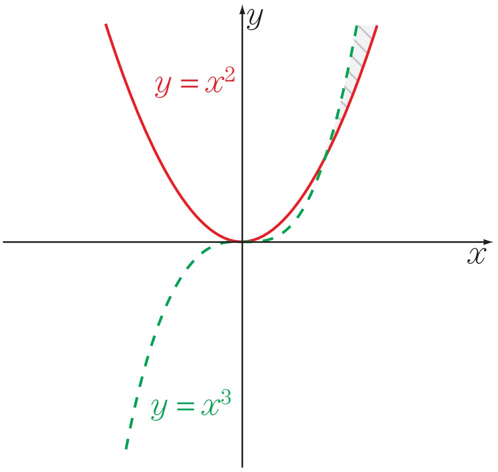
8. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{\dfrac{y - x^2}{x^3 - y}}$.

a) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid (y > x^2 \wedge y < x^3) \vee (y < x^2 \wedge y > x^3)\}$

b) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \wedge y < x^3\}$



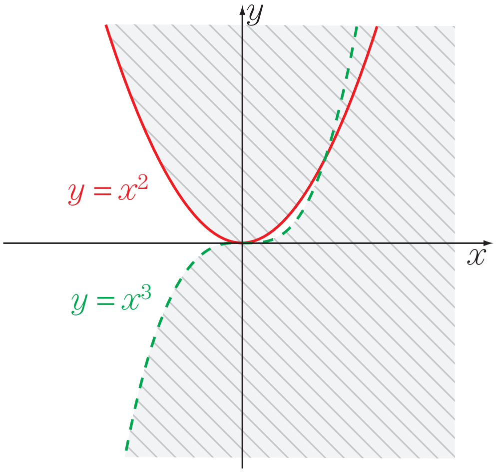
Obr. 4.1.45



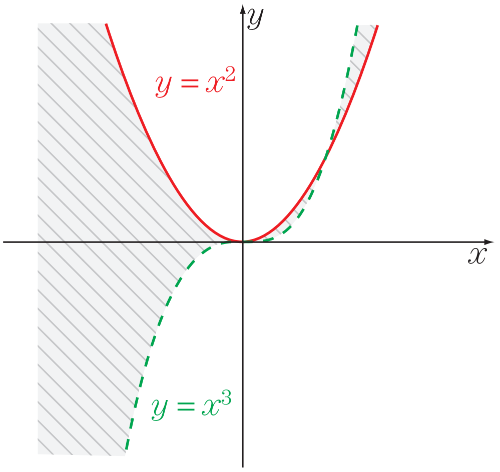
Obr. 4.1.46

c) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \vee y < x^3\}$

d) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid (y \geq x^2 \wedge y < x^3)\} \vee (y \leq x^2 \wedge y > x^3)\}$



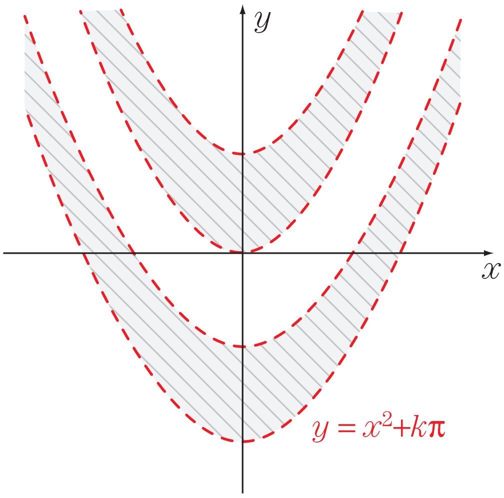
Obr. 4.1.47



Obr. 4.1.48

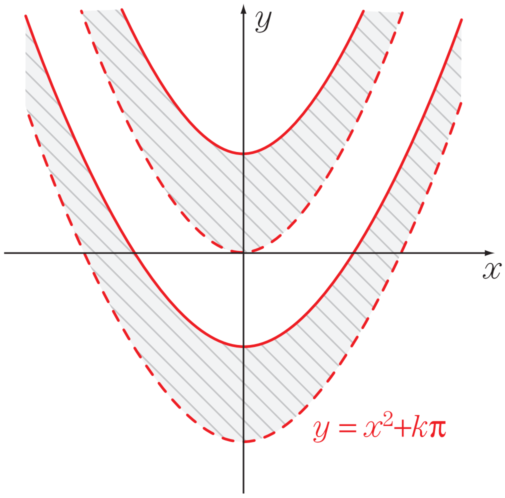
9. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{\sin(y - x^2)}$.

a) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - x^2 \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)\}$



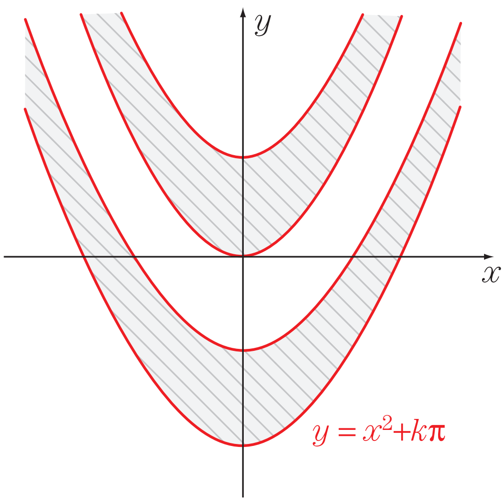
Obr. 4.1.49

b) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - x^2 \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle\}$



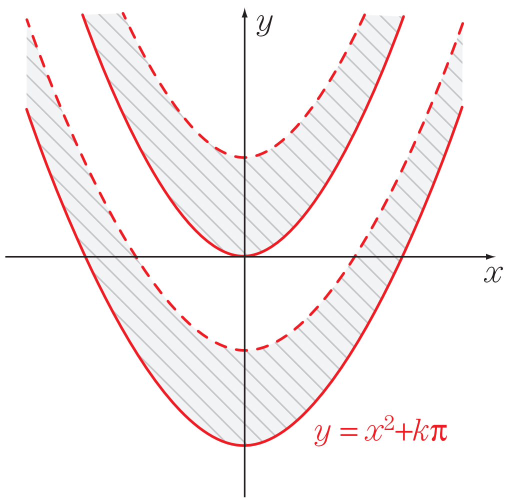
Obr. 4.1.50

c) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - x^2 \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle\}$



Obr. 4.1.51

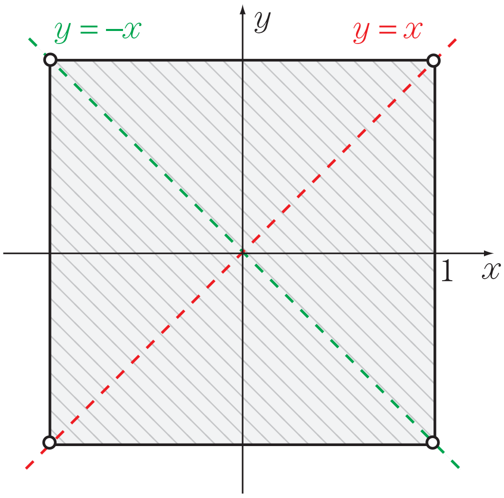
d) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - x^2 \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)\}$



Obr. 4.1.52

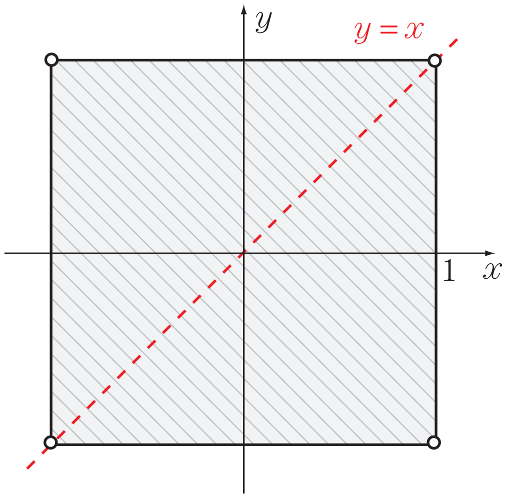
10. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2} + \arcsin x + \arccos y$.

a) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \wedge |y| \neq |x|\}$



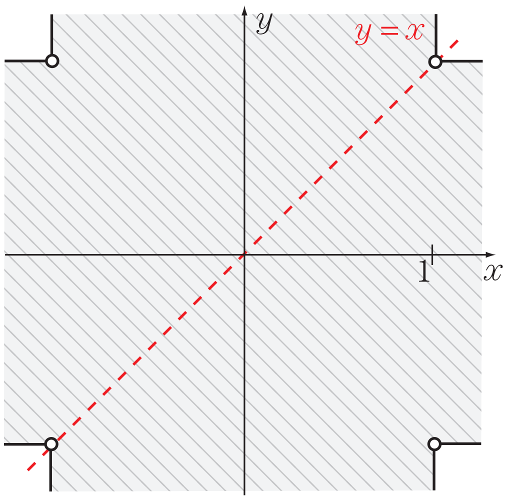
Obr. 4.1.53

b) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \wedge y \neq x\}$



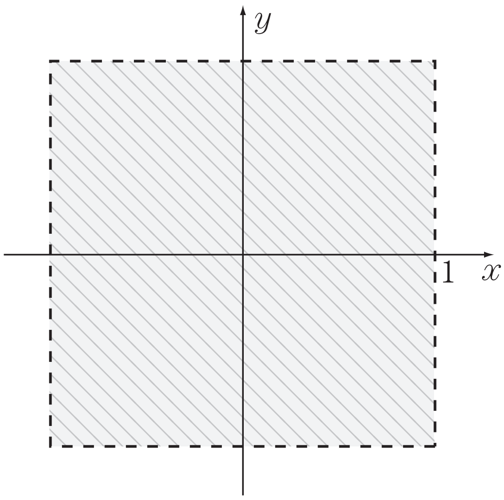
Obr. 4.1.54

c) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid (|x| \leq 1 \vee |y| \leq 1) \wedge y \neq x\}$



Obr. 4.1.55

d) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \wedge |y| < 1\}$



Obr. 4.1.56

Výsledky testu

1. c), **2.** a), **3.** c), **4.** b), **5.** b), **6.** d), **7.** a), **8.** d), **9.** c), **10.** a).

4.2. Graf funkce více proměnných

V této kapitole se soustředíme na funkce dvou proměnných. Pouze v tomto případě jsme schopni graf funkcí dvou proměnných zobrazit. Pro funkce tří a více proměnných ztrácí grafické vyjádření smysl.

Výklad

Definice 4.2.1.

Grafem funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ budeme rozumět množinu

$$G_f = \{[x, y, f(x, y)] \mid [x, y] \in \mathrm{D}_f\}.$$

Poznámka

1. *Množina G_f, tj.* ***graf*** *funkce dvou proměnných, je podmnožinou v $\mathbb{R}^3$. Nejčastěji se budeme setkávat s funkcemi, jejichž graf tvoří v $\mathbb{R}^3$ plochu.*

2. *Zobrazení grafu funkce dvou proměnných je poměrně obtížné. Celý proces si můžeme do jisté míry zjednodušit tím, že zkonstruujeme řezy příslušné plochy rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami. Pro zobrazení grafů funkce dvou proměnných se používá především výpočetní technika.*

Na konkrétním příkladu si ukážeme způsob jak najít graf funkce dvou proměnných. Ještě předtím si zavedeme důležitý pojem, tzv. vrstevnici.

Definice 4.2.2.

Řezy grafu funkce dvou proměnných rovinou rovnoběžnou se souřadnicovou rovinou xy (**půdorysnou**) se nazývají **vrstevnice**. **Vrstevnicovým grafem** budeme rozumět průměty vrstevnic do roviny xy.

Vrstevnice jsou křivky na grafu funkce dvou proměnných se stejnou funkční hodnotou. S vrstevnicí jste se již určitě setkali. Stačí se podívat na mapu, na které je zobrazena i nadmořská výška (geologické, geografické mapy, apod.). Vrstevnice je křivka, která reprezentuje množinu bodů se stejnou nadmořskou výškou.

Řešené úlohy

Příklad 4.2.1. Určete definiční obor a nalezněte graf funkce

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}.$$

Řešení: Nejdříve určíme omezující podmínku na definiční obor. Druhá odmocnina je schopna působit pouze na nezáporná čísla. Tedy,

$$16 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 - y^2 \geq -16 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 4^2.$$

Definičním oborem je kruh se středem v počátku a poloměrem 4.

Nalezneme vrstevnice grafu. Budeme hledat řezy grafu funkce s rovinami rovnoběžnými se souřadnicovou rovinou xy (s **půdorysnou**), resp. průměty těchto řezů do půdorysny.

Poznámka

V následujícím textu budeme často ztotožňovat vrstevnici s jejím kolmým průmětem do roviny xy.

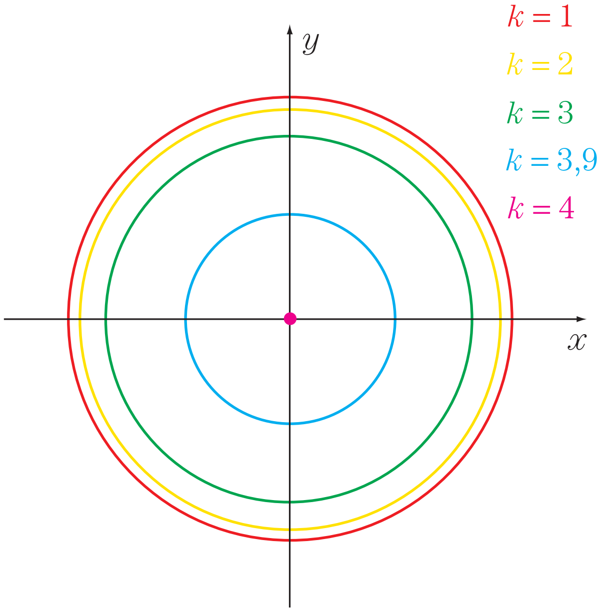
Klademe $z = k$, k je nějaká konstanta, nějaké reálné číslo. Např. pro hodnotu $k = 0$ dostáváme rovnici $z = 0$, což je rovnice roviny xy. Pro hodnotu $k = 1$ dostáváme rovnici $z = 1$, což je rovnice roviny, která je rovnoběžná s rovinou xy, a jejíž vzdálenost od roviny xy je rovna 1, atd.

Pro $z = k$, $k \geq 0 \wedge k \leq 4$ dostáváme

$$k = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad k^2 = 16 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 16 - k^2.$$

Proč volíme $k \geq 0$? Číslo k dosazujeme za z a $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, druhá odmocnina z nezáporného čísla bude vždycky číslo nezáporné, hodnota z je nezáporná a tedy i číslo k musí být nezáporné. Navíc $k \leq 4$, protože k může nabývat pouze hodnot z intervalu $\langle 0, 4 \rangle$. Pro $k > 4$ bude rozdíl na pravé straně rovnice $x^2 + y^2 = 16 - k^2$ záporný, kružnice se záporným poloměrem nemá smysl.

Vrstevnicemi budou kružnice se středem v počátku a s poloměry $\sqrt{16-k^2}$, $k \in \langle 0,4)$. Pro $k = 4$ dostaneme tzv. degenerovanou kružnici s poloměrem 0, tj. bod. V tomto případě se jedná o počátek, bod o souřadnicích $[0,0]$.



Obr. 4.2.1

Navíc budeme ještě hledat řezy grafu funkce rovinami rovnoběžnými se zbývajícími souřadnicovými rovinami. Položme např. $x = k$. Hledáme řezy grafu funkce rovinami rovnoběžnými se souřadnicovou rovinou yz, tzv. **nárysnou**. Souřadnice x leží v intervalu $\langle 0,4\rangle$, proto konstanta $k \in \langle 0,4\rangle$,

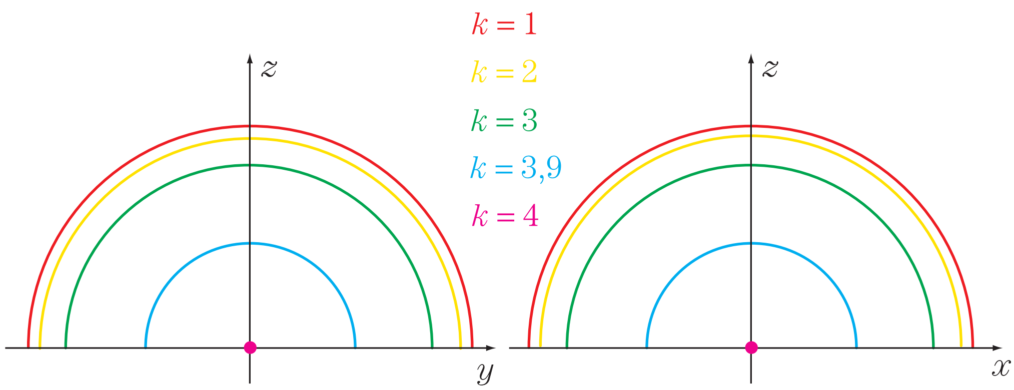
$$z = \sqrt{16-k^2-y^2} \quad \Rightarrow \quad z^2 = 16-k^2-y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2+z^2 = 16-k^2.$$

Protože $z \geq 0$, poslední rovnice představuje půlkružnice se středy v počátku a poloměry $\sqrt{16-k^2}$, pro hodnotu $k = 4$ se jedná o bod $[0,0]$.

Zvolíme-li $y = k$, pak hledáme řezy grafu funkce rovinami rovnoběžnými se souřadnicovou rovinou xz, tzv. **bokorysnou**. Dostáváme analogickou posloupnost rovnic jako v předcházejícím případě,

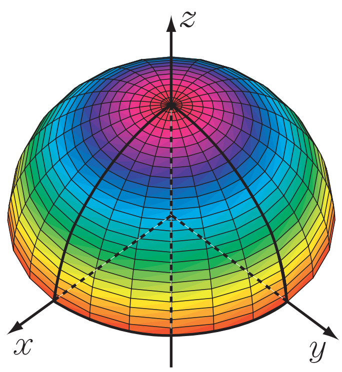
$$z = \sqrt{16-x^2-k^2} \quad \Rightarrow \quad z^2 = 16-x^2-k^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+z^2 = 16-k^2.$$

Řezy jsou půlkružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{16-k^2}$.



Obr. 4.2.2

Nyní již máme dostatek informací pro celkovou představu o grafu této funkce. Grafem je polovina kulové plochy se středem v počátku a poloměrem 4.



Obr. 4.2.3

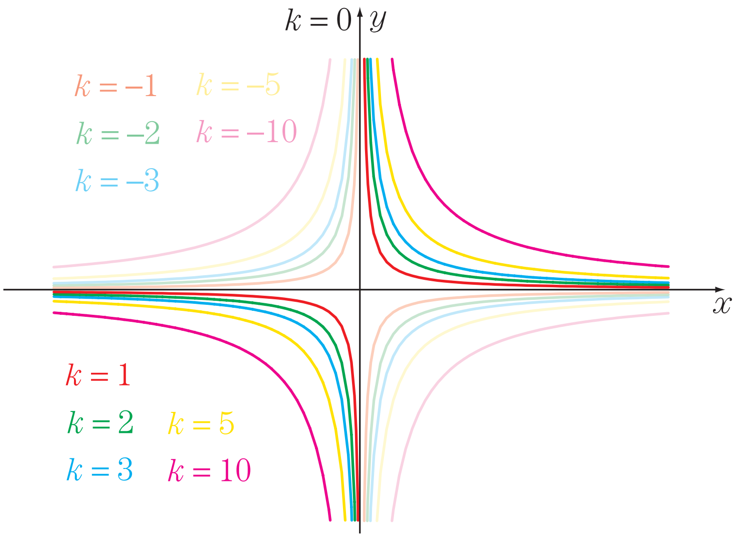
Příklad 4.2.2. Určete definiční obor a graf funkce $z = xy$.

Řešení: Definičním oborem je celá množina $\mathbb{R}^2$. Podívejme se nyní postupně na jednotlivé řezy.

1. Pro $k \in \mathbb{R}$, $z = k$,

$$k = xy \quad \Rightarrow \quad y = \frac{k}{x}.$$

Vrstevnicemi jsou pro $k \neq 0$ rovnoosé hyperboly a pro $k = 0$ je vrstevnice tvořená souřadnicovými osami, osou x i osou y.



Obr. 4.2.4

2. Pro $k \in \mathbb{R}$, $x = k$,

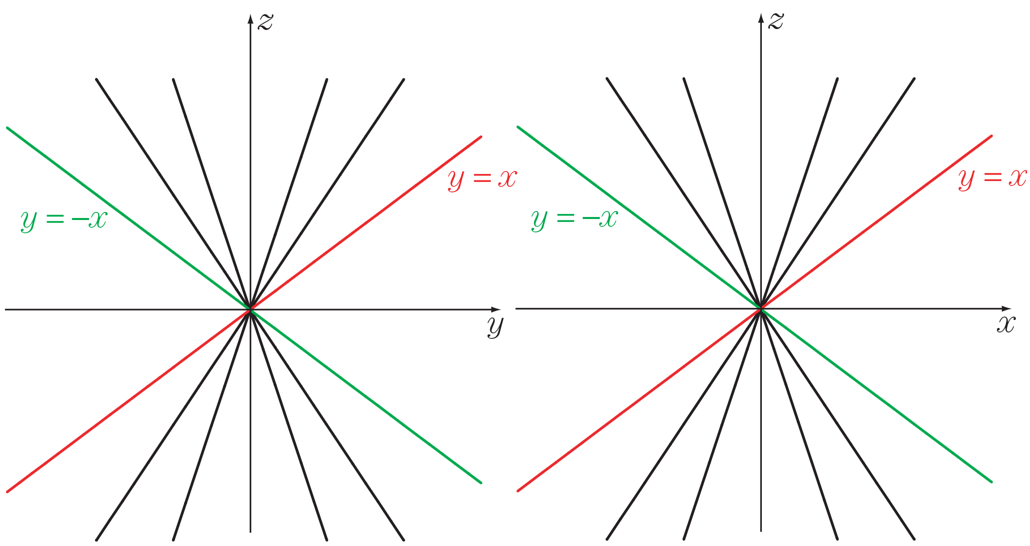
$$z = ky.$$

Řezy jsou přímky procházející počátkem.

3. Pro $k \in \mathbb{R}$, $y = k$,

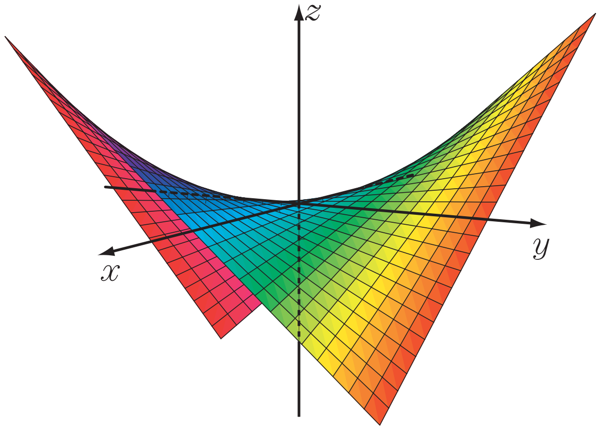
$$z = kx.$$

Řezy jsou přímky procházející počátkem.



Obr. 4.2.5

Jedná se o sedlovou plochu. Její grafické znázornění je poměrně obtížné, nicméně přesto nám řezy poskytnou základní informaci o grafu zadané funkce. Graf zadané funkce je na Obr. 4.2.6



Obr. 4.2.6

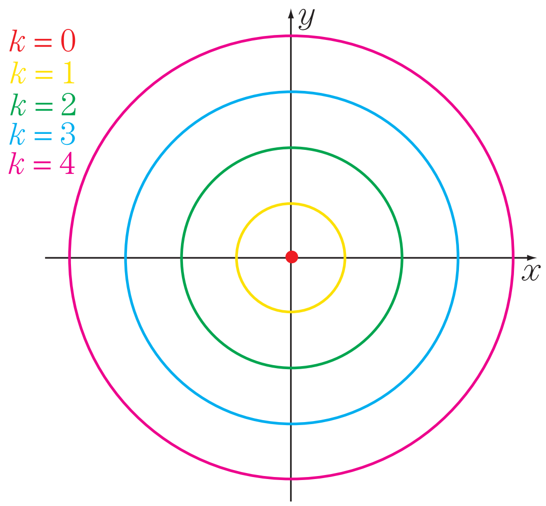
Příklad 4.2.3. Určete definiční obor a graf funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Řešení: Definičním oborem je celá množina $\mathbb{R}^2$. Součet v odmocnině bude nezáporný bez ohledu na to, co dosadíme za x resp. y. Hledáme řezy.

1. Pro $k \geq 0$, $z = k$,

$$k = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad k^2 = x^2 + y^2.$$

Vrstevnicemi jsou kružnice se středem v počátku a poloměry k.



Obr. 4.2.7

2. Pro $k \in \mathbb{R}$, $x = k$,

$$z = \sqrt{k^2 + y^2} \;\Rightarrow\; z^2 = k^2 + y^2 \;\Rightarrow\; -y^2 + z^2 = k^2 \;\Rightarrow\; -\frac{y^2}{k^2} + \frac{z^2}{k^2} = 1.$$

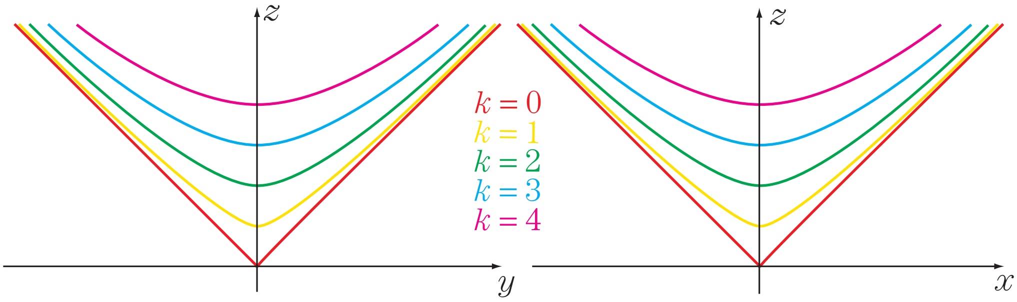
Pro pevně zvolené k je řezem jedno rameno rovnoosé hyperboly. Všimněme si, že pro k připouštíme i hodnotu 0. Ovšem v poslední rovnici bychom pak dělili nulou, což je nepřípustné. Poslední implikace pro $k = 0$ neplatí. V tomto případě je řezem dvojice polopřímek procházejících počátkem $[0, 0]$, tedy

$$z = \sqrt{y^2} \quad\Rightarrow\quad |z| = y \quad\Rightarrow\quad z = \pm y.$$

3. Pro $k \in \mathbb{R}$, $y = k$,

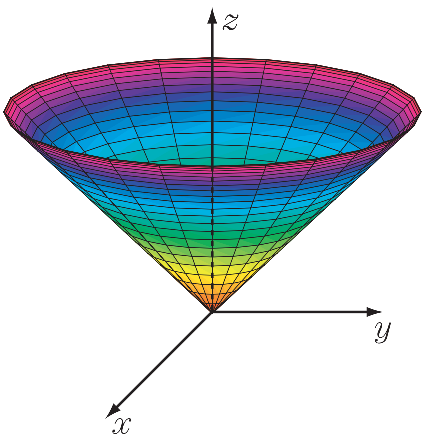
$$z = \sqrt{x^2 + k^2} \;\Rightarrow\; z^2 = x^2 + k^2 \;\Rightarrow\; -x^2 + z^2 = k^2 \;\Rightarrow\; -\frac{x^2}{k^2} + \frac{z^2}{k^2} = 1.$$

Pro řezy platí totéž, co již bylo řečeno v bodě 2.



Obr. 4.2.8

Grafem funkce je jednodílná kuželová plocha.



Obr. 4.2.9

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete definiční obor a nalezněte řez grafu funkce $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5$ rovinou $z = 1$.

2. Určete definiční obor a nalezněte řezy grafu funkce $z = x^3 - \sqrt{y}$ souřadnicovými rovinami.

3. Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = x^2 + y^2 - 4$.

4. Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = 2x + 3y - 4$.

5. Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \sqrt{xy}$.

6. Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \dfrac{2x^2}{y^2}$.

7. Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \sqrt{9 - x^2 - 9y^2}$.

8. Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \ln y^2 - \ln x$.

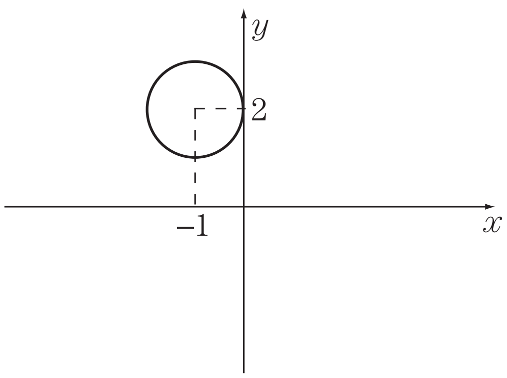
9. Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \dfrac{5x}{x^2 + y^2 + 1}$.

10. Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \dfrac{2y}{x^2} + 1$.

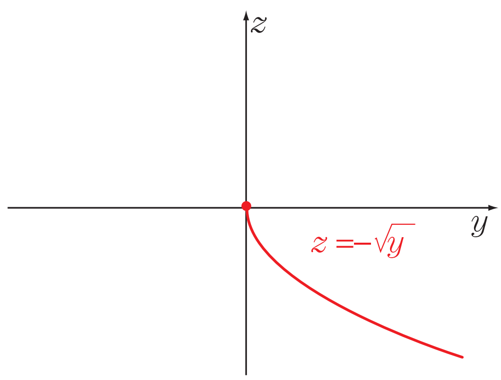
Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $\mathrm{D}_z = \mathbb{R}^2$, Obr. 4.2.10.

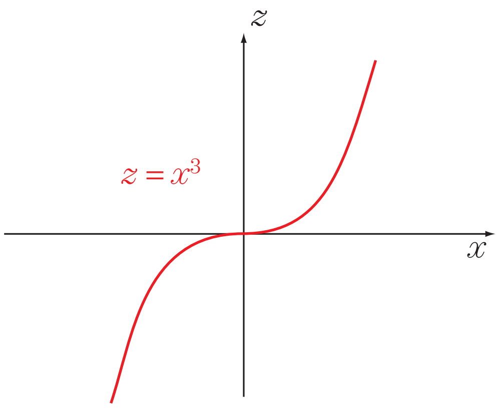
2. $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$, Obr. 4.2.11, Obr. 4.2.12, Obr. 4.2.13.



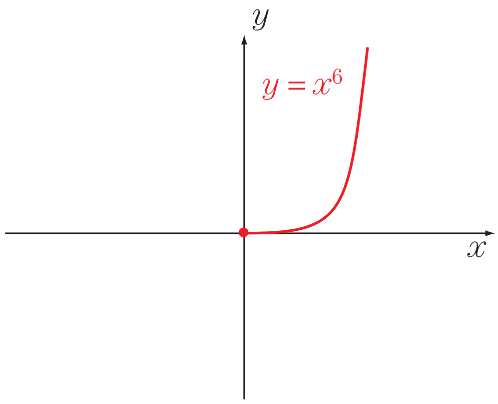
Obr. 4.2.10



Obr. 4.2.11



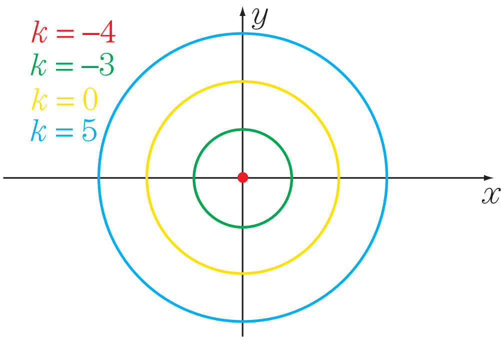
Obr. 4.2.12



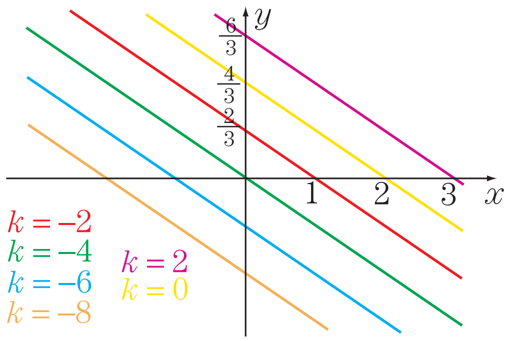
Obr. 4.2.13

3. $\mathrm{D}_z = \mathbb{R}^2$, $k \geq -4$. Vrstevnice: $[0,0]$, $x^2 + y^2 = 4 + k$, Obr. 4.2.14.

4. $\mathrm{D}_z = \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{R}$. Vrstevnice: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4+k}{3}$, Obr. 4.2.15.



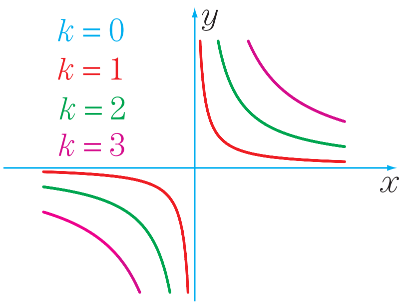
Obr. 4.2.14



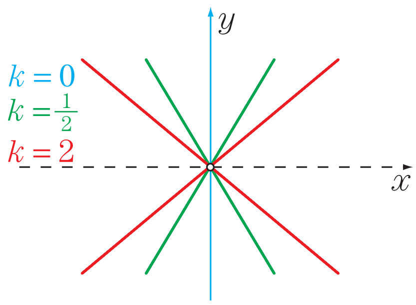
Obr. 4.2.15

5. $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \geq 0\}$, $k \geq 0$. Vrstevnice: jedna z vrstevnic je tvořena oběma souřadnicovými osami ($y = 0$, $x = 0$) pro $k = 0$, ostatní vrstevnice mají rovnici $y = \frac{k^2}{x}$ pro $k > 0$, Obr. 4.2.16.

6. $D_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq 0\}$, $k \geq 0$. Vrstevnice: $x = 0$ pro $k = 0$, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{k}}x$ pro $k > 0$. Ze všech vrstevnic vynecháváme bod $[0,0]$, protože neleží v definičním oboru zadané funkce, Obr. 4.2.17.



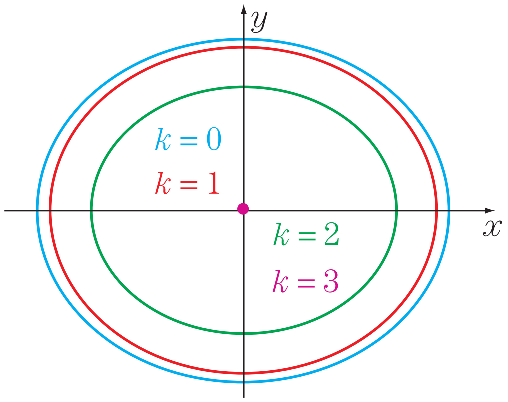
Obr. 4.2.16



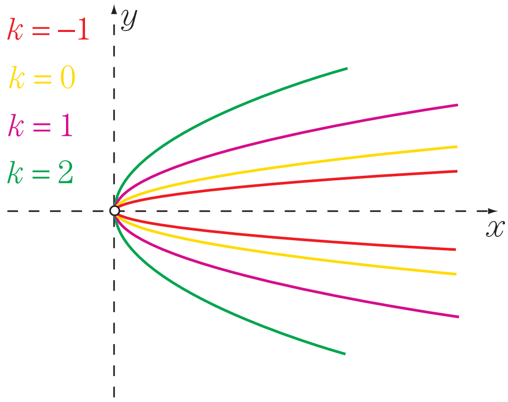
Obr. 4.2.17

7. $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 9y^2 \le 9\}$, $k \in \langle 0,3\rangle$. Vrstevnice: bod $[0,0]$ pro $k=3$, elipsy $x^2+9y^2 = 9-k^2$ pro $k \in \langle 0,3)$, Obr. 4.2.18.

8. $D_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \wedge y \ne 0\}$, $k \in \mathbb{R}$. Vrstevnice: paraboly $x = \mathrm{e}^{-k}y^2$, Obr. 4.2.19.



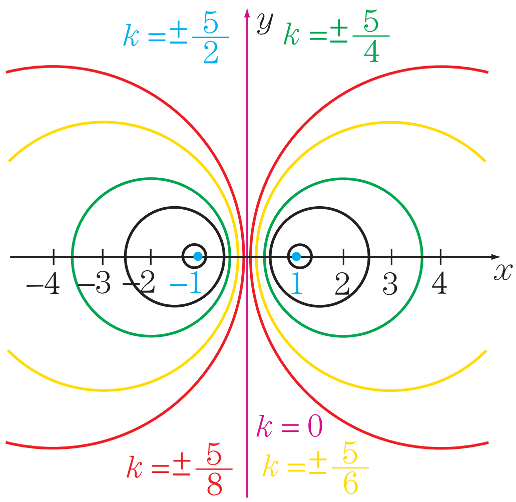
Obr. 4.2.18



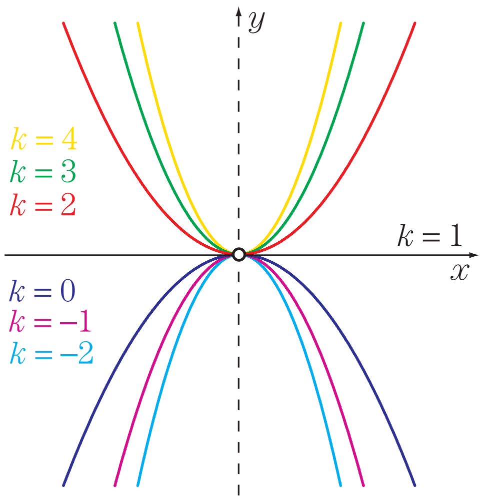
Obr. 4.2.19

9. $\mathrm{D}_z = \mathbb{R}^2$, $k \in \langle -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\rangle$. Vrstevnice: $x=0$ pro $k=0$, kružnice $(x-\frac{5}{2k})^2+y^2 = \frac{25}{4k^2}-1$ pro $k \ne 0$, bod $[1,0]$ pro $k=\frac{5}{2}$, $[-1,0]$ pro $k=-\frac{5}{2}$, Obr. 4.2.20.

10. $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \ne 0\}$, $k \in \mathbb{R}$. Vrstevnice: $y=0$ pro $k=1$, paraboly $y = \frac{k-1}{2}x^2$ pro $k \ne 1$. Poznamenejme, že ze všech vrstevnic vynecháváme bod $[0,0]$, protože neleží v definičním oboru zadané funkce, Obr. 4.2.21.



Obr. 4.2.20

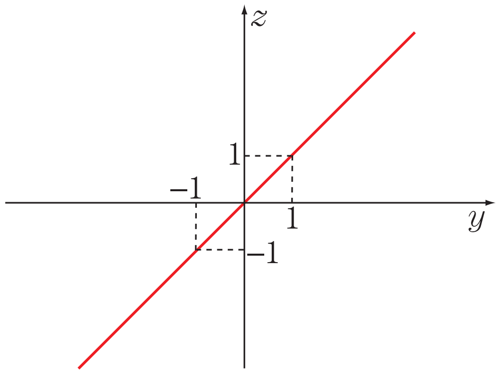


Obr. 4.2.21

Kontrolní test

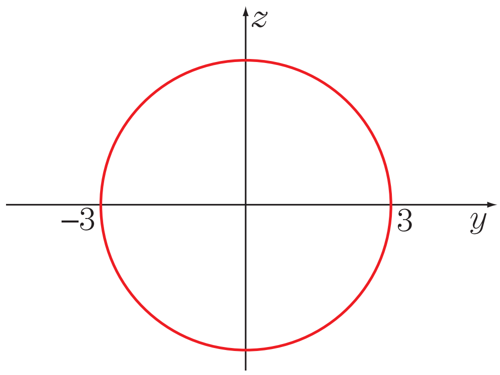
1. Nalezněte řez grafu funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ rovinou $x = 3$.

a)



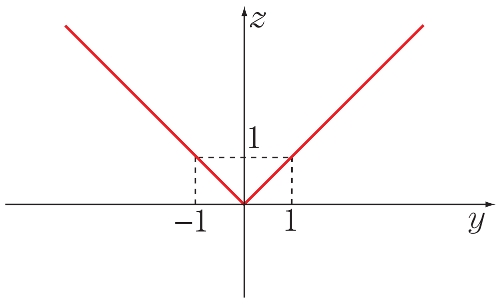
Obr. 4.2.22

b)



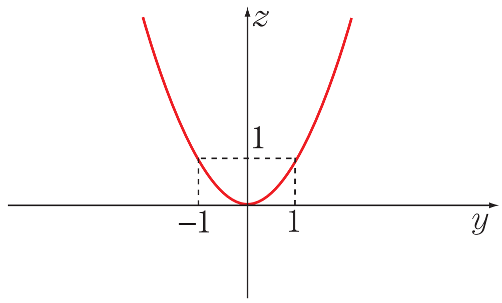
Obr. 4.2.23

c)



Obr. 4.2.24

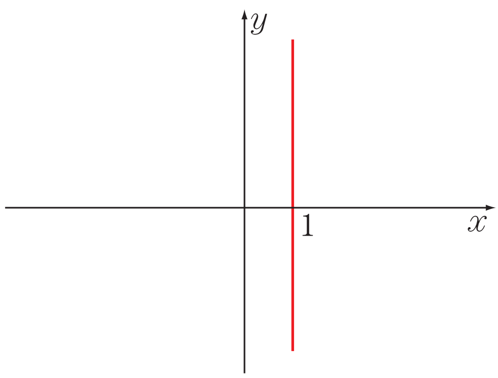
d)



Obr. 4.2.25

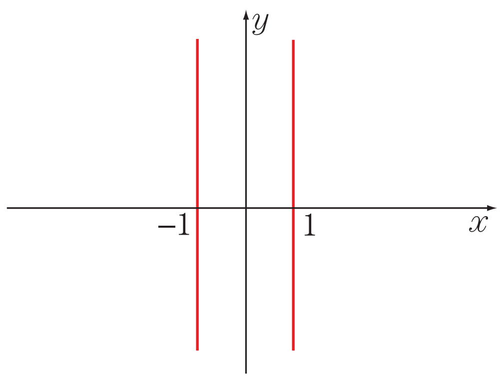
2. Nalezněte řez grafu funkce dvou proměnných $z = |x| - 1$ rovinou $z = 0$.

a)



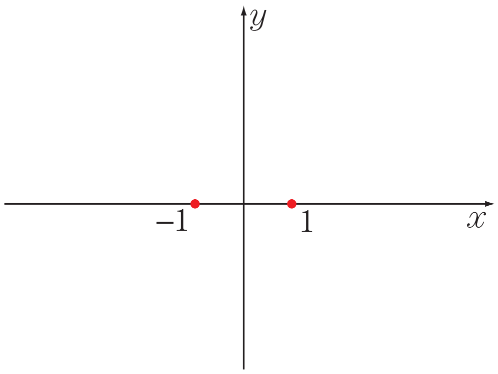
Obr. 4.2.26

b)



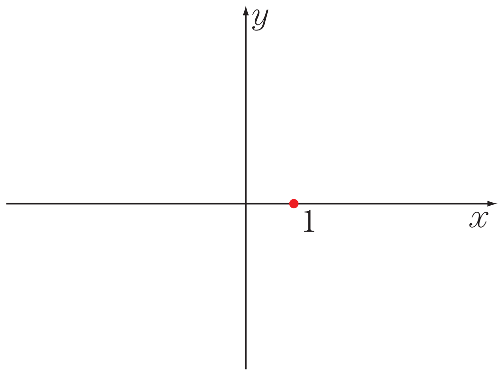
Obr. 4.2.27

c)



Obr. 4.2.28

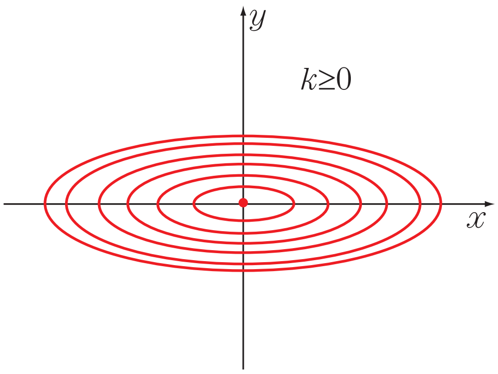
d)



Obr. 4.2.29

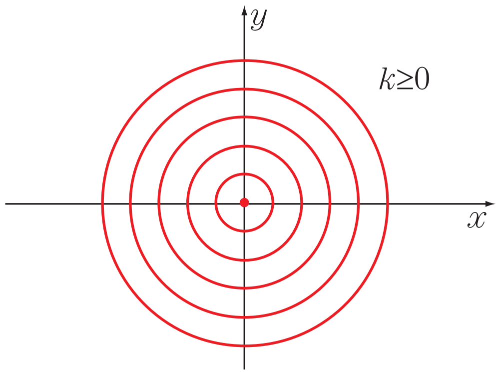
3. Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = x^2 + 4y^2$.

a)



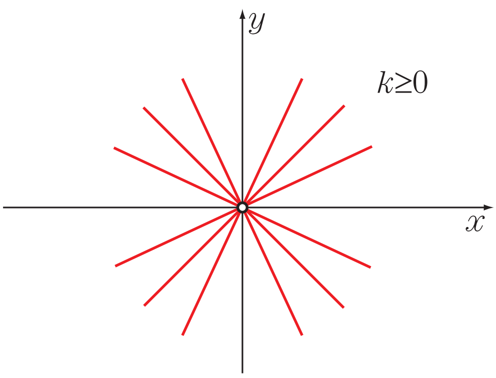
Obr. 4.2.30

b)



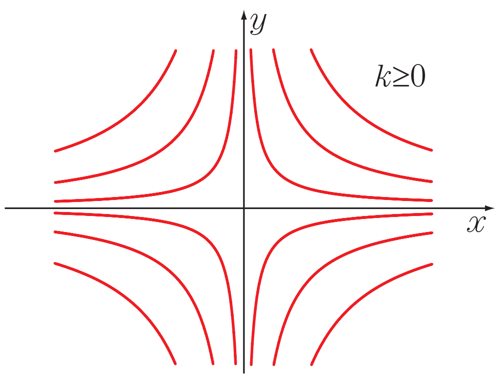
Obr. 4.2.31

c)



Obr. 4.2.32

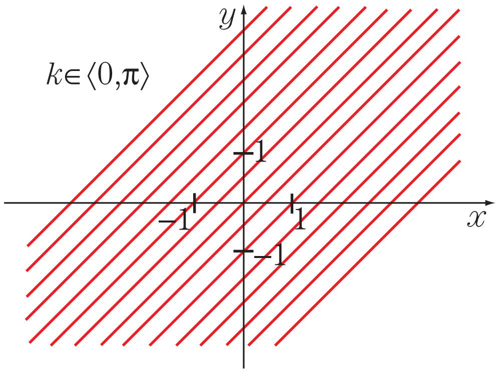
d)



Obr. 4.2.33

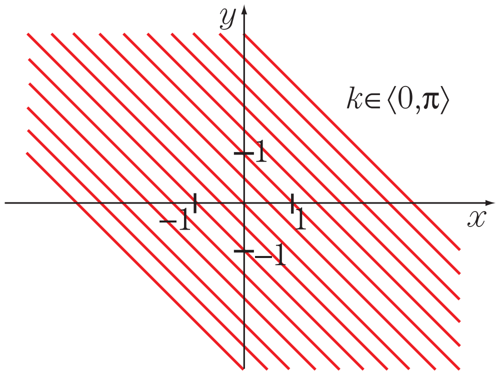
4. Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \arccos(x - y)$.

a)



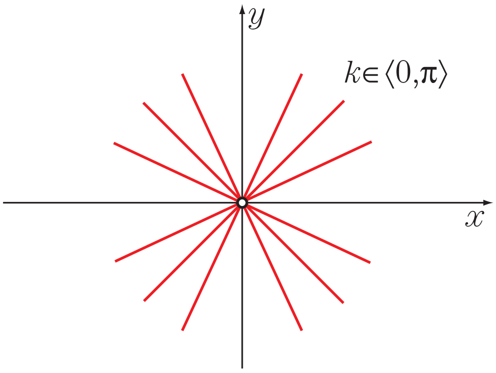
Obr. 4.2.34

b)



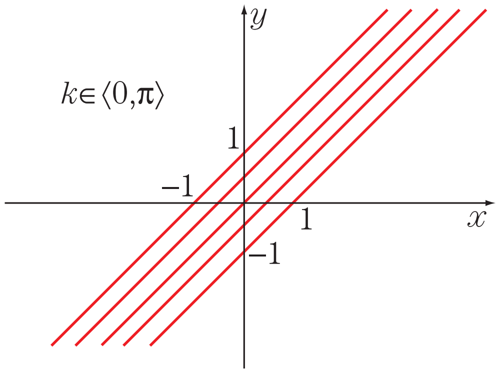
Obr. 4.2.35

c)



Obr. 4.2.36

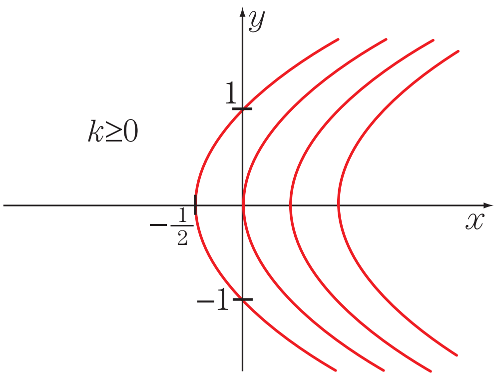
d)



Obr. 4.2.37

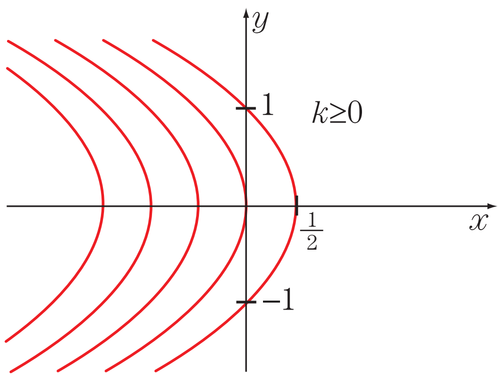
5. Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \sqrt{2x - y^2 + 1}$.

a)



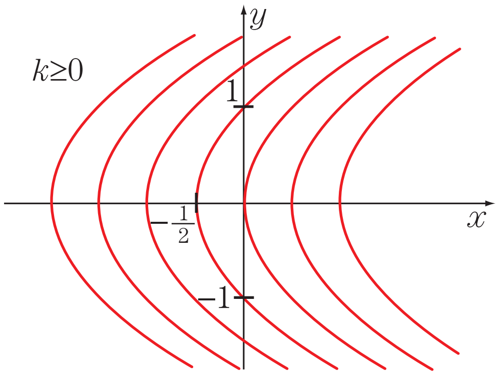
Obr. 4.2.38

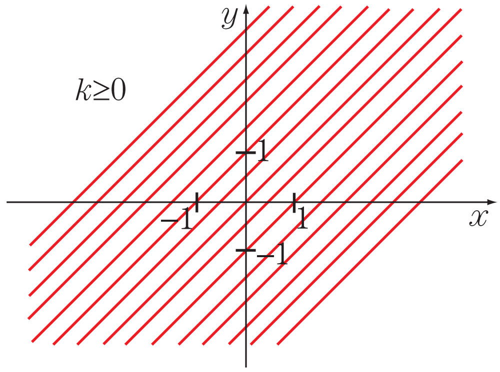
b)



Obr. 4.2.39

c) d)

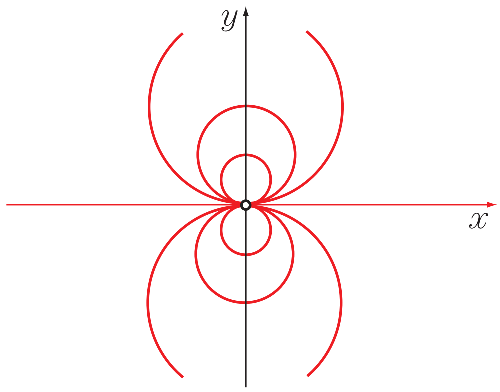


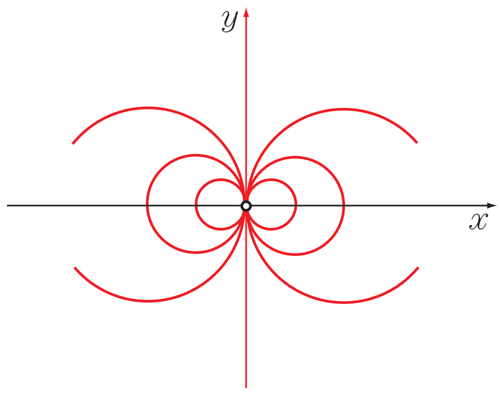


Obr. 4.2.40 Obr. 4.2.41

6. Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$.

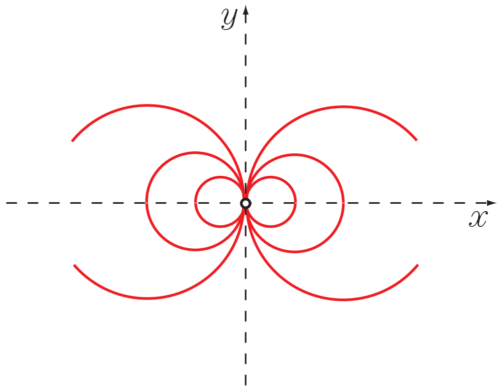
a) b)

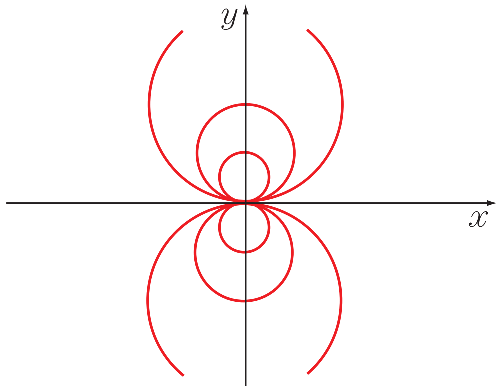




Obr. 4.2.42 Obr. 4.2.43

c) d)

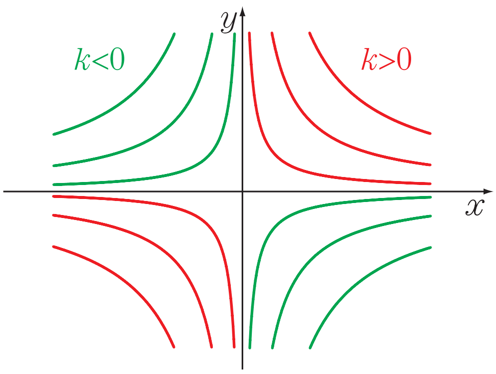




Obr. 4.2.44 Obr. 4.2.45

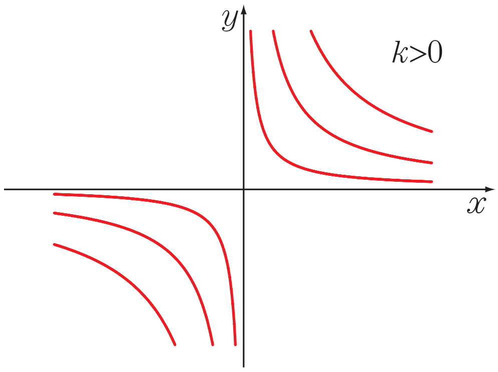
7. Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = x^2y^2$.

a)



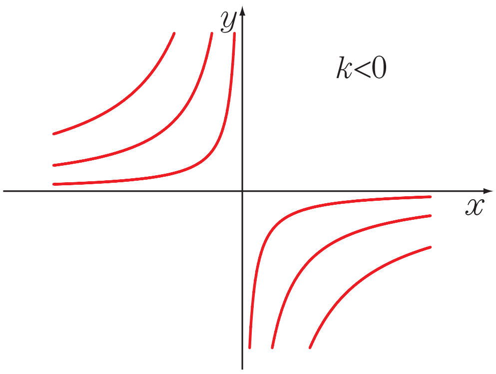
Obr. 4.2.46

b)



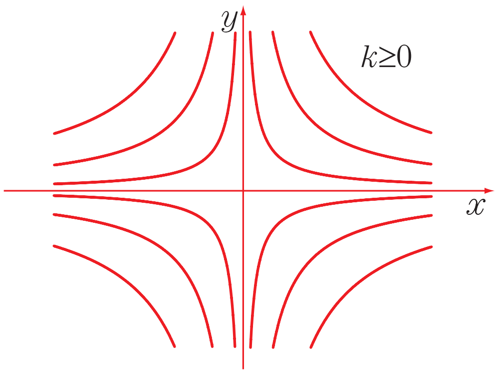
Obr. 4.2.47

c)



Obr. 4.2.48

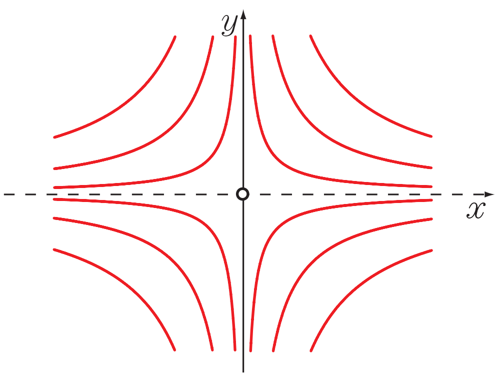
d)



Obr. 4.2.49

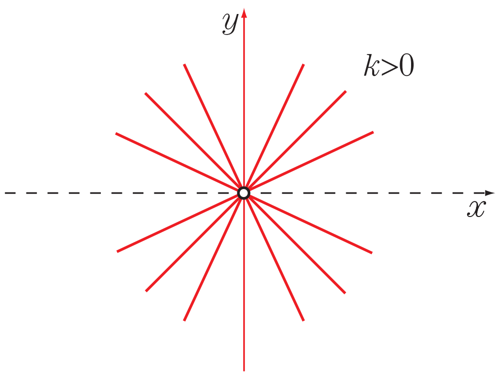
8. Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$.

a)



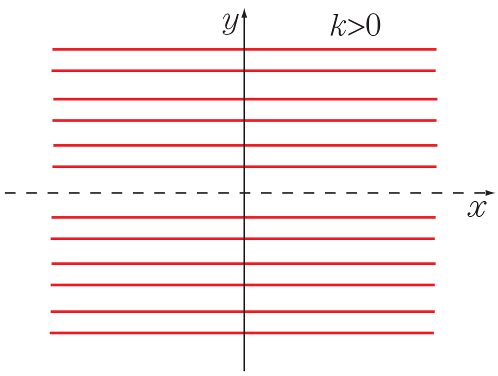
Obr. 4.2.50

b)



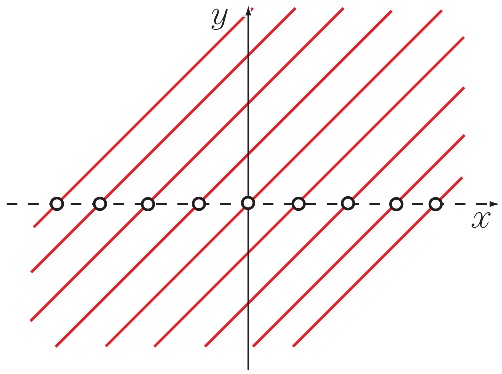
Obr. 4.2.51

c)



Obr. 4.2.52

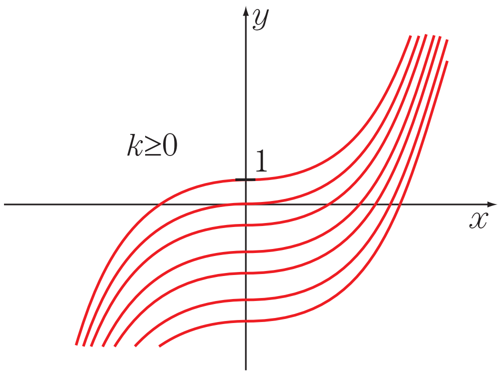
d)



Obr. 4.2.53

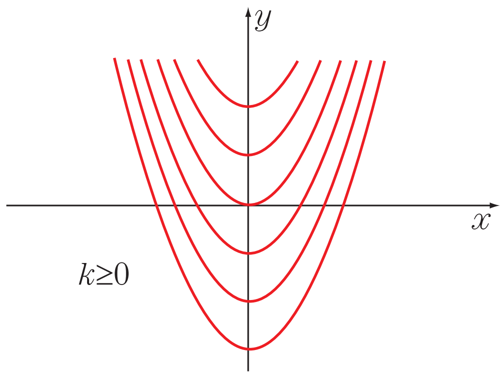
9. Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = (x^3 - y + 1)^2$.

a)



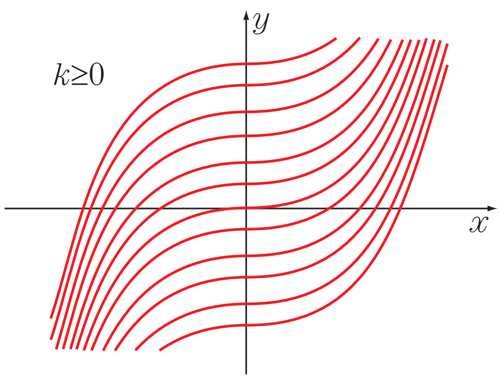
Obr. 4.2.54

b)



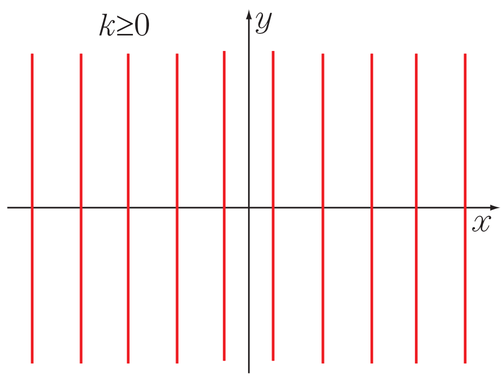
Obr. 4.2.55

c)



Obr. 4.2.56

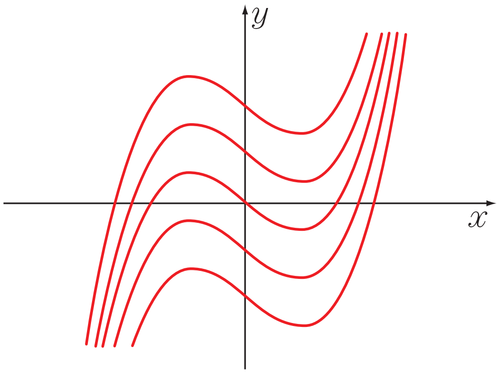
d)



Obr. 4.2.57

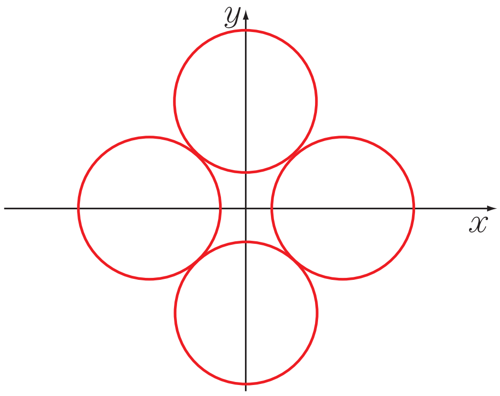
10. Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \dfrac{x^3 - x}{y}$.

a)



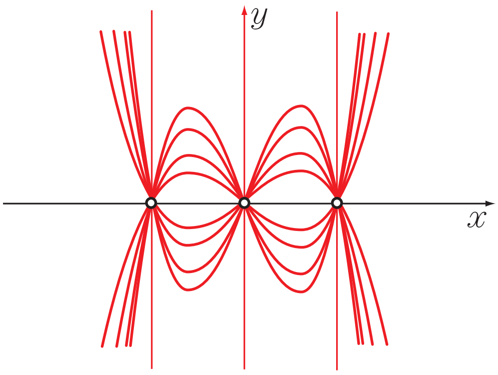
Obr. 4.2.58

b)



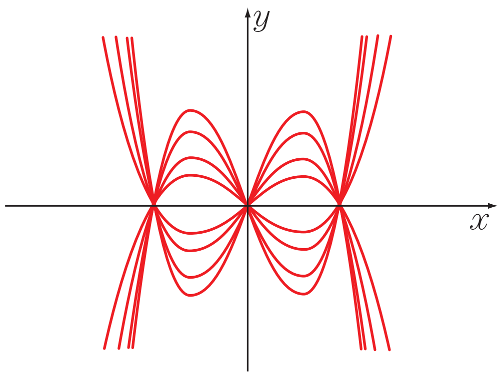
Obr. 4.2.59

c)



Obr. 4.2.60

d)



Obr. 4.2.61

Výsledky testu

1. c), **2.** b), **3.** a), **4.** d), **5.** a), **6.** a), **7.** d), **8.** b), **9.** c), **10.** c).

4.3. Limita a spojitost funkce více proměnných

V této kapitole zavedeme pojem limity a spojitosti pro funkci dvou proměnných. Pro funkce tří a více proměnných definujeme tyto pojmy zcela analogicky.

Výklad

Všichni již dobře znáte pojem limity funkce jedné proměnné, $y = f(x)$. Limita funkce $f : \mathbb{R} \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ v nějakém bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ charakterizuje chování této funkce resp. funkčních hodnot na okolí bodu x_0. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu $A \in \mathbb{R}$, jestliže „blížíme-li“ se k bodu x_0, pak se funkční hodnoty $f(x)$ „blíží“ k bodu A.

Připomeňme, že funkce f v bodě x_0 nemusí být vůbec definovaná, tj. hodnota $f(x_0)$ neexistuje, a přesto v tomto budě může existovat limita. Výpočet limity funkce jedné proměnné je poměrně snadný. K bodu x_0 se totiž můžeme blížit pouze ze dvou stran, zleva resp. zprava, a to vždy po přímce. Počítáme tak limitu zprava resp. limitu zleva funkce f. Rovnají-li se obě limity, pak říkáme, že limita v bodě x_0 existuje. Není-li tomu tak, pak limita funkce f v bodě x_0 neexistuje.

Hledáme-li limitu funkce $z = f(x, y)$, funkce dvou proměnných, limitní bod $P \in \mathbb{R}^2$. K tomuto bodu se můžeme „blížit“ mnoha způsoby, např. po různých přímkách, křivkách atd. Výpočet limity funkce dvou proměnných je mnohem obtížnější, a proto si ukážeme jen některé dílčí postupy pro výpočet vlastní limity funkce dvou proměnných.

Nejdříve si zavedeme pojem okolí bodu. K úplnému a přesnému zavedení tohoto pojmu by bylo potřeba definovat některé důležité objekty, kterými se zabývá matematická disciplína zvaná Topologie. Pro naše účely to však není nutné. Vystačíme si s následujícím zjednodušením.

Definice 4.3.1.

Nechť $P \in \mathbb{R}^2$ je bod.

Okolím bodu P budeme rozumět otevřený kruh $\mathcal{O}(P) \subset \mathbb{R}^2$ se středem v bodě P.

Otevřeným kruhem rozumíme kruh bez hraniční kružnice.

Prstencovým okolím (resp. **neúplným okolím**) bodu P rozumíme okolí $\mathcal{O}(P)$, ze kterého vyloučíme bod P. Značíme $\mathring{\mathcal{O}}(P) = \mathcal{O}(P) \backslash \{P\}$.

Deltovým okolím bodu P rozumíme otevřený kruh $\mathcal{O}_\delta(P) \subset \mathbb{R}^2$, $\delta > 0, \delta \in \mathbb{R}$, se středem v bodě P a poloměrem δ.

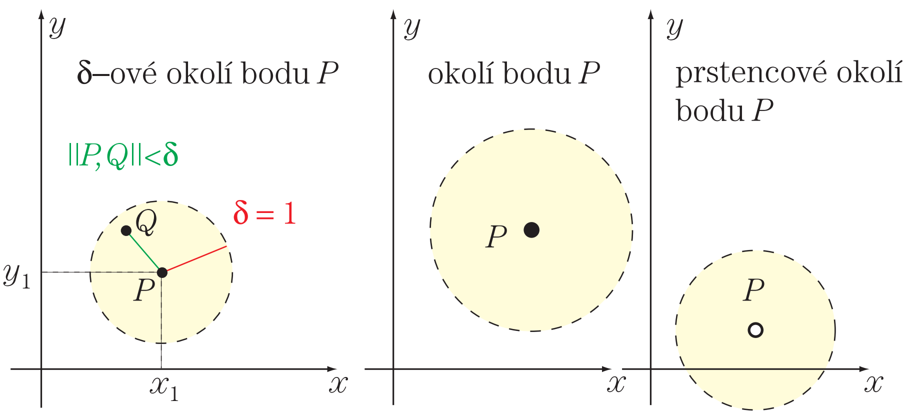
Prstencovým deltovým okolím bodu P rozumíme okolí $\mathcal{O}_\delta(P)$, ze kterého vyloučíme bod P. Značíme $\mathring{\mathcal{O}}_\delta(P)$.

Deltové okolí bodu P si představíme jako otevřený kruh se středem v bodě P a poloměrem δ. Jinými slovy to znamená, že takovým okolím je množina bodů Q, jejichž vzdálenost od P je menší než δ,

$$\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq ||P, Q|| < \delta\}.$$

Připomeňme, že je-li $P = [x_1, y_1]$, $Q = [x_2, y_2]$, pak vzdálenost

$$||P, Q|| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$



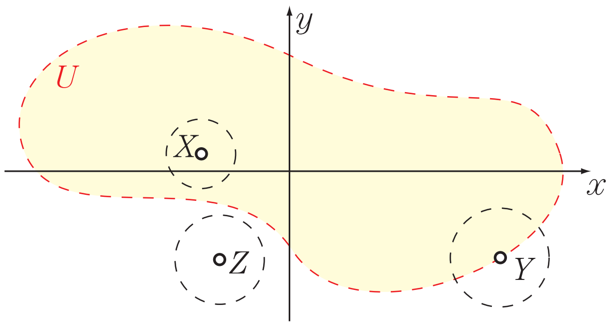
Obr. 4.3.1

Poznámka
Rozdíl mezi okolím bodu P a deltovým okolím bodu P je jen v tom, že ve druhém případě explicitně specifikujeme poloměr takového okolí. ***Deltové okolí*** *bodu P je tedy okolí bodu P s poloměrem δ.*

Limity musíme počítáme v tzv. **hromadných bodech**. Je to proto, aby jsme se k příslušnému limitnímu bodu mohli „blížit“ .

Definice 4.3.2.
Buď $U \subset \mathbb{R}^2$. Bod $X \in \mathbb{R}^2$ se nazývá **hromadný bod** množiny U, jestliže každé jeho prstencové okolí $\mathring{\mathcal{O}}(X)$ má s množinou U neprázdný průnik, tj. $\mathring{\mathcal{O}}(X) \cap U \neq \emptyset$.

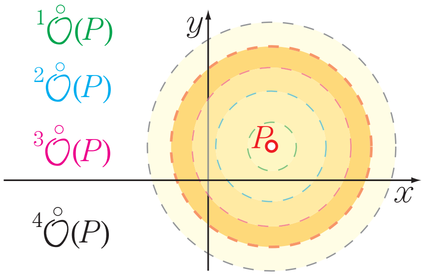
Na Obr. 4.3.2 body X, Y jsou hromadnými body množiny U, bod Z není hromadným bodem množiny U.



Obr. 4.3.2

Skutečně, každé prstencové okolí bodu X obsahuje nějaké body z množiny U, každé prstencové okolí bodu Y obsahuje nějaké body z množiny U. Na druhou stranu existuje prstencové okolí bodu Z takové, že neobsahuje žádný bod z množiny U.

Hledáme-li limitu funkce $z = f(x, y)$ v nějakém bodě $P \in \mathbb{R}^2$, pak bod P musí být hromadným bodem množiny D_f. Pokud tomu tak nebude, nemáme se po čem k bodu P „blížit“ , a nemá tedy smysl takovou limitu počítat. Všimněme si ještě, že hromadný bod množiny vůbec nemusí v dané množině ležet, tj. vůbec nemusí ležet v definičním oboru funkce f. Např. budeme-li uvažovat otevřený kruh se středem v bodě P, bez bodu P. Bod P je hromadným bodem otevřeného kruhu, protože každé prstencové okolí $\mathring{\mathcal{O}}(P)$ obsahuje body z otevřeného kruhu.



Obr. 4.3.3

Definice 4.3.3.

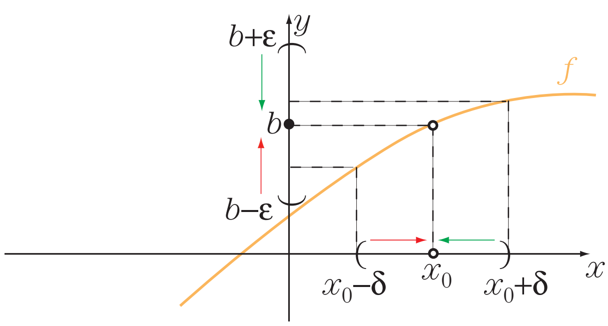
Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v hromadném bodě $P = [x_0, y_0]$ **limitu** $a \in R$, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall X \in \mathring{\mathcal{O}}_\delta(P)$ platí

$$|f(X) - a| < \varepsilon.$$

Volíme následující označení limity funkce,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = a, \text{ resp. } \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x, y) = a, \text{ resp. } \lim_{X\to P} f(X) = a.$$

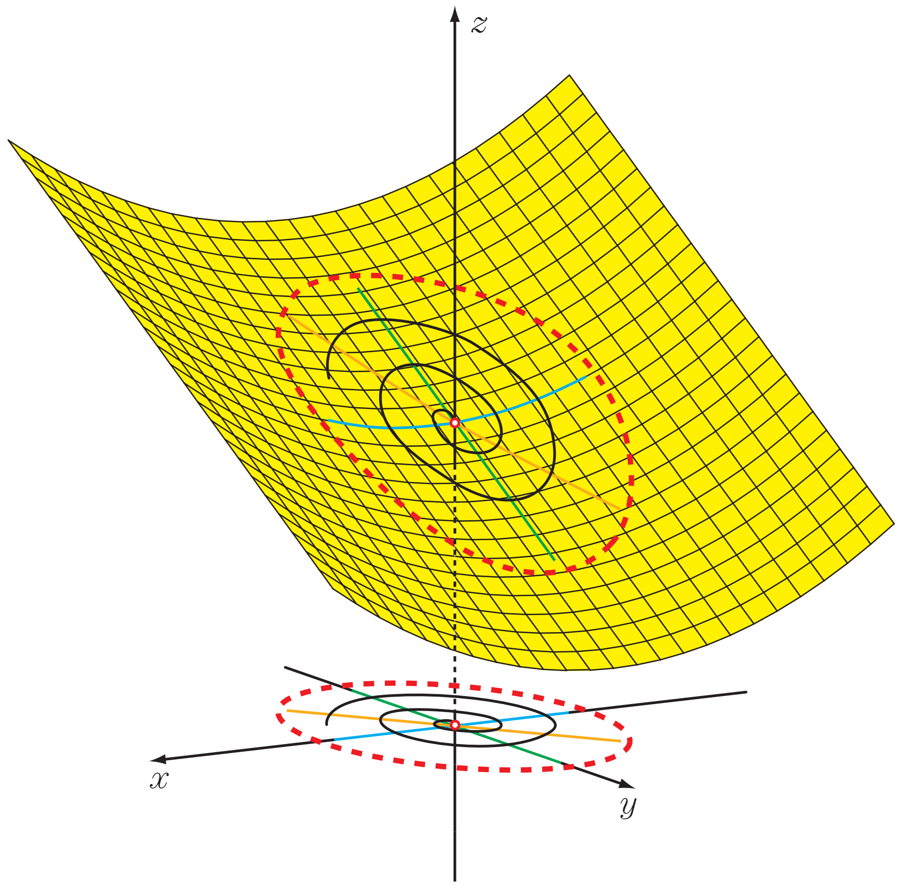
Na Obr. 4.3.4 je zobrazena limita funkce jedné proměnné. Limita funkce f v bodě x_0 existuje, když existují stejné jednostranné limity, tj. blížíme-li se k bodu x_0 zleva, blíží se funkční hodnoty $f(x)$ k číslu b. Totéž platí v případě, že se k bodu x_0 blížíme zprava, funkční hodnoty se blíží opět k číslu b.



Obr. 4.3.4

Stačí prozkoumat právě dvě možnosti, k limitnímu bodu x_0 se můžeme blížit buď zleva nebo zprava, a to vždy po přímce, ose x.

Pro funkci dvou proměnných je situace mnohem složitější. Možností, jak se blížit k limitnímu bodu je velmi mnoho, viz. Obr. 4.3.5.



Obr. 4.3.5

K počátku se můžeme blížit např. po přímkách procházejících počátkem, nebo po spirále atd.

Nejčastěji se při výpočtu limit funkcí dvou proměnných budeme setkávat se třemi případy. Výpočet provedeme dosazením limitního bodu, v podstatě takto vypočítáme limitu jako funkční hodnotu v limitním bodě. Nebo limitu počítáme postupným upravováním funkce. Třetí možností je důkaz neexistence dané limity.

Poznámka
Následující úlohy, a to především úlohy k samostatnému řešení a úlohy obsažené v kontrolním testu, jsou určeny především pro zájemce o tuto problematiku. Podstatné je, aby jste si uvědomili základní rozdíl mezi limitou funkce jedné a limitou funkce více proměnných.

Řešené úlohy

Příklad 4.3.1. Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y}.$$

Řešení: Dosadíme limitní bod, tedy

$$\lim_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y} = \frac{2+2\cdot 4}{2\cdot 2+4} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

Příklad 4.3.2. Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1}.$$

Řešení: Postupným upravováním dostaneme

$$\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1} =„\tfrac{0}{0}“= \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{x(y+2)+(y+2)}{y^2(x+1)+(x+1)}$$
$$= \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{(y+2)(x+1)}{(x+1)(y^2+1)} = \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{y+2}{y^2+1} = 2.$$

Příklad 4.3.3. Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Řešení: K bodu $[0,0]$ se budeme blížit po přímkách, tj. cestu volíme po přímkách obsahujících bod $[0,0]$. Takové přímky mají rovnice $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$ je parametr. Bude-li řešení záviset na parametru k, limita neexistuje. Dosadíme a dostáváme

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2k}{1+k^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Limita závisí na parametru k. Pro různé hodnoty k dostáváme různou hodnotu limity. Limita proto neexistuje. Pokud limita nebude záviset na parametru k, pak o existenci limity nemůžeme nic říci. Nevíme, jestli existuje nebo neexistuje. Důvod je ten, že přímky tvoří pouze část možností, jak se k limitnímu bodu můžeme blížit.

Příklad 4.3.4. Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[1,2]} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}.$$

Řešení: K vypočítání této limity použijeme následující **větu o dvojnásobné limitě**.

Věta 4.3.1.

Jestliže existují limity

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)=a_1,\ \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)=a_2,\ \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)=a,$$

pak $a=a_1=a_2$.

Prakticky postupujeme tak, že si vybereme jednu proměnnou, např. proměnnou y, druhou pak považujeme za konstantu. Počítáme limitu funkce jedné proměnné, funkce závisející pouze na y. Dostaneme výraz, který již nebude obsahovat proměnnou y, ale pouze x. Nyní x budeme chápat jako proměnnou a vypočítáme limitu z funkce jedné proměnné, funkce závisející pouze na x, získáme hodnotu a_1,

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 2}\frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-4}{x^4+16-17}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{4(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{4}{(x^2+1)}=2. \end{aligned}$$

Totéž uděláme pro obě proměnné v opačném pořadí a dostáváme hodnotu a_2,

$$a_2=\lim_{y\to 2}\left(\lim_{x\to 1}\frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right)=\lim_{y\to 2}\frac{y^2-4}{(y^2+4)(y^2-4)}=\lim_{y\to 2}\frac{1}{(y^2+4)}=\frac{1}{8}.$$

Vidíme, že $a_1\neq a_2$, limita neexistuje. Pozor, jestliže $a_1=a_2$, pak o existenci limity se opět nedá nic říci. Může, ale také nemusí existovat.

Na závěr kapitoly si nadefinujeme spojitost funkce dvou proměnných.

Definice 4.3.4.

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ je **spojitá v bodě** $[x_0, y_0] \in \mathrm{D}_f$, jestliže platí

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Funkce $z = f(x, y)$ je **spojitá**, je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,6]} \frac{2x+3y-1}{x^4-y}$.

2. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}]} \sin(x+y)\cdot\cos(x-y)$.

3. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,4]} \frac{x^3+1}{y(x+1)}$.

4. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x(y+1)}{2x+3y}$.

5. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[1,4]} \frac{x^2-1}{y-4}$.

6. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3-y^2}{xy-y^3}$.

7. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,-3]} \frac{y^3-x^3+26}{x+y+4}$.

8. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]} \frac{2x+1}{x+y+1}$.

9. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+x}{xy+y}$.

10. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(x^2+y+1)(x^2-y+1)-1}{y}$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. -3.

2. $\frac{3}{4}$.

3. $\lim_{[x,y]\to[-1,4]} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{y(x+1)} = \lim_{[x,y]\to[-1,4]} \frac{x^2-x+1}{y} = \frac{3}{4}$.

4. $(y = kx)$, $\lim_{x\to 0} \frac{x(kx+1)}{x(2+3k)} = \lim_{x\to 0} \frac{kx+1}{2+3k} = \frac{1}{2+3k}$.

5. $(y - 4 = k(x-1))$, $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{k(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{k} = \frac{2}{k}$.

6. $(y = kx)$, $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(x-k^2)}{x^2(k-k^3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-k^2}{k(1-k^2x)} = -k$.

7. $\lim_{x\to -1}(\lim_{y\to -3} \frac{y^3-x^3+26}{x+y+4}) = \lim_{x\to -1} \frac{-x^3-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{-(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} -(x^2-x+1) = -3$, $\lim_{y\to -3}(\lim_{x\to -1} \frac{y^3-x^3+26}{x+y+4}) = \lim_{y\to -3} \frac{y^3+27}{y+3} = \lim_{y\to -3} \frac{(y+3)(y^2-3y+9)}{y+3}) = \lim_{y\to -3} y^2-3y+9 = 27$, $-3 \neq 27$.

8. $(y + \frac{1}{2} = k(x + \frac{1}{2}))$, $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{\frac{1}{2}(2x+1)(k+1)} = \frac{2}{k+1}$.

9. $\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x(x+1)}{y(x+1)} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x}{y}$, $(y = kx)$, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{kx} = \frac{1}{k}$.

10. $(y = kx^2)$, $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+kx^2+1)(x^2-kx^2+1)-1}{kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2-k^2x^2+2)}{kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2-k^2x^2+2)}{k} = \frac{2}{k}$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} (\tan y + 2\cot(x+y))$.

a) $3\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}$ a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) neexistuje

2. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^3-y}{x+1}$.

a) 0 b) neexistuje c) 1 d) 2

3. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[1,2]} \dfrac{x+y^3}{y-x^3}$.

a) 0 b) 9 c) neexistuje d) $-\frac{9}{7}$

4. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[-1,1]} \dfrac{x^2+2xy+y^2}{x+y}$.

a) 2 b) neexistuje c) 0 d) 1

5. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x+y^3}{y-x^3}$.

a) $-\frac{9}{7}$ b) 0 c) 9 d) neexistuje

6. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[4,2]} \dfrac{2x-8}{y-2}$.

   a) neexistuje b) -2 c) 0 d) -1

7. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x(y-1)}{y}$.

   a) -1 b) 0 c) neexistuje d) 2

8. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[2,-3]} \dfrac{(x-2)(y+1)}{x+y+1}$.

   a) neexistuje b) -2 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

9. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[5,8]} \dfrac{5y-8x}{x-5}$.

   a) 5 b) 8 c) 13 d) neexistuje

10. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2}{y}$.

    a) 3 b) 1 c) neexistuje d) 0

Výsledky testu

1. b), **2.** a), **3.** b), **4.** c), **5.** d) ($y = \frac{1}{k}$), **6.** a) ($y = \frac{2}{k}$), **7.** c) ($y = \frac{-1}{k}$), **8.** a) ($y = \frac{-2}{k+1}$), **9.** d) ($y = 5k - 8$), **10.** c) (volíme $y = kx^2$, dostáváme $y = \frac{1}{k}$).

Kontrolní otázky

Otázka 1. Co je to funkce více proměnných?

Otázka 2. Uveďte příklad funkce dvou proměnných, funkce tří proměnných.

Otázka 3. Jak hledáme graf funkce dvou proměnných?

Otázka 4. K čemu se používá vrstevnice?

Otázka 5. Co rozumíme okolím bodu?

Otázka 6. Srovnejte definice limity funkce jedné proměnné a limity funkce dvou proměnných.

Otázka 7. Co je to hromadný bod množiny?

Otázka 8. Proč hledáme limity v hromadných bodech?

Otázka 9. S jakými obtížemi se setkáváme při hledání limit funkcí dvou proměnných?

Otázka 10. Kdy je funkce dvou proměnných spojitá.

Shrnutí lekce

Σ

V první části kapitoly jsme se seznámili s problematikou funkcí více proměnných. Naučili jsme se hledat definiční obor, pracovali jsme především s funkcemi dvou proměnných. Pro funkce tří a více proměnných hledáme definiční obor analogicky, tj. snažíme se najít omezující podmínky a specifikovat na základě těchto podmínek množinu bodů, ve kterých je taková funkce definovaná, ve kterých má smysl.

Ukázali jsme si způsob jak hledat grafy funkcí dvou proměnných. Grafy funkcí tří a více proměnných se již ovšem nedají graficky znázornit v trojrozměrném prostoru.

Zjistili jsme, že limita funkce dvou proměnných je přímým zobecněním limity funkce jedné proměnné. Diskutovali jsme některé problémy, které nás čekají při konkrétním hledání limit. Zavedli jsme si pojem spojité funkce dvou proměnných.

5. Diferenciální počet funkcí více proměnných

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme zabývat diferenciálním počtem pro funkce více proměnných, především budeme pracovat s funkcemi dvou proměnných. Ukážeme si, jak se zobecňuje pojem derivace funkce jedné proměnné a jaký je pak geometrický význam derivace funkce dvou proměnných. Seznámíme se s totálním diferenciálem funkce více proměnných a s implicitními funkcemi a jejich derivacemi.

Cíle

Parciální derivace, parciální derivace vyšších řádů, smíšené parciální derivace, totální diferenciál, tečná rovina, normála, Taylorův polynom, implicitní funkce.

Předpokládané znalosti

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, tj. derivace funkce, geometrický význam derivace funkce v bodě, totální diferenciál funkce jedné proměnné, Taylorův polynom.

5.1. Parciální derivace

Zavedeme pojem parciální derivace pro funkce dvou proměnných a ukážeme, jak se definuje parciální derivace funkce n-proměnných.

Podobně jako derivaci funkce jedné proměnné, definujeme parciální derivace funkce více proměnných jako „jisté “ limity.

Definice 5.1.1.

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ **parciální derivaci** (prvého řádu) **podle** x, jestliže existuje (vlastní) limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ **parciální derivaci** (prvého řádu) **podle** y, jestliže existuje (vlastní) limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Všimněme si, že obě limity jsou limity funkce jedné proměnné. Počítáme limitu funkce, která závisí pouze na parametru h, jen h se mění.

Poznámka

1. *Obvyklá označení pro parciální derivaci funkce* f *podle* x *v bodě* $A = [x_0, y_0]$ *jsou:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0), \quad f'_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(A), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(A), \text{ atd.}$$

2. *Parciální derivace funkce* $z = f(x, y)$*, tj.* $\frac{\partial f}{\partial x}$*, resp.* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *jsou opět funkcemi proměnných* (x, y) *se stejným nebo menším definičním oborem.*

3. *Parciální derivaci pro funkci n proměnných definujeme následujícím způsobem: Nechť* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *je funkce* n *proměnných,* $A = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n] \in \mathbb{R}^n$*, pak*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i + h, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}{h}.$$

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ je definována jako „obyčejná“ derivace funkce podle proměnné x_i, a lze tedy očekávat, že pro parciální derivaci budou platit stejná pravidla jako pro derivaci funkce jedné proměnné.

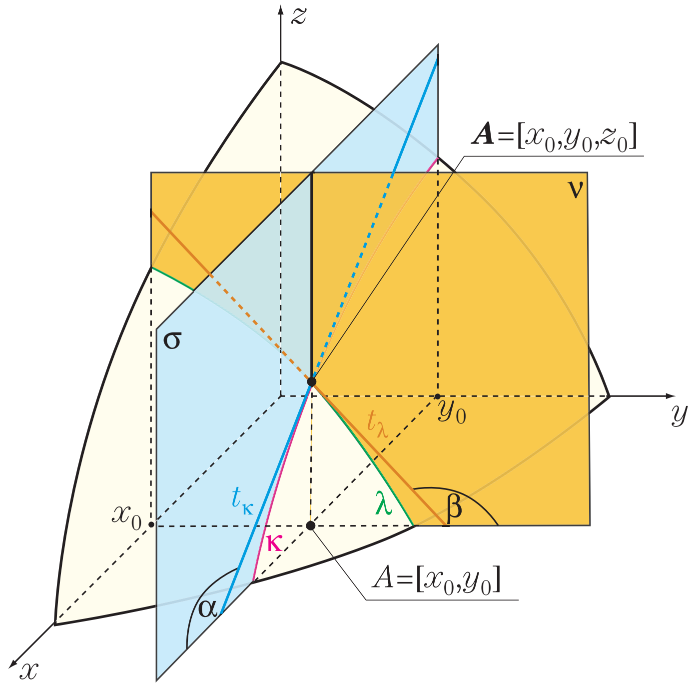
Věta 5.1.1.
Nechť $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ mají parciální derivaci podle proměnné x_i na $Q \subseteq \mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_g$, $i = \{1, 2, \dots n\}, X = [x_1, x_2, \dots x_n]$. Pak platí:

1. Pravidlo pro derivování součtu resp. rozdílu dvou funkcí n-proměnných:
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f(X) \pm g(X)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \pm \frac{\partial g}{\partial x_i}(X),$$
2. Pravidlo pro derivování součinu dvou funkcí n-proměnných:
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f(X) \cdot g(X)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \cdot g(X) + f(X) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(X),$$
3. Pravidlo pro derivování podílu dvou funkcí n-proměnných:
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(X)}{g(X)}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \cdot g(X) - f(X) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(X)}{g^2(X)}.$$

Jak budeme postupovat při parciálním derivování v konkrétních příkladech? Postupujeme tak, že proměnné, podle kterých se nederivuje, považujeme za konstanty. Proměnná, podle které derivujeme, je pak nezávislá proměnná.

Již víme jaký geometrický význam má derivace funkce jedné proměnné. Derivace funkce jedné proměnné v daném bodě je **směrnice** tečny ke grafu funkce jedné proměnné v tomto bodě. Jak to bude vypadat v případě derivací funkcí dvou proměnných, jaký bude jejich **geometrický význam**?

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných x, y. Nechť σ je rovina daná rovnicí $y = y_0$. Rovina σ je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou xz (xz je dána rovnicí $y = 0$). Průnikem roviny σ s grafem funkce $z = f(x, y)$ je křivka κ. Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $A = [x_0, y_0]$, je směrnice $(\tan \alpha)$ tečny t_κ ke křivce κ v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$. Analogicky uvažujme rovinu ν danou rovnicí $x = x_0$. Rovina ν je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou yz (yz je dána rovnicí $x = 0$). Průnikem roviny ν s grafem funkce $z = f(x, y)$ je křivka λ. Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$ je směrnice $(\tan \beta)$ tečny t_λ ke křivce λ v bodě $\boldsymbol{A}$, Obr. 5.1.



Poznámka
Pro jednoduchost bod z definičního oboru funkce f budeme značit velkým písmenem, např. $A \in \mathrm{D}_f$. Jemu odpovídající bod na grafu funkce f budeme značit tučně, tj. $\boldsymbol{A}$.

Definice 5.1.2.

Parciální derivace druhého řádu funkce $z = f(x,y)$ jsou definovány vztahy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Parciální derivace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nazýváme **smíšené parciální derivace**.

Analogicky definujeme parciální derivace druhého řádu pro funkce více proměnných a také parciální derivace vyšších řádů. Pořadí proměnných ve jmenovateli určuje pořadí jednotlivých parciálních derivací.

Následující **Schwarzova věta** charakterizuje tzv. „záměnnost“ smíšených parciálních derivací.

Věta 5.1.2.
Jsou-li smíšené parciální derivace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ spojité v bodě $A = [x_0, y_0]$, pak jsou si v tomto bodě rovny, tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A).$$

Poznámka
Za obdobných předpokladů věta platí i pro parciální derivace vyšších řádů, také pro funkce více proměnných. Např. nechť $u = f(x, y, z)$. Jsou-li $\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z \partial x}$ a $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^2 \partial z}$ v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ spojité, pak jsou si v tomto bodě rovny.

Řešené úlohy

Příklad 5.1.1. Určete všechny parciální derivace funkce

$$f(x, y) = 3x^4y^2 - 5\arctan x^2.$$

Řešení: Jedná se o funkci dvou proměnných x, y. Hledáme tedy parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

1. Nejdříve budeme derivovat zadanou funkci podle x, proměnnou y budeme považovat za konstantu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^3y^2 - \frac{5}{1 + x^4}2x = 12x^3y^2 - \frac{10x}{1 + x^4}.$$

2. Derivujeme podle y, nyní x budeme považovat za konstantu:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^4y.$$

Příklad 5.1.2. Určete všechny parciální derivace funkce

$$g(x, y, z) = 3x^2 + \frac{x - y}{x + y} - e^{x-2y+3z}.$$

Řešení: Postupně zadanou funkci derivujeme podle jednotlivých proměnných.

1. Derivujeme podle x, proměnné y, z považujeme za konstanty:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= 6x + \frac{1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} - \mathrm{e}^{x-2y+3z}\cdot 1\\ &= 6x + \frac{2y}{(x+y)^2} - \mathrm{e}^{x-2y+3z}.\end{aligned}$$

2. Derivujeme podle y, proměnné x, z považujeme za konstanty:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} - \mathrm{e}^{x-2y+3z}\cdot(-2) = \frac{-2x}{(x+y)^2} + 2\mathrm{e}^{x-2y+3z}.$$

3. Derivujeme podle z, proměnné x, y považujeme za konstanty:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\mathrm{e}^{x-2y+3z}\cdot 3 = -3\mathrm{e}^{x-2y+3z}.$$

Příklad 5.1.3. Určete hodnoty všech parciálních derivací funkce

$$f = x\mathrm{e}^{-x^2 y}$$

v bodě $A = [1, -1]$.

Řešení: Vypočítáme jednotlivé parciální derivace zadané funkce a určíme jejich funkční hodnotu v bodě A přímým dosazením:

1. Derivujeme podle x, proměnnou y považujeme za konstantu, a poté do derivace funkce f podle x, což je opět funkce proměnných x, y, dosadíme bod A:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \mathrm{e}^{-x^2 y} + x\mathrm{e}^{-x^2 y}(-2xy)\Big|_{A=[1,-1]} = \mathrm{e}^{-x^2 y}(1-2x^2 y)\Big|_{A=[1,-1]} = 3\mathrm{e}.$$

2. Derivujeme podle y, proměnnou x považujeme za konstantu, a poté do derivace funkce f podle y dosadíme bod A:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = x\mathrm{e}^{-x^2 y}(-x^2)\Big|_{A=[1,-1]} = -x^3\mathrm{e}^{-x^2 y}\Big|_{A=[1,-1]} = -\mathrm{e}.$$

Příklad 5.1.4. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce

$$z = x^2 y + \frac{y^3}{x^4}.$$

Řešení: Nejdříve vypočítáme parciální derivace prvého řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \frac{4y^3}{x^5}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{3y^2}{x^4}.$$

Derivujeme ještě jednou podle x i podle y funkce $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2y + \frac{20y^3}{x^6},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{6y}{x^4},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2x - \frac{12y^2}{x^5},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2x - \frac{12y^2}{x^5}.
\end{aligned}$$

Příklad 5.1.5. Vypočítejte $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, je-li

$$z = y^2 \sin x.$$

Řešení: Zadanou funkci z budeme postupně derivovat dvakrát podle x a poté podle y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \sin x, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -2y \sin x.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.

2. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x, y) = \tan(x^3 y)$ v bodě $A = [0, \pi]$.

3. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x, y, z) = \mathrm{e}^{xyz} + \mathrm{e}^{x+2y+3z} + x^y + y^z$.

4. Určete všechny parciální derivace funkce
$f(x, y, z) = \sin x \cos y + \sin(x + y)\cos(y + z) + \sin z$ v bodě $A = [0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

5. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce
$f(x, y) = y \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{(2x + 3y)^3}$.

6. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ v bodě $A = [1, -1]$.

7. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y,z) = x^2y^3z^3 + x^4y^5 - xy^7z - z^6 + y^2z^2$.

8. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y,z) = \arcsin y + (x^3 + y^2 + z)\mathrm{e}^z$ v bodě $A = [2, \frac{1}{2}, 0]$.

9. Vypočtěte parciální derivaci $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial x \partial y}$ funkce $f(x,y) = 2x\mathrm{e}^y + 3y\mathrm{e}^x$.

10. Vypočtěte parciální derivaci $\dfrac{\partial^5 f}{\partial y \partial z \partial x \partial z \partial x}$ funkce $f(x,y,z) = \cos(2x)\cos(4y)\cos(3z)$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos(x^2+y^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos(x^2+y^2)$.

2. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y}{\cos^2(x^3y)}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{\cos^2(x^3y)}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$.

3. $\frac{\partial f}{\partial x} = yz\mathrm{e}^{xyz} + \mathrm{e}^{x+2y+3z} + yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xz\mathrm{e}^{xyz} + 2\mathrm{e}^{x+2y+3z} + x^y\ln x + zy^{z-1}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = xy\mathrm{e}^{xyz} + 3\mathrm{e}^{x+2y+3z} + y^z\ln y$.

4. $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x\cos y + \cos(x+y)\cos(y+z)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x\sin y + \cos(x+y)\cos(y+z) - \sin(x+y)\sin(y+z)$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(x+y)\sin(y+z) + \cos z$, $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{1}{4}(2-\sqrt{3})$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial z}(A) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

5. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}} + 3\sqrt{2x+3y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \arcsin\sqrt{x} + \frac{9}{2}\sqrt{2x+3y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{y(1-2x)}{4[x(1-x)]^{\frac{3}{2}}} + 3(2x+3y)^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{27}{4}(2x+3y)^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}} + \frac{9}{2}(2x+3y)^{-\frac{1}{2}}$.

6. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = \frac{1}{2}$.

7. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3z^3 + 4x^3y^5 - y^7z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2z^3 + 5x^4y^4 - 7xy^6z + 2yz^2$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2y^3z^2 - xy^7 - 6z^5 + 2y^2z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3z^3 + 12x^2y^5$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2yz^3 + 20x^4y^3 - 42xy^5z + 2z^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6x^2y^3z - 30z^4 + 2y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 6xy^2z^3 + 20x^3y^4 - 7y^6z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = 6xy^3z^2 - y^7$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = 9x^2y^2z^2 - 7xy^6 + 4yz$.

8. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + 2y\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \mathrm{e}^z + (x^3+y^2+z)\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = y(1-y^2)^{-\frac{3}{2}} + 2\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (2+x^3+y^2+z)\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = 3x^2\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = 2y\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 12$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = \frac{4\sqrt{3}}{9} + 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A) = \frac{41}{4}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(A) = 12$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(A) = 1$.

9. $\frac{\partial^4 f}{\partial y\partial x\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(2x\mathrm{e}^y + 3y\mathrm{e}^x)}{\partial y}\right)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(2x\mathrm{e}^y + 3\mathrm{e}^x)}{\partial x}\right)\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(2\mathrm{e}^y+3\mathrm{e}^x)}{\partial x}\right) = \frac{\partial(3\mathrm{e}^x)}{\partial y} = 0.$$

10. $\dfrac{\partial^5 f}{\partial y \partial z \partial x \partial z \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial(\cos(2x)\cos(4y)\cos(3z))}{\partial x}\right)\right)\right)\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(-2\sin(2x)\cos(4y)\cos(3z))}{\partial z}\right)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(6\sin(2x)\cos(4y)\sin(3z))}{\partial x}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(12\cos(2x)\cos(4y)\sin(3z))}{\partial z}\right) = \frac{\partial(36\cos(2x)\cos(4y)\cos(3z))}{\partial y}$$

$$= -144\cos(2x)\sin(4y)\cos(3z).$$

Kontrolní test

1. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x, y) = x\sin^2(xy^2)$.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \sin^2(xy^2) + 2xy^2\cos(xy^2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y\cos(xy^2)$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\sin(xy^2)\cos(xy^2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y\sin(xy^2)\cos(xy^2)$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \sin^2(y^2) + 2xy^2\sin(y^2)\cos(y^2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y\sin(2xy)\cos(2xy)$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \sin^2(xy^2) + 2xy^2\sin(xy^2)\cos(xy^2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y\sin(xy^2)\cos(xy^2)$

2. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x, y) = x^2\ln y$ v bodě $A = [3, 1]$.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 9$ b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 6$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 9$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 3$ d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 6$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 3$

3. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x, y, z) = \arcsin(xy^2) - \arccos(xz^3)$.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{\sqrt{1-xy^2}} - \dfrac{z^3}{\sqrt{1-xz^3}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2xy}{\sqrt{1-xy^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{-3xz^2}{\sqrt{1-xz^3}}$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^4}} + \dfrac{z^3}{\sqrt{1-x^2z^6}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2xy}{\sqrt{1-x^2y^4}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{3xz^2}{\sqrt{1-x^2z^6}}$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^4}} - \dfrac{z^3}{\sqrt{1-x^2z^6}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2xy}{\sqrt{1-x^2y^4}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{-3xz^2}{\sqrt{1-x^2z^6}}$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{\sqrt{1-xy^2}} + \dfrac{z^3}{\sqrt{1-xz^3}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2xy}{\sqrt{1-xy^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{3xz^2}{\sqrt{1-xz^3}}$

4. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x, y, z) = (x+y+z)(3x+4y+5z)$ v bodě $A = [-1, 2, -2]$.

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(A)=1,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(A)=2,\quad \frac{\partial f}{\partial z}(A)=3$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(A)=-8,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(A)=-9,\quad \frac{\partial f}{\partial z}(A)=-10$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(A)=7,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(A)=6,\quad \frac{\partial f}{\partial z}(A)=5$

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(A)=11,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(A)=11,\quad \frac{\partial f}{\partial z}(A)=11$

5. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y)=x^y$.

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^y\ln(x^2),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=yx^{y-1}\ln x$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y^2x^{y-1},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x^{y-1}(1-y\ln x)$

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^y(\ln x)^2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x^{y-1}(y\ln x+1)$

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y^2x^{y-2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=yx^{y-1}\ln x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x^{y-1}(y\ln x+1)$

6. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y)=\ln\frac{x}{y}$ v bodě $A=[4,5]$.

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=-\frac{1}{16},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)=\frac{1}{25},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A)=0$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=\frac{1}{16},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)=-\frac{1}{25},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A)=1$

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=\frac{1}{4},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)=\frac{1}{5},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A)=0$

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=-\frac{1}{4},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)=-\frac{1}{5},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A)=1$

7. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y,z)=yz\arctan x$.

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2yz}{\cos^3 x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{2z}{\cos^3 x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{2y}{\cos^3 x},$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\arctan x$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{z}{1+x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{y}{1+x^2},$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{x}{1+x^2}$

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{2yz\sin x}{\cos^3 x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\dfrac{2z\sin x}{\cos^3 x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}=\dfrac{2y\sin x}{\cos^3 x}$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}=\arctan x$

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{-2xyz}{(1+x^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\dfrac{z}{1+x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}=\dfrac{y}{1+x^2}$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}=\arctan x$

8. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce
$f(x,y,z) = z\mathrm{e}^{xz} + y\mathrm{e}^{xy}$ v bodě $A = [1,2,3]$.

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=27\mathrm{e}^3+8\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)=3\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A)=4\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)=7\mathrm{e}^2$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(A)=14\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(A)=0$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=8\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(A)6\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=(A)3\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)=8\mathrm{e}^2$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(A)=12\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(A)=5\mathrm{e}^3$

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=27\mathrm{e}^3+8\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)=4\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A)=5\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)=8\mathrm{e}^2$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(A)=15\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(A)=0$

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=27\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)=9\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A)=16\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)=8\mathrm{e}^2$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(A)=7\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(A)=2\mathrm{e}^2$

9. Vypočtěte parciální derivaci $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial x \partial y}$ funkce $f(x,y) = \ln(x+2y)$.

a) $\dfrac{24}{(x+2y)^3}$ b) $-\dfrac{24}{(x+2y)^4}$ c) $\dfrac{6}{(x+2y)^3}$ d) $-\dfrac{6}{(x+2y)^4}$

10. Vypočtěte parciální derivaci $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}$ funkce $f(x,y) = \sqrt{(5x-4y)^7}$.

a) 0 b) $\frac{105}{8}\sqrt{5x-4y}$ c) $1050\sqrt{5x-4y}$ d) $\sqrt{21(5x-4y)^4}$

Výsledky testu

1. d), **2.** a), **3.** b), **4.** b), **5.** c), **6.** a), **7.** d), **8.** c), **9.** b), **10.** c)

5.2. Totální diferenciál, tečná rovina, Taylorův polynom

Definice 5.2.1.

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ je v bodě $A = [x_0, y_0]$ **diferencovatelná**, nebo má v tomto bodě **totální diferenciál**, jestliže je možné její přírůstek Δz na nějakém okolí bodu A vyjádřit jako

$$\Delta z \equiv f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \mathcal{A}h + \mathcal{B}k + \rho\tau(h, k),$$

kde $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jsou konstanty, $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ a

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \tau(h, k) = 0.$$

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ je **diferencovatelná**, je-li diferencovatelná v každém bodě svého definičního oboru.

Číslo h představuje **přírůstek** na ose x, číslo k **přírůstek** na ose y.

Věta 5.2.1.

Je-li funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$ diferencovatelná, má v A parciální derivace prvého řádu, přičemž

$$\mathcal{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(A), \quad \mathcal{B} = \frac{\partial f}{\partial y}(A).$$

Poznámka

Obvykle se používá označení $h = dx$, $k = dy$, tedy přírůstek funkce Δz můžeme vyjádřit jako

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \rho\tau(dx, dy).$$

Definice 5.2.2.

Je-li funkce $z = f(x, y)$ diferencovatelná, nazývá se výraz

$$dz = df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

totální diferenciál funkce $z = f(x, y)$.

Poznámka

Ekvivalentně lze totální diferenciál definovat takto: řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ je ***diferencovatelná*** *na okolí bodu $A = [x_0, y_0]$, jestliže existují reálná čísla $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ taková, že platí*

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0) - (\mathcal{A}h + \mathcal{B}k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Lineární výraz $\mathcal{A}h + \mathcal{B}k$ proměnných h, k se nazývá ***totální diferenciál*** *funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$. Označujeme $df(A)(h, k)$, příp. $df(A)$, $dz(A)$ nebo $df(x_0, y_0)$, $dz(x_0, y_0)$.*

Z existence parciálních derivací neplyne spojitost funkce v daném bodě. Parciální derivace poskytují pouze informaci o tom, jak se funkce chová ve směrech rovnoběžných se souřadnými osami. Vlastnost diferencovatelnosti funkce však spojitost zaručí.

Věta 5.2.2.

Je-li funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$ diferencovatelná, pak je v tomto bodě spojitá.

Věta 5.2.3.

Jsou-li $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ spojité v bodě $A = [x_0, y_0]$, pak $z = f(x, y)$ je v A diferencovatelná (a tedy i spojitá).

Poznámka

Diferenciál lze mimo jiné využít k přibližnému výpočtu funkčních hodnot,

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0).$$

Poznámka

1. *Pro funkci n-proměnných, $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, je totálním diferenciálem výraz*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

2. ***Totálním diferenciálem druhého řádu*** *funkce $z = f(x, y)$ je výraz*

$$\begin{aligned} d^2f &= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2. \end{aligned}$$

3. *Totální diferenciály vyšších řádů a pro funkce tří a více proměnných se definují analogicky.*

Rovina v $\mathbb{R}^3$ o rovnici $z = \mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C}$ se nazývá **tečnou rovinou** τ ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$, jestliže

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} \frac{f(x, y) - \mathcal{A}x - \mathcal{B}y - \mathcal{C}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Jestliže má tato rovina procházet bodem $\boldsymbol{A}$, pak bod $\boldsymbol{A}$ musí splňovat rovnici roviny, tj. $f(x_0, y_0) = \mathcal{A}x_0 + \mathcal{B}y_0 + \mathcal{C}$. Vyjádříme $\mathcal{C} = f(x_0, y_0) - \mathcal{A}x_0 - \mathcal{B}y_0$ a dosadíme do rovnice roviny

$$\begin{aligned} z &= \mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C} = \mathcal{A}x + \mathcal{B}y + f(x_0, y_0) - \mathcal{A}x_0 - \mathcal{B}y_0 \\ &= \mathcal{A}(x - x_0) + \mathcal{B}(y - y_0) + f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Tato rovina je tečnou rovinou, jestliže existuje totální diferenciál v bodě $A = [x_0, y_0]$, tj. $\mathcal{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\mathcal{B} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Tečná rovina k funkci $z = f(x, y)$ v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ je pak určena rovnicí

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Je obvyklé rovnici roviny vyjadřovat také jako

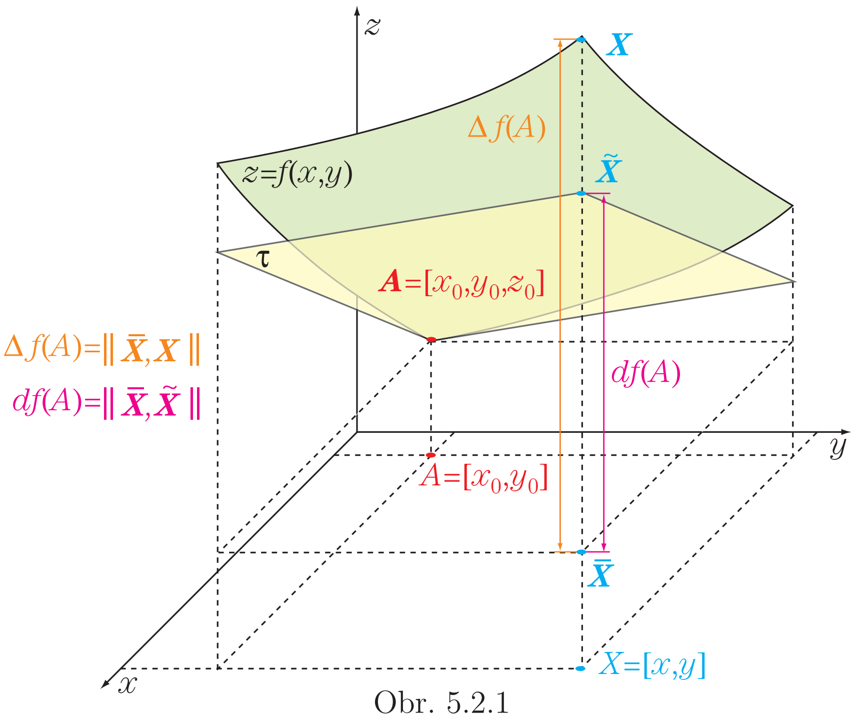
$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

připomeňme, že $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Geometrický význam totálního diferenciálu. V předchozí rovnici pro tečnou rovinu τ výraz na pravé straně odpovídá diferenciálu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$, tedy

$$df(A) = z - z_0.$$

Hodnota diferenciálu funkce $z = f(x, y)$ v bodě A je rovna přírůstku $z - z_0$ tečné roviny τ k ploše o rovnici $z = f(x, y)$ v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0]$ při přechodu z bodu $A = [x_0, y_0]$ do bodu $X = [x, y]$, libovolného bodu z okolí bodu A, ve kterém je funkce $z = f(x, y)$ diferencovatelná.



Obr. 5.2.1

Věta 5.2.4.

Nechť je funkce $z = f(x, y)$ diferencovatelná v bodě $A = [x_0, y_0]$. Pak v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$ existuje **tečná rovina** ke grafu funkce $z = f(x, y)$ určená rovnicí

$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Přímka n jdoucí bodem $\boldsymbol{A}$ kolmo k tečné rovině se nazývá **normála plochy**, normála grafu funkce $z = f(x, y)$. Její směrový vektor je kolineární s normálovým vektorem roviny, tedy $\vec{s}_n = \vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), -1\right)$.

Věta 5.2.5.

Normála ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $\boldsymbol{A}$ je určena parametrickými rovnicemi:

$$\begin{aligned} n:\ x &= x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)t, \\ y &= y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 - t. \end{aligned}$$

Na závěr kapitoly si zavedeme Taylorův polynom pro funkce více proměnných.

Věta 5.2.6.

Nechť funkce $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ je na okolí bodu $A \in \mathrm{D}_f$ alespoň $(m+1)$-krát spojitě diferencovatelná. Pak v bodě $X \in \mathcal{O}(A)$ platí

$$\begin{aligned} f(X) &= f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2 f(A)}{2!} + \cdots + \frac{d^m f(A)}{m!} + R_m, \text{ kde} \\ R_m &= \frac{d^{m+1} f(A + \kappa(X - A))}{(m+1)!}, \kappa \in (0, 1). \end{aligned}$$

Definice 5.2.3.

Výraz z předchozí věty nazýváme **Taylorovým rozvojem** funkce f na okolí bodu A.

Hodnota R_m se nazývá **Lagrangeův zbytek** Taylorova rozvoje. Polynom

$$T_m(X) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2 f(A)}{2!} + \cdots + \frac{d^m f(A)}{m!},$$

kde $dx_i = x_i - a_i$, $A = [a_1, a_2, \ldots a_n]$, se nazývá **Taylorův polynom** $m-$**tého řádu** funkce f v bodě A.

Je-li $A = [0, 0, \ldots 0]$, hovoříme o **MacLaurinovu polynomu**.

Řešené úlohy

Příklad 5.2.1. Prověřte diferencovatelnost funkce

$$f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2$$

v bodě $A = [-1, 1]$ a nalezněte její totální diferenciál v bodě A.

Řešení: Využijeme větu 5.2.3., spojité parciální derivace funkce f v bodě A zaručí diferencovatelnost funkce f v bodě A. Nejdříve vypočítáme parciální derivace funkce f,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 6y.$$

Tyto funkce jsou spojité na celém svém definičním oboru a tedy i v bodě A. Funkce f je diferencovatelná v bodě A.

Nalezneme totální diferenciál funkce f v bodě $A = [x_0, y_0] = [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (2x - 2y)dx + (-2x - 6y)dy \\ df(A) &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_A (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_A (y - y_0) \\ &= (2x - 2y)\Big|_{[-1,1]}(x + 1) + (-2x - 6y)\Big|_{[-1,1]}(y - 1) \\ &= -4(x + 1) - 4(y - 1) = -4x - 4y. \end{aligned}$$

Příklad 5.2.2. Vypočítejte přibližně $f(1,11; 0,58)$, je-li $f(x,y) = x^3 + 4y^3$.

Řešení: Budeme uvažovat bod $[1; 0,5]$, tj. $x_0 = 1$, $y_0 = 0,5$, $f(1; 0,5) = 1,5$. Vypočítáme totální diferenciál (přírůstek na tečné rovině k zadanému bodu) v tomto bodě, přičemž $dx = 0,11$, $dy = 0,08$. Využijeme-li následující vztah pro totální diferenciál

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy,$$

obdržíme

$$df(1;0,5) = (3x^2)\Big|_{[1;0,5]} \cdot 0,11 + (12y^2)\Big|_{[1;0,5]} \cdot 0,08$$
$$= 3 \cdot 0,11 + 12 \cdot 0,5^2 \cdot 0,08 = 0,57.$$

Využijeme vztah $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)$, tedy

$$f(1,11;0,58) \approx f(1;0,5) + df(1;0,5) = 1,5 + 0,57 = 2,07.$$

Přesně je $f(1,11;0,58) = 2,148\,079$. Rozdíl mezi oběma výsledky je dán tím, že jsme v prvním případě uvažovali přírůstek funkce na tečné rovině.

Ještě poznamenejme, že pokud používáme desetinná čísla, pak je vhodné jednotlivé komponenty bodů od sebe oddělit středníkem.

Příklad 5.2.3. Nalezněte totální diferenciál funkce

$$f(x,y) = \arctan\frac{x-y}{x+y}.$$

Řešení: Vypočítáme parciální derivace funkce f,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}\frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2}$$
$$= \frac{(x+y)^2}{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}\frac{2y}{(x+y)^2} = \frac{y}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}\frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}$$
$$= \frac{(x+y)^2}{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}\frac{-2x}{(x+y)^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

Dosadíme do formule pro totální diferenciál, definice 5.2.2., a dostáváme

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{-x}{x^2+y^2}dy = \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}.$$

Příklad 5.2.4. Nalezněte rovnici tečné roviny a normály ke funkce

$$z = 2x^2 + y^2$$

v bodě $\boldsymbol{A} = [1,1,?]$.

Řešení: Dosadíme do rovnic pro tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce f, věta 5.2.4. a 5.2.5. Bod $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)] = [1, 1, 3]$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 4x\Big|_{[1,1]} = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 2y\Big|_{[1,1]} = 2.$$

Dosadíme do rovnice tečné roviny a dostáváme

$$\tau : \; z - 3 = 4(x-1) + 2(y-1) \;\Rightarrow\; \tau : \; 4x + 2y - z - 3 = 0.$$

Normála pak bude mít rovnice

$$n : \; x = 1 + 4t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 3 - t.$$

Příklad 5.2.5. Nalezněte diferenciál druhého řádu funkce

$$f(x, y) = y \sin x + x \cos y.$$

Řešení: Vypočítáme parciální derivace druhého řádu a dosadíme do formule pro diferenciál druhého řádu.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y \sin x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos x - \sin y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x \cos y.$$

Totálním diferenciálem druhého řádu pak bude

$$d^2 f = -y \sin x dx^2 + 2(\cos x - \sin y) dx dy - x \cos y dy^2.$$

Příklad 5.2.6. Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 3y + 1$$

v bodě $A = [1, 2]$.

Řešení: Dosadíme do formule pro Taylorův polynom, definice 5.2.3. Nejdříve vypočítáme $df(A)$ a $d^2 f(A)$,

$$f(A) = -4$$

$$df(A) = (6x - 2y - 2)\Big|_{[1,2]}(x-1) + (-2x + 2y - 3)\Big|_{[1,2]}(y-2) = -y + 2,$$

$$
\begin{aligned}
d^2 f(A) &= 6\Big|_{[1,2]}(x-1)^2 + 2(-2)\Big|_{[1,2]}(x-1)(y-2) + 2\Big|_{[1,2]}(y-2)^2 \\
&= 6x^2 - 12x + 6 - 4xy + 8x + 4y - 8 + 2y^2 - 8y + 8 \\
&= 6x^2 + 2y^2 - 4x - 4xy - 4y + 6.
\end{aligned}
$$

Taylorův polynom pak bude mít vyjádření ve tvaru

$$
\begin{aligned}
T_2(X) &= -4 + \frac{-y+2}{1!} + \frac{6x^2 + 2y^2 - 4x - 4xy - 4y + 6}{2!} \\
&= -4 - y + 2 + 3x^2 + y^2 - 2x - 2xy - 2y + 3 \\
&= 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 3y + 1.
\end{aligned}
$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete přibližně hodnotu $f(2,08; 1,99)$, je-li $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

2. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \tan(x^2 + y^2)$.

3. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = (x^3 + y^3)\sin(xy)$.

4. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \ln(\sin(xy^2))$.

5. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2y^2-4}$ v bodě $A = [-1, 2]$.

6. Určete tečnou rovinu a normálu k funkci $f(x,y) = x^2y^3 + x^3y^2 + x$ v bodě $\boldsymbol{A} = [1, -1, ?]$.

7. Určete tečnou rovinu a normálu k funkci $f(x,y) = \ln(x^2 - 3y)$ v bodě $\boldsymbol{A} = [2, 1, ?]$.

8. Určete tečnou rovinu a normálu k funkci $f(x,y) = \sqrt{x^2 + xy + 1}$ v bodě $\boldsymbol{A} = [0, 4, ?]$.

9. Určete totální diferenciál druhého řádu funkce $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$.

10. Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ v bodě $A = [-2, -3]$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $2,035$.

2. $df = \frac{2x}{\cos^2(x^2+y^2)}dx + \frac{2y}{\cos^2(x^2+y^2)}dy.$

3. $df = (3x^2\sin(xy)+y(x^3+y^3)\cos(xy))dx+(3y^2\sin(xy)+x(x^3+y^3)\cos(xy))dy.$

4. $df = \frac{\cos(xy^2)}{\sin(xy^2)}(y^2dx + 2xydy).$

5. $df(A) = -8x + 4y - 16.$

6. $\tau: 2x + y - z = 0,\ n: x = 1 + 2t,\ y = -1 + t,\ z = 1 - t.$

7. $\tau: 4x - 3y - z - 5 = 0,\ n: x = 2 + 4t,\ y = 1 - 3t,\ z = -t.$

8. $\tau: 2x - z + 1 = 0,\ n: x = 2t,\ y = 4,\ z = 1 - t.$

9. $d^2f = \frac{-2}{(x+y)^3}(y^2dx^2 - 2xydxdy + x^2dy^2).$

10. $T_2 = \ln\frac{1}{6} + 3 + x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{18}y^2.$

Kontrolní test

1. Určete přibližně hodnotu $f(3,01; 2,9)$, je-li $f(x,y) = \ln\dfrac{x}{y}$.

a) $\frac{11}{300}$ b) $-0,03$ c) $\frac{11}{100}$ d) $-0,09$

2. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = (x\sin y)^7$.

a) $df = 7(x\sin y)^6(xdx + \sin ydy)$

b) $df = 7(x\sin y)^6(\sin ydx + x\sin ydy)$

c) $df = 7(x\sin y)^6(xdx + \cos ydy)$

d) $df = 7(x\sin y)^6(\sin ydx + x\cos ydy)$

3. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

a) $df = \dfrac{2}{x^2+y^2}(xdx + ydy)$ b) $df = \dfrac{2}{x^2+y^2}(ydx + xdy)$

c) $df = \dfrac{2}{x^2+y^2}(dx + dy)$ d) $df = \dfrac{2}{x^2+y^2}(\ln(2x)dx+\ln(2y)dy)$

4. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{y}$.

a) $df = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(dx - \dfrac{x}{y}dy\right)$ b) $df = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}(-dx + dy)$

c) $df = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\left(dx - \dfrac{x}{y}dy\right)$ d) $df = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\left(\dfrac{1}{y}dx + xdy\right)$

5. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = x\mathrm{e}^{3x+4y}$ v bodě $A = [4,-3]$.

a) $df(A) = 13x - 12y - 88$ b) $df(A) = 12x - 12y - 84$

c) $df(A) = 13x + 16y - 4$ d) $df(A) = 12x + 16y$

6. Určete tečnou rovinu a normálu k funkci $f(x,y) = \sin(3x-2y)$ v bodě $\boldsymbol{A} = [0,0,?]$.

a) $\tau:\ 3x - 2y - z + 1 = 0,\ n:\ x = 3t,\ y = -2t,\ z = 1 - t$

b) $\tau:\ 3x - 2y - z = 0,\ n:\ x = 3t,\ y = -2t,\ z = -t$

c) $\tau:\ x + y - z = 0,\ n:\ x = t,\ y = t,\ z = -t$

d) $\tau:\ x + y - z + 1 = 0,\ n:\ x = t,\ y = t,\ z = 1 - t$

7. Určete tečnou rovinu k funkci $f(x,y) = x^5y - y^3$ v bodě $\boldsymbol{A} = [-1,2,?]$.

a) $\tau:\ 10x - 13y - z + 26 = 0$ b) $\tau:\ 10x - 11y - z + 22 = 0$

c) $\tau:\ 20x - 13y - z + 26 = 0$ d) $\tau:\ 10x - 11y - z + 22 = 0$

8. Určete tečnou rovinu k funkci $f(x,y) = \sqrt{2x} - \sqrt{3y} - x$ v bodě $\boldsymbol{A} = [2,3,?]$.

a) $\tau:\ x + 2y + 4z = 0$ b) $\tau:\ y + 2z - 3 = 0$

c) $\tau:\ x + y + 2z + 1 = 0$ d) $\tau:\ x + 2y + 4z - 1 = 0$

9. Určete totální diferenciál druhého řádu funkce $f(x,y) = \sin(5x+2y)$.

a) $d^2f = -\sin(5x+2y)(25dx^2 + 20dxdy + 4dy^2)$

b) $d^2f = -\sin(5x+2y)(25dx^2 + 10dxdy + 4dy^2)$

c) $d^2f = \sin(5x+2y)(5dx^2 + 20dxdy + 2dy^2)$

d) $d^2f = \sin(5x+2y)(5dx^2 + 10dxdy + 2dy^2)$

10. Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce $f(x,y) = 3x^2y + 4xy^2 + x^3$ v bodě $A = [2,-1]$.

a) $T_2 = 24 - 16x + 20y + 4xy + 6x^2 + 16y^2$

b) $T_2 = 8 - 8x + 16y + 6xy + 3x^2 + 8y^2$

c) $T_2 = 16 - 12x + 12y + 8xy + 6x^2 + 16y^2$

d) $T_2 = 4 - 4x + 4y + 4xy + 3x^2 + 8y^2$

Výsledky testu

1. a), **2.** d), **3.** a), **4.** c), **5.** c), **6.** b), **7.** a), **8.** c), **9.** a), **10.** d).

5.3. Implicitní funkce a její derivace

Výklad

Podívejme se na následující problém. Uvažujme množinu M bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, které splňují rovnici $F(x, y) = 0$,

$$M = \{[x, y] \in \mathrm{D}_F \mid F(x, y) = 0\},$$

kde $z = F(x, y)$ je nějaká funkce dvou proměnných. Je-li $F(x, y) = x^2+y^2-1$, pak množina M je jednotková kružnice se středem v počátku, jinými slovy množina bodů z $\mathbb{R}^2$, které splňují rovnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Chceme zkoumat chování této funkce na okolí bodu $A = [x_0, y_0] \in M$, resp. hledat tečnu v bodě A. Pokud na okolí bodu A je množina M grafem nějaké funkce $y = f(x)$ jedné proměnné, tedy $F(x, y) = y - f(x) = 0$, řešíme úlohu pomocí derivací funkce f podle x, f', resp. f''. V podstatě postupujeme tak, že z rovnice $F(x, y) = 0$ vyjádříme y jako funkci proměnné x.

Existuje ovšem řada rovnic pro množinu resp. křivku M, ze kterých se y nedá rozumně vyjádřit, vypočítat. Např. z rovnice křivky $x^2 + y^3 + xy = 0$ nemůžeme jednoznačně vyjádřit y, a tedy předchozí postup selhává.

V této kapitole si ukážeme způsob, jak se s touto obtíží vypořádat.

Definice 5.3.1.

Buď $z = F(x, y)$ funkce dvou proměnných. Uvažujme křivku

$$M = \{[x, y] \in \mathrm{D}_F \mid F(x, y) = 0\}.$$

Nechť $A = [x_0, y_0] \in M$ je bod, $\mathcal{O}_\delta(A) \subset \mathbb{R}^2$ deltové okolí bodu A, $\delta > 0$. Jestliže je rovnicí $F(x, y) = 0$ na intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ určena funkce $y = f(x)$ taková, že platí

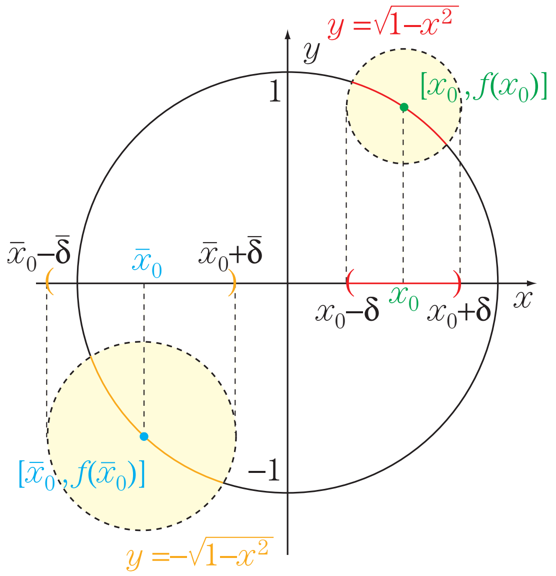
$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

pak říkáme, že funkce f je na okolí bodu A definována **implicitně** rovnicí $F(x, y) = 0$.

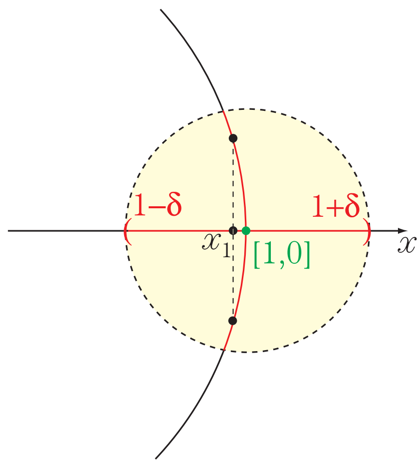
Vraťme se k našemu příkladu. Hledejme pro rovnici $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ funkci $y = f(x)$. Pokusíme se z této rovnice vyjádřit y,

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow |y| = \sqrt{1 - x^2} \text{ pro } x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Rovnicí $x^2 + y^2 - 1 = 0$ jsou na intervalu $(-1,1)$ určeny dvě implicitní funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$ v případě bodů ležících na horní půlkružnici, a $y = -\sqrt{1 - x^2}$ v případě bodů ležících na spodní půlkružnici. V krajních bodech intervalu $\langle -1, 1\rangle$, tj. v bodech $[-1, 0]$ a $[1, 0]$ ležících na kružnici M implicitní funkce neexistuje, protože libovolné deltové okolí těchto bodů obsahuje jak horní tak spodní část kružnice, a tedy na tomto okolí nemůže existovat implicitní funkce.



Obr. 5.3.1



Obr. 5.3.2

Na obrázku Obr. 5.3.1 vidíme, že na deltovém okolí bodu $[x_0, f(x_0)]$ existuje implicitní funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$ daná rovnicí $x^2 + y^2 - 1 = 0$, bod $[x_0, f(x_0)]$ leží na horní půlkružnici. Také na okolí bodu $[\bar{x}_0, f(\bar{x}_0)]$ existuje implicitní funkce $y = -\sqrt{1 - x^2}$, daná rovnicí $x^2 + y^2 - 1 = 0$, bod $[\bar{x}_0, f(\bar{x}_0)]$ leží na spodní půlkružnici. Naopak na Obr. 5.3.2 vidíme, že na okolí bodu $[1, 0]$ implicitní funkce neexistuje. Číslu x_1 odpovídají dvě funkční hodnoty, to je spor s definicí funkce jedné proměnné, která říká, že ke každému $x \in \mathrm{D}_f$ musí existovat jediné $f(x)$.

Hledejme např. implicitní funkci vzhledem k rovnici $3x-2y+4=0$. Snažíme se z rovnice vyjádřit y, tedy

$$5x-2y+8=0 \Rightarrow y=\frac{5}{2}x+4 \text{ pro } x\in\mathbb{R}.$$

V tomto případě existuje jediná implicitní funkce $y=\frac{5}{2}x+4$, která je dána rovnicí $5x-2y+8=0$.

Poznámka

Ne ke každé rovnici $F(x,y)=0$ existuje jediná implicitní funkce.

Existenci jediné implicitní funkce řeší následující věta.

Věta 5.3.1.

Nechť funkce $z=F(x,y)$ je spojitá na okolí bodu $A=[x_0,y_0]$ a $F(A)=0$. Nechť F má v bodě A spojitou parciální derivaci $\frac{\partial F}{\partial y}(A)$ a platí $\frac{\partial F}{\partial y}(A)\neq 0$. Pak existuje okolí bodu A, na kterém je rovnicí $F(x,y)=0$ definována jediná spojitá implicitní funkce $y=f(x)$.

Poznámka

Podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(A)\neq 0$ je podmínkou pouze postačující pro existenci implicitní funkce. Uvažujme rovnici $y^3-x=0$. Pak $F(x,y)=y^3-x$ a platí

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=3y^2\Big|_{[0,0]}=0.$$

Přesto na okolí bodu $[0,0]$ existuje jediná implicitní funkce $y=\sqrt[3]{x}$ určená rovnicí $y^3-x=0$.

Následující věta řeší otázku jak implicitní funkce derivovat.

Věta 5.3.2.

Nechť jsou splněny předpoklady věty 5.3.1. Nechť má funkce $z=F(x,y)$ spojité parciální derivace. Pak má implicitní funkce f, která je na okolí bodu $A=[x_0,y_0]$ daná rovnicí $F(x,y)=0$, derivaci f' v bodě x_0 a platí

$$f'(x_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

Poznámka

Pro výpočet derivace také můžeme použít následující postup. V rovnici $F(x,y)=0$ prohlásíme y za funkci proměnné x, celou rovnici pak derivujeme podle x. Vyjádříme derivaci y podle x, viz. řešené úlohy.

Pro výpočet druhé derivace implicitní funkce $y=f(x)$ v bodě $A=[x_0,y_0]$ dané rovnicí $F(x,y)=0$ lze použít vztah

$$f''(x_0)=\frac{1}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(A)\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial F}{\partial x}(A) & \dfrac{\partial F}{\partial y}(A) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(A) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(A) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(A) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(A) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(A) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix}.$$

Položme si nyní otázku, jak najít **tečnu k implicitní funkci**. Tečna t ke grafu funkce $y=f(x)$ v bodě $A=[x_0,y_0=f(x_0)]$ je dána rovnicí

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Dosadíme do rovnice za derivaci f' výraz uvedený ve větě 5.3.2. Dostáváme

$$y-y_0=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(A)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(A)}(x-x_0).$$

Rovnice tečny ke grafu implicitní funkce pak bude mít tvar

$$t:\quad \frac{\partial F}{\partial x}(A)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(A)(y-y_0)=0.$$

Normála n implicitní funkce v bodě A je určena bodem A a směrem $\vec{s}_n$, $\vec{s}_n\perp\vec{s}_t$.

Věta 5.3.3.

Nechť $y=f(x)$ je implicitní funkce určená rovnicí $F(x,y)=0$ v bodě A. **Tečna** k implicitní funkci v bodě A bude určena rovnicí

$$t:\quad \frac{\partial F}{\partial x}(A)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(A)(y-y_0)=0.$$

Normála k implicitní funkci v bodě A bude určena rovnicí

$$n:\quad \frac{\partial F}{\partial y}(A)(x-x_0)-\frac{\partial F}{\partial x}(A)(y-y_0)=0.$$

Podívejme se nyní na případ funkce tří proměnných. Analogicky jako v případě funkce dvou proměnných zformulujeme dvě důležité věty.

Věta 5.3.4.

Nechť funkce $u = F(x, y, z)$ je spojitá na okolí bodu $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0]$ a $F(\boldsymbol{A}) = 0$. Nechť F má v bodě $\boldsymbol{A}$ spojitou parciální derivaci $\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})$ a platí $\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A}) \neq 0$. Pak existuje okolí bodu $\boldsymbol{A}$, na kterém je rovnicí $F(x, y, z) = 0$ definována jediná spojitá implicitní funkce $z = f(x, y)$.

Věta 5.3.5.

Nechť jsou splněny předpoklady věty 5.3.4. Nechť má funkce $u = F(x, y, z)$ spojité parciální derivace. Pak má implicitní funkce f, která je na okolí bodu $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0]$ daná rovnicí $F(x, y, z) = 0$, derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$, $A = [x_0, y_0]$ a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{A})}{\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{A})}{\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})}.$$

Parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ implicitní funkce $z = f(x, y)$ dané rovnicí $F(x, y, z) = 0$ lze určit následujícím způsobem: v rovnici $F(x, y, z) = 0$ považujeme y za konstantu, z je funkcí proměnných x, y. Rovnici derivujeme podle x a vyjádříme derivaci z podle x, viz. řešené příklady. Parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}$ určíme analogicky. V rovnici $F(x, y, z) = 0$ prohlásíme x za konstantu, z bude funkcí proměnných x, y. Rovnici derivujeme podle y a vyjádříme derivaci z podle y.

Jak budeme hledat **tečnou rovinu** k ploše $F(x, y, z) = 0$? Tečná rovina k ploše $z = f(x, y)$ má v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$ rovnici

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0).$$

Je-li rovnicí $F(x, y, z) = 0$ na okolí bodu $\boldsymbol{A}$ daná nějaká implicitní funkce, pak

$$z - z_0 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{A})}{\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})}(x - x_0) - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{A})}{\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})}(y - y_0).$$

Tečná rovina τ je pak dána rovnicí

$$\tau: \frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{A})(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{A})(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})(z-z_0)=0.$$

Věta 5.3.6.

Nechť $z=f(x,y)$ je implicitní funkce určená rovnicí $F(x,y,z)=0$ a bodem $\boldsymbol{A}=[x_0,y_0,z_0]$. **Tečná rovina** ke grafu implicitní funkce $z=f(x,y)$ v bodě $\boldsymbol{A}$ bude určena rovnicí

$$\tau: \frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{A})(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{A})(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})(z-z_0)=0.$$

Poznámka

Všimněte si, že na levé straně rovnice tečné roviny vystupuje diferenciál funkce F v bodě $\boldsymbol{A}$.

Řešené úlohy

Příklad 5.3.1. Vypočítejte y', y'' implicitní funkce dané rovnicí

$$(x^2+y^2)^2-3x^2y-y^3=0$$

v bodě $[0,1]$.

Řešení:

1. Nejdříve při určení y' vyjdeme z věty 5.3.2.

$$F(x,y)=(x^2+y^2)^2-3x^2y-y^3,$$

vypočítáme jednotlivé parciální derivace funkce F podle proměnných x a y v bodě $[0,1]$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)=(2(x^2+y^2)2x-6xy)\Big|_{[0,1]}=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)=(2(x^2+y^2)2y-3x^2-3y^2)\Big|_{[0,1]}=1.$$

Dosadíme do vzorce pro derivaci implicitní funkce a dostáváme

$$y'(0) = f'(0) = -\frac{4x^3 + 4xy^2 - 6xy}{4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2}\Big|_{[0,1]} = -\frac{0}{1} = 0.$$

2. Jiný způsob jak najít y'. V rovnici $(x^2+y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$ prohlásíme y za funkci proměnné x a rovnici derivujeme podle x. Nechť $y = y(x)$, pak

$$2(x^2+y^2)(2x+2yy') - 3(2xy + x^2y') - 3y^2y' = 0.$$

Aby bylo zcela jasné, jak jsme k předcházející rovnici dospěli, rozeberme si podrobně, jak se derivují funkce v této rovnici, konkrétně $-3x^2y$ a $-y^3$. Znovu zdůrazněme, že jsme předpokládali závislost y na x, tedy $y = y(x)$. Derivujeme $-3x^2y$ podle pravidla o součinu dvou funkcí proměnné x,

$$(-3x^2y)' = -3(x^2y)' = -3[(x^2)'y + x^2(y)'] = -3(2xy + x^2y').$$

Zde derivace y podle x není nula, protože jsme předpokládali, že y závisí na x. Derivace y podle x se bude značit standardně, y'.

Derivujeme $-y^3$ podle pravidla o derivaci složené funkce,

$$(-y^3)' = -(y^3)' = -3y^2y'.$$

Řekněme, že si pro lepší názornost zvolíme nějakou konkrétní závislost y na x, např. nechť $y = \sin x$. Tedy $-y^3 = \sin^3 x$. Jak bude vypadat derivace v tomto konkrétním případě?

$$\begin{aligned}(-y^3)' &= -(y^3)' \overset{y=\sin x}{=} -(\sin^3 x)' = -3\sin^2 x\cos x \\ &= -3\sin^2 x(\sin x)' \overset{\sin x = y}{=} -3y^2(y)' = -3y^2y'.\end{aligned}$$

Vraťme se k původní úloze. Poté co jsme rovnici derivovali podle x, stačí nyní vyjádřit z této derivované rovnice y',

$$\begin{aligned}&4x^3 + 4yy' + 4xy^2 + 2y^3y' - 6xy - 3x^2y' - 3y^2y' = 0,\\ &(4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2)y' = -4x^3 - 4xy^2 + 6xy,\\ &y' = -\frac{4x^3 + 4xy^2 - 6xy}{4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2},\end{aligned}$$

dosadíme bod $[0,1]$ a dostaneme výsledek

$$y'(0) = -\frac{0}{1} = 0.$$

Příklad 5.3.2. Vypočítejte y', y'', implicitní funkce $y = f(x)$ určené rovnicí

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

v bodě $[1,1]$.

Řešení:

1. Využijeme větu 5.3.2. Ze zadání dostáváme $F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3$.

$$y'(1) = -\left.\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\right|_{[1,1]} = -\left.\frac{2x+y}{x+2y}\right|_{[1,1]} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Pro určení druhé derivace využijeme vztah uvedený za větou 5.3.2. Vypočítáme jednotlivé hodnoty parciálních derivací a determinant matice vytvořené z těchto hodnot. Tedy,

$$y''(1) = f''(1) = \left.\frac{1}{(x+2y)^3}\right|_{[1,1]} \begin{vmatrix} 0 & (2x+y)\big|_{[1,1]} & (x+2y)\big|_{[1,1]} \\ (2x+y)\big|_{[1,1]} & 2\big|_{[1,1]} & 1\big|_{[1,1]} \\ (x+2y)\big|_{[1,1]} & 1\big|_{[1,1]} & 2\big|_{[1,1]} \end{vmatrix},$$

$$y''(1) = \frac{1}{3^3} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}(-18) = -\frac{2}{3}.$$

2. Totéž můžeme získat i jiným způsobem. Budeme předpokládat v rovnici implicitní funkce závislost y na x, rovnici derivujeme podle x a vyjádříme y'.

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\frac{2x+y}{x+2y} \;\Rightarrow\; y'(1) = -\frac{3}{3} = -1.$$

K získání druhé derivace implicitní funkce y'' musíme rovnici implicitní funkce derivovat dvakrát podle x a vyjádřit y''. Rovnici implicitní funkce jsme již jednou derivovali, stačí ji derivovat ještě jednou podle x,

$$(2x + y + xy' + 2yy' = 0)' \Rightarrow 2 + y' + y' + xy'' + 2y'y' + 2yy'' = 0,$$

$$2 + 2y' + 2(y')^2 + (x + 2y)y'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{2 + 2y' + 2(y')^2}{x + 2y}$$

$$y''(1) = -\frac{2 + 2\cdot(-1) + 2(-1)^2}{1 + 2\cdot 1} = -\frac{2}{3}.$$

Příklad 5.3.3. Nalezněte derivaci funkce $y = f(x)$ dané implicitně rovnicí

$$x \sin y + \cos 2y = \cos y.$$

Řešení:

1. S využitím věty 5.3.2. a pro $F(x, y) = x \sin y - \cos y + \cos 2y$ dostáváme

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\sin y}{x\cos y + \sin y - 2\sin 2y}, \quad x\cos y + \sin y - 2\sin 2y \neq 0.$$

2. Předpokládejme v rovnici implicitní funkce závislost y na x, derivujme rovnici podle x a vyjádřeme y'. Tedy

$$\sin y + x\cos yy' + \sin yy' - 2\sin 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{\sin y}{x\cos y + \sin y - 2\sin 2y},$$

přičemž

$$x\cos y + \sin y - 2\sin 2y \neq 0.$$

Příklad 5.3.4. Nalezněte parciální derivace prvého řádu funkce $z = f(x, y)$ dané implicitně rovnicí

$$4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0$$

v bodě $[1, 1, 1]$.

Řešení:

1. Využijeme větu 5.3.5. Pro $F(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4$

dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\left.\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\right|_{[1,1,1]} = -\left.\frac{8x+y+1}{-6z-y}\right|_{[1,1,1]} = -\frac{10}{-7} = \frac{10}{7}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\left.\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\right|_{[1,1,1]} = -\left.\frac{4y+x-z}{-6z-y}\right|_{[1,1,1]} = -\frac{4}{-7} = \frac{4}{7}.$$

2. Stejný výsledek získáme také tak, že v rovnici implicitní funkce $F(x,y,z) = 0$ nejdříve prohlásíme y za konstantu, z bude funkcí x, y. Rovnici derivujeme podle x a vyjádříme derivaci z podle x. Tentýž postup platí i pro určení derivace z podle y jen s tím rozdílem, že v rovnici pro implicitní funkci $F(x,y,z) = 0$ prohlásíme za konstantu proměnnou x a rovnici derivujeme podle y.

$$\frac{\partial}{\partial x}(4x^2+2y^2-3z^2+xy-yz+x-4=0) \Rightarrow 8x-6z\frac{\partial z}{\partial x}+y+1-y\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$
$$8x+y+1+(-6z-y)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{8x+y+1}{-6z-y}.$$

Dosadíme bod $[1,1,1]$, určíme tak hodnotu $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\left.\frac{8x+y+1}{-6z-y}\right|_{[1,1,1]} = -\frac{10}{-4} = \frac{10}{7}.$$

Analogicky vypočítáme derivaci z podle y v bodě $[1,1]$.

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^2+2y^2-3z^2+xy-yz+x-4=0) \Rightarrow 4y-6z\frac{\partial z}{\partial y}+x-z-y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$
$$4y+x-z+(-6z-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y+x-z}{-6z-y}.$$

Dosadíme bod $[1,1,1]$, určíme tak hodnotu $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\left.\frac{4y+x-z}{-6z-y}\right|_{[1,1,1]} = -\frac{4}{-7} = \frac{4}{7}.$$

Příklad 5.3.5. Nalezněte tečnu a normálu v bodě $[1,1]$ funkce $y = f(x)$ určené implicitně rovnicí

$$xy + \ln y - 1 = 0.$$

Řešení: Pro nalezeni tečny využijeme větu 5.3.3. Vypočítejme nejdříve obě parciální derivace funkce $F(x,y) = xy + \ln y - 1$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = y\Big|_{[1,1]} = 1,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = x + \frac{1}{y}\Big|_{[1,1]} = 2.$$

Dosadíme,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0 \Rightarrow 1(x-1) + 2(y-1) = 0,$$

rovnice tečny pak bude mít tvar

$$t: \quad x + 2y - 3 = 0.$$

Pro určení rovnice normály dosadíme do

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0 \Rightarrow 2(x-1) - 1(y-1) = 0,$$

rovnice normály pak bude mít tvar

$$n: \quad 2x - y - 1 = 0.$$

Příklad 5.3.6. Nalezněte rovnici tečné roviny v bodě $[1,-2,4]$ ke grafu implicitní funkce $z = f(x,y)$ určené rovnicí

$$x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 2x - 12y + 8z - 7 = 0.$$

Řešení: Pro nalezeni rovnice tečny využijeme vetu 5.3.6. Nejdříve určíme hodnoty jednotlivých parciálních derivací funkce

$$F(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 2x - 12y + 8z - 7$$

v bodě $[1,-2,4]$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,-2,4) = 2x + 2\Big|_{[1,-2,4]} = 4,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,-2,4) = 6y - 12\Big|_{[1,-2,4]} = -24,$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,-2,4) = -8z + 8\Big|_{[1,-2,4]} = -24.$$

Dosadíme do rovnice tečné roviny

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow\ 4(x-1)-24(y+2)-24(z-4)=0\ \Rightarrow\ 4x-24y-24z+44=0.$$

Rovnice tečné roviny pak bude

$$\tau:\quad x-6y-6z+11=0.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $x^2+y^2+y^3-xy=3$.

2. Vypočtěte derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $\cot(3y)=x^2y$.

3. Vypočtěte derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $2^{xy}-3^{x+y}=4$ v bodě $A=[1,2]$.

4. Vypočtěte derivace y', y'' implicitní funkce y dané rovnicí $\sin^2(xy)=0$ v bodě $[1,\pi]$.

5. Vypočtěte parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $\dfrac{x+2y+3z}{y+z}=x$.

6. Určete parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $\mathrm{e}^{x^2y+2y^2z+3xz^2}=4$.

7. Vypočtěte parciální derivace implicitní funkce z v bodě $A=[\frac{\pi^2}{8},5,0]$ dané rovnicí $\cos\sqrt{2x}+y^2z^3+2y=z$.

8. Nalezněte tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce y zadané implicitně rovnicí $\dfrac{x+y}{x-y}=2$ v bodě $A=[3,1]$.

9. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z zadané implicitně rovnicí $\sqrt{xy}-z+\ln(x^2+y^2)=0$ v bodě $[2,2,?]$.

10. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z zadané implicitně rovnicí $\ln(\cos(x^2+y^2+z^2))=5x+3yz+6z$ v bodě $A=[0,0,0]$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2y+3y^2-x$, $y'=\frac{y-2x}{2y+3y^2-x}$.

2. $\frac{\partial F}{\partial x} = -2xy$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{3}{\sin^2(3y)} - x^2$, $y' = -\frac{2xy\sin^2(3y)}{3+x^2\sin^2(3y)}$.

3. $\frac{\partial F}{\partial x} = y2^{xy}\ln 2 - 3^{x+y}\ln 3$, $\frac{\partial F}{\partial y} = x2^{xy}\ln 2 - 3^{x+y}\ln 3$, $y' = -\frac{y2^{xy}\ln 2 - 3^{x+y}\ln 3}{x2^{xy}\ln 2 - 3^{x+y}\ln 3}$, $y'(A) = -\frac{8\ln 2 - 27\ln 3}{4\ln 2 - 27\ln 3}$.

4. $\frac{\partial F}{\partial x} = 2y\sin(xy)\cos(xy)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x\sin(xy)\cos(xy)$, $y' = -\frac{y}{x}$, $y'' = \frac{-y'x+y}{x^2}$, $y'(1) = -\pi$, $y''(1) = 2\pi$.

5. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1-y-z}{y+z}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-x-z}{(y+z)^2}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{-x+y}{(y+z)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(1-y-z)(y+z)}{x-y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+z}{y-x}$.

6. $\frac{\partial F}{\partial x} = \mathrm{e}^{x^2y+2y^2z+3xz^2}(2xy+3z^2)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \mathrm{e}^{x^2y+2y^2z+3xz^2}(x^2+4yz)$, $\frac{\partial F}{\partial z} = \mathrm{e}^{x^2y+2y^2z+3xz^2}(2y^2+6xz)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy+3z^2}{2(y^2+3xz)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2+4yz}{2(y^2+3xz)}$.

7. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2yz^3+2$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 3y^2z^2-1$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}(3y^2z^2-1)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yz^3+2}{3y^2z^2-1}$, $\frac{\partial z}{\partial x}(A) = -\frac{2}{\pi}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(A) = 2$.

8. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-2y}{(x-y)^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2x}{(x-y)^2}$, $\tau: -\frac{1}{2}(x-3) + \frac{3}{2}(y-1) = 0$, $\tau: x-3y=0$, $n: 3x+y-10=0$.

9. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{xy}} + \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy}} + \frac{2y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$, $\frac{\partial F}{\partial x}(A) = 1$, $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 1$, $\frac{\partial F}{\partial z}(A) = -1$, $z(2,2) = 2+\ln 8 = 2+3\ln 2$, $\tau:\ x+y-z-2+3\ln 2 = 0$.

10. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-2x\sin(x^2+y^2+z^2)}{\cos(x^2+y^2+z^2)} - 5$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-2y\sin(x^2+y^2+z^2)}{\cos(x^2+y^2+z^2)} - 3z$, $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{-2z\sin(x^2+y^2+z^2)}{\cos(x^2+y^2+z^2)} - 3y - 6$, $\frac{\partial F}{\partial x}(A) = -5$, $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(A) = -6$, $\tau:\ 5x+6z=0$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $y^2 + e^{x+y} = x^3$.

a) $y' = \dfrac{3x^2 - \mathrm{e}^{x+y}}{y(2+e^{x+y})}$ b) $y' = \dfrac{-3x^2 - \mathrm{e}^{x+y}}{y^2+e^{x+y}}$

c) $y' = \dfrac{3x^2 - \mathrm{e}^{x+y}}{2y+e^{x+y}}$ d) $y' = \dfrac{-3x^2 - \mathrm{e}^{x+y}}{2y+xe^{x+y}}$

2. Vypočtěte derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $\sin(xy) + 2x^2 = y^2$.

a) $y' = -\dfrac{y\sin(xy)+4x}{x\sin(xy)-2y}$ b) $y' = -\dfrac{y\cos(xy)+4x}{x\cos(xy)-2y}$

c) $y' = \dfrac{\cos(xy)+4x}{\cos(xy)-2y}$ d) $y' = \dfrac{\sin(xy)+4x}{\sin(xy)-2y}$

3. Vypočtěte derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $x^2\ln y = y^2\ln x$ v bodě $[\mathrm{e},\mathrm{e}]$.

a) $y'(\mathrm{e}) = -1$, b) $y'(\mathrm{e}) = 1$, c) $y'(\mathrm{e}) = -2$, d) $y'(\mathrm{e}) = 2$.

4. Vypočtěte derivace y', y'' v bodě $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$ implicitní funkce y dané rovnicí $\cos(4x - y) = x$.

a) $y'(A) = 2\sqrt{2}, \quad y''(A) = 1$ b) $y'(A) = 1 + \sqrt{2}, \quad y''(A) = -\sqrt{2}$

c) $y'(A) = 4 + \sqrt{2}, \quad y''(A) = -4\sqrt{2}$ d) $y'(A) = 2, \quad y''(A) = 4\sqrt{2}$

5. Vypočtěte parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $\ln(x^2y^3 + z^4) = 3$.

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{xy^3}{2z^3}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{3x^2y^2}{4z^3}$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-\ln(2xy^3)}{\ln(4z^3)}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-\ln(3x^2y^2)}{\ln(4z^3)}$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{xy^3 - 3}{2z^3}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{3x^2y^2 - 3}{2z^3}$

d) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-2xy^3 - z^4}{x^2y^3 + z^3}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-3x^2y^2 - y^4}{x^2y^3 + z^3}$

6. Vypočtěte parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $\arctan(x + y) + \arctan(y + z) = x + y + z$.

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{(x+y)^2(1+(y+z)^2)}{(y+z)^2(1+(x+y)^2)}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1-(x+y)^2(y+z)^2}{(y+z)^2(1+(x+y)^2)}$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{(x+y)^2(1+(y+z)^2)}{(y+z)^2(1+(x+y)^2)}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1-(x+y)^2(y+z)^2}{(y+z)^2(1+(x+y)^2)}$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{(x+y)^2}{(y+z)^2}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{(x+y)^2 + (y+z)^2}{(y+z)^2}$

d) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1+(y+z)^2}{1+(x+y)^2}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2+(x+y)^2+(y+z)^2}{(1+(x+y)^2)(1+(y+z)^2)}$

7. Vypočtěte parciální derivace implicitní funkce z v bodě $A = [3, 0, -2]$ dané rovnicí $x^2yz^3 + z^4 = x^3y^3$.

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(A) = \dfrac{9}{32}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}(A) = -\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(A) = 0, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}(A) = -\dfrac{9}{4}$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(A) = \dfrac{3}{2}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}(A) = 0$ d) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(A) = \dfrac{9}{4}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}(A) = -\dfrac{9}{32}$

8. Nalezněte tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce y v bodě $A = [-1, -1]$

zadané implicitně rovnicí $3^{xy} = y \ln 3 + x \ln 3$.

a) $\tau : x \ln 3 + y + 2 = 0$,
$n : x - y - 2 = 0$.

b) $\tau : x + y \ln 3 + 2 = 0$,
$n : x + y = 0$.

c) $\tau : x \ln 3 + y \ln 3 + 2 = 0$,
$n : x - y + 2 = 0$.

d) $\tau : x + y + 2 = 0$,
$n : x - y = 0$.

9. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v bodě $[2, 1, ?]$ zadané implicitně rovnicí $x + y - xz + yz = 0$.

a) $\tau : 2x - 4y - z - 3 = 0$

b) $\tau : -4x + 2y - z + 3 = 0$

c) $\tau : 4x - 2y - z - 3 = 0$

d) $\tau : -2x + 4y - z + 3 = 0$.

10. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v bodě $[-1, 3, 2]$ zadané implicitně rovnicí $\ln(xy + z^2) = 2$.

a) $\tau : 4x - y - z + 9 = 0$

b) $\tau : 3x - y + 4z - 2 = 0$

c) $\tau : 2x + y - 4z + 7 = 0$

d) $\tau : x + y + z - 4 = 0$

Výsledky testu

1. c), **2.** b), **3.** b), **4.** c), **5.** a), **6.** a), **7.** b), **8.** d), **9.** d), **10.** b).

Kontrolní otázky

Otázka 1. Jak definujeme parciální derivace a jaký je jejich geometrický význam?

Otázka 2. Sami navrhněte funkci tří proměnných a vypočítejte všechny parciální derivace až do třetího řádu této funkce.

Otázka 3. Co je to totální diferenciál funkce více proměnných?

Otázka 4. Porovnejte totální diferenciál funkce jedné proměnné s totálním diferenciálem funkce dvou proměnných z hlediska jejich geometrického významu.

Otázka 5. Jak hledáme tečnou rovinu a normálu k funkci dvou proměnných?

Otázka 6. Co je to Taylorův polynom?

Otázka 7. Co je to implicitní funkce?

Otázka 8. Uveďte postačující podmínku pro existenci implicitní funkce.

Otázka 9. Jak derivujeme implicitní funkce?

Otázka 10. Jak se hledá tečna a normála k implicitní funkci?

Shrnutí lekce

Σ

V rámci této kapitoly jsme se seznámili s důležitými pojmy diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Především je nutné dobře zvládnout část věnovanou parciálním derivacím. Pomocí nich pak můžeme pracovat i s dalšími pojmy. Podkapitola věnovaná totálnímu diferenciálu nám dává návod jak hledat tečnou rovinu a normálu k dané ploše. V poslední části kapitoly jsme se seznámili s implicitními funkcemi a naučili jsme se tyto funkce derivovat.

6. Extrémy funkcí více proměnných

Průvodce studiem

Hledání extrémů je v praxi často řešená úloha. Např. při cestě z bodu A do bodu B se snažíme najít nejkratší cestu. Ve firmách je snaha minimalizovat náklady, maximalizovat zisk. Fyzikální systémy se snaží zaujmout stavy s nejnižší energií.

V této kapitole se budeme zabývat hledáním extremálních hodnot tzv. maxim resp. minim pro funkce více proměnných, především se však soustředíme na funkce dvou proměnných.

Cíle

Lokální extrémy funkcí více proměnných, vázané extrémy, globální extrémy.

Předpokládané znalosti

Lokální a globální extrémy funkcí jedné proměnné.

6.1. Lokální extrémy

Výklad

Definice 6.1.1.
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $A \in \mathrm{D}_f$ **lokálního maxima**, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(A) \subseteq \mathrm{D}_f$ bodu A takové, že $\forall X \in \mathcal{O}(A)$ platí $f(X) \leq f(A)$.
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $A \in \mathrm{D}_f$ **lokálního minima**, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(A) \subseteq \mathrm{D}_f$ bodu A takové, že $\forall X \in \mathcal{O}(A)$ platí $f(X) \geq f(A)$.

Poznámka
V případě ostrých nerovností v předcházející definici hovoříme o ***ostrém lokálním maximu*** *resp. o* ***ostrém lokálním minimu.***

Definice 6.1.2.
Řekneme, že bod $A \in \mathbb{R}^n$ je **stacionárním bodem** funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$, jestliže

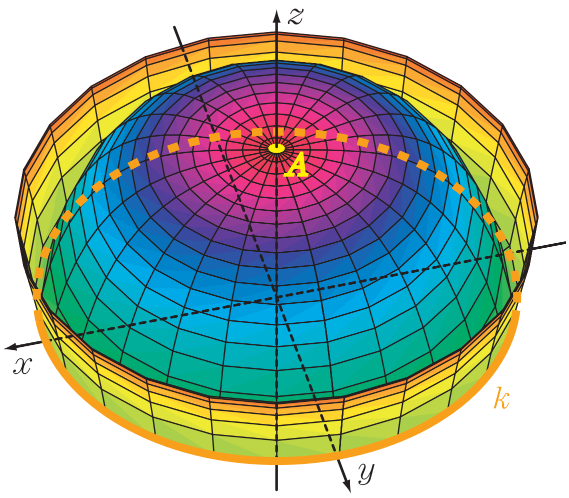
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Následující **Fermatova věta** vyjadřuje nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému.

Věta 6.1.1.
Nechť $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ má v bodě A lokální extrém a nechť v tomto bodě existují všechny parciální derivace funkce f. Pak bod A je stacionárním bodem funkce f.

Poznámka
1. *Fermatova věta nevylučuje možnost, že lokální extrém existuje i v bodě A, který není stacionárním bodem funkce f, protože v něm některá parciální derivace neexistuje.*
2. *Podmínka pro stacionární bod, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0$, je ekvivalentní s podmínkou $df(A) = 0$, tj. totální diferenciál funkce f v bodě A je roven nule.*
3. *Rovnost $df(A) = 0$ je pouze nutnou podmínkou pro existenci lokálního extrému, tj. z platnosti této podmínky ještě nevyplývá existence lokálního extrému. Platí-li $df(A) \neq 0$, pak v bodě A lokální extrém neexistuje.*

Na Obr. 6.1.1 je funkce, která má v bodě A ostré lokální maximum, bod A je stacionárním bodem funkce f. V bodě A existuje parciální derivace funkce f podle x i podle y a obě parciální derivace v bodě A mají hodnotu 0. V bodech kružnice k má funkce lokální minima, i když v těchto bodech neexistuje žádná parciální derivace.



Obr. 6.1.1

Věta 6.1.2.
Nechť $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ je alespoň dvakrát spojitě diferencovatelná (tj. existují spojité parciální derivace alespoň druhého řádu) na okolí bodu $A \in \mathbb{R}^n$. Pak je-li
(a) $d^2 f(A) < 0$, funkce f má v bodě A **ostré lokální maximum**,
(b) $d^2 f(A) > 0$, funkce f má v bodě A **ostré lokální minimum**.

Uvažujme funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$, dvakrát spojitě diferencovatelnou na okolí bodu $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$, bod A nechť je stacionárním bodem funkce f, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$. Podle předchozí věty o existenci lokálního extrému rozhoduje hodnota totálního diferenciálu druhého řádu funkce f v bodě A, tedy hodnota

$$d^2 f(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)dy^2.$$

Výraz na pravé straně je kvadratická forma (tento pojem nebudeme definovat, teorii kvadratických forem se zabývá lineární a multilineární algebra) pro proměnné dx a dy. Mimo jiné to znamená, že $d^2 f(A)$ lze vyjádřit jako součin

$$d^2 f(A) = (dx\, dy) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Označme

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), \quad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix}$$

hlavní determinanty matice parciálních derivací druhého řádu. Pak pro stacionární bod A funkce f platí:

1. Je-li $D_1 > 0 \wedge D_2 > 0$, pak má funkce f v bodě A **ostré lokální minimum**,
2. Je-li $D_1 < 0 \wedge D_2 > 0$, pak má funkce f v bodě A **ostré lokální maximum**,
3. Je-li $D_2 < 0$, pak pro funkci f v bodě A **extrém neexistuje**.

Na základě předchozích úvah můžeme zformulovat větu, která vyjadřuje postačující podmínku pro existenci ostrého lokálního extrému.

Věta 6.1.3.
Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ je na okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ dvakrát spojitě diferencovatelná. Nechť bod A je její stacionární bod. Jestliže

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)\right)^2 > 0,$$

pak má funkce f v bodě A ostrý lokální extrém. Je-li navíc $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0$, jedná se o **ostré lokální minimum**, je-li $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0$, jedná se o **ostré lokální maximum**.

Poznámka
V případě, že $D_2 = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout. Tento problém lze v některých případech řešit tak, že vyšetříme lokální chování funkce f na okolí bodu A.

Uvažujme funkci tří proměnných $u = f(x, y, z)$, dvakrát spojitě diferencovatelnou na okolí bodu $A = [x_0, y_0, z_0] \in \mathbb{R}^2$, bod A nechť je stacionárním bodem funkce f, tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0, \frac{\partial f}{\partial z}(A) = 0$. Analogicky, jako pro funkci dvou proměnných, můžeme sestavit matici druhých parciální derivací, resp.

$$d^2f(A) = (dx\,dy\,dz)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

Označme

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A) \end{vmatrix}$$

hlavní determinanty matice parciálních derivací druhého řádu. Pak pro stacionární bod A funkce f platí:

1. Je-li $D_1 > 0 \wedge D_2 > 0 \wedge D_3 > 0$, pak má funkce f v bodě A **ostré lokální minimum**,
2. Je-li $D_1 < 0 \wedge D_2 > 0 \wedge D_3 < 0$, pak má funkce f v bodě A **ostré lokální maximum**,
3. Je-li $D_2 < 0$, pak pro funkci f v bodě A **extrém neexistuje**.

Řešené úlohy

Příklad 6.1.1. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + 3y^2.$$

Řešení: Funkce je definovaná na celém $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2$. Postup řešení lze rozdělit do následujících kroků:

1. Určíme parciální derivace funkce f prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 6y.$$

2. Parciální derivace položíme rovny nule, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Dostaneme tak soustavu rovnic pro stacionární body funkce f.

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 3y &= 0,\\
-3x + 6y &= 0.
\end{aligned}
$$

3. Soustavu rovnic pro stacionární body vyřešíme. Ze druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do rovnice první.

$$
\begin{aligned}
&x = 2y \Rightarrow 3(2y)^2 - 3y = 0 \Rightarrow 12y^2 - 3y = 0 \Rightarrow y(4y-1) = 0 \Rightarrow\\
&y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A_1 = [0,0]\\
&y = \tfrac{1}{4} \Rightarrow -3x + \tfrac{6}{4} = 0 \Rightarrow x = \tfrac{1}{2} \Rightarrow A_2 = \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right].
\end{aligned}
$$

Našli jsme dva stacionární body, bod $A_1 = [0,0]$ a $A_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$.

4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu funkce f,

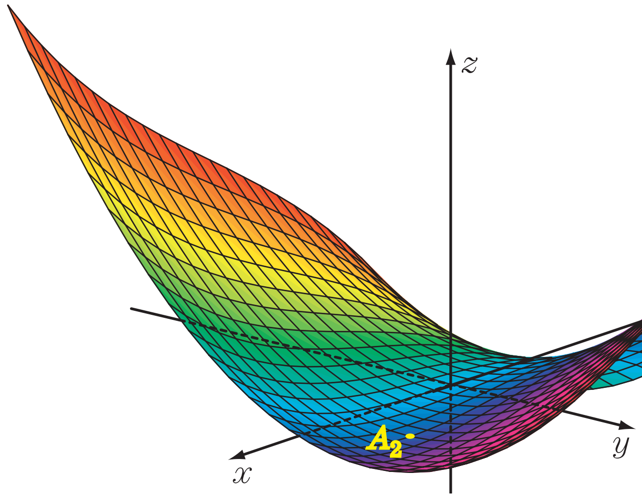
$$
Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.
$$

5. Do matice Q postupně dosadíme jednotlivé stacionární body (tzn. x-ovou souřadnici stacionárního bodu za x, y-ovou souřadnici stacionárního bodu za y).

$$
Q(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad Q(A_2) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.
$$

6. Vypočítáme determinanty D_1, D_2 pro matice $Q(A_1)$, $Q(A_2)$. Hodnoty determinantů rozhodnou o charakteru extrémů.

Stac. bod A_i	D_1	D_2	extrém $z = f(A_i)$
$A_1 = [0,0]$	0	$-9 < 0$	extrém neexistuje
$A_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$	$3 > 0$	$9 > 0$	ostré lokální minimum $z = -\frac{1}{16}$



Obr. 6.1.2

Příklad 6.1.2. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2).$$

Řešení: Funkce je definovaná na celém $\mathbb{R}^2$.

1. Určíme parciální derivace prvého řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(-2x)(2y^2+x^2) + \mathrm{e}^{-x^2-y^2}2x = -2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-1),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(-2y)(2y^2+x^2) + \mathrm{e}^{-x^2-y^2}4y = -2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-2).$$

2. Parciální derivace položíme rovny nule, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Dostaneme tak rovnice pro stacionární body funkce f,

$$-2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-1) = 0,$$
$$-2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-2) = 0.$$

3. Rovnice pro stacionární body vyřešíme. Výraz $\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ je vždy různý od nuly pro libovolné x, y, můžeme jím proto obě rovnice vykrátit,

$$x(2y^2+x^2-1) = 0,$$
$$y(2y^2+x^2-2) = 0.$$

Položíme-li v první rovnici $x = 0$, dostáváme ze druhé rovnice $y(2y^2 - 2) = 0$ řešení $y = 0$, $y = \pm 1$. Získali jsem tři stacionární body $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [0, 1]$ a $A_3 = [0, -1]$.

Položíme-li ve druhé rovnici $y = 0$, pak z první rovnice $x(x^2 - 1) = 0$ plyne řešení ve tvaru $x = 0$, $x = \pm 1$. Stacionární bod $A_1 = [0, 0]$ jsme již vypočítali, takže na základě předpokladu $y = 0$ jsme získali dva nové stacionární body, bod $A_4 = [1, 0]$ a $A_5 = [-1, 0]$.

Zbývá ještě prověřit možnost, že $x \neq 0$, $y \neq 0$. V tomto případě řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 2y^2 + x^2 - 1 &= 0, \\ 2y^2 + x^2 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Jestliže obě rovnice od sebe odečteme, dostáváme rovnici $1 = 0$, toto ale neplatí pro žádné x, y. Soustava nemá za tohoto předpokladu řešení. Žádný nový stacionární bod jsme nezískali.

Shrneme-li krok 3, výsledkem naší snahy bylo určení pěti stacionárních bodů: $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [0, 1]$, $A_3 = [0, -1]$, $A_4 = [1, 0]$, $A_5 = [-1, 0]$.

4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu.

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{pmatrix}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= ((-2 + 4x^2)(2y^2 + x^2 - 1) - 4x^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 4xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 3), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 4xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 3), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= ((-2 + 4y^2)(2y^2 + x^2 - 2) - 8y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

5. Do matice parciálních derivací postupně dosadíme stacionární body (tzn. x-ovou souřadnici stacionárního bodu dosadíme za proměnou x, y-ovou za y).

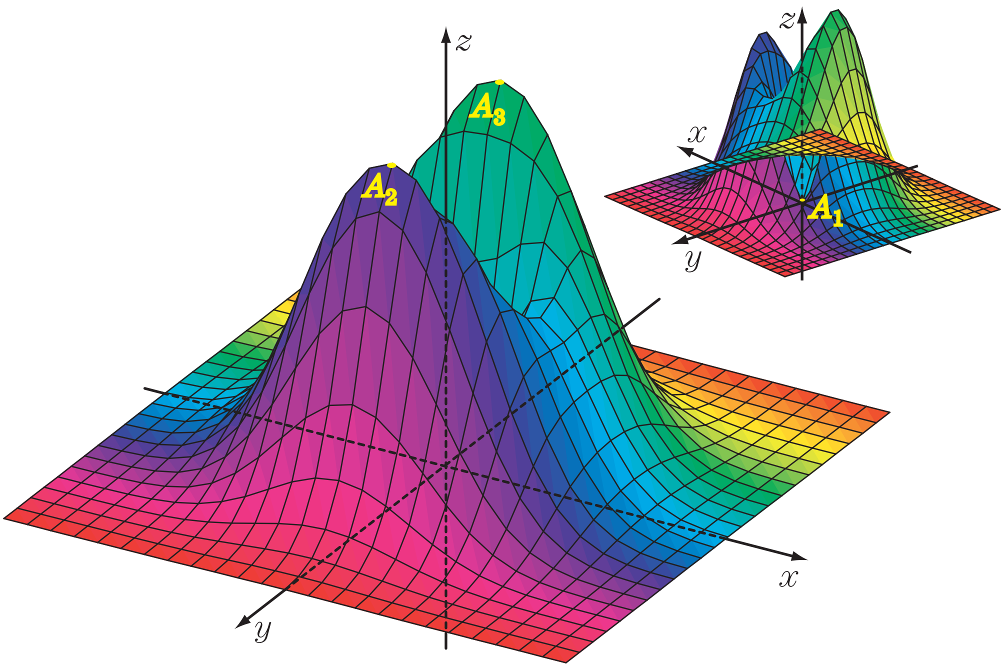
$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, Q(A_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix}, Q(A_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix},$$

$$Q(A_4) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}, Q(A_5) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}.$$

6. Určíme hodnoty D_1, D_2 a rozhodneme o charakteru extrémů.

Stac. bod A_i	D_1	D_2	extrém $z = f(A_i)$
$A_1 = [0, 0]$	$2 > 0$	$8 > 0$	ostré lokální minimum $z = 0$
$A_2 = [0, 1]$	$-\frac{2}{e} < 0$	$\frac{16}{e^2} > 0$	ostré lokální maximum $z = \frac{2}{e}$
$A_3 = [0, -1]$	$-\frac{2}{e} < 0$	$\frac{16}{e^2} > 0$	ostré lokální maximum $z = \frac{2}{e}$
$A_4 = [1, 0]$	$-\frac{4}{e} < 0$	$-\frac{8}{e^2} < 0$	extrém neexistuje
$A_5 = [-1, 0]$	$-\frac{4}{e} < 0$	$-\frac{8}{e^2} < 0$	extrém neexistuje

V bodě A_1 má funkce f ostré lokální minimum. V bodech A_2, A_3 má funkce f ostrá lokální maxima. V bodech A_4, A_5 funkce f extrém nemá, Obr. 6.1.3.



Obr. 6.1.3

Příklad 6.1.3. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^3.$$

Řešení: Definičním oborem funkce f je $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2$.

1. Určíme parciální derivace funkce f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2.$$

2. Parciální derivace položíme rovny 0, dostáváme soustavu rovnic pro stacionární body,

$$3x^2 = 0,$$
$$3y^2 = 0.$$

3. Řešením soustavy je jediný stacionární bod $A = [0,0]$.

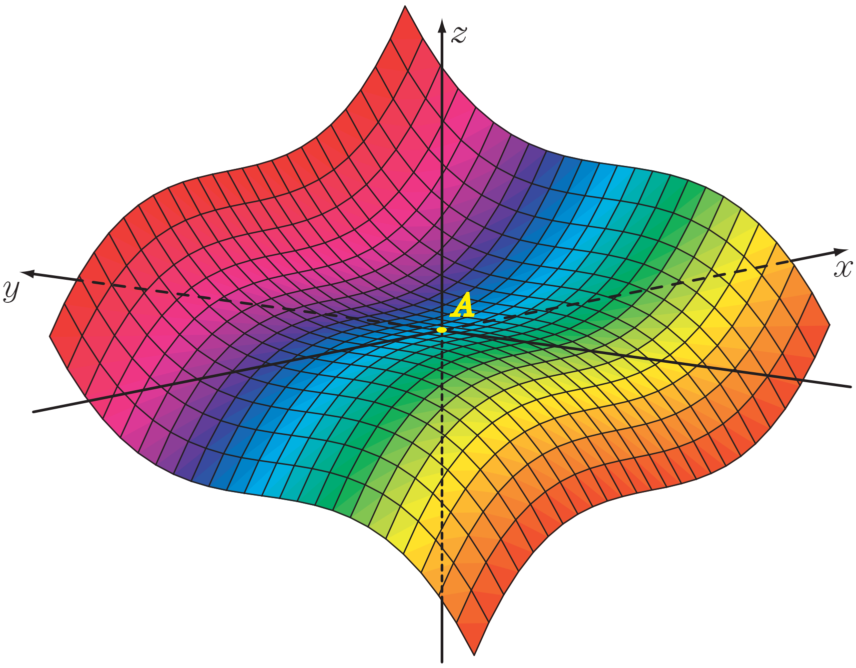
4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu,

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6x \end{pmatrix}.$$

5. Do matice Q dosadíme stacionární bod,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Determinant $D_1 = 0$, $D_2 = 0$. Nemůžeme o existenci extrému rozhodnout. Ovšem jaká bude funkční hodnota v bodě A? Dosadíme souřadnice bodu A do funkčního předpisu funkce f, tedy $f(A) = 0$. Jak se funkce chová na okolí bodu $A = [0,0]$. Když dosadíme za x a za y záporná čísla, hodnota z bude záporná, tj. $z < f(A)$. Pokud za x a y do funkčního předpisu dosadíme kladná čísla, hodnota z bude kladná, tj. $z > f(A)$. Na libovolném okolí bodu $[0,0]$ existují body, jejichž funkční hodnota je větší než $f(A)$, ale zároveň existují body, jejichž funkční hodnota je menší než $f(A)$. V bodě $A = [0,0]$ extrém neexistuje.



Obr. 6.1.4

Příklad 6.1.4. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + zy - z + y - 2x.$$

Řešení: Postupujeme analogicky jako v případě funkce dvou proměnných. Definičním oborem funkce f je celé $\mathbb{R}^3$.

1. Určíme parciální derivace funkce f,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + z + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + y - 1.$$

2. Sestavíme soustavu rovnic pro stacionární body,

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= 0, \\ 2y + z + 1 &= 0, \\ 2z + y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

3. Řešením soustavy je bod $A = [1, -1, 1]$.

4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Do matice Q dosadíme stacionární bod $A = [1, -1, 1]$, tedy

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Determinant $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = 4 > 0$, $D_3 = 6 > 0$. V bodě $A = [1, -1, 1]$ má funkce f ostré lokální minimum $z = -2$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 6x + 3y^2 - 12y + 11$.

2. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 3xy - x + 2y$.

3. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - xy + 3x + y + 3$.

4. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 - 12x - 2y^2 - 4y$.

5. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{1}{3}y^3 - 9y$.

6. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^5 - 5x + y^3 - 3y$.

7. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 3xy - 2x - 3y + 5y^2 + 3$.

8. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - 4xy + 4x + \frac{9}{2}y^2 - 15y$.

9. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = (x^2 + 4x)y + y^2$.

10. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 20y$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. Stacionární bod: $A = [-3, 2]$ - ostré lokální minimum $f(A) = -10$.

2. Stacionární bod: $A = [-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$ - extrém neexistuje.

3. Stacionární bod: $A = [1, 5]$ - extrém neexistuje.

4. Stacionární body: $A_1 = [2, -1]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [-2, -1]$ - ostré lokální maximum $f(A_2) = 18$.

5. Stacionární body: $A_1 = [5, 3]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [5, -3]$ - ostré lokální maximum $f(A_2) = \frac{61}{2}$.

6. Stacionární body: $A_1 = [-1, 1]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [1, 1]$ - ostré lokální minimum $f(A_2) = -6$, $A_3 = [1, -1]$ - extrém neexistuje, $A_4 = [-1, -1]$ - ostré lokální maximum $f(A_4) = 6$.

7. Stacionárním bod: $A = [1, 0]$ - ostré lokální minimum $f(A) = 2$.

8. Stacionárním bod: $A = [12, 7]$ - ostré lokální minimum $f(A) = -\frac{57}{2}$.

9. Stacionární body: $A_1 = [0, 0]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [-4, 0]$ - extrém neexistuje, $A_3 = [-2, 2]$ - ostré lokální minimum $f(A_3) = -4$.

10. Stacionární body: $A_1 = [2, 4]$ - ostré lokální minimum $f(A_1) = -58$, $A_2 = [2, -5]$ - extrém neexistuje, $A_3 = [-3, 4]$ - extrém neexistuje, $A_4 = [-3, -5]$ - ostré lokální maximum $f(A_4) = \frac{253}{3}$.

6.2. Vázané extrémy

Výklad

Dalším typem extrémů, kterým se budeme zabývat jsou tzv. vázané extrémy. Hledáme extrémy nějaké funkce vzhledem k předem zadaným podmínkám.

Definice 6.2.1.

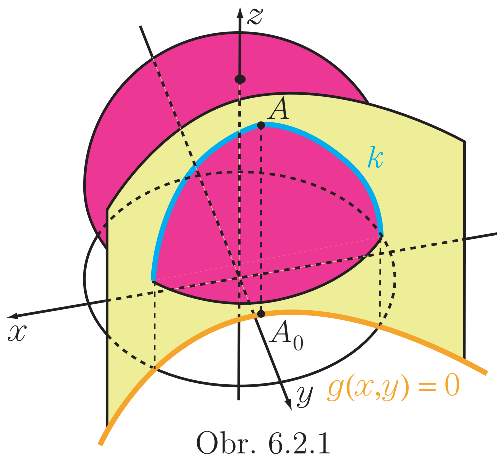
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ má v bodě $A \in \mathrm{D}_f$ **lokální extrém vázaný** m **podmínkami**, $m < n$,

$$g_1(x_1, x_2, \dots x_n) = 0,\ g_2(x_1, x_2, \dots x_n) = 0,\ \dots,\ g_m(x_1, x_2, \dots x_n) = 0,$$

jestliže pro všechny body $X \in \mathcal{O}(A) \subset \mathrm{D}_f$, které vyhovují uvedeným podmínkám, platí jeden ze vztahů:

1. $f(X) \geq f(A)$, pak má funkce f v bodě A **vázané lokální minimum**,
2. $f(X) \leq f(A)$, pak má funkce f v bodě A **vázané lokální maximum**.

Geometrický význam vázaných extrémů. Nechť $z = f(x, y)$, $n = 2$. Buď dána podmínka $g(x, y) = 0$. Hledáme vázané extrémy funkce f vzhledem k podmínce $g(x, y) = 0$. Extrém může nastat pouze v bodech z definičního oboru funkce f, které leží na křivce o rovnici $g(x, y) = 0$. Těmto bodům odpovídají body na ploše $z = f(x, y)$, které tvoří prostorovou křivku k (průsečnice plochy $z = f(x, y)$ s přímou válcovou plochou $g(x, y) = 0$). Lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ vázané podmínkou $g(x, y) = 0$ jsou z geometrického hlediska lokálními extrémy prostorové křivky k, Obr. 6.2.1.



Obr. 6.2.1

Věta 6.2.1.
Buď dána funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ a nechť je dáno m, $m < n$, podmínek

$$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Jestliže má funkce Φ

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

kde $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, ve svém stacionárním bodě lokální extrém, má i funkce f v tomto bodě lokální extrém vázaný podmínkami $g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Poznámka
Předchozí věta reprezentuje tzv. ***Lagrangeovu metodu*** *hledání vázaného extrému. Funkce Φ se nazývá* ***Lagrangeova funkce****. Reálná čísla λ_j se nazývají* ***Lagrangeovy multiplikátory****. Stacionární body Lagrangeovy funkce Φ určíme jako řešení soustavy rovnic*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Omezme se nyní na funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$. V určitých případech při hledání vázaného extrému nemusíme Lagrangeovu metodu použít.

Poznámka
Jestliže lze z rovnice $g(x, y) = 0$ jednoznačně vyjádřit $y = \varphi(x)$ resp. $x = \psi(y)$, pak lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ vázané podmínkou $g(x, y) = 0$ můžeme určit jako lokální extrémy funkce jedné proměnné $z = f(x, \varphi(x))$ resp. $z = f(\psi(y), y)$.

Řešené úlohy

Příklad 6.2.1. Nalezněte vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = x + y,$$

vzhledem k podmínce $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1.$

Řešení: Definiční obor funkce f je $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - 1 = 0.$

1. Sestavíme Lagrangeovu funkci,

$$\Phi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x + y + \lambda\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1\right).$$

2. Hledáme lokální extrémy Lagrangeovy funkce Φ. Nejdříve určíme parciální derivace funkce Φ podle proměnných x, y,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 1 - \frac{2\lambda}{x^3}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 1 - \frac{2\lambda}{y^3}.$$

3. Sestavíme soustavu rovnic pro stacionární body funkce Φ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x} &= 0, & & & 1 - \frac{2\lambda}{x^3} &= 0, & & & x^3 - 2\lambda &= 0,\\
\frac{\partial\Phi}{\partial y} &= 0, & &\Rightarrow & 1 - \frac{2\lambda}{y^3} &= 0, & &\Rightarrow & y^3 - 2\lambda &= 0,\\
g(x,y) &= 0, & & & \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 &= 0, & & & x^2 + y^2 - x^2y^2 &= 0,
\end{aligned}$$

pro $x \neq 0$, $y \neq 0$.

4. Soustavu vyřešíme. Z první rovnice přímo plyne $x = \sqrt[3]{2\lambda}$. Ze druhé rovnice dostáváme $y = \sqrt[3]{2\lambda}$. Dosadíme do třetí rovnice za x a za y, dostaneme rovnici o jedné neznámé λ,

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{(2\lambda)^2} + \sqrt[3]{(2\lambda)^2} - \sqrt[3]{(2\lambda)^2}\sqrt[3]{(2\lambda)^2} &= 0,\\
2\sqrt[3]{4\lambda^2} - \sqrt[3]{4\lambda^2 4\lambda^2} &= 0,\\
2\sqrt[3]{4\lambda^2} - 2\sqrt[3]{2\lambda^4} &= 0,\\
\sqrt[3]{2\lambda^4} &= \sqrt[3]{4\lambda^2}\\
2\lambda^4 &= 4\lambda^2,\\
\lambda^4 - 2\lambda^2 &= 0,\\
\lambda^2(\lambda^2 - 2) &= 0.
\end{aligned}$$

Dostáváme řešení ve tvaru:

$$\lambda_1 = \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{2}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Hodnoty λ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ dosadíme do prvních dvou rovnic a vypočítáme x a y. Tedy

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = \sqrt{2} \qquad &\Rightarrow \qquad x = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2} = y,\\
\lambda_2 = -\sqrt{2} \qquad &\Rightarrow \qquad x = \sqrt[3]{-2\sqrt{2}} = -\sqrt[3]{\sqrt{8}} = -\sqrt{\sqrt[3]{8}} = -\sqrt{2} = y,\\
\lambda_3 = \lambda_4 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad x = 0 = y.
\end{aligned}$$

Celá soustava byla řešena za podmínky, že $x \neq 0$ a $y \neq 0$. Pro hodnotu $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ se $x = 0$ a $y = 0$, to je ovšem ve sporu s podmínkou a tedy λ_3, λ_4 není řešení naší soustavy rovnic. Řešením soustavy jsou tedy pouze dva stacionární body, a to $A_1 = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ pro $\lambda_1 = \sqrt{2}$ a $A_2 = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$ pro $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

5. Sestavíme matici druhých parciálních derivací funkce Φ,

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{6\lambda}{x^4} & 0 \\ 0 & \dfrac{6\lambda}{y^4} \end{pmatrix}.$$

6. Dosadíme do Q jednotlivé stacionární body a odpovídající hodnoty λ,

$$\lambda_1 = \sqrt{2}: \; Q(A_1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{2}: \; Q(A_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(-\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}(-\sqrt{2}) \end{pmatrix}.$$

7. Podle determinantů D_1 a D_2 rozhodneme o charakteru vázaných extrémů.

Stac. bod A_i	D_1	D_2	vázaný extrém $z = \Phi(A_i)$
$A_1 = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$	$\frac{3}{2}\sqrt{2} > 0$	$\frac{9}{2} > 0$	vázané lokální minimum $z = 2\sqrt{2}$
$A_2 = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$	$-\frac{3}{2}\sqrt{2} < 0$	$\frac{9}{2} > 0$	vázané lokální maximum $z = -2\sqrt{2}$

Poznámka
Pokud Lagrangeova funkce Φ nemá v některém svém stacionárním bodě extrém, pak to ještě neznamená, že i funkce f nemá v tomto bodě lokální extrém, viz. příklad 6.2.2.

Příklad 6.2.2. Určete vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = 27(x + y - 1)$$

vzhledem k podmínce $9(x^2 + y^2) = 2x^2y^2$.

Řešení: Definičním oborem funkce f je množina $D_f = \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = 9(x^2 + y^2) - 2x^2y^2 = 0$.

1. Sestavíme Lagrangeovu funkci,

$$\Phi(x, y, \lambda) = 27(x + y - 1) + \lambda(9(x^2 + y^2) - 2x^2y^2).$$

2. Určíme parciální derivace Lagrangeovy funkce Φ podle x, y,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 27 + 18\lambda x - 4\lambda xy^2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 27 + 18\lambda y - 4\lambda x^2 y.$$

3. Sestavíme soustavu rovnic pro stacionární body funkce Φ,

$$27 + 18\lambda x - 4\lambda xy^2 = 0,$$
$$27 + 18\lambda y - 4\lambda x^2 y = 0,$$
$$9(x^2 + y^2) - 2x^2y^2 = 0.$$

4. Soustavu vyřešíme. Odečteme od sebe první dvě rovnice, tj. $\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, dostáváme

$$2\lambda(y - x)(9 + 2xy) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee y = x \vee y = -\frac{9}{2x}.$$

Jestliže $\lambda = 0$, pak první dvě rovnice nejsou splněny. Proto se v tomto případě nejedná o řešení soustavy. Další dva mezivýsledky postupně dosadíme do třetí rovnice. Uvažujme nejdříve $y = -\dfrac{9}{2x}$,

$$9x^2 + 9\frac{81}{4x^2} - 2x^2\frac{81}{4x^2} = 0, \quad x \neq 0,$$
$$4x^4 - 18x^2 + 81 = 0.$$

Použijeme substituci $x^2 = t$, dostáváme kvadratickou rovnici

$$4t^2 - 18t + 81 = 0.$$

Diskriminant této rovnice $D = (-18)^2 - 16 \cdot 81 < 0$, tzn. rovnice nemá žádné řešení.

Dosaďme nyní $y = x$ do třetí rovnice,

$$9x^2 + 9x^2 - 2x^2x^2 = 0,$$
$$18x^2 + 2x^4 = 0,$$
$$2x^2(9 - x^2) = 0.$$

Dostáváme řešení ve tvaru

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = x_4 = 0.$$

Hodnoty y_i, $i = 1, 2, 3, 4$ získáme z podmínky $y = x$, λ_i vypočítáme z libovolné z prvních dvou rovnic soustavy. Tedy

$$\begin{array}{lclcl}
x_1 = 3 & \Rightarrow & y_1 = 3 & \Rightarrow & \lambda_1 = \frac{1}{2}, \\
x_2 = -3 & \Rightarrow & y_2 = -3 & \Rightarrow & \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \\
x_3 = x_4 = 0 & \Rightarrow & y_3 = y_4 = 0 & \Rightarrow & \text{řešení neexistuje.}
\end{array}$$

Získali jsme dva stacionární body funkce Φ, $A_1 = [3, 3]$ pro $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = [-3, -3]$ pro $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

5. Sestavíme matici druhých parciálních derivací funkce Φ,

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18\lambda - 4\lambda y^2 & -8\lambda xy \\ -8\lambda xy & 18\lambda - 4\lambda x^2 \end{pmatrix}.$$

6. Dosadíme do Q jednotlivé stacionární body a odpovídající hodnoty λ,

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2} : Q(A_1) = \begin{pmatrix} -9 & -36 \\ -36 & -9 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\tfrac{1}{2} : Q(A_2) = \begin{pmatrix} 9 & 36 \\ 36 & 9 \end{pmatrix}.$$

7. Podle determinantů D_1 a D_2 rozhodneme o charakteru vázaných extrémů.

Stac. bod A_i	D_1	D_2	vázaný extrém $z = \Phi(A_i)$
$A_1 = [3, 3]$	$-9 < 0$	$81 - 36^2 < 0$	extrém neexistuje
$A_2 = [-3, -3]$	$9 > 0$	$81 - 36^2 < 0$	extrém neexistuje

Lagrangeova funkce Φ v bodech A_1, A_2 nemá extrém, ovšem to ještě neznamená, že i funkce f v těchto bodech nemá extrém.

8. Využijeme větu **??** Určíme $d^2\Phi$,

$$d^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}dy^2,$$

a tedy

$$d^2\Phi = (18\lambda - 4\lambda y^2)dx^2 - 16\lambda xydxdy + (18\lambda - 4\lambda x^2)dy^2.$$

9. Hodnota $d^2\Phi$ ve stacionárních bodech funkce Φ rozhodne o vázaných extrémech funkce f. Dosadíme postupně do $d^2\Phi$ bod A_1 a bod A_2,

$$d^2\Phi(A_1) = -9dx^2 - 72dxdy - 9dy^2, \quad d^2\Phi(A_2) = 9dx^2 + 72dxdy + 9dy^2.$$

10. Diferencujeme podmínku $g(x, y) = 0$,

$$18xdx + 18ydy + 4xy^2dx + 4x^2ydy = 0 \Rightarrow (18x + 4xy^2)dx + (18x + 4x^2y)dy = 0.$$

Dosadíme za x a y souřadnice stacionárních bodů,

$$A_1 : (18 \cdot 3 + 12 \cdot 9)dx + (18 \cdot 3 + 12 \cdot 9)dy = 0 \Rightarrow dy = -dx,$$

$$A_2 : (18 \cdot (-3) - 12 \cdot 9)dx + (18 \cdot (-3) - 12 \cdot 9)dy = 0 \Rightarrow dy = -dx.$$

V jistém okolí jak bodu A_1, tak bodu A_2 platí $dy = -dx$. Tento vztah využijeme v bodě 9. a dostáváme

$$A_1 : d^2\Phi(A_1) = 54dx^2 > 0 \Rightarrow \text{vázáné lokální minimum } z = f(A_1) = 135,$$
$$A_2 : d^2\Phi(A_2) = -54dx^2 < 0 \Rightarrow \text{vázáné lokální maximum } z = f(A_2) = -189.$$

Příklad 6.2.3. Určete vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = xy - x + y - 1,$$

vzhledem k podmínce $x + y = 1$.

Řešení: Definiční obor funkce $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2$.

1. Z podmínky $x + y = 1$ můžeme vypočítat jak x, tak i y. Z podmínky vyjádříme např. y,

$$y = 1 - x.$$

2. Dosadíme $y = 1 - x$ do funkce $z = f(x, y) = xy - x + y - 1$ a dostaneme funkci jedné proměnné x,

$$z = x(1 - x) - x + 1 - x - 1 = -x^2 - x.$$

3. Hledáme extrémy funkce jedné proměnné.

$$z' = -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\tfrac{1}{2},$$
$$z'' = -2 < 0.$$

Druhá derivace je záporná pro všechny body definičního oboru funkce jedné proměnné z, a tedy i v bodě $x = -\frac{1}{2}$ je druhá derivace záporná, $z''(-\frac{1}{2}) = -2 < 0$. Funkce z má v bodě $x = -\frac{1}{2}$ ostré lokální maximum. Dopočítáme hodnotu y,

$$y = 1 - (-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2}.$$

Funkce $f(x, y) = xy - x + y - 1$ má v bodě $A = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ vázané lokální maximum $z = \frac{1}{4}$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 4x + 2y + 1$ vzhledem k podmínce $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$.

2. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 12x + y - 3$ vzhledem k podmínce $y = -x^3 + 3$.

3. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 3y + 2x^4 + 9x^2 + 6$ vzhledem k podmínce $y = -x^4 + 3x^2 - 2$.

4. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2+y}$ vzhledem k podmínce $y = -x^3$.

5. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ vzhledem k podmínce $y = x + 3$.

6. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = \sqrt{4x + y^2 + 5}$ vzhledem k podmínce $y = 2x - 3$.

7. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + y^3$ vzhledem k podmínce $2x + 2y = 1$.

8. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = -8x + 6y - 5$ vzhledem k podmínce $x^2 + y^2 = 100$.

9. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 4x + 3y - 4$ vzhledem k podmínce $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

10. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = -3x - 9$ vzhledem k podmínce $3y - y^3 = x^2$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $[-\frac{3}{2}, 1]$ - vázané lokální minimum.

2. $[-2, 11]$ - vázané lokální minimum, $[2, -5]$ - vázané lokální maximum.

3. $[0, -2]$ - vázané lokální minimum, $[3, -56]$ - vázané lokální maximum, $[-3, -56]$ - vázané lokální maximum.

4. $[0, 0]$ - vázané lokální minimum, $[\frac{2}{3}, -\frac{8}{27}]$ - vázané lokální maximum.

5. $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ - vázané lokální minimum.

6. $[1, -1]$ - vázané lokální minimum.

7. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ - vázané lokální minimum.

8. $[8, -6]$ - vázané lokální minimum, $[-8, 6]$ - vázané lokální maximum.

9. $[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$ - vázané lokální minimum, $[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$ - vázané lokální maximum.

10. $[\sqrt{2}, 1]$ - vázané lokální minimum, $[-\sqrt{2}, 1]$ - vázané lokální maximum.

6.3. Globální extrémy

Výklad

Globální extrémy mají stejný význam jako u funkcí jedné proměnné. Hledáme je buď na celém definičním oboru dané funkce, nebo na předem zadané podmnožině definičního oboru.

Definice 6.3.1.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ má na uzavřeném definičním oboru D_f **globální maximum** (absolutní maximum) v bodě $A \in \mathrm{D}_f$, jestliže $\forall X \in \mathrm{D}_f$ platí $f(X) \leq f(A)$.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ má na uzavřeném definičním oboru D_f **globální minimum** (absolutní minimum) v bodě $A \in \mathrm{D}_f$, jestliže $\forall X \in \mathrm{D}_f$ platí $f(X) \geq f(A)$.

Je-li $f(X) < f(A)$ resp. $f(X) > f(A)$, hovoříme o **ostrém globálním maximu** resp. **ostrém globálním minimu**.

Poznámka

*Množina D_f se nazývá **uzavřená**, jestliže obsahuje všechny své hraniční body. **Hraničním bodem** množiny D_f rozumíme takový bod, jehož každé okolí obsahuje body X ležící v D_f, tj. $X \in \mathrm{D}_f$, a současně obsahuje body Y neležící v D_f, tj. $Y \notin \mathrm{D}_f$. Také množina $\mathbb{R}^n$ je množina uzavřená. Ovšem hranice této množiny je prázdná množina, $\emptyset$.*

Poznámka

Na rozdíl od lokálních extrému, které se hledají na okolích bodů, hledáme globální extrémy na celé množině D_f.

Uvažujme spojitou a alespoň dvakrát spojitě diferencovatelnou funkci (tj. existují spojité parciální derivace alespoň až do druhého řádu) $z = f(x, y)$, definovanou na uzavřené množině D_f. Nechť hranice této množiny je křivka o rovnici $g(x, y) = 0$. Globální extrémy funkce f na množině D_f budeme určovat takto:

1. Určíme lokální extrémy funkce f na množině D_f, ze které vyloučíme hranici.

2. Určíme lokální extrémy této funkce vázané podmínkou $g(x, y) = 0$.

3. Porovnáme funkční hodnoty všech extrémů. Extrém s největší funkční hodnotou bude **globálním maximem**, extrém s nejmenší funkční hodnotou bude **globálním minimem**.

Poznámka

Je-li hranice tvořena konečným počtem křivek, vyšetřujeme vázané extrémy na jednotlivých křivkách. V tomto případě ovšem musíme uvažovat i vrcholy hraničních křivek při konečném porovnávání funkčních hodnot.

Poznámka

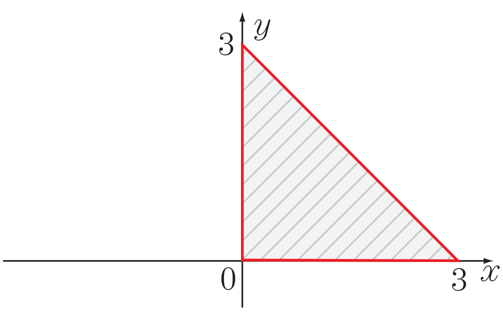
Analogicky se postupuje i v případě funkcí tří a více proměnných.

Řešené úlohy

Příklad 6.3.1. Nalezněte globální extrémy funkce $z = f(x, y)$,

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,$$

je-li $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -x + 3\}$.



Obr. 6.3.1

Řešení: Definičním oborem funkce f je trojúhelník s vrcholy $A = [0,0]$, $B = [3,0]$, a $C = [0,3]$ plus všechny body, které v něm leží, Obr. 6.3.1.

1. Nejdříve budeme hledat lokální extrémy funkce f v bodech ležících uvnitř trojúhelníku ABC.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 6 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y + 4x = 0.$$

Řešením této soustavy je bod $A_1 = [1,1]$, tento bod ovšem leží uvnitř trojúhelníku ABC, leží tedy v množině D_f a má smysl hledat v tomto bodě lokální extrém funkce f.

Sestavíme matici Q a dosadíme do matice Q bod A_1,

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Determinant $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = -24 < 0$, extrém v bodě A_1 neexistuje.

2. Hraniční křivka se skládá ze tří úseček ležících na přímkách. Jedná se o přímku $x = 0$ pro $y \in (0,3)$, $y = 0$ pro $x \in (0,3)$ a $y = -x + 3$ pro $x \in (0,3)$. Prověříme existenci vázaných extrémů funkce f na jednotlivých úsečkách.

a) Nechť $g(x,y) = x = 0$ pro $y \in (0,3)$. Pak

$$f(y) = -2y^2 - 1$$
$$\frac{df}{dy} = -4y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Dosadili jsme $x = 0$ do funkce f a získali jsme tak funkci pouze jedné proměnné y. Funkci jsme derivovali podle y a dostali jsme stacionární bod $y = 0$. Ovšem tento bod neleží v intervalu $(0,3)$, a tedy vázaný extrém na této úsečce neexistuje.

b) Nechť $g(x,y) = y = 0$ pro $x \in (0,3)$. Pak

$$f(x) = x^2 - 6x - 1$$
$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 2x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = 3.$$

Ovšem bod $x = 3$ neleží v intervalu $(0,3)$ a tedy vázaný extrém neexistuje.

c) Nechť $g(x,y) = y + x - 3 = 0$ pro $x \in (0,3)$. Dosazujeme za y do funkce f výraz $y = -x + 3$, tedy

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2(-x+3)^2 + 4x(-x+3) - 6x - 1 \\ &= -5x^2 + 18x - 19 \\ f'(x) &= -10x + 18 = 0 \;\Rightarrow\; x = \tfrac{9}{5}. \end{aligned}$$

Bod $x = \frac{9}{5}$ leží v intervalu $(0,3)$ a má smysl zkoumat, zda-li v tomto bodě má funkce f vázaný extrém. Vypočítáme druhou derivaci funkce f a určíme hodnotu derivace v bodě $x = \frac{9}{5}$,

$$f''(\tfrac{9}{5}) = -10 < 0 \;\Rightarrow\; \text{ostré lokální maximum.}$$

Dopočítáme y-ovou souřadnici z rovnice $y = -x + 3$, tedy $y = \frac{6}{5}$. Funkce f má v bodě $A_2 = [\frac{9}{5}, \frac{6}{5}]$ vázané lokální maximum.

3. Protože je hranice tvořená jednotlivými křivkami, musíme ještě vyšetřit vrcholy trojúhelníka ABC. Vypočítáme jednotlivé funkční hodnoty a vzájemně je porovnáme.

$$f(A_2) = -\tfrac{14}{5}, \quad f(A) = -1, \quad f(B) = -10, \quad f(C) = -19.$$

Porovnáme jednotlivé funkční hodnoty,

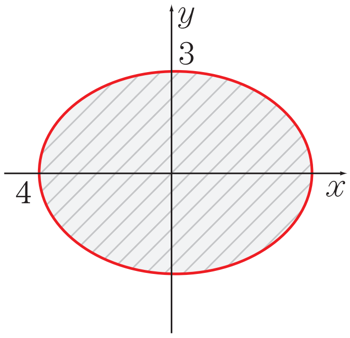
$$f(C) < f(B) < f(A_2) < f(A).$$

Funkce f má v bodě $A = [0,0]$ globální maximum $z = -1$ a v bodě $C = [0,3]$ globální minimum $z = -19$.

Příklad 6.3.2. Na elipse $9x^2 + 16y^2 \leq 144$ nalezněte globální extrémy funkce $z = f(x, y)$,

$$f(x, y) = 9x^2 - 36x + 16y^2 - 64y.$$

Řešení: Definičním oborem funkce f je $\mathrm{D}_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, 9x^2 + 16y^2 \leq 144\}$.



Obr. 6.3.2

Nalezneme lokální extrémy funkce f,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 18x - 36 = 18(x - 2) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 32y - 64 = 32(y - 2) = 0.$$

Řešením soustavy je bod $A_1 = [2, 2]$. Je nutné ověřit, že bod A_1 leží v D_f, dosazením snadno zjistíme, že A_1 vyhovuje nerovnici elipsy. Sestavíme matici parciálních derivací druhého řádu a určíme hodnoty determinantů D_1, D_2. Obě hodnoty jsou kladné, funkce f má v bodě A_1 ostré lokální minimum.

Sestavíme Lagrangeovu funkci a vyšetříme existenci vázaných extrému na hranici elipsy.

$$\Phi = 9x^2 - 36x + 16y^2 - 64y + \lambda(9x^2 + 16y^2 - 144),$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 18x - 36 + 18\lambda x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{1 + \lambda},$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 32y - 64 + 32\lambda y = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{1 + \lambda}.$$

Dosadíme do rovnice vazby $(g(x, y) = 9x^9 + 16y^2 - 144 = 0)$,

$$9\left(\frac{2}{1 + \lambda}\right)^2 + 16\left(\frac{2}{1 + \lambda}\right)^2 = 144 \Rightarrow \lambda_2 = \tfrac{1}{6},\ \lambda_3 = \tfrac{11}{6}.$$

Pro $\lambda_2 = \frac{1}{6}$ dopočítáme $x_2 = y_2 = \frac{12}{5}$, získali jsme stacionární bod $A_2 = [\frac{12}{5}, \frac{12}{5}]$. Stejně postupujeme i pro hodnotu $\lambda_3 = \frac{11}{6}$, $x_3 = y_3 = -\frac{12}{5}$, tedy $A_3 = [-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}]$.

Sestavíme matici parciálních derivací druhého řádu pru Lagrangeovu funkci Φ a určíme hodnoty příslušných determinantů. V bodě $A_2 = [\frac{12}{5}, \frac{12}{5}]$ má funkce f vázané lokální minimum, v bodě $A_3 = [-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}]$ má funkce f vázané lokální maximum.

Porovnáním funkčních hodnot rozhodneme o existenci globálních extrémů funkce f,

$$f(A_1) = -100 \quad < \quad f(A_2) = -96 \quad < \quad f(A_3) = 384.$$

Funkce f má v bodě $A_1 = [2, 2]$ globální minimum $z = -100$ a v bodě $A_3 = [-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}]$ globální maximum $z = 384$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - y$ na čtverci s vrcholy $[1, 1]$, $[3, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 3]$.

2. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ na trojúhelníku s vrcholy $[0, 0]$, $[2, 0]$, $[0, 1]$.

3. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 4y$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq 1$.

4. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 3x + 4y + 1$ na kruhu $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.

5. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 5x - 3y + 1$ na trojúhelníku s vrcholy $[1, 4]$, $[-2, 1]$, $[0, -1]$.

6. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na trojúhelníku s vrcholy $[1, 4]$, $[-2, 1]$, $[0, -1]$.

7. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na čtverci s vrcholy $[0, 0]$, $[-1, 0]$, $[-1, -1]$, $[0, -1]$.

8. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq 16$.

9. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 2x + 4y + 1$ na elipse $x^2 + 4y^2 \leq 1$.

10. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = (x - y)^2 + x^2$ na čtverci s vrcholy $[2, 0]$, $[0, 2]$, $[-2, 0]$, $[0, -2]$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $[1,3]$ - globální minimum, $[3,1]$ - globální maximum. Návod: pro vyjádření hraničních křivek stačí najít rovnice přímek, které jsou určeny vrcholy čtverce.

2. $[0,0]$ - globální minimum, $[2,0]$ - globální maximum.

3. $[0,-1]$ - globální minimum, $[0,1]$ - globální maximum.

4. $[\frac{12}{5},\frac{1}{5}]$ - globální minimum, $[\frac{18}{5},\frac{9}{5}]$ - globální maximum.

5. $[-2,1]$ - globální minimum, $[0,-1]$ - globální maximum.

6. $[1,4]$ - globální minimum, $[0,1]$ - globální maximum.

7. $[-1,-1]$ - globální minimum, $[0,0]$ - globální maximum.

8. $[0,-4]$ - globální minimum, $[0,1]$ - globální maximum.

9. $[-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4}]$ - globální minimum, $[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}]$ - globální maximum.

10. $[0,0]$ - globální minimum, $[0,-2]$ - globální maximum, $[0,2]$ - globální maximum.

Kontrolní test

1. Určete lokální extrémy funkce $f(x,y)=-2x^2+xy+12x-3y^2+20y$.

a) $[0,0]$ - ostré lokální minimum b) $[0,0]$ - ostré lokální maximum

c) $[4,4]$ - ostré lokální minimum d) $[4,4]$ - ostré lokální maximum

2. Určete lokální extrémy funkce $f(x,y)=x^4-2x^2+y^4+2y^2$.

a) $[0,0]$ - ostré lokální maximum

b) $[1,1]$ - ostré lokální minimum, $[-1,-1]$ - ostré lokální maximum

c) $[1,0]$, $[-1,0]$ - ostrá lokální minima

d) $[1,0]$ - ostré lokální minimum, $[0,0]$, $[-1,0]$ - ostrá lokální maxima

3. Určete lokální extrémy funkce $f(x,y)=2x^3+2y^3+x^2-4x-24y$.

a) $[\frac{2}{3},2]$ - ostré lokální minimum, $[-1,-2]$ - ostré lokální maximum

b) $[\frac{2}{3},2]$, $[\frac{2}{3},-2]$ - ostrá lokální minima, $[-1,2]$, $[-1,-2]$ - ostrá lokální maxima

c) $[\frac{2}{3},-2]$ - ostré lokální minimum, $[-1,2]$ - ostré lokální maximum

d) $[\frac{2}{3},2]$, $[-1,2]$ - ostrá lokální minima, $[\frac{2}{3},-2]$, $[-1,-2]$ - ostrá lokální maxima

4. Určete lokální extrémy funkce $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3-xy^2+2y+4$.

a) $[1,1]$ - ostré lokální minimum

b) $[-1,-1]$ - ostré lokální maximum

c) extrém neexistuje

d) $[1,1]$ - ostré lokální minimum, $[-1,-1]$ - ostré lokální maximum

5. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = y^2 - x^2$ vzhledem k podmínce $y = 2x + 3$.

a) $[-2,-1]$ - vázané lokální maximum

b) $[-2,-1]$ - vázané lokální minimum

c) $[2,7]$ - vázané lokální maximum

d) $[2,7]$ - vázané lokální minimum

6. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y$ vzhledem k podmínce $y = -x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 18x + 32$.

a) $[2,40]$ - vázané lokální maximum, $[-3,-31]$ - vázané lokální minimum

b) $[2,50]$ - vázané lokální maximum, $[-3,-\frac{-35}{2}]$ - vázané lokální minimum

c) $[-2,-12]$ - vázané lokální maximum, $[3,23]$ - vázané lokální minimum

d) $[-2,-12]$ - vázané lokální minimum, $[3,23]$ - vázané lokální maximum

7. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = \sin^2 x + y^2 - 9x^2$ vzhledem k podmínce $y = \cos x$.

a) $[0,1]$ - vázané lokální maximum

b) $[\frac{\pi}{2},0]$ - vázané lokální maximum

c) $[-\frac{\pi}{2},0]$ - vázané lokální minimum

d) $[0,-1]$ - vázané lokální minimum

8. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + y + 4x$ na čtverci s vrcholy $[2,2]$, $[-2,2]$, $[-2,-2]$, $[2,-2]$.

a) $[2,-2]$ - globální maximum
$[-2,-2]$ - globální minimum

b) $[2,2]$ - globální maximum
$[-2,-2]$ - globální minimum

c) $[2,-2]$ - globální maximum
$[-1,-\frac{1}{2}]$ - globální minimum

d) $[2,2]$ - globální maximum
$[-1,-\frac{1}{2}]$ - globální minimum

9. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - 3y + 6$ na trojúhelníku s vrcholy $[0,0]$, $[1,2]$, $[-1,2]$.

a) $[0,0]$ - globální maximum
$[0,2]$ - globální minimum

b) $[0,0]$ - globální maximum
$[1,2]$ - globální minimum

c) $[0,0]$ - globální maximum
$[-1,2]$ - globální minimum

d) $[0,0]$ - globální maximum
$[0,2]$, $[0,-2]$ - globální minima

10. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x - 2y$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq \frac{5}{4}$.

a) $[\frac{1}{2}, 1]$ - globální maximum
$[-\frac{1}{2}, -1]$ - globální minimum

b) $[-\frac{1}{2}, 1]$ - globální maximum
$[\frac{1}{2}, -1]$ - globální minimum

c) $[\frac{1}{2}, -1]$ - globální maximum
$[-\frac{1}{2}, 1]$ - globální minimum

d) $[-\frac{1}{2}, -1]$ - globální maximum
$[\frac{1}{2}, 1]$ - globální minimum

Výsledky testu

1. d), **2.** c), **3.** a), **4.** c), **5.** b), **6.** b), **7.** a), **8.** d), **9.** a), **10.** c)

Kontrolní otázky

1. Co je to stacionární bod funkce?
2. Co jsou lokální extrémy funkce více proměnných?
3. Zformulujte Fermatovu větu.
4. Jak hledáme lokální extrémy funkcí dvou proměnných?
5. Jak hledáme lokální extrémy funkcí tří proměnných?
6. Co jsou to vázané extrémy?
7. Jaký je geometrický význam vázaných extrémů?
8. Jaký je princip Lagrangeovy metody?
9. Co jsou to globální extrémy?
10. Zformulujte postup při hledání globálních extrémů.

Shrnutí lekce

V této kapitole jsme se naučili hledat tři druhy extrémů. Jednalo se o extrémy lokální, vázané a globální. Všimněme si ještě, že určování globálních extrémů zahrnuje hledání jak extrémů lokálních, tak extrémů vázaných.

Diferenciální rovnice

Průvodce studiem

Touto kapitolou se náplň základního kurzu bakalářské matematiky uzavírá. Je tomu tak mimo jiné proto, že jsou zde souhrnně využívány poznatky získané studiem předchozích témat. Neméně významná je i skutečnost, že diferenciální rovnice a jejich řešení tvoří jeden z pilířů matematického popisu dějů, s nimiž se setkáváme ve většině technických disciplin.

Téma *Diferenciální rovnice* je rozděleno do tří částí číslovaných v kontextu předmětu *Bakalářská matematika II*:

7. Úvod do problematiky diferenciálních rovnic

8. Metody řešení diferenciálních rovnic 1. řádu

9. Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

V jednotlivých podkapitolách jsou předkládány základní teoretické poznatky, které jsou doplněny řešenými úlohami a příklady k samostatnému procvičení. V sekcích 8.1, 8.4, 9.2 a 9.6 jsou zařazeny kontrolní testy, které by měly sloužit k průběžnému ověření stupně zvládnutí příslušné problematiky.

Předpokládané znalosti

Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné, funkce dvou proměnných - v rozsahu odpovídajícím předmětu *Bakalářská matematika I* a kapitolám 5 a 6 *Bakalářské matematiky II*.

Literatura

Pro doplnění a rozšíření poznatků o diferenciálních rovnicích, jejich řešení a aplikacích lze čerpat z celé řady zdrojů. Na některé z nich je odkazováno v tomto textu ([17], [18]), jako další lze doporučit například [2], [10], [14].

7. Úvod do problematiky diferenciálních rovnic

Cíle

V úlohách, na které se zaměříme, je úkolem nalézt neznámou funkci jedné proměnné řešením rovnice, v níž se vyskytují také její derivace. Úvodem vysvětlíme základní pojmy používané v této partii matematiky, poté se budeme věnovat klasifikaci základních typů rovnic prvního řádu a metodám jejich řešení.

Z rovnic druhého řádu se zaměříme pouze na rovnice s konstantními koeficienty a v závěru připojíme stručný úvod do řešení jednoduchých soustav diferenciálních rovnic.

7.1. Zavedení diferenciálních rovnic a typy jejich řešení

Výklad

Jako motivaci pro následující výklad uveďme dva příklady, které reprezentují velmi širokou škálu aplikací, v nichž se můžeme s diferenciálními rovnicemi setkat.

Řešené úlohy

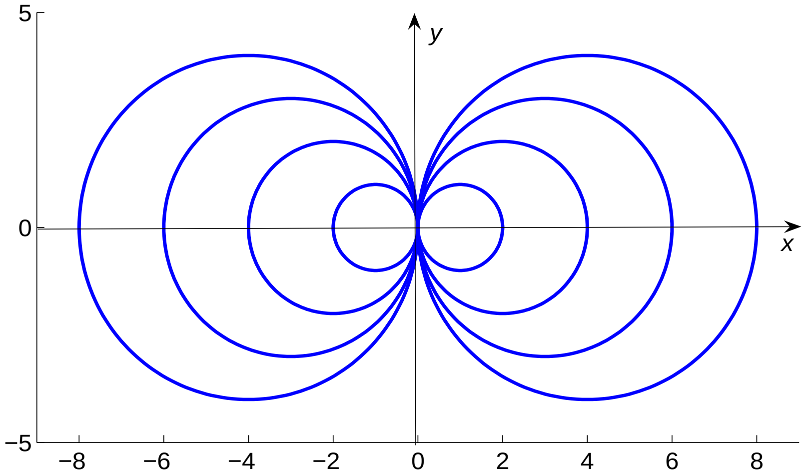
Příklad 7.1.1. Libovolná kružnice v rovině mající střed na ose x, která se dotýká v počátku souřadného systému osy y, má rovnici

$$(x-C)^2 + y^2 = C^2 \qquad \text{neboli} \qquad x^2 + y^2 = 2Cx\,.$$

Ukážeme jiný způsob, jakým lze systém těchto křivek vyjádřit - viz obr. 7.1.1.

Řešení: Nejprve budeme rovnici vpravo derivovat jako implicitně zadanou funkci $y(x)$. Po vydělení dvěma obdržíme vztah $x+yy' = C$, do kterého dosadíme konstantu C vyjádřenou z původní rovnice:

$$C = \frac{x^2+y^2}{2x}\,.$$



Obr. 7.1.1. Svazek kružnic – k příkladu 7.1.1. pro hodnoty
$C = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4.$

Výsledek můžeme zapsat opět jako rovnici

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0\,, \qquad \text{resp.} \qquad y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}\,,$$

která představuje hledaný výsledek.

Příklad 7.1.2. Z fyziky je známo, že vlastní kmity mechanické soustavy v odporujícím prostředí lze popsat diferenciální rovnicí pro okamžitou výchylku $y(t)$, která je funkcí času t:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2a\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0\,.$$

Zde jsou a koeficient odporu prostředí a ω úhlová frekvence kmitů. Máme dokázat, že v případě netlumených kmitů $(a = 0)$ má řešení této rovnice tvar

$$y(t) = A.\sin(\omega t + \varphi)\,,$$

kde A, φ jsou libovolné konstanty představující amplitudu a fázi kmitavého pohybu.

Řešení: Snadno se postupným výpočtem přesvědčíme, že pro druhou derivaci okamžité výchylky platí $y''(t) = -\omega^2 A.\sin(\omega t + \varphi)$, takže nezávisle na hodnotách konstant A, φ pro netlumené kmity platí $y'' + \omega^2 y = 0$, což jsme měli potvrdit.

Výklad

V předchozích řešených úlohách jsem se seznámili s novými pojmy, které používáme při popisu diferenciálních rovnic a jejich řešení. Následující definice shrnuje nejdůležitější z nich.

Definice 7.1.1.

Rovnice tvaru $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \cdots, y', y, x) = 0$ se nazývá **diferenciální rovnice** n**-tého řádu** pro funkci $y = y(x)$. Speciálně je

$$F(y', y, x) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad y' = f(x, y)$$

diferenciální rovnice prvního řádu.

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace hledané funkce $y(x)$.

Řešením diferenciální rovnice je každá funkce, která rovnici vyhovuje (na zadané množině).

Graf konkrétního řešení rovnice se nazývá **integrální křivka**.

Poznámka

Rovnice zavedené předchozí definicí se často označují jako ***obyčejné*** *na rozdíl od rovnic* ***parciálních****, v nichž hledáme funkci více proměnných.*

Čeština – na rozdíl od většiny jiných jazyků – má označení ***řešení*** *jak pro postup, tak pro jeho výsledek. Proto je třeba věnovat textu větší pozornost a předcházet nedorozuměním.*

Výsledná rovnice v příkladu 7.1.1. je prvního řádu, příklad 7.1.2. je ukázkou rovnice 2. řádu, kterou můžeme psát také ve tvaru $y'' + 2ay' + \omega^2 y = 0$.

Výklad

V následujícím výkladu se budeme věnovat pouze rovnicím prvního řádu. Rovnici považujeme za vyřešenou, známe-li všechna její řešení. Ta rozdělujeme do několika typů:

- **obecné řešení** rovnice 1. řádu představuje množinu funkcí tvaru

$$\phi(x, y, C) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad y = \varphi(x, C)\,;$$

- **partikulární řešení** je konkrétní funkce získaná z obecného řešení volbou nebo výpočtem konstanty C;
- **výjimečné řešení** nelze získat z obecného pro žádnou hodnotu C; existuje pouze u některých typů rovnic a v tomto textu se jím nebudeme až na výjimky zabývat.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte diferenciální rovnici pro zadaný systém rovinných křivek:

a) paraboly $y = x^2 - 2Cx$, b) logaritmické křivky $y = \ln(Cx + 1)$.

c) kružnice $x^2 + y^2 = C^2$ (derivujte jako implicitně zadanou funkci).

2. Přesvědčte se, že uvedená funkce je řešením dané diferenciální rovnice (na vhodném intervalu):

a) $x^2 - xy + y^2 = C^2$, $(x - 2y)y' = 2x - y$,

b) $xy + \ln y = 0$, $(1 + xy)y' = y^2$,

c) $y = x \sin(\ln x + C)$, $xy' - y - \sqrt{x^2 - y^2} = 0$,

3. Ukažte, že poslední rovnice z předchozího příkladu má výjimečné řešení $y = x$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $xy' - x^2 - y = 0$, b) $xy' = 1 - \mathrm{e}^{-y}$, c) $x + yy' = 0$.

2. Funkce $y = x$ rovnici vyhovuje, avšak není součástí obecného řešení pro žádné C.

7.2. Existence a jednoznačnost řešení

Cíle

Naše nejbližší cíle spočívají v odpovědích na základní otázky, které si klademe v souvislosti s diferenciálními rovnicemi:

1. Má rovnice řešení?
2. Kolik je řešení a jakého jsou typu?
3. Jak se tato řešení najdou?

Výklad

Začneme odpovědí na poslední z nich pro nejjednodušší případ, kterým je **rovnice se separovanými proměnnými**

$$Q(y)y' = P(x)\,, \qquad \text{tj.} \qquad Q(y)\,dy = P(x)\,dx\,,$$

nahradíme-li derivaci y' podílem dy/dx. Zde jsou proměnné odděleny (separovány) na jednotlivé strany a můžeme provést integraci, která nás přivede přímo k výsledku:

$$\int Q(y)\,dy = \int P(x)\,dx + C\,.$$

Primitivním funkcím na obou stranách rovnosti teoreticky náležejí dvě integrační konstanty, které však spojujeme do jediné, kterou zpravidla píšeme k výrazu s nezávisle proměnnou. Podle okolností můžeme po integraci vhodnými úpravami vyjádřit obecné řešení explicitně jako $y = \varphi(x, C)$. Integrační konstanta C je organickou součástí řešení, je proto nutno ji začlenit do příslušného výrazu v okamžiku, kdy je provedena integrace.

Příklad 7.2.1. Je dána rovnice $y' = -2x$. Určete

a) její obecné řešení,

b) partikulární řešení určené podmínkou $y(1) = 2$.

Řešení:

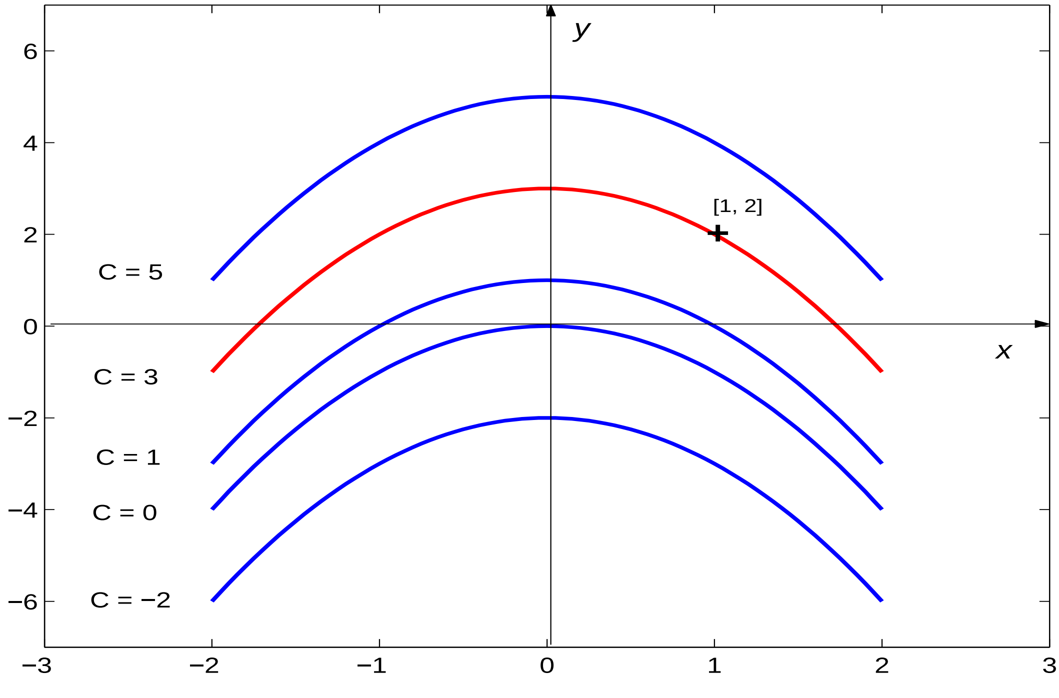
a) $y(x) = \int(-2x)\,dx = -x^2 + C$, proto soustava parabol o rovnicích $y = C - x^2$ (obr. 7.2.1) představuje obecné řešení úlohy. O jeho správnosti se lze snadno přesvědčit zkouškou.

b) Zadaná podmínka znamená, že hledáme integrální křivku, která prochází bodem $[1, 2]$. Dosazením těchto souřadnic do obecného řešení dostáváme

$$2 = C - 1^2\,, \qquad \text{odkud} \qquad C = 3\,.$$

Výsledným partikulárním řešením je tedy parabola (na obr. 7.2.1 červeně)

$$y_p = 3 - x^2\,.$$



Obr. 7.2.1. Integrální křivka partikulárního řešení příkladu 7.2.1. a několik dalších parabol z obecného řešení.

Výklad

Složitější typy rovnic vyžadují přirozeně odpovídající postupy. Často je jejich cílem převedení zadané rovnice do separovaného tvaru. Vybranými typy rovnic a metodami jejich řešení se zabýváme v další kapitole.

Obecná formulace zadání z předchozího příkladu b) se nazývá **počáteční úloha pro diferenciální rovnici**. Jedná se tedy o rovnici doplněnou podmínkou, z níž určujeme partikulární řešení procházející bodem $[x_0, y_0]$:

$$y' = f(x, y)\,, \qquad y(x_0) = y_0\,.$$

Poznámka

*Termín **počáteční úloha** odkazuje k historii, kdy se diferenciální rovnice řešily nejčastěji pro děje závislé na čase. Dnes má obecný význam, který podtrhuje další používané označení – **Cauchyho úloha**.*

Zbývá odpovědět na první dvě otázky formulované v úvodu kapitoly: kdy řešení rovnice existuje a je-li jednoznačné, tj. zda zadaným bodem prochází jedna nebo více integrálních křivek. Teorie dává odpověď ve formě následující věty, kterou uvádíme bez důkazu.

Věta 7.2.1.

Nechť je dána rovnice $y' = f(x, y)$ a bod $A = [x_0, y_0]$. Je-li funkce (dvou proměnných) $f(x, y)$ spojitá v bodě A a určitém jeho okolí, pak v tomto okolí existuje řešení rovnice $y' = f(x, y)$, které splňuje podmínku $y(x_0) = y_0$. Je-li spojitá také derivace $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, pak je řešení právě jediné.

Příklad 7.2.2. Je dána rovnice

$$\frac{y'}{3\sqrt[3]{y^2}} = 1\,.$$

Vyšetřete množinu, na níž řešení existuje, a dále jednoznačnost tohoto řešení. Najděte obecné řešení a znázorněte graficky několik integrálních křivek.

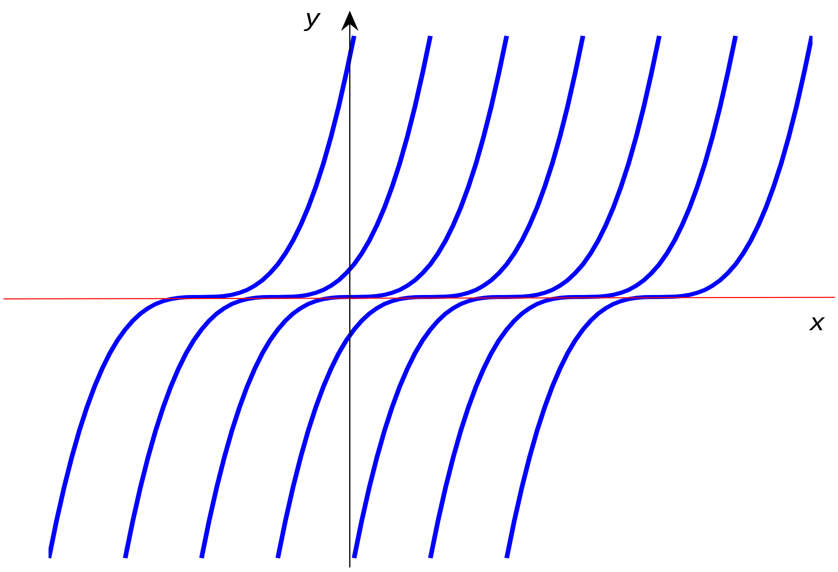
Řešení: Rovnice je v separované tvaru, a proto lze přímo přejít k integraci:

$$\int \frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = \int dx \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[3]{y} = x + C \qquad \Longrightarrow \qquad y = (x+C)^3 \,.$$

V zadané rovnici je $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$. Funkce $f(x,y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ je spojitá v libovolném bodě $[x,y]$, řešení rovnice tedy existuje v celé rovině. Derivace

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

není definována pro $y = 0$ (na ose x), kde proto řešení není jednoznačné. Situace je zřejmá z obr. 7.2.2, na němž vidíme několik integrálních křivek reprezentujících obecné řešení. Všechny mají v ose x společnou inflexní tečnu. Každým jejím bodem tedy procházejí dvě řešení, zatímco všemi ostatními body v rovině právě jedna integrální křivka. Funkce $y = 0$ rovnici rovněž vyhovuje, ačkoli není součástí obecného řešení (jedná se o řešení výjimečné).



Obr. 7.2.2. Integrální křivky řešení příkladu 7.2.2. Jedná se o kubické paraboly pro $C = -2, -1, \ldots, 4$ a osu x jako graf výjimečného řešení.

Kontrolní otázky

Otázka 1. *Čím je určen řád diferenciální rovnice?*

Otázka 2. *Uveďte typy řešení diferenciální rovnice a jejich vzájemný vztah.*

Otázka 3. *Vysvětlete pojem „počáteční úloha".*

Otázka 4. *Uveďte podmínky existence a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice prvního řádu.*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Je dána rovnice $y' = x - \sqrt{x^2 - 2y}$. Ukažte, že funkce $y = \varphi(x, C) = Cx - \frac{1}{2}C^2$ je jejím obecným řešením a najděte oblast, na níž řešení existuje. Dále ověřte, že rovnice má výjimečné řešení $y = \frac{1}{2}x^2$, přičemž každým bodem této paraboly procházejí dvě integrální křivky. Znázorněte graficky.

2. Určete oblast, kde má zadaná rovnice řešení a vyšetřete jeho jednoznačnost:

a) $y' = xy$ b) $y' = \sqrt{x - y}\,.$

3. Najděte obecné řešení rovnic:

a) $(1 - 2y)y' = 2x$ b) $y' \cos y = \sin x\,.$

4. Řešte počáteční úlohy:

a) $\frac{y'}{y^2} = 2x, \quad y(0) = -\frac{1}{2}\,,$ b) $y'.\mathrm{e}^y = 1, \quad y(1) = 0.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. Funkce $f(x, y) = x - \sqrt{x^2 - 2y}$ je definovaná a spojitá pouze pro $x^2 - 2y \geq 0$, tj. $y \leq \frac{1}{2}x^2$. Proto řešení rovnice existuje pouze na oblasti ohraničené shora touto parabolou. Funkce $y = \frac{1}{2}x^2$ rovněž rovnici vyhovuje (přesvědčte se dosazením), avšak zjevně ji nelze získat z obecného řešení pro žádné C. Jde tedy o výjimečné řešení. Ukážeme, že přímky tvořící obecné řešení jsou tečnami k této parabole (ta tvoří jejich tzv. **obálku**), jak je znázorněno na obr. 7.2.3. Zvolíme na parabole libovolný bod $x = x_0$, $y = \frac{1}{2}x_0^2$. Směrnice tečny v tomto bodě je $y'(x_0) = x_0$, takže pro tečnu dostáváme rovnici

$$y - \frac{1}{2}x_0^2 = x_0(x - x_0)\,, \qquad \text{neboli} \qquad y = x_0 x - \frac{1}{2}x_0^2\,.$$

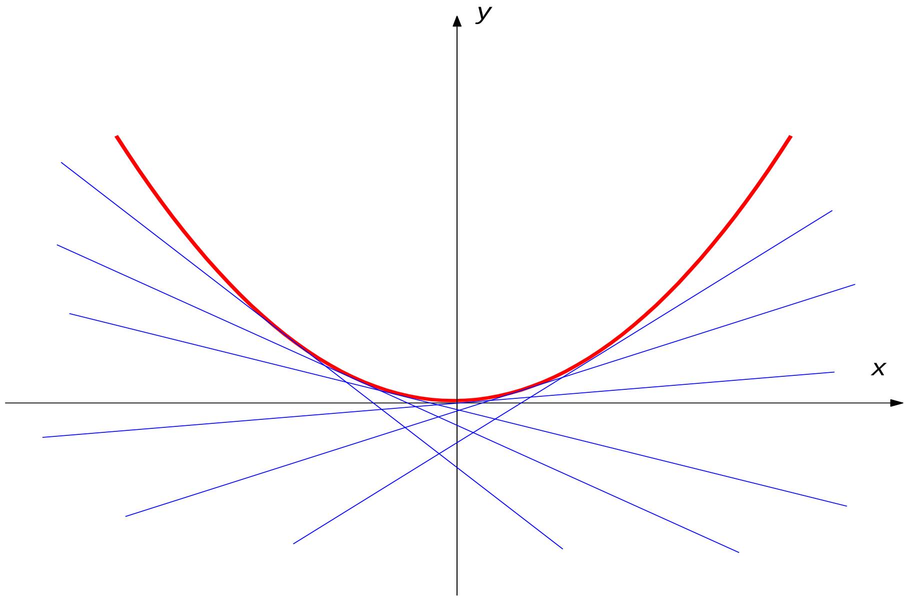
Jak je patrno, jde právě o jednu z přímek náležejících do obecného řešení. Zvoleným bodem (a každým dalším bodem paraboly) procházejí dvě integrální křivky.

2. a) Řešení existuje v celé rovině a jednoznačné.

b) Řešení existuje pro $y \leq x$, jednoznačné je pro $y < x$.

3. a) $y - y^2 = x^2 + C\,,$ b) $y = \arcsin(C - \cos x)$.

4. a) $y = \frac{1}{x^2-2}\,,$ b) $y = \ln x$.



Obr. 7.2.3. Výjimečné (červeně) a obecné řešení – k úloze 1.

8. Metody řešení diferenciálních rovnic 1. řádu

8.1. Separovatelné rovnice

Cíle

V předchozí kapitole jsme poznali separovaný tvar diferenciální rovnice, který bezprostředně umožňuje nalézt řešení integrací. Existuje široká skupina úloh, které jsou na takový tvar převoditelné buď jednoduchými úpravami v rovnici nebo vhodnou substitucí. Označují se jako **separovatelné rovnice** a nyní se seznámíme se třemi nejčastějšími typy:

a) $y' = P(x).Q(y)$ (základní tvar separovatelné rovnice),

b) $y' = f(ax + by + c)$,

c) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (homogenní rovnice).

8.1.1. Základní typ

Výklad

U tohoto typu, který zapisujeme obvykle ve tvaru $y' = P(x).Q(y)$, postačuje k separaci jednoduchá úprava rovnice (využijeme identity $y' = dy/dx$):

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x)\,dx\,,$$

po níž může hned následovat integrace.

Příklad 8.1.1. Najděte řešení rovnice $y' = -y.\mathrm{cotg}x$.

Řešení: Separace vede k rovnici

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx\,,$$

kterou po integraci zapíšeme takto:

$$\ln|y| = -\ln|\sin x| + \ln C\,.$$

Po odlogaritmování dostáváme obecné řešení

$$y(x) = \frac{C}{\sin x}\,.$$

V uvedeném příkladu si povšimněme dvou skutečností, s nimiž se při výpočtech často setkáváme. Vede-li integrace na logaritmickou funkci, je zvykem psát logaritmovaný výraz v absolutní hodnotě. Důvodem je – zjednodušeně řešeno – požadavek, aby definiční obor celého výrazu byl po integraci stejný jako před ní. Dále bývá vhodné psát integrační konstantu ve formě logaritmu, jestliže bude následně provedeno odlogaritmování. Tento krok usnadňuje zápis výsledku.

Poznámka

Výše uvedený základní tvar separovatelné rovnice není jediný možný. Má řadu variant, které však vždy vedou k separované rovnici. Jako ukázku uvádíme další řešený příklad.

Příklad 8.1.2. Najděte řešení počáteční úlohy $(x-1)y' + y^2 = 0\,,\, y(2) = -1$.

Řešení: Postup při separaci je zřejmý z následujících kroků (přesvědčte se, že rovnici lze zapsat i ve tvaru $y' = P(x).Q(y)$):

$$(x-1)y' + y^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad (x-1)\frac{dy}{dx} = -y^2 \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dx}{x-1}\,.$$

Integrací obdržíme

$$-\frac{1}{y} = -\ln(x-1) + C\,, \qquad \text{odkud} \qquad y(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - C}\,.$$

Dosadíme-li do získaného obecného řešení z počáteční podmínky $x = 2$, $y = -1$, bude

$$-1 = \frac{1}{\ln 1 - C}\,, \qquad \text{tj.} \qquad C = 1.$$

Nyní můžeme zapsat hledané řešení počáteční úlohy:

$$y_p(x) = \frac{1}{\ln(x-1)-1}\,.$$

8.1.2. Rovnice typu $y' = f(ax+by+c)$

Výklad

Uvědomme si nejprve, že $y = y(x)$. Tuto rovnici lze tudíž pro libovolné konstanty a, $b \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ transformovat na jednodušší separovatelnou rovnici substitucí

$$ax + by + c = z(x)\,.$$

Derivováním tohoto vztahu podle x dostáváme

$$a + by' = z'\,, \qquad \text{odkud} \qquad y' = \frac{z'-a}{b}\,, \text{ kde } z' = \frac{dz}{dx}\,.$$

Po dosazení do původní rovnice vychází postupnými úpravami

$$\frac{z'-a}{b} = f(z) \quad\Longrightarrow\quad z' = a + bf(z) \quad\Longrightarrow\quad \frac{dz}{a+bf(z)} = dx\,.$$

Výsledkem je rovnice se separovanými proměnnými, v níž lze již pokračovat integrací.

Popsaný postup budeme ilustrovat dvěma řešenými příklady.

Řešené úlohy

Příklad 8.1.3. Řešte rovnici $y' - y + 3x = 5$.

Řešení: Napíšeme-li zadání ve tvaru $y' = y - 3x + 5$, je na první pohled zřejmé, že $f(z) = z = y - 3x + 5$. Proto $z' = y' - 3$ a rovnice se dále transformuje a řeší takto:

$$z' + 3 = z \quad\Longrightarrow\quad \frac{dz}{z-3} = dx \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{dz}{z-3} = \int dx\,.$$

Po provedení integrace následuje zpětná substituce:

$$\ln(z-3) = x+\ln C \qquad \Longrightarrow \qquad z = C.\mathrm{e}^x+3 \qquad \Longrightarrow \qquad y-3x+5 = C.\mathrm{e}^x+3\,.$$

Po drobné úpravě dostáváme obecné řešení

$$y(x) = C.\mathrm{e}^x + 3x - 2\,.$$

Příklad 8.1.4. Řešte rovnici $y' + (x-y)^2 = 0$.

Řešení: Nyní je $y' = -(x-y)^2$, takže položíme $z = x - y$, $z' = 1 - y'$. Rovnice přejde touto substitucí do tvaru ($f(z) = -z^2$)

$$1 - z' = -z^2 \qquad \Longrightarrow \qquad z' = 1 + z^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx\,.$$

Odtud

$$\operatorname{arctg} z = x + C \qquad \Longrightarrow \qquad z = \operatorname{tg}(x+C) \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = x - \operatorname{tg}(x+c)\,.$$

O správnosti výsledků se samozřejmě přesvědčíme zkouškou – dosazením získaného řešení do původní rovnice, včetně případného ověření platnosti počáteční podmínky. S ohledem na omezený rozsah textu zde **zkoušky** neuvádíme, avšak vřele **doporučujeme jako samostatné cvičení**.

8.1.3. Homogenní rovnice

Výklad

Diferenciální rovnici nazýváme homogenní, lze-li ji upravit na tvar

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Řešíme ji převedením na separovatelnou rovnici substitucí

$$\frac{y}{x} = z(x) \qquad \Longrightarrow \qquad y = zx \qquad \Longrightarrow \qquad y' = z'x + z\,.$$

Poznámka

*Termínem **homogenní** bývají označovány i rovnice (popřípadě soustavy rovnic) s nulovou pravou stranou, kterými se budeme zabývat v dalších kapitolách. V tomto textu však uvedený název vyhradíme pouze rovnicím výše uvedeného tvaru.*

*Zároveň je vhodné připomenout, že funkce $f(x, y)$ se na oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^2$ nazývá **homogenní stupně k**, jestliže pro libovolné $t \neq 0$ platí*

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y)\,.$$

Doporučujeme povšimnout si této vlastnosti u členů v rovnicích uvedených níže (např. členy rovnice v následující úloze jsou homogenní stupně 2).

Příklad 8.1.5. Určete obecné řešení rovnice $(2xy - x^2)y' = 3y^2 - 2xy$.

Řešení: Nejprve se přesvědčíme, že jde o homogenní rovnici:

$$y' = \frac{3y^2 - 2xy}{2xy - x^2} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x}}{2\frac{y}{x} - 1} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Nyní uplatníme substituční vztahy $y/x = z$, $y' = z'x + z$:

$$z'x + z = \frac{3z^2 - 2z}{2z - 1} \qquad \Longrightarrow \qquad x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - z}{2z - 1}\,,$$

odkud

$$\int \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz = \int \frac{dx}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|z^2-z| = \ln|x| + \ln C \qquad \Longrightarrow \qquad z^2-z = Cx\,.$$

Po zpětné substituci a úpravě obdržíme obecné řešení – tentokrát je funkce $y(x)$ vyjádřena implicitně:

$$y^2 - xy - Cx^2 = 0\,.$$

Příklad 8.1.6. Řešte počáteční úlohu $xy' - y - \sqrt{x^2-y^2} = 0,\ y(1) = \frac{1}{2}$.

Řešení: V upraveném tvaru této homogenní rovnice,

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}\,,$$

opět zavedeme příslušnou substituci a po separaci proměnných obdržíme

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{dx}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \arcsin z = \ln|x| + C\,,$$

odkud plyne obecné řešení

$$y = x.\sin(\ln|x| + C)\,.$$

Na závěr vypočteme konstantu C ze zadané podmínky:

$$\frac{1}{2} = \sin C \qquad \Longrightarrow \qquad C = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\,.$$

Výsledným partikulárním řešením je tudíž funkce

$$y_p(x) = x.\sin\left(\ln|x| + \frac{\pi}{6}\right)\,.$$

Kontrolní otázky

?

Otázka 1. *Vysvětlete pojem separace proměnných v diferenciální rovnici.*

Otázka 2. *Uveďte příklady separovatelných diferenciálních rovnic.*

Otázka 3. *Kdy říkáme, že funkce $f(x,y)$ je (na zadané oblasti) homogenní stupně k?*

Otázka 4. *Jak charakterizujeme homogenní diferenciální rovnici prvního řádu?*

Otázka 5. *Popište algoritmus řešení homogenní rovnice.*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Řešte následující separovatelné rovnice:

a) $y' \sin x = y \cos x$,

b) $x^2y' - y^2 = 1$,

c) $2xyy' = x + 2$,

d) $(x+y)y' = 1$.

2. Ověřte, že zadané diferenciální rovnice jsou homogenní a najděte jejich obecné řešení:

a) $x^2y' = y^2 + xy$,

b) $xy' = y(\ln y - \ln x)$,

c) $xy' - y = 2\sqrt{xy}$.

3. Určete partikulární řešení rovnic při zadaných podmínkách:

a) $y' + \mathrm{e}^y = 0, \quad y(0) = 0$,

b) $(x+y)y' = x - y, \quad y(5) = 2$,

c) $1 + y' = \sqrt{x+y+1}, \quad y(-2) = 1$.

4. Ověřte, že funkce $y = -x - 1$ je výjimečným řešením rovnice v příkladu 3c). Ukažte, že v bodech ležících na jejím grafu je porušena jednoznačnost řešení.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $y = C.\sin x$, b) $y = \mathrm{tg}\,(C - \frac{1}{x})$, c) $y^2 = x + 2\ln x + C$,
d) $y - \ln(x + y + 1) = C$.

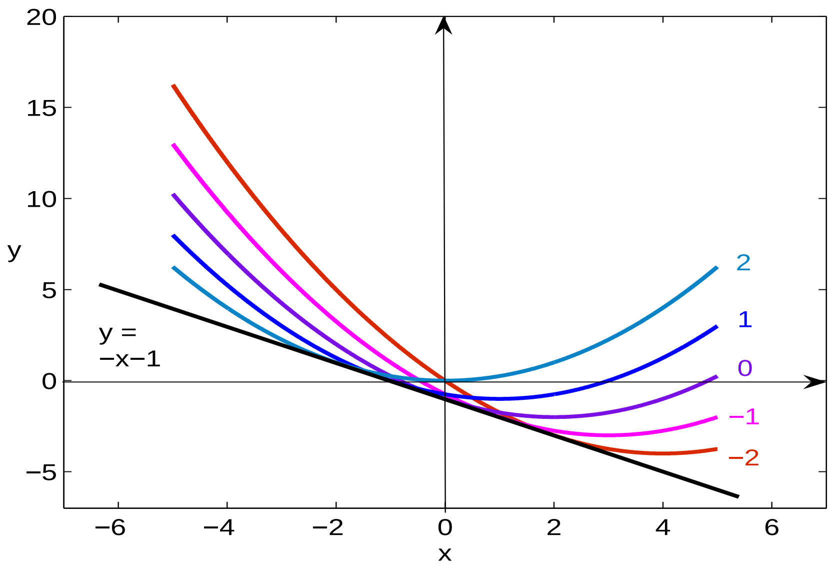
2. a) $y = -\frac{x}{\ln x + C}$, b) $y = xe^{Cx+1}$, c) $y = x(\ln x + C)^2$.

3. a) $y = \ln(1 - x)$, b) $x^2 - 2xy - y^2 = 1$, c) $y = \frac{x^2}{4}$.

4. Dosazením se snadno přesvědčíme, že funkce $y = -x - 1$ zadané rovnici vyhovuje. Nelze ji však získat pro žádnou volbu konstanty C z obecného řešení, kterým je systém parabol

$$y = \left(\frac{x + C}{2}\right)^2 - x - 1\,,$$

proto se jedná o řešení výjimečné. Přímka $y = -x - 1$ je společnou tečnou všech těchto parabol, s nimiž má společný bod dotyku, jímž tedy prochází výjimečné řešení a jedno z partikulárních, takže nastává porušení jednoznačnosti - viz obr. 8.1.1.



Obr. 8.1.1. Integrální křivky k příkladu 4, hodnoty konstanty C a graf výjimečného řešení jsou zřejmé z obrázku.

Kontrolní test

Úloha 1. Při které z podmínek a) – d) má rovnice $(2x^2 - xy)y' = x - 2y$ právě jedno řešení?

a) $y(1) = 2$, b) $y(0) = 1$, c) $y(2) = 1$, d) $y(0) = 2$.

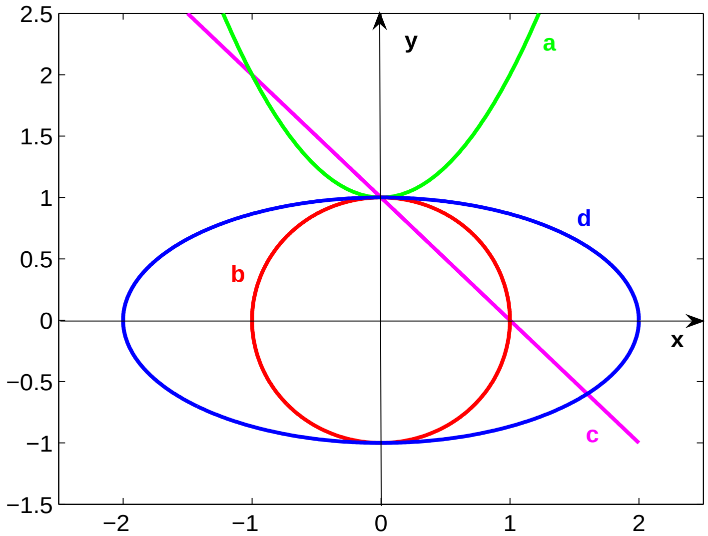
Úloha 2. Označte funkci, která je řešením počáteční úlohy $xy' = 1 + y$, $y(2) = 3$.

a) $y = x + 1$, b) $y = -2x + 7$, c) $y = 3x - 3$, d) $y = 2x - 1$.

Úloha 3. Funkce $y(x)$ je řešením počáteční úlohy $(x - y)y' = 2$, $y(3) = 0$. Určete bod x_0 , v němž tato funkce nabývá hodnoty $y_0 = -2$:

a) $x_0 = \frac{1}{\mathrm{e}}$, b) $x_0 = \mathrm{e}$, c) $x_0 = 1$, d) $x_0 = -\mathrm{e}$.

Úloha 4. Která z křivek a) – d) na obr. 8.4.2 je grafem řešení úlohy $x + 4yy' = 0$, $y(0) = 1$?



Obr. 8.1.2. Křivky k testové úloze č. 4.

Úloha 5. Vyberte funkci, která je partikulárním řešením rovnice $yy' = x$ při podmínce $y(-2) = 4$:

a) $x^2 - y^2 = 12$, b) $xy = 8$, c) $y^2 - x^2 = 12$, d) $xy = -8$.

Úloha 6. Diferenciální rovnice $y' + 1 = \sqrt{x+y}$ má při podmínce $y(0) = 0$

a) partikulární řešení $y = \frac{x^2}{4} - x$, výjimečné řešení $y = -x$,

b) partikulární řešení $y = x^2 - 4x$, výjimečné řešení $xy = 1$,

c) partikulární řešení $y = -x$, výjimečné řešení $y = \frac{x^2}{4} - x$,

d) partikulární řešení $y = 1 - x$, výjimečné řešení $y = \frac{x^2}{4} - x$.

Úloha 7. Rozhodněte, který z následujících výrazů je obecným řešením rovnice

$$(2x - y)y' = 4x - 3y \ .$$

a) $(y - x)^2(y - 4x) = C$, b) $(y - x)(y - 4x)^2 = C$,

c) $(y + x)^2(y - 4x) = C$, d) $(y + x)(y - 4x)^2 = C$.

Úloha 8. Rovnicí $2xyy' = y^2 - x^2$ je určen svazek kružnic, které mají střed na ose x a dotýkají se osy y (a sebe navzájem) v počátku souřadného systému (obr. 8.4.3). Jaký poloměr R má ta z nich, která prochází bodem $[-2, 4]$?

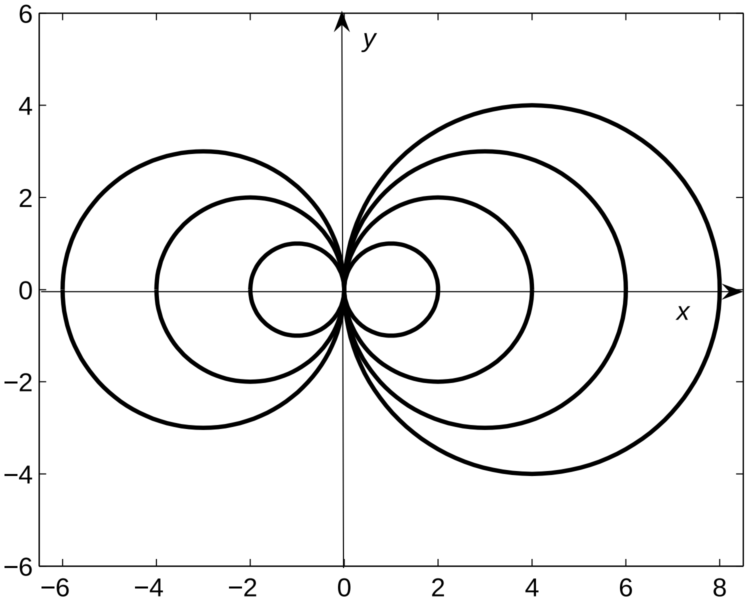
a) $R = 6$, b) $R = 2$, c) $R = 3$, d) $R = 5$.

Úloha 9. Obecné řešení rovnice $y' + \mathrm{e}^y = 1$ obsahuje konstantu C. Její hodnota při podmínce $y(0) = -1$ je

a) $C = 1 - \mathrm{e}$, b) $C = 1 + \mathrm{e}$, c) $C = \mathrm{e} - 1$, d) $C = \mathrm{e}$.

Úloha 10. Rychlost rozpadu radioaktivního prvku je přímo úměrná jeho okamžitému množství. Tuto skutečnost vyjadřuje diferenciální rovnice

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y \ ,$$



Obr. 8.1.3. Svazek kružnic - k úloze 8.

kde $y(t)$ je množství (počet) jader radionuklidu v okamžiku t a λ je tzv. rozpadová konstanta. Poločas rozpadu T radionuklidu je doba, za kterou se počet jader zmenší na polovinu. Vztah mezi rozpadovou konstantou λ a poločasem rozpadu T má tvar

a) $T = \dfrac{\lambda}{2}$, b) $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$, c) $T = \dfrac{\lambda}{\ln 2}$, d) $T = \dfrac{2}{\lambda}$.

Výsledky testu

Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Správná odpověď	c)	d)	a)	d)	c)	a)	b)	d)	c)	b)

8.2. Exaktní rovnice

Cíle

Ve výkladu o funkcích dvou proměnných jsme se seznámili také s jejich diferenciálem prvního řádu, který je pro funkci $F(x, y)$ vyjádřen výrazem

$$dF = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy\;.$$

Nyní budeme hledat odpověď na otázku, zda a jak lze od této diferenciální formule přejít zpět k funkci $F(x, y)$. Poznatky, které získáme, hrají rovněž významnou roli v souvislosti s aplikacemi ve fyzice.

Definice 8.2.1.

Diferenciální rovnice $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy = 0$ se nazývá **exaktní**, je-li výraz $P(x, y)\,dx + Q(x, y)$ **totálním diferenciálem** jisté funkce $F(x, y)$ označované jako **kmenová funkce**.

Věta 8.2.1.

Jsou-li funkce $P(x, y)$, $Q(x, y)$ diferencovatelné na oblasti Ω, pak je rovnice $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ exaktní právě tehdy, když na oblasti Ω platí

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\;.$$

Je-li $F(x, y)$ kmenovou funkcí příslušného totálního diferenciálu, má obecné řešení exaktní rovnice tvar

$$F(x,y) = C\;.$$

Důkaz: Je-li $P(x, y)\,dx+Q(x, y)$ totálním diferenciálem funkce $F(x, y)$, musí být

$$dF = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\;.$$

Odtud plyne pro parciální derivace funkcí $P(x,y)$, $Q(x,y)$:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}\,, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}\,.$$

Podle předpokladu jsou derivace spojité, takže

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,,$$

což jsme měli dokázat.

Důkaz opačného tvrzení,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{exaktnost rovnice} \quad P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0\,,$$

je poněkud náročnější a lze se s ním seznámit např. v [17]. Snadno dokážeme poslední část tvrzení: má-li být $F(x,y) = C$ obecným řešením rovnice, pak musí vyhovět zkoušce. Skutečně, diferencováním tohoto vztahu dostáváme

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy = 0\,,$$

a tedy $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, což jsme měli dokázat.

Výklad

Z předchozí věty je zřejmé, že řešit exaktní rovnici znamená určit kmenovou funkci totálního diferenciálu. Vyjdeme-li kupříkladu z rovnosti

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y)\,,$$

můžeme kmenovou funkci určit integrací:

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + K(y) = U(x,y) + K(y)\,.$$

Ve výsledku je $U(x,y)$ primitivní funkce a $K(y)$ integrační „konstanta”, která může ovšem záviset na druhé proměnné. Tuto veličinu určíme z podmínky

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial y} = Q(x,y)\,.$$

Pak

$$K(y) = \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy \, .$$

Zbývá ovšem dokázat, že integrand $Q(x,y) - \frac{\partial U}{\partial y}$ nezávisí na proměnné x, tedy že jeho derivace podle této proměnné je rovna nule:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q - \frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(Q - \frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \, .$$

Poznámka

Popsaný postup je možno provést také se zaměněným pořadím proměnných, tj. začít integrací

$$F(x,y) = \int Q(x,y)\, dy + L(x) = V(x,y) + L(x)$$

a pokračovat určením funkce $L(x)$. Je proto obvyklé tyto postupy spojit a formálně vypočíst oba integrály

$$F(x,y) = \int P(x,y)\, dx + K(y) = U_1(x,y) + C_1 \, ,$$

$$F(x,y) = \int Q(x,y)\, dy + L(x) = U_2(x,y) + C_2 \, ,$$

kde C_1, C_2 jsou integrační konstanty. Kmenovou funkci $F(x,y)$ vytvoříme sloučením veličin $U_1(x,y)$ a $U_2(x,y)$, přičemž členy, které se vyskytují současně v obou výrazech, uvažujeme pouze jedenkrát.

Celý algoritmus řešení exaktní rovnice pak vypadá takto:

1. Otestujeme exaktnost rovnice podmínkou $P'_y = Q'_x$.

2. Určíme kmenovou funkci $F(x,y)$ některou z výše uvedených metod.

3. Zapíšeme řešení rovnice ve tvaru $F(x,y) = C$.

Řešené úlohy

Příklad 8.2.1. Řešte rovnici $(2xy - 2x - 1)dx + (x^2 + 2y + 1)dy = 0$.

Řešení: Ověříme exaktnost rovnice na základě parciálních derivací:

$$\left.\begin{aligned} P(x,y) &= 2xy - 2x - 1 \quad &\Longrightarrow \quad P'_y &= 2x\,, \\ Q(x,y) &= x^2 + 2y + 1 \quad &\Longrightarrow \quad Q'_x &= 2x \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,.$$

Nyní aplikujeme postup uvedený v poslední poznámce:

$$\int P(x,y)\,dx = \int (2xy - 2x - 1)\,dx = x^2y - x^2 - x + C_1\,,$$

$$\int Q(x,y)\,dy = \int (x^2 + 2y + 1)\,dy = x^2y + y^2 + y + C_2\,.$$

Do kmenové funkce sepíšeme všechny získané členy, avšak smíšený člen x^2y pouze jedenkrát:

$$F(x,y) = x^2y - x^2 + y^2 - x + y\,.$$

Hledané řešení má tvar $F(x,y) = C$, tj.

$$x^2y - x^2 + y^2 - x + y = C\,.$$

Správnost výsledku snadno ověříme zkouškou.

Příklad 8.2.2. Řešte rovnici $(2y - x\sin 2y)y' = \sin^2 y$.

Řešení: Nejprve rovnici přepíšeme do vhodnějšího tvaru

$$\sin^2 y\,dx + (x\sin 2y - 2y)\,dy = 0$$

a dále zopakujeme postup z předchozí úlohy:

$$P(x,y) = \sin^2 y \quad \Longrightarrow \quad P'_y = 2\sin y\cos y = \sin 2y\,,$$

$$Q(x,y) = x\sin 2y - 2y \quad \Longrightarrow \quad Q'_x = \sin 2y\,.$$

Parciální derivace se rovnají, takže jde opět o exaktní rovnici, a proto

$$\int P(x,y)\,dx = \int \sin^2 y\,dx = x\sin^2 y + C_1\,,$$

$$\int Q(x,y)\,dy = \int (x\sin 2y - 2y)\,dy = -\frac{1}{2}x\cos 2y - y^2 + C_2\,.$$

Ze získaných dílčích výsledků dostáváme kmenovou funkci

$$F(x,y) = x\sin^2 y - \frac{1}{2}x\cos 2y - y^2\,.$$

Bohužel, **výsledek je chybný!** Je totiž

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sin^2 y - \frac{1}{2}\cos 2y \neq \sin^2 y = P(x,y)\,.$$

Zkusíme proto původní postup:

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx = \int \sin^2 y\,dx = x\sin^2 y + K(y)\,,$$

a dále

$$\frac{\partial}{\partial y}(x\sin^2 y + K(y)) = x\sin 2y + K'(y) \quad = \quad x\sin 2y - 2y \ \ (= Q(x,y)\ )\,.$$

Odtud

$$K'(y) = -2y \quad \Longrightarrow \quad K(y) = \int (-2y)\,dy = -y^2\,.$$

Novým výsledkem je tedy funkce

$$F(x,y) = x\sin^2 y - y^2$$

a správné řešení

$$x\sin^2 y - y^2 = C$$

(přesvědčte se zkouškou). Zbývá vysvětlit, čím byla způsobena chyba v prvním postupu. Rozepíšeme-li totiž funkci $x\sin^2 y$ podle známého vzorce z trigonometrie, obdržíme

$$x\sin^2 y = x\,\frac{1}{2}(1-\cos 2y) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x\cos 2y\,.$$

Druhý člen však již v předchozím dílčím výsledku máme, a tedy první verze kmenové funkce byla sestavena chybně.

Poznámka

Předchozí příklad neznamená odmítnutí postupu, úspěšně použitého v úloze 8.2.1. Upozorňuje pouze na jistou dávku obezřetnosti, s níž musíme k řešení exaktních rovnic přistupovat.

Kontrolní otázky

Otázka 1. *Definujte exaktní diferenciální rovnici a formulujte podmínku, na jejímž základě se exaktnost ověří.*

Otázka 2. *Jaké jsou postupy při řešení exaktní rovnice?.*

Otázka 3. *Vysvětlete pojem „kmenová funkce”.*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Ověřte, že jde o exaktní diferenciální rovnici a najděte její obecné, případně partikulární řešení:

$$\text{a)}\quad (1 + x\cos 2y)\,dx - x^2\sin 2y\,dy = 0$$

$$\text{b)}\quad y'\left(\frac{\ln x}{y^2} - y\right) = \frac{1}{xy}\,, \qquad y(1) = 2\,,$$

$$\text{c)}\quad \left(\ln(x-y) + \frac{x}{x-y}\right)dx - \frac{x}{x-y}\,dy = 0\,.$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $x + \frac{1}{2}x^2\cos 2y = C$, b) $y^3 + 2\ln x = 4y$, c) $x\ln(x-y) = C$.

8.3. Lineární diferenciální rovnice

Cíle

Přehled základních typů diferenciálních rovnic prvního řádu zakončíme pojednáním o lineárních rovnicích, které patří v praktických úlohách k nejfrekventovanějším. Ukážeme například, že

- jejich řešení má předem danou pevnou strukturu,
- řešení lze zapsat v obecném uzavřeném tvaru (na rozdíl od jiných typů rovnic),
- postupy při jejich řešení mají určité univerzální rysy, které lze uplatnit i u lineárních rovnic vyšších řádů.

Výklad

Definice 8.3.1.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR) je každá rovnice tvaru

$$y' + p(x)y = q(x)\,,$$

kde $p(x)$, $q(x)$ jsou funkce spojité na množině $M \subseteq \mathbb{R}$, v níž hledáme řešení. Je-li $q(x) = 0$ na M, nazývá se

$$y' + p(x)y = 0$$

zkrácenou lineární rovnicí nebo také rovnicí **bez pravé strany**. V opačném případě hovoříme o **úplné lineární rovnici**.

Věta 8.3.1.

Zkrácená lineární rovnice má obecné řešení

$$\hat{y}(x) = C.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}\,.$$

Důkaz: Ve zkrácené rovnici lze proměnné snadno separovat, a proto

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \int p(x)\,dx + \ln C \quad \Longrightarrow \quad y(x) = C.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}\,.$$

Věta 8.3.2.

Obecné řešení úplné lineární rovnice má obecné řešení

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x)\,,$$

kde $\hat{y}(x)$ je řešení zkrácené rovnice a $v(x)$ je libovolné řešení úplné lineární rovnice.

Důkaz: Z předpokladů věty je zřejmé, že

$$\hat{y}' + p(x)\hat{y} = 0 \qquad \text{a dále} \qquad v' + p(x)v = q(x).$$

Po dosazení za y do úplné rovnice dostáváme:

$$(\hat{y} + v)' + p(x)(\hat{y} + v) = q(x)\,,$$

$$\hat{y}' + p(x)\hat{y} + v' + p(x)v = q(x)\,.$$

Součet prvních dvou členů je podle prvního předpokladu roven nule a zbývající rovnost platí podle druhého předpokladu. Tím je důkaz podán.

Poznámka

Funkce $v(x)$ z předchozí věty bývá také označována jako ***partikulární integrál úplné lineární rovnice****.*

Výklad

Umíme-li stanovit řešení zkrácené LDR (zpravidla to není obtížné), zbývá nalézt způsob určení partikulárního integrálu $v(x)$. Seznámíme se s postupem nazývaným

metoda variace konstanty. Její princip spočívá v realizaci předpokladu, že řešení zkrácené rovnice

$$\hat{y}(x) = C.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}$$

bude vyhovovat rovnici úplné, jestliže nahradíme konstantu C vhodnou funkcí, kterou určíme výpočtem. Budeme tedy předpokládat, že

$$y(x) = C(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}$$

je hledaným řešením a dosadíme tuto funkci do úplné rovnice:

$$\underbrace{C'(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} - C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}.p(x)}_{y'(x)} + \underbrace{C(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}}_{y(x)}.p(x) = q(x)\,.$$

Na levé straně se odečtou členy obsahující funkci $C(x)$, takže zůstane pouze vztah

$$C'(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} = q(x)\,, \qquad \text{odkud} \qquad C'(x) = q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}\,.$$

Finální tvar funkce $C(x)$ stanovíme opět integrací:

$$C(x) = \int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} + K$$

s definitivní konstantou K. Tento výsledek nyní dosadíme do výrazu pro řešení zkrácené rovnice, abychom získali obecné řešení úplné rovnice:

$$y(x) = \left(\int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} + K\right).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}$$

Po roznásobení obdržíme konečnou podobu hledaného řešení, která odpovídá očekávanému tvaru:

$$y(x) = \underbrace{K.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}.\int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}}_{v(x)}\,.$$

Tím jsme v podstatě provedli konstruktivní důkaz následujícího tvrzení o podobě řešení lineární rovnice.

Věta 8.3.3.

Úplná lineární rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ má obecné řešení $y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$ tvořené součtem řešení zkrácené rovnice a partikulárního integrálu

$$v(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} . \int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} .$$

Poznámka

Skutečnost, že se při výpočtu vyruší členy obsahující funkci $C(x)$ není náhodná. Z provedeného důkazu plyne, že tomu tak musí být vždy, pokud jsou ostatní kroky provedeny korektně. Proto může tato okolnost sloužit jako jistá kontrola správnosti výpočtu.

Výsledný vzorec má sice univerzální platnost pro všechny lineární rovnice, avšak v praxi se doporučuje postupovat v jednotlivých krocích, jimiž byl odvozen. Výpočet je přehlednější a lze se snáze vyvarovat chyb. Věnujte proto pozornost následujícím řešeným příkladům.

Řešené úlohy

Příklad 8.3.1. Najděte obecné řešení rovnic $xy' - y = 2x^3$.

Řešení: Přepíšeme-li zadání do tvaru

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2 ,$$

vidíme, že jde o lineární rovnici, v níž $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = x^2$. Při jejím řešení budeme postupovat podrobně podle kroků popsaných v odvození.

1. Nejprve vyřešíme separací proměnných zkrácenou rovnici:

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x| + C ,$$

odkud

$$\hat{y} = Cx .$$

2. Nyní přistoupíme k variaci konstanty, při níž budeme předpokládat, že $y(x) = C(x).x$. Tuto funkci a její derivaci $y'(x) = C'(x).x + C(x)$ dosadíme do úplné rovnice:

$$x.\,(C'(x).x + C(x)) - (C'(x).x + C(x)) = 2x^3\,.$$

Vzhledem k tomu, že byl dosavadní postup správný, vyruší se členy $\pm C(x).x$ a lze pokračovat dalšími kroky:

$$C'(x).x^2 = 2x^3 \qquad \Longrightarrow \qquad C(x) = \int 2x\,dx = x^2 + K\,.$$

3. Získaný výsledek dosadíme zpět do řešení zkrácené rovnice a po drobné úpravě dostáváme hledané obecné řešení:

$$y(x) = (x^2 + K).x = Kx + x^3\,.$$

4. Na závěr provedeme zkoušku dosazením do levé strany zadané rovnice:

$$x(K + 3x^2) - Kx - x^3 = 2x^3\,,$$

což je rovno výrazu na pravé straně.

Příklad 8.3.2. Řešte počáteční úlohu $y'\sin x - y\cos x = \sin^3 x$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.

Řešení: Opět se nejprve ujistíme, že jde o lineární rovnici:

$$y' - y\,\frac{\cos x}{\sin x} = \sin^2 x\,, \qquad \text{tj.} \quad p(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}\,, \quad q(x) = \sin^2 x\,.$$

1. Zkrácená rovnice:

$$y' = y\,\frac{\cos x}{\sin x} \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|y| = \ln|\sin x| + \ln C\,.$$

Řešení zkrácené rovnice:

$$\hat{y} = C.\sin x\,.$$

2. Variace konstanty:

$$y = C(x).\sin x\,, \qquad y' = C'.\sin x + C.\cos x\,.$$

Dosazení do úplné rovnice:

$$(C'.\sin x + C.\cos x).\sin x - C.\sin x.\cos x = \sin^3 x\ ,$$

$$C'\sin^2 x = \sin^3 x \qquad \Longrightarrow \qquad C(x) = \int \sin x\, dx = -\cos x + K\,.$$

3. Zpětné dosazení:

$$y(x) = (-\cos x + K).\sin x = K\sin x - \sin x\cos x\ .$$

4. Počáteční úloha pro $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = K\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2} = K\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad K = \sqrt{2}\,.$$

Výsledné řešení má tedy tvar

$$y_p(x) = \sqrt{2}\sin x - \sin x\cos x\ .$$

Příklad 8.3.3. Elektrický obvod se skládá z ohmického odporu R a cívky s indukčností L. Připojíme-li k němu napětí $U(t)$, je závislost procházejícího proudu I na čase t popsána rovnicí

$$L\,\frac{dI(t)}{dt} + R\,I(t) = U(t)\ .$$

Najděte řešení této rovnice, je-li připojeno střídavé napětí $U(t) = U_0\sin\omega t$ o úhlovém kmitočtu ω s počáteční hodnotou $U(t=0) = 0$.

Řešení: Rovnice je lineární s konstantními koeficienty R a L.

1. Zkrácená rovnice po separaci

$$L\,\frac{dI}{dt} = -R\,dt$$

má řešení

$$\ln I = -\frac{R}{L}t + \ln C \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{I}(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\ .$$

2. Variace konstanty: $I(t) = C(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$. Po dosazení do úplné rovnice dostáváme

$$C'(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = U_0 \sin \omega t \ ,$$

odkud

$$C(t) = U_0 \int \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t \, dt = \frac{U_0 L \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t \right) + K \, .$$

3. Obecné řešení získáme zpětným dosazením tohoto výsledku do řešení zkrácené rovnice:

$$I(t) = K \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0 L}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t \right) + K \, .$$

4. Počáteční úloha pro $U(t = 0) = 0$ vede k rovnosti

$$0 = K - \frac{U_0 \omega L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad \Longrightarrow \qquad K = \frac{U_0 \omega L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \, .$$

Hledaný časový průběh proudu je tedy popsán funkcí, která má po úpravě tvar

$$I(t) = \frac{U_0 \omega L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \left[\omega L \left(\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} - \cos \omega t \right) + R \sin \omega t \right] \, .$$

Kontrolní otázky

?

Otázka 1. *Vysvětlete pojem „lineární" v názvu tohoto typu diferenciálních rovnic.*

Otázka 2. *Jaký je obecný tvar lineární diferenciální rovnice?*

Otázka 3. *Popište strukturu obecného řešení lineární rovnice.*

Otázka 4. *Objasněte princip metody variace konstanty.*

Otázka 5. *Zdůvodněte, proč má lineární diferenciální rovnice vždy řešení, které je navíc jednoznačné na oboru řešitelnosti.*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte obecné řešení:

a) $y' - y = \mathrm{e}^{2x}$,

b) $y' - \frac{x+1}{x} y = x^2$,

c) $(x^2 + 1)y' - 2xy = x^2$.

2. Určete partikulární řešení rovnic při zadaných podmínkách:

a) $xy' - y = \sqrt{x}, \quad y(4) = 12$,

b) $y' + y.\operatorname{cotg} x = 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$,

c) $x^2 y' + xy = \ln x, \quad y(1) = \frac{1}{2}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $y = K\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$, b) $y = Kx\mathrm{e}^x - x^2 - x$,

c) $y = K(x^2 + 1) + (x^2 + 1)(x - \operatorname{arctg} x)$.

2. a) $y = 2x\sqrt{x} - x$, b) $y = \operatorname{cotg} x$, c) $y = \frac{1 + \ln^2 x}{2x}$.

8.4. Shrnutí ke kapitolám 7 a 8

Σ

Shrnutí lekce

Úvodní 7. kapitola přinesla informace o druzích řešení diferenciálních rovnic prvního řádu a stručné teoretické poznatky o podmínkách existence a jednoznačnosti řešení:

1. diferenciální rovnici prvního řádu můžeme psát v jednom z tvarů

   $$y' = f(x,y)\ , \qquad F(y',y,x) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0\ ;$$

2. počáteční úlohou rozumíme zadání, v němž je diferenciální rovnice doplněna podmínkou $y(x_0) = y_0$, na jejímž základě určíme, které partikulární řešení z množiny funkcí představujících řešení obecné prochází bodem $[x_0, y_0]$;

3. je-li rovnice ve tvaru $y' = f(x,y)$, pak její řešení existuje na každé množině, kde je funkce $f(x,y)$ spojitá; je-li navíc spojitá parciální derivace $f'_y(x,y)$, je řešení jednoznačné.

V kapitole 8 jsme poznali nejčastější typy rovnic prvního řádu a metody jejich řešení. Stručnou rekapitulaci představuje následující tabulka.

Rovnice	Typický tvar	Metoda řešení
separovatelná	$y' = P(x).Q(y)$	přímá separace proměnných
separovatelná	$y' = f(ax+by+c)$	separace po substituci $ax+by+c = z$
homogenní	$y' = f(\frac{y}{x})$	separace po substituci $\frac{y}{x} = z$
exaktní	$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, je-li $P'_y = Q'_x$	určení kmenové funkce
lineární	$y' = P(x)y + Q(x)$	variace konstanty

Pohled na tabulku ukazuje, že ke klíčovým podmínkám úspěšnosti při řešení diferenciálních rovnic patří rozpoznání jejich typu. Níže uvedené úlohy reprezentující problematiku předchozích dvou kapitol mají za cíl mimo jiné procvičení této dovednosti.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Ukažte, že zadané výrazy představují obecné řešení uvedené diferenciální rovnice:

a) $y = \frac{C}{\sin x}$, $\quad x \in (0, \pi)$; $\qquad y' + y\operatorname{cotg} x = 0,$

b) $y^2 - 2xy = C$, $\quad y \neq x$; $\qquad (x-y)y' = y.$

2. Rovnicí $y = x.(C - x)$ je dán systém křivek. Ukažte, že jde o paraboly procházející počátkem souřadného systému (určete souřadnice jejich vrcholu a osu pro libovolné $C \in \mathbb{R}$). Odvoďte diferenciální rovnici tohoto systému a přesvědčte se jejím řešením o správnosti výsledku.

3. Vyřešte rovnici $x^2y' = y^2$. Jakým jejím řešením je funkce $y = x$?

4. Určete typ rovnice a najděte její obecné řešení:

a) $(4x - y)\,dx + x\,dy = 0$; $\qquad$ b) $(4x - y)\,dx - x\,dy = 0$;

c) $y' - y = x$; $\qquad$ d) $3x^2y - 2xy^2 + (x^3 - 2x^2y - 4y^3)y' = 0$.

5. Najděte partikulární řešení pro zadanou počáteční podmínku:

a) $3y'\sqrt{xy} = 1$, $\qquad y(0) = 1$;

b) $y'\cos x - y\sin x = \operatorname{tg} x$, $\qquad y(\pi) = 1$;

c) $(y\ln x + y - 1)\,dx + (x\ln x + \ln y + 1)\,dy = 0$, $\qquad y(1) = 1$;

d) $xy' = y - y' - x$, $\qquad y(0) = 1$.

6. Označme $y(t)$ počet jedinců v populaci lesních škůdců na určitém území. Předpokládejme spojité změny ve vývoji populace, které jsou za jednotku času úměrné rozdílu mezi počtem narozených a počtem uhynulých jedinců. Uvažujme scénář časového vývoje populace, v němž

(1) výchozí stav je y_0 škůdců,

(2) počet narozených jedinců je úměrný jejich počtu (konstanta úměrnosti a),

(3) počet uhynulých jedinců se mění úměrně druhé mocnině jejich počtu (konstanta úměrnosti b).

Diferenciální rovnice s počáteční podmínkou popisující tento proces má tvar

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 , \qquad y(0) = y_0 .$$

Najděte řešení této úlohy a stanovte, při jakém výchozím stavu y_0 bude při pevných hodnotách a, b počet škůdců klesat. Určete, na jaké hodnotě se jejich počet ustálí.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. Doplněním pravé strany na čtverec dostáváme rovnici

$$y - \frac{C^2}{4} = -\left(x - \frac{C}{2}\right)^2 ,$$

což je rovnice paraboly s vrcholem $[\frac{C}{2}, \frac{C^2}{4}]$ a osou, která jím prochází rovnoběžně se souřadnou osou y. Několik takových křivek je na obr. 8.4.1, příslušná diferenciální rovnice má tvar $xy' - y + x^2 = 0$.

3. Obecné řešení: $y = \frac{x}{1-Cx}$, funkce $y = x$ je partikulárním řešením pro $C = 0$.

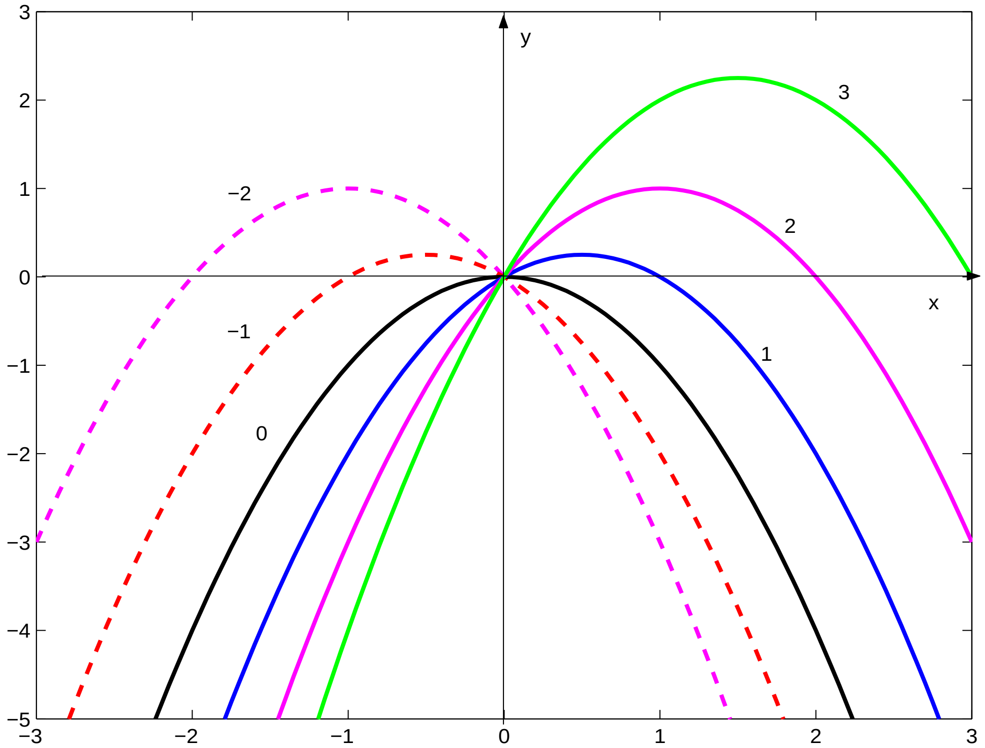
4. a) homogenní, $y = Cx - 4x \ln x$; b) homogenní, exaktní, $y = 2x - \frac{C}{x}$;
c) lineární, $y = C\mathrm{e}^x - x - 1$; d) exaktní, $x^3y - x^2y^2 - y^4 = C$.

5. a) $y^3 = (\sqrt{x} + 1)^2$; b) $y = -\frac{-2}{\cos x} - 1$; c) $xy \ln x + y \ln y - x + 1 = 0$;
d) $y = (x + 1)\ln(x + 1) - x^2 + 1$.

6. Časový vývoj populace bude popsán funkcí

$$y(t) = \frac{ay_0}{by_0 + (a - by_0)\mathrm{e}^{-at}} ,$$

počet škůdců bude klesat pro $y_0 > \frac{a}{b}$ a ustálí se na hodnotě $\frac{a}{b}$.



Obr. 8.4.1. Systém parabol (hodnoty konstant C jsou uvedeny).

Kontrolní test

Úloha 1. Kolik řešení rovnice $(2x - y)dx - (x + 2y)dy = 0$ prochází bodem $[2, \ -1]$?

a) dvě, b) jedno, c) žádné, d) nekonečně mnoho .

Úloha 2. Označte funkci, která je obecným řešením úlohy

$$y\cos x + y'(\sin y + \sin x) = 0\ .$$

a) $x\cos y - y\sin x = C$, b) $\sin y - y\cos x = C$,
c) $y\sin x - \cos y = C$, d) $x\cos y - \sin x = C$.

Úloha 3. Najděte funkci $y(x)$, která je řešením úlohy

$$(\cos x - y')\ \cos x = y\sin x\,, \quad y(0) = 0.$$

Jaké hodnoty nabývá toto řešení v bodě $x = \pi$?

a) $y(\pi) = -\pi$, b) $y(\pi) = \pi$, c) $y(\pi) = 1$, d) $y(\pi) = 0$.

Úloha 4. Rozhodněte, která z následujících funkcí je řešením počáteční úlohy

$$\frac{2x - y}{x(x-y)}\,dx - \frac{x}{y(x-y)}\,dy = 0\,, \qquad y(2) = 1\,.$$

a) $y = \frac{x}{2}$, b) $y = \frac{4x-2}{x+4}$, c) $y = 2^x - 3$, d) $y = \frac{x^2}{x+2}$.

Úloha 5. Je dána počáteční úloha $(x^2+1)dy = (2xy+1)dx$, $y(0) = 2$. Pro funkci $y(x)$, která je jejím řešením, platí:

a) $y(\frac{\pi}{4}) = 3$, b) $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{8}$, c) $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{8} + 3$, d) $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{8} + 2$,

Úloha 6. Funkce $y(x)$ je řešením počáteční úlohy

$$y\cos x = (1 + y')\sin x\,,\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2}.$$

Které z uvedených tvrzení pro ni platí?

a) $y(\pi) = 0$, b) $y(\pi) = -\pi$, c) $y(\pi) =$ neexistuje , d) $y(\pi) = \pi$.

Úloha 7. Která z uvedených rovnic je současně homogenní, exaktní a lineární?

a) $y + xy' - x = 0$, b) $y + xy' + x = 0$,
c) $x + yy' + y = 0$, d) $y + xy' + x^2 = 0$.

Úloha 8. Určete dvojice, které si budou odpovídat, přiřadíme-li k rovnicím A – D vždy jeden z typů 1 – 4 :

A	$x(y' + y) = 1$	1	homogenní
B	$xy - x^2y' = y^2$	2	lineární
C	$xyy' - y + 1 = 0$	3	exaktní
D	$2xy = y'(2y - x^2)$	4	separovatelná

a) A3, B2, C1, D4 b) A2, B1, C4, D3
c) A2, B3, C1, D4 d) A1, B4, C3, D2

Úloha 9. Integrální křivky (grafy) obecného řešení rovnice $(1 - x)y' - y + 1 = 0$ jsou

a) hyperboly, b) paraboly, c) kružnice, d) přímky.

Úloha 10. Funkce $y(x)$ je řešením počáteční úlohy

$$y' + 3y = 2xe^{-3x}\,, \quad y(0) = -\frac{1}{3}\,.$$

Její absolutní (globální) maximum na intervalu $\langle 0,\, 2\rangle$ nastává v bodě

a) $[1,\, 1]$, b) $[\frac{1}{e^3}, 1]$, c) $[1,\, \frac{2}{3e^3}]$, d) $[0,\, \frac{3}{e}]$.

Výsledky testu

Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Správná odpověď	b)	c)	a)	d)	c)	a)	b)	b)	a)	c)

9. Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Cíle

Diferenciální rovnice, v nichž hledaná funkce vystupuje ve druhé či vyšší derivaci, nazýváme diferenciálními rovnicemi druhého a vyššího řádu. Analogicky jako u rovnic 1. řádu pro ně můžeme definovat obecné, partikulární a výjimečné řešení, popřípadě se zabývat existencí a jednoznačností výsledku. V našem výkladu se zaměříme na nejrozšířenější kategorii rovnic vyšších řádů - na rovnice lineární. Využijeme přitom dřívějších poznatků o lineární rovnici prvního řádu (kapitola 8.3). S ohledem na jednoduchost a názornost je výhodné seznámit se s touto problematikou prostřednictvím rovnic druhého řádu.

9.1. Zkrácená rovnice 2.řádu

9.1.1. Základní pojmy a vztahy

Cíle

Než přistoupíme k popisu metod řešení, seznámíme se s důležitými pojmy a vztahy, které tvoří základ potřebné teorie.

Výklad

Definice 9.1.1.

Lineární diferenciální rovnice (LDR) **druhého řádu** má tvar

$$a_2(x).y''(x) + a_1(x).y'(x) + a_0(x).y(x) = b(x)\ ,$$

kde funkce (nebo konstanty) $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ jsou **koeficienty rovnice** a funkci $b(x)$ nazýváme **pravou stranou** rovnice. Je-li na nějakém intervalu $b(x) = 0$, jedná se o **zkrácenou** (**homogenní**) LDR, je-li $b(x) \neq 0$, hovoříme o rovnici **nezkrácené** (**úplné**).

Výklad

Známe-li některou z funkcí, která je řešením zadané LDR druhého řádu, můžeme využít postupu, který nabízí následující věta a navazující příklad.

Věta 9.1.1.

Nechť $v(x)$ je spojitá funkce a $y_1(x)$ jedno z nenulových řešení homogenní rovnice

$$a_2(x).y''(x) + a_1(x).y'(x) + a_0(x).y(x) = 0 .$$

Pak substitucí

$$y(x) = y_1(x) \int v(x)\, dx$$

přejde úplná rovnice druhého řádu v rovnici prvního řádu.

Důkaz: Vypočteme derivace

$$y' = y_1' \int v\, dx + y_1 v, \quad y'' = y_1'' \int v\, dx + 2y_1' v + y_1 v'$$

a dosadíme je do úplné rovnice. Po úpravě a přeskupení členů obdržíme rovnost

$$(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) \int v\, dx + (2a_2 y_1' + a_1 y_1)\ v + a_2 y_1 v' = b(x) ,$$

v níž je výraz v první závorce nulový (jde o levou stranu homogenní rovnice). Výsledná rovnice

$$a_2 y_1 v' + (2a_2 y_1' + a_1 y_1)\ v = b(x)$$

je lineární prvního řádu pro funkci $v(x)$, což jsme měli dokázat.

Příklad 9.1.1. Určete obecné řešení rovnice $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3$, víte-li, že jedním z jejích řešení je funkce $y = x$.

Řešení: Podle předchozí věty položíme

$$y = x \int v\, dx, \quad y' = \int v\, dx + xv, \quad y'' = 2v + xv'$$

a dosadíme do zadané rovnice:

$$x^2(2v + xv') - x\left(\int v\, dx + xv\right) + x \int v\, dx = 8x^3 .$$

Po roznásobení a úpravě vyjde LDR 1. řádu

$$xv' + v = 8x.$$

Její obecné řešení (umíme ho nalézt metodou variace konstanty) má tvar

$$v(x) = \frac{C_1}{x} + 4x$$

a jeho dosazením do původního vzrahu pro $y(x)$ dostáváme

$$y(x) = x\int v(x)\,dx = x\int\left(\frac{C_1}{x} + 4x\right)\,dx = C_1 x\ln x + 2x^3 + C_2 x\ ,$$

což je obecné řešení původní rovnice.

Výklad

Skutečnost, že obecné řešení LDR druhého řádu obsahuje dvě konstanty, není náhodná. Než ji ozřejmíme dalším výkladem, ukážeme obecnou formulaci počáteční úlohy, která vede k určení těchto konstant.

Definice 9.1.2.

Počáteční úlohou pro rovnici $a_2(x).y'' + a_1(x).y' + a_0(x).y = b(x)$ nazýváme zadání najít takové řešení $y(x)$ této rovnice, které splňuje podmínky

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1\ .$$

Podobně jako u lineárních rovnic prvního řádu platí i zde, že při spojitých koeficientech řešení počáteční úlohy existuje a je jednoznačné všude, kde jsou koeficienty definovány.

Při řešení počáteční úlohy postupujeme tak, že dosazením zadaných podmínek do obecného řešení a do jeho první derivace získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých pro konstanty C_1 a C_2. Ukázkou je následující příklad.

Příklad 9.1.2. Určete partikulární řešení rovnice $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$ z předchozí úlohy při počátečních podmínkách $y(1) = 4,\ y'(1) = 5$.

Řešení: Obecné řešení je

$$y(x) = C_1 x\ln x + 2x^3 + C_2 x\ ,$$

jeho derivace

$$y'(x) = C_1 \ln x + C_1 + 6x^2 + C_2 \ .$$

Dosazením počátečních podmínek pro $x = 1$ obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} 4 &= 2 + C_2 \ , \\ 5 &= C_1 + 6 + C_2 \ . \end{aligned}$$

Odtud snadno vypočteme $C_1 = -3$, $C_2 = 2$, takže partikulárním řešením bude funkce

$$y(x) = -3x \ln x + 2x^3 + 2x \ .$$

Výklad

Označení „lineární" v názvu rovnice ukazuje mimo jiné na souvislost s tím, že levá strana je lineární kombinací funkcí y, y', y''. S tímto pojmem jsme se již setkali u vektorů, kde úzce souvisí s lineární závislostí a nezávislostí. Tyto vlastnosti hrají významnou roli také v souvislosti s funkcemi při popisu struktury řešení lineárních rovnic, proto je nyní budeme stručně aktualizovat. Jak již bylo uvedeno úvodem, je výklad veden pro rovnice druhého řádu, u nichž vystačíme se zavedením potřebných pojmů pro dvojici funkcí. Případné zobecnění pro úlohy vyššího řádu není obtížné – viz např. [18].

Definice 9.1.3.

Výraz $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ nazýváme **lineární kombinací** funkcí $y_1(x)$, $y_2(x)$ s koeficienty C_1, C_2.

Řekneme, že funkce $y_1(x)$, $y_2(x)$ jsou na intervalu $\langle a, b\rangle$ **lineárně závislé**, existují-li takové konstanty C_1, C_2, z nichž alespoň jedna je nenulová, že platí

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0 \ .$$

V opačném případě řekneme, že funkce jsou **lineárně nezávislé**.

Často je potřeba nezávislost funkcí ověřit. K tomu lépe než výše uvedená definice slouží následující věta.

Věta 9.1.2.

Je-li v některém bodě $x \in \langle a,\, b\rangle$ determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

různý od nuly, jsou funkce $y_1(x),\ y_2(x)$ na tomto intervalu lineárně nezávislé. Determinant $W(x)$ se nazývá **Wronského determinant** nebo zkráceně **wronskian** této dvojice funkcí.

9.1.2. Struktura řešení zkrácené lineární rovnice

Výklad

Vraťme se nyní zpět k diferenciálním rovnicím bez pravé strany. Než ukážeme postup, jakým se hledá jejich řešení, popíšeme obecně strukturu výsledku, kterého chceme dosáhnout.

Věta 9.1.3.

Jsou-li $y_1(x),\ y_2(x)$ dvě lineárně nezávislá řešení zkrácené rovnice

$$a_2(x).y''(x) + a_1(x).y'(x) + a_0(x).y(x) = 0\ ,$$

má její obecné řešení tvar $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, kde $C_1,\ C_2$ jsou libovolné konstanty.

Důkaz: Dosadíme-li předpokládané obecné řešení do levé strany rovnice, obdržíme jednoduchým uspořádáním členů tvar

$$C_1(a_2.y_1'' + a_1.y_1' + a_0.y_1) + C_2(a_2.y_2'' + a_1.y_2' + a_0.y_2)\ .$$

Protože každá z funkcí $y_1(x)$, $y_2(x)$ je řešením rovnice, jsou členy v závorkách nulové a tedy celý výraz rovněž. To znamená, že tvrzení věty platí.

Výklad

Požadavek lineární nezávislosti dvojice funkcí $y_1(x)$, $y_2(x)$ v obecném řešení je podstatný, neboť jen v takovém případě můžeme jejich lineární kombinací vyjádřit libovolná další řešení. Každá taková dvojice lineárně nezávislých řešení se nazývá **fundamentální systém řešení** této rovnice.

Příklad 9.1.3. Dokažte, že funkce $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$ tvoří (pro $x \neq 0$) fundamentální systém řešení rovnice

$$x^2y'' + xy' - y = 0\,.$$

Řešení:

1. Dosazením snadno ověříme, že každá z funkcí rovnici vyhovuje, tj. je jejím řešením.

2. Vypočteme wronskian této dvojice:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x}\,.$$

Protože $W(x) \neq 0$ pro každé $x \neq 0$, jsou funkce y_1 a y_2 lineárně nezávislé. Tvoří tedy fundamentální systém řešení zadané rovnice.

Kontrolní otázky

Otázka 1. *Jaký je rozdíl mezi zkrácenou a úplnou lineární rovnicí?*

Otázka 2. *Vysvětlete pojem „lineární kombinace funkcí”.*

Otázka 3. *Co představuje wronskian a k čemu slouží?*

Otázka 4. *Jaká je obecná struktura řešení zkrácené LDR druhého řádu?*

Otázka 5. *Objasněte pojem „fundamentální systém řešení”.*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4y' + 3y = 0$, víte-li, že jedno z jejích řešení je $y = \mathrm{e}^x$.

2. Dokažte, že funkce $y_1 = x,\ y_2 = x^2 + 1$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = 0\,.$$

Vypočtěte partikulární řešení této rovnice pro podmínky $y(-2) = 6,\ y'(-2) = 3$.

3. Ze kterých dvojic vybraných z funkcí $y_1 = \mathrm{e}^{-2x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{2x}$, $y_3 = \sin 2x$ lze vytvořit obecné řešení rovnice $y'' - 4y = 0$?

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. $y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{3x}$.

2. $y(x) = -4x^2 - 13x - 4$.

3. Pouze y_1, y_2 ; $\quad y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}$.

9.2. Zkrácená lineární rovnice s konstantními koeficienty

Cíle

Řešíme-li konkrétní aplikace, které jsou popsány diferenciálními rovnicemi, velmi často zjistíme, že fyzikální nebo další parametry (hmotnost, hustota, frekvence, elektrický odpor aj.), které obvykle vystupují jako koeficienty rovnice, jsou konstantami. Takovéto úlohy tvoří základní skupinu mezi lineárními rovnicemi a budeme se jimi proto zabývat podrobně. V neposlední řadě je důvodem také možnost získat jejich řešení analytickými metodami, což v případě obecnějších typů rovnic není obvykle dosažitelné.

Výklad

Zaměříme se na **zkrácené rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty**, jejichž obecný tvar je

$$a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0\ ,$$

kde a_0, a_1, a_2 jsou reálné koeficienty. Ukážeme nejprve zásadní skutečnost, že existují řešení této rovnice ve tvaru

$$y(x) = \mathrm{e}^{rx}\ ,$$

kde r je zatím nespecifikovaná konstanta. Snadno určíme derivace

$$y'(x) = r\mathrm{e}^{rx}\ , \quad y''(x) = r^2\mathrm{e}^{rx}\ ,$$

které dosadíme do původní rovnice. Po vydělení výrazem e^{rx} dostáváme

$$a_2\, r^2 + a_1\, r + a_0 = 0\ ,$$

což je kvadratická rovnice pro neznámou r. Tento výsledek znamená, že funkce $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ bude řešením diferenciální rovnice právě tehdy, když r bude řešením příslušné algebraické rovnice.

Definice 9.2.1.

Kvadratickou rovnici $a_2\ r^2 + a_1\ r + a_0 = 0$ nazýváme **charakteristickou rovnicí** diferenciální rovnice $a_2\ y''(x) + a_1\ y'(x) + a_0\ y(x) = 0$.

Výklad

Jak vidíme, je charakteristická rovnice kvadratickou rovnicí, která může mít reálné či komplexní kořeny, v prvním případě i násobné. Půjde nyní o to, ukázat, jak lze s pomocí těchto kořenů najít fundamentální systém řešení (a tedy i obecné řešení) diferenciální rovnice druhého řádu. Klíčové tvrzení obsahuje následující věta.

Věta 9.2.1.

Mějme lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2\ y''(x) + a_1\ y'(x) + a_0\ y(x) = 0\ ,$$

s charakteristickou rovnicí $a_2\ r^2 + a_1\ r + a_0 = 0.$

(a) Má-li charakteristická rovnice dva různé reálné kořeny $r_1,\ r_2$, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x},\ y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}\ , \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

(b) Má-li charakteristická rovnice dvojnásobný reálný kořen r, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{rx},\ y_2 = x\mathrm{e}^{rx}$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{rx} + C_2 x \mathrm{e}^{rx} = \mathrm{e}^{rx}\left(C_1 + C_2 x\right)\ , \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

(c) Má-li charakteristická rovnice komplexní kořeny $r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\ + C_2 \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\ , \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Důkaz: Dokazování je postaveno na ověření lineární nezávislosti příslušné dvojice řešení.

(a) Dosazením snadno ověříme, že funkce $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$ vyhovují diferenciální rovnici. Například pro $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}$ je $y_1' = r_1 \mathrm{e}^{r_1 x}$, $y_1'' = r_1^2 \mathrm{e}^{r_1 x}$ a platí tedy

$$a_2 r_1^2 \mathrm{e}^{r_1 x} + a_1 r_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + a_0 \mathrm{e}^{r_1 x} = \left(a_2 r_1^2 + a_1 r_1 + a_0\right) \mathrm{e}^{r_1 x} = 0 \ ,$$

neboť výraz v závorce je nulový, protože r_1 je kořenem charakteristické rovnice. Lineární nezávislost dokážeme pomocí wronskianu:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{r_1 x} & \mathrm{e}^{r_2 x} \\ r_1 \mathrm{e}^{r_1 x} & r_2 \mathrm{e}^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) \mathrm{e}^{(r_2 - r_1)x} \, .$$

Protože kořeny r_1 a r_2 jsou různé, je $W(x) \neq 0$, což jsme měli dokázat.

(b) Pro funkci $y_1 = \mathrm{e}^{rx}$ je ověření toho, že se jedná o řešení, stejné jako v případě (a). Pro druhou funkci $y_2 = x\mathrm{e}^{rx}$ po dosazení do rovnice dostáváme

$$a_2 \underbrace{\left(2r\mathrm{e}^{rx} + r^2 x \mathrm{e}^{rx}\right)}_{y_2''} + a_1 \underbrace{\left(\mathrm{e}^{rx} + r x \mathrm{e}^{rx}\right)}_{y_2'} + a_0 x \mathrm{e}^{rx} =$$

$$= \left(a_2 r^2 + a_1 r + a_0\right) x\mathrm{e}^{rx} + \left(2a_2 r + a_1\right) \mathrm{e}^{rx} = 0 \ .$$

Protože je $r = r_{1,2} = -a_1/2a_2$ dvojnásobný kořen, jsou nulové výrazy v obou posledních závorkách.

Ukažme ještě, že řešení jsou lineárně nezávislá:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{rx} & x\mathrm{e}^{rx} \\ r\mathrm{e}^{rx} & \mathrm{e}^{rx} + rx\mathrm{e}^{rx} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2rx} \neq 0 \, .$$

(c) V tomto případě by měly představovat fundamentální řešení funkce

$$y_1 = \mathrm{e}^{(\alpha + \mathrm{i}\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x}, \quad y_2 = \mathrm{e}^{(\alpha - \mathrm{i}\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x} \ ,$$

jak se můžeme opět přesvědčit dosazením. Jelikož chceme mít řešení tvořeno reálnými výrazy, použijeme k další úpravě tzv. **Eulerovy vzorce**

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\beta x} = \cos \beta x \pm \mathrm{i} \sin \beta x \ .$$

Po jejich použití vypadá dvojice řešení takto:

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\ ,$$
$$y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\ .$$

Řešením diferenciální rovnice musí být také každá lineární kombinace těchto funkcí, například dvojice

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,, \qquad \tilde{y}_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(y_1 - y_2) = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

uvedená ve tvrzení věty. Také pro ni je wronskián nenulový:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x & \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x - \beta\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x + \beta\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix} = \beta\mathrm{e}^{2\alpha x} \neq 0\,.$$

Řešení $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ jsou tudíž lineárně nezávislá a tvoří fundamentální systém.

Poznámka

Uvedená věta zaručuje, že řešení nalezená v souladu s ní budou vždy lineárně nezávislá, není tedy třeba pro jednotlivé aplikace zkoumat, zda je příslušný wronskian nenulový.

Řešené úlohy

Následující trojice příkladů ilustruje praktické použití jednotlivých variant dokázané věty.

Příklad 9.2.1. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' - 2y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - r - 2 = 0$ má kořeny $r_1 = 2$, $r_2 = -1$. Fundamentální systém tvoří funkce $y_1 = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{-x}$, obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}\ .$$

Příklad 9.2.2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - 4r + 4 = 0$ má dvojnásobný kořen $r = 2$. Fundamentální systém tvoří funkce $y_1 = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2 = x\mathrm{e}^{2x}$, obecné řešení napíšeme například ve tvaru

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{2x} + C_2\, x\mathrm{e}^{2x}\ .$$

Příklad 9.2.3. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - 6r + 13 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $r_{1,2} = 3 \pm 2\mathrm{i}$. Fundamentální systém v reálném oboru budou podle tvrzení (c) předchozí věty tvořit funkce $y_1 = \mathrm{e}^{3x}\cos 2x$, $y_2 = \mathrm{e}^{3x}\sin 2x$, obecné řešení zapíšeme ve tvaru

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{3x}\cos 2x + C_2\mathrm{e}^{3x}\sin 2x.$$

Výklad

Je-li jeden z kořenů charakteristické rovnice roven nule, odpovídá mu ve fundamentálním systému funkce $\mathrm{e}^{0x} = 1$. Speciálně pro rovnici $y'' = 0$ dostáváme fundamentální systém $y_1 = 1$, $y_2 = x$ a tedy obecné řešení $y = C_1 + C_2x$. Výsledek je stejný, jaký bychom obdrželi postupnou dvojí integrací původní rovnice.

Jiný zvláštní případ nastane, má-li charakteristická rovnice pouze ryze imaginární kořeny $\pm\,\mathrm{i}\beta$. Pak pro $\alpha = 0$ figurují ve fundamentálním systému pouze goniometrické funkce, jak ukazuje druhý z následujících řešených příkladů.

Řešené úlohy

Příklad 9.2.4. Najděte řešení počáteční úlohy $5y'' - y' = 0$, $y(5) = 4$, $y'(5) = 1$.

Řešení: Charakteristická rovnice $5r^2 - r = 0$ má kořeny $r_1 = \frac{1}{5}$, $r_2 = 0$. Fundamentální systém tentokrát tvoří funkce $y_1 = \mathrm{e}^{\frac{x}{5}}$, $y_2 = 1$, obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\frac{x}{5}} + C_2 \ .$$

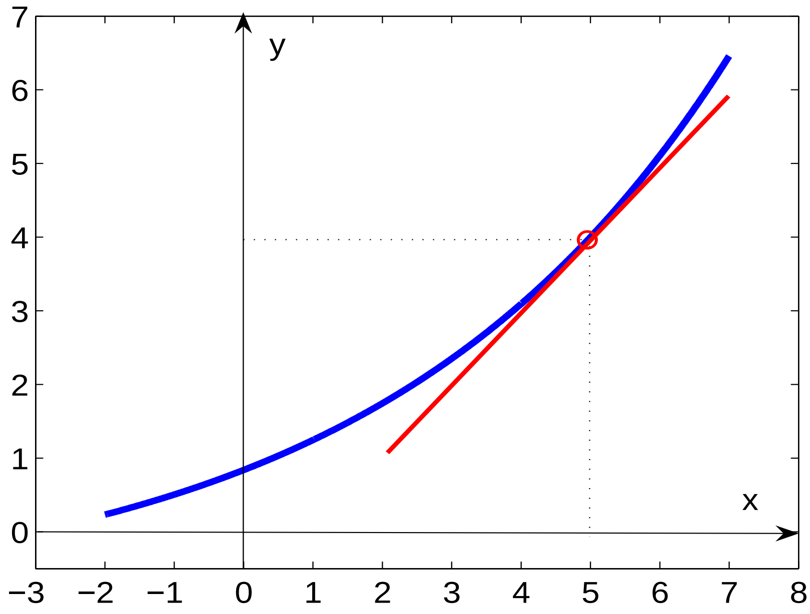
Výpočet konstant pro počáteční podmínky:

$$\begin{array}{rcrcl} & & y(5) = 4 & \dots & 4 = C_1 \mathrm{e} + C_2 \ , \\ y' = \frac{1}{5} C_1 \mathrm{e}^{\frac{x}{5}} & \dots & y'(5) = 1 & \dots & 1 = \frac{1}{5} C_1 \mathrm{e} \ . \end{array}$$

Odtud $C_1 = \frac{5}{\mathrm{e}}$, $C_2 = -1$ a tedy

$$y_p(x) = 5\mathrm{e}^{\frac{x}{5}-1} - 1 \ .$$

Na obr. 9.2.1 vidíme část grafu této funkce, kde je vedle bodu $[5, 4]$, odpovídajícího – podobně jako u rovnic prvního řádu – podmínce pro funkční hodnotu $y(5) = 4$ také část tečny v tomto bodě. Ta má směrnici rovnu jedné, a proto svírá s osou x úhel $\pi/4$. Znázorňuje druhou počáteční podmínku $y'(5) = 1$.



Obr. 9.2.1. Graf řešení počáteční úlohy z příkladu 9.2.4.

Příklad 9.2.5. Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 9y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 + 9 = 0$ má kořeny $r_1 = 3\mathrm{i}$, $r_2 = -3\mathrm{i}$. Fundamentální systém tvoří dvojice $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$, obecné řešení je jejich lineární kombinací:

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x \ .$$

Kontrolní otázky

Otázka 1. *Objasněte pojem „charakteristická rovnice”.*

Otázka 2. *Popište tvar obecného řešení LDR 2. řádu s konstantními koeficienty, má-li její charakteristická rovnice*

a) různé reálné nenulové kořeny,

b) různé reálné kořeny, z nichž jeden je nulový,

c) dvojnásobný nenulový reálný kořen.

Otázka 3. *Popište formu obecného řešení v případě, že charakteristická rovnice má*

a) komplexní kořeny $\alpha \pm \beta\mathrm{i}$, $\alpha \neq 0$,

b) komplexní kořeny $\pm\beta\mathrm{i}$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte wronskian fundamentálního systému řešení z příkladu 9.2.5.

2. Najděte obecná řešení rovnic s konstantními koeficienty:

a) $4y'' - y = 0$, b) $y'' + 7y' + 10y = 0$,

c) $4y'' + y = 0$, d) $y'' + 8y' + 25y = 0$.

3. Řešte počáteční úlohy:

a) $y'' - y' - 12y = 0, \qquad y(0) = 5,\ y'(0) = -1,$

b) $y'' + y = 0, \qquad y(\pi) = y'(\pi) = 2,$

c) $y'' + 4y' = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = -12.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. $W = 3.$

2. a) $y = C_1 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, b) $y = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 \mathrm{e}^{-5x}$,

c) $y = C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}$, d) $y = \mathrm{e}^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

3. a) $y = 2\mathrm{e}^{4x} + 3\mathrm{e}^{-3x}$, b) $y = -2\cos x - 2\sin x$, c) $y = 3\mathrm{e}^{-4x} - 3$.

Kontrolní test

Úloha 1. Jsou dány funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{-2x}$. Wronskian této dvojice je

$$\text{a) } 4\ , \qquad \text{b) } -4\ , \qquad \text{c) } 0\ , \qquad \text{d) } 2\mathrm{e}^{-4x}\ .$$

Úloha 2. Jsou dány funkce $y_1 = \sin x$, $y_2 = \sin^2 x$, $y_3 = 1 - \cos 2x$. Které z následujících tvrzení platí pro dvojice z nich utvořené?

a) funkce y_1, y_2 jsou lineárně závislé,

b) funkce y_1, y_3 jsou lineárně závislé,

c) funkce y_2, y_3 jsou lineárně závislé,

d) všechny dvojice jsou lineárně nezávislé.

Úloha 3. Rozhodněte, která z funkcí a) – d) je řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 5y = 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & y = \mathrm{e}^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)\ , \\ \text{b)} & y = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\ , \\ \text{c)} & y = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)\ , \\ \text{d)} & y = \mathrm{e}^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\ . \end{array}$$

Úloha 4. Funkce $y(x)$ je řešením rovnice $6y'' - 5y' - 6y = 0$. Vyberte počáteční podmínky, které splňuje v bodě $x = 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 0\ , & \text{b) } y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 2\ , \\ \text{c) } y(0) = 2\ ,\ y'(0) = \frac{1}{4}\ , & \text{d) } y(0) = \frac{1}{4}\ ,\ y'(0) = 2\ . \end{array}$$

Úloha 5. Rozhodněte, která z funkcí a) – d) je řešením počáteční úlohy

$$y'' + 7y' + 12y = 0\ , \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 3\ .$$

a) $y = -18e^{-3x} + 23e^{-4x}$,

b) $y = 23e^{-4x} - 18e^{-3x}$,

c) $y = 23e^{-3x} - 18e^{4x}$,

d) $y = 23e^{-3x} - 18e^{-4x}$.

Úloha 6. Která z dvojic a) – d) tvoří fundamentální systém řešení diferenciální rovnice $y'' - 10y' + 25y = 0$?

a) $y_1 = e^{5x}, \quad y_2 = e^{5x}$,

b) $y_1 = e^{-5x}, \quad y_2 = e^{5x}$,

c) $y_1 = e^{5x}, \quad y_2 = xe^{5x}$,

d) $y_1 = e^{-5x}, \quad y_2 = xe^{5x}$.

Úloha 7. Určete, který z uvedených výsledků je obecným řešením diferenciální rovnice $9y'' + 4y = 0$:

a) $y = C_1 \cos \frac{2}{3}x + C_2 \sin \frac{2}{3}x$,

b) $y = C_1 e^{\frac{2}{3}x} + C_2 e^{-\frac{2}{3}x}$,

c) $y = C_1 \cos \frac{3}{2}x + C_2 \sin \frac{3}{2}x$,

d) $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{4}{9}x}$.

Úloha 8. Určete, který z uvedených výsledků je obecným řešením diferenciální rovnice $y'' - 16y' + 68y = 0$:

a) $y = C_1 e^{-8x} \cos 2x + C_2 e^{8x} \sin 2x$,

b) $y = e^{8x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$,

c) $y = e^{-2x}(C_1 \cos 8x + C_2 \sin 8x)$,

d) $y = C_1 e^{2x} \cos 8x + C_2 e^{-2x} \sin 8x$.

Úloha 9. Určete, který z uvedených výsledků je obecným řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y' = 0$:

a) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$,

b) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$,

c) $y = C_1 + C_2 e^{4x}$,

d) $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$.

Úloha 10. Určete, který z uvedených výsledků je řešením počáteční úlohy $y'' = 0,\ y(-1) = 3,\ y'(-1) = 2$:

a) $y = 2x - 5$,

b) $y = 2x + 5$,

c) $y = x + 4$,

d) $y = 2 - x$.

Výsledky testu

Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Správná odpověď	b)	c)	c)	d)	d)	c)	a)	b)	d)	b)

9.3. Úplná lineární rovnice s konstantními koeficienty

Cíle

Nyní přejdeme k řešení úplné lineární rovnice druhého řádu. I v tomto případě si nejprve ujasníme, v jakém tvaru můžeme očekávat řešení, poté se zaměříme na rozšíření metody variace konstant na rovnice druhého řádu.

Výklad

Věta 9.3.1.

Obecné řešení úplné lineární rovnice druhého řádu

$$a_2(x)\ y''(x) + a_1(x)\ y'(x) + a_0(x)\ y(x) = b(x)$$

má tvar

$$y(x) = \tilde{y}(x) + v(x)\ ,$$

kde $\tilde{y}(x)$ je obecné řešení zkrácené rovnice a $v(x)$ je libovolné řešení (tzv. **partikulární integrál**) úplné rovnice.

Důkaz: Podle předpokladů je

$a_2\tilde{y}'' + a_1\tilde{y}' + a_0\tilde{y} = 0$, neboť se jedná o obecné řešení zkrácené rovnice,

$a_2v'' + a_1v' + a_0v = b$, protože $v(x)$ je řešením úplné rovnice.

Dosadíme-li do rovnice $a_2y'' + a_1y' + a_0y = b$ předpokládané řešení, bude

$$a_2(\tilde{y}'' + v'') + a_1(\tilde{y}' + v') + a_0(\tilde{y} + v) = b\ ,$$

$$\text{tj.} \qquad a_2\tilde{y}'' + a_1\tilde{y}' + a_0\tilde{y} + a_2v'' + a_1v' + a_0v = b.$$

Uplatníme-li oba uvedené předpoklady, je tato rovnost identicky splněna.

Výklad

Máme řešit úpnou lineární rovnici druhého řádu

$$a_2(x)\ y''(x) + a_1(x)\ y'(x) + a_0(x)\ y(x) = b(x)$$

za předpokladu, že známe řešení zkrácené rovnice

$$\hat{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\ .$$

Stejně jako u lineárních rovnic prvního řádu budeme předpokládat, že obecné řešení úplné rovnice má stejný tvar jako řešení zkrácené rovnice, kde však figurují namísto konstant vhodné funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$. Tento postup se i zde označuje jako **metoda variace konstant**. Hledaný tvar řešení bude tedy

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)\ ,$$

a jeho první derivace

$$y' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'\ .$$

Volba dvojice nových funkcí dovoluje stanovit vhodnou doplňující podmínku pro jejich vzájemný vztah. Nejvýhodnější – pro snadný další postup – je požadavek, aby

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0\ .$$

Po dosazení do derivace bude tedy pouze

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

a můžeme vyčíslit druhou derivaci

$$y'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''\ .$$

Získané vztahy pro funkci $y(x)$ a její derivace dosadíme do úplné rovnice a upravíme:

$$C_1(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + C_2(a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) + a_2(C_1' y_1' + C_2' y_2') = b\ .$$

Výrazy v prvních dvou závorkách jsou rovny nule, neboť jak y_1, tak y_2 jsou řešením zkrácené rovnice. Zůstává tedy pouze rovnost $a_2(C_1'y_1'+C_2'y_2') = b$, kterou v mírně upravené podobě zapíšeme spolu s dříve zvolenou podmínkou:

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 &= 0 \,, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' &= \frac{b}{a_2} \,. \end{aligned}$$

Získali jsme algebraickou soustavu rovnic pro derivace hledaných funkcí $C_1(x)$, $C_2(x)$, kterou musíme vyřešit. V prvé řadě vidíme, že determinant této soustavy je vlastně wronskianem $W(x)$ fundamentálního systému zkrácené rovnice (je proto nenulový). Z něj snadno zkonstruujeme determinanty $W_1(x)$, $W_2(x)$ tak, že příslušný sloupec nahradíme sloupcem pravých stran soustavy:

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{b}{a_2} & y_2' \end{vmatrix} \,, \qquad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{b}{a_2} \end{vmatrix} \,.$$

Výrazy pro derivace $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ získáme snadno pomocí Cramerových vzorců známých z lineární algebry:

$$C_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} \,, \qquad C_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} \,.$$

Odtud integrací obdržíme

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\, dx + K_1 \,, \qquad C_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}\, dx + K_2 \,,$$

kde K_1, K_2 jsou reálné konstanty. Závěrečným krokem je zpětné dosazení těchto výsledků do původního výrazu $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, odkud obdržíme finální tvar obecného řešení úplné rovnice:

$$y(x) = \left(\int \frac{W_1(x)}{W(x)}\, dx + K_1 \right) y_1(x) + \left(\int \frac{W_2(x)}{W(x)}\, dx + K_2 \right) y_2(x) \,.$$

Předchozí výsledek můžeme zapsat i v poněkud odlišném uspořádání, z kterého je vidět, že podoba získaného řešení je v souladu s větou 9.3.1.:

$$y(x) = \underbrace{K_1y_1(x) + K_2y_2(x)}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\, dx + y_2(x) \int \frac{W_2(x)}{W(x)}\, dx}_{v(x)} \,. \qquad (*)$$

Poznámka

Třebaže se odvození základních vztahů pro metodu variace konstant jeví komplikovaně, je její aplikace velmi přehledná, jak ukazují následující řešené úlohy. Jisté problémy mohou však nastat při výpočtu integrálů.

Řešené úlohy

Příklad 9.3.1. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' - 8y = 30\mathrm{e}^{3x}$.

Řešení:

1. Nejprve vyřešíme zkrácenou rovnici $y'' - 2y' - 8y = 0$. Charakteristická rovnice $r^2 - 2r - 8 = 0$ má kořeny $r_1 = -2$, $r_2 = 4$, proto funkce fundamentálního systému budou

$$y_1 = \mathrm{e}^{-2x}, \; y_2 = \mathrm{e}^{4x}.$$

2. Nyní realizujeme algoritmus metody variace konstant. Nejprve vyčíslíme wronskian a odvozené determinanty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{4x} \\ -2\mathrm{e}^{-2x} & 4\mathrm{e}^{4x} \end{vmatrix} = 6\mathrm{e}^{2x} \; ,$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^{4x} \\ 30\mathrm{e}^{3x} & 4\mathrm{e}^{4x} \end{vmatrix} = -30\mathrm{e}^{7x} \; ,$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{4x} \\ 0 & 30\mathrm{e}^{3x} \end{vmatrix} = 30\mathrm{e}^{x} \; .$$

Pro funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ tak obdržíme integrály

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\,dx = -5\int \mathrm{e}^{5x}\,dx = -\mathrm{e}^{5x} + K_1 \; ,$$

$$C_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}\,dx = 5\int \mathrm{e}^{-x}\,dx = -5\mathrm{e}^{-x} + K_2 \; .$$

3. Výslednou podobu hledaného řešení vytvoříme na základě formule (∗):

$$y(x) = K_1\mathrm{e}^{-2x} + K_2\mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^{-2x}(-\mathrm{e}^{5x}) + \mathrm{e}^{4x}(-5\mathrm{e}^{-x}) = K_1\mathrm{e}^{-2x} + K_2\mathrm{e}^{4x} - 6\mathrm{e}^{3x}\ .$$

Příklad 9.3.2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$.

Řešení:

1. Charakteristická rovnice $r^2 - 2r + 1 = 0$ má dvojnásobný kořen $r = 1$, což vede k fundamentálnímu systému $y_1 = \mathrm{e}^x,\ y_2 = x\mathrm{e}^x$.

2. Wronskian a odvozené determinanty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & x\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & (x+1)\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2x}\ ,$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x\mathrm{e}^x \\ \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1} & (x+1)\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = -\frac{x\mathrm{e}^{2x}}{x^2+1}\ ,$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & 0 \\ \mathrm{e}^x & \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1} \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2+1}\ .$$

Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\,dx = -\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + K_1\ ,$$

$$C_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + K_2\ .$$

3. Výsledné řešení opět podle obecné formule (∗):

$$y(x) = \mathrm{e}^x(K_1 + K_2x) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\ln(x^2+1) + x\mathrm{e}^x\operatorname{arctg} x\ .$$

Kontrolní otázky

Otázka 1. *Popište strukturu obecného řešení úplné LDR druhého řádu.*

Otázka 2. *Vysvětlete základní princip metody variace konstant pro rovnici 2. řádu.*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' = x\mathrm{e}^x$.

2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' - 12y = 14\mathrm{e}^x$.

3. Najděte při počátečních podmínkách $y(1) = \mathrm{e}$, $y'(1) = 2\mathrm{e}$ řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = 3\sqrt{x}\mathrm{e}^x \ .$$

4. Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + 1} \ .$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2 - x\mathrm{e}^x$.

2. $y = C_1\mathrm{e}^{4x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} - \frac{7}{6}\mathrm{e}^x$.

3. $y = \frac{\mathrm{e}^x}{10}(8\sqrt{x^5} + 5x - 3)$.

4. $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}\ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^{-2x}\ln(1 + \mathrm{e}^x)$.

9.4. Rovnice se speciální pravou stranou

Cíle

V řadě případů lze poměrně pracný výpočet metodou variace konstant nahradit jednodušším postupem, kterému je věnována tato kapitola.

Výklad

Při pozorném studiu předchozího textu pozornějšího studenta zaujme, že ve fundamentálním systému kterékoli lineární rovnice s konstantními koeficienty se mohou vyskytnout pouze přirozené exponenciální funkce, polynomy nebo goniometrické funkce sinus či kosinus, případně jejich součiny. Rovněž lze snadno ukázat, že i derivace jmenovaných funkcí budou téhož typu.

Je-li také pravá strana $b(x)$ funkce exponenciální, goniometrická, popřípadě polynom, lze partikulární integrál $v(x)$ úplné rovnice nalézt jednodušší cestou, než je variace konstant. V principu lze postupovat tak, ža partikulární integrál zvolíme předem, a to téhož typu, jako je pravá strana rovnice, avšak s obecnými koeficienty. Ty následně určíme po dosazení partikulárního integrálu do rovnice porovnáním obou jejích stran. Než tento postup formálně zobecníme, ukážeme jeho realizaci na několika řešených ukázkách.

Řešené úlohy

Příklad 9.4.1. V úloze 9.3.1 v předchozí kapitole jsme hledali obecné řešení rovnice $y'' - 2y' - 8y = 30\mathrm{e}^{3x}$. Provedeme výpočet jiným postupem.

Řešení: Úvodní krok ponecháme beze změny, takže pro kořeny charakteristické rovnice $r_1 = -2,\ r_2 = 4$ můžeme ihned napsat obecné řešení zkrácené rovnice:

$$\hat{y}(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{4x}\ .$$

Partikulární integrál $v(x)$ pro řešení úplné rovnice však nebudeme hledat metodou variace konstant, nýbrž jeho tvar zvolíme ve stejné podobě jako má pravá strana rovnice, tj.

$$v(x) = A\,\mathrm{e}^{3x} ,$$

kde A je konstanta, kterou musíme nyní určit. Provedeme to dosazením funkce $v(x)$ a jejích derivací $v' = 3A\,\mathrm{e}^{3x}$, $v'' = 9A\,\mathrm{e}^{3x}$ do úplné rovnice:

$$9A\,\mathrm{e}^{3x} - 6A\,\mathrm{e}^{3x} - 8A\,\mathrm{e}^{3x} = A\,\mathrm{e}^{3x}$$

a po vydělení výrazem e^{3x} dostáváme

$$9A - 6A - 8A = 30 \quad \Rightarrow \quad A = -6 .$$

Nalezený partikulární integrál $v(x) = -6\,\mathrm{e}^{3x}$ je identický s výsledkem získaným výrazně pracnějším způsobem v příkladu 9.3.1.

Příklad 9.4.2. Najděme obecné řešení rovnice $y'' - 4y' - 5y = 5x - 6$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - 4r - 5 = 0$ má kořeny $r_1 = 5$, $r_2 = -1$, takže obecné řešení zkrácené rovnice je

$$\hat{y}(x) = C_1\mathrm{e}^{5x} + C_2\mathrm{e}^{-x} .$$

Na pravé straně zadané rovnice je nyní polynom prvního stupně – zvolíme proto i partikulární integrál v podobě takového polynomu:

$$v(x) = Ax + B \quad \text{a dále} \quad v' = A,\ v'' = 0.$$

Po dosazení do rovnice obdržíme rovnost dvou polynomů

$$-4A - 5Ax - 5B = 5x - 6 ,$$

ve které se musí rovnat koeficienty u stejných mocnin proměnné x:

$$\begin{array}{lrcl} x^1 : & -5A & = & 5 , \\ x^0 : & -4A - 5B & = & -6 . \end{array}$$

Z této soustavy snadno vypočteme $A = -1,\ B = 2$, takže

$$v(x) = -x + 2$$

a hledané obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{5x} + C_2 \mathrm{e}^{-x} - x + 2\ .$$

Příklad 9.4.3. Najděme obecné řešení rovnice $y'' - 4y' - 5y = 26 \cos x$.

Řešení: Zkrácená rovnice je táž jako v předchozí úloze, stejné bude i její řešení $\hat{y}(x)$. Na pravé straně je však goniometrická funkce $b(x) = 26 \cos x$, takže i partikulární integrál očekáváme vytvořený z goniometrických funkcí (budou stejného argumentu, ale s obecnými konstantami, z nichž jedna může vyjít nulová):

$$v(x) = A \cos x + B \sin x\ .$$

Tuto funkci a její derivace dosadíme do zadané rovnice:

$$\underbrace{-A \cos x - B \sin x}_{v''} - 4(\underbrace{-A \sin x + B \cos x}_{v'}) - 5(\underbrace{A \cos x + B \sin x}_{v}) = 26 \cos x\ .$$

Porovnáme-li nyní koeficienty u goniometrických funkcí stejného typu, obržíme soustavu dvou rovnic pro neznámé $A,\ B$

$$\begin{aligned} \cos x\ &: & -6A - 4B &= 26\ , \\ \sin x\ &: & 4A - 6B &= 0\ , \end{aligned}$$

která má jediné řešení $A = -3,\ B = -2$, takže získaný partikulární integrál $v(x) = -3 \cos x - 2 \sin x$ dává spolu s řešením zkrácené rovnice konečný výsledek

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{5x} + C_2 \mathrm{e}^{-x} - 3 \cos x - 2 \sin x\ .$$

Výklad

Konstanty, které jsme určovali v předchozích příkladech, byly v podstatě koeficienty polynomů (samotnou konstantu můžeme pokládat za polynom nultého stupně). Odtud pochází nejčastěji užívaný název tohoto postupu – **metoda neurčitých koeficientů**. Její základní variantu lze formulovat takto:
má-li pravá strana lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tvar

$$b(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\left(p_m(x)\cos\omega x + q_n(x)\sin\omega x\right)\ ,$$

kde $p_m(x)$, $q_n(x)$ *jsou polynomy stupňů* m, n *se zadanými koeficienty, volíme partikulární integrál ve tvaru*

$$v(x) = x^k\mathrm{e}^{\lambda x}\left(P_M(x)\cos\omega x + Q_M(x)\sin\omega x\right)\ ,$$

kde M *je rovno většímu z čísel* m, n. *Koeficienty polynomů* $P_M(x)$, $Q_M(x)$ *určíme porovnávací metodou po dosazení partikulárního integrálu do zadané rovnice. Činitel* x^k *souvisí s násobností kořenů charakteristické rovnice – viz případ (IIb) na další straně.*

Posoudíme-li z tohoto pohledu znovu pravé strany trojice předchozích řešených úloh, vidíme, že je

- $\lambda = 3,\ \omega = 0,\ p_0(x) = 30$ pro $v(x) = 30\mathrm{e}^{3x}$,
- $\lambda = 0,\ \omega = 0,\ p_1(x) = 5x - 6$ pro $v(x) = 5x - 6$,
- $\lambda = 0,\ \omega = 1,\ p_0(x) = 26$ pro $v(x) = 26\cos x$.

Povšimněme si těchto typických základních variant blíže, přičemž je třeba zvlášť upozornit na situace, kdy je výraz $\lambda \pm \mathrm{i}\omega$ roven některému z kořenů charakteristické rovnice $r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$.

(I) Pravá strana rovnice je exponenciální funkce $c.\mathrm{e}^{\lambda x}$, $\lambda \neq 0$:

(a) Jestliže λ není kořenem charakteristické rovnice, pak $v(x) = A\mathrm{e}^{\lambda x}$.

(b) Je-li λ kořenem charakteristické rovnice, pak $v(x) = Ax^k \mathrm{e}^{\lambda x}$, kde k je násobnost kořene λ.

Konstantu A určíme po dosazení do rovnice porovnáním koeficientů u výrazů $\mathrm{e}^{\lambda x}$. Variantu (Ia) jsme viděli v příkladu **??**, variantu (Ib) demonstruje úloha **??**

(II) Pravá strana rovnice je polynom m-tého stupně

$$b(x) = p_m(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

(je tedy $\lambda = \omega = 0$).

(a) Jestliže $\lambda = 0$ není kořenem charakteristické rovnice, pak

$$v(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0 \ ;$$

(b) Je-li $\lambda = 0$ kořenem charakteristické rovnice, pak

$$v(x) = x^k \left(A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0 \right) \ ,$$

kde $k = 1, 2$ je násobnost nulového kořene. Koeficienty $A_0, \ldots, A_m$ určíme v obou případech po dosazení do rovnice porovnáním koeficientů u stejných mocnin x. Variantu (IIa) jsme řešili v příkladu **??**, s variantou (IIb) se můžeme seznámit v úloze **??**

(III) Pravá strana rovnice je výraz obsahující goniometrické funkce ve tvaru

$$b(x) = c \cos \omega x + d \sin \omega x \ ,$$

v němž jedno z čísel c, d může být rovno nule.

(a) Není-li číslo $\mathrm{i}\omega$ kořenem charakteristické rovnice, pak

$$v(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x \ ;$$

(b) Je-li číslo $\mathrm{i}\omega$ kořenem charakteristické rovnice, pak

$$v(x) = x \left(A \cos \omega x + B \sin \omega x \right) \ .$$

Konstanty A, B se určí po dosazení do rovnice porovnáním koeficentů u funkcí $\sin \omega x$ a $\cos \omega x$. Jako ukázku prvního typu jsme uvedli příklad **??**, varianta (IIIb) je součástí řešené úlohy na soustavu diferenciálních rovnic v další kapitole.

Řešené úlohy

Příklad 9.4.4. Najděme obecné řešení rovnice $y'' - y' - 12y = 7\mathrm{e}^{-3x}$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - r - 12 = 0$ má kořeny $r_1 = 4,\ r_2 = -3$, řešení zkrácené rovnice je

$$\hat{y}(x) = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 \mathrm{e}^{-3x} \ .$$

Pravá strana $b(x) = 7\mathrm{e}^{-3x}$ vede na první pohled k odhadu partikulárního integrálu $v(x) = A\mathrm{e}^{-3x}$. Provedeme-li ovšem jeho dosazení do rovnice, dostáváme

$$9A\mathrm{e}^{-3x} + 3A\mathrm{e}^{-3x} - 12A\mathrm{e}^{-3x} = 7 \ , \qquad \text{tj.} \quad 0 = 7.$$

Odtud ovšem nelze koeficient A určit. Důvodem je skutečnost, že pro kořen charakteristické rovnice $r_2 = -3$ máme stejné hodnoty parametrů, jaké má pravá strana $b(x) = 7\mathrm{e}^{-3x}$, kde $\lambda = -3 = \alpha,\ \omega = 0 = \beta$. Potvrzuje to skutečnost, že funkce e^{-3x} již patří do fundamentálního systému zkrácené rovnice. Zvolíme-li však

$$v(x) = Ax\mathrm{e}^{-3x}$$

(analogicky jako v případě násobného kořene), bude

$$v' = A\mathrm{e}^{-3x}(1 - 3x), \qquad v'' = -3A\mathrm{e}^{-3x}(2 - 3x) \ ,$$

a po dosazení do rovnice

$$-3A\mathrm{e}^{-3x}(2 - 3x) - A\mathrm{e}^{-3x}(1 - 3x) - 12Ax\mathrm{e}^{-3x} = 7\mathrm{e}^{-3x} \ .$$

Po roznásobení se vyruší členy obsahující výraz $x\mathrm{e}^{-3x}$ a zůstane rovnice

$$-7A\mathrm{e}^{-3x} = 7\mathrm{e}^{-3x}\,, \qquad \text{odkud} \qquad A = -1\;.$$

Výsledkem je tudíž partikulární integrál $v(x) = -x\mathrm{e}^{-3x}$ a obecné řešení ve tvaru

$$y(x) = \hat{y} + v(x) = C_1\mathrm{e}^{4x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} - x\mathrm{e}^{-3x}\;.$$

Příklad 9.4.5. Najděme obecné řešení rovnice $y'' - 2y' = x$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - 2r = 0$ má kořeny $r_1 = 2,\ r_2 = 0$, řešení zkrácené rovnice je

$$\hat{y}(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\;.$$

Pravá strana $b(x) = x$ je polynom prvního stupně, proto by bylo logické zvolit partikulární integrál $v(x) = A_1x + A_0$. Protože je však $\lambda = 0 = r_2$, musíme podle varianty (IIb) vzít

$$v(x) = x(A_1x + A_0) = A_1x^2 + A_0x\;.$$

Derivace této funkce snadno vypočteme a dosadíme do rovnice:

$$2A_1 - 2(2A_1x + A_0) = x\;,$$

odkud $A_1 = -\frac{1}{4},\ A_0 = \frac{1}{4}$. Konečná podoba řešení pak bude

$$y(x) = \hat{y} + v(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\;.$$

Poznámka

Metoda neurčitých koeficientů připouští i pravé strany ve tvaru součtů exponenciálních a goniometrických funkcí a polynomů. Pod názvem ***princip superpozice*** *se s tímto zobecněním můžete seznámit v doporučené literatuře.*

Kontrolní otázky

Otázka 1. *Jaké typy funkcí zahrnujeme pod označení speciální pravá strana a proč?*

Otázka 2. *V čem spočívá použití metody neurčitých koficientů při řešení LDR se speciální pravou stranou?*

Otázka 2. *Jak souvisí kořeny charakteristické rovnice s volbou partikulárního integrálu?*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 5y' + 6y = b(x)$, je-li

a) $b(x) = x^2 + 5x - 3$, b) $b(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$.

2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = b(x)$, je-li

a) $b(x) = x^3 + 1$, b) $b(x) = (x + 1)\mathrm{e}^{x}$.

3. Najděte obecná řešení rovnic:

a) $y'' - 2y' + 10y = 26\sin 2x$, b) $4y'' - 4y' + y = 17\cos 2x$.

4. Zdůvodněte, proč lze ve cvičných úlohách 1 a 2 na konci kapitoly 9.3 postupovat také metodou neurčitých koeficientů. Najděte touto metodou jejich řešení.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. $y = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} + v(x)$, kde

a) $v(x) = \frac{1}{54}(9x^2 + 30x - 55)$, b) $v(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\mathrm{e}^{-2x}$.

2. $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + v(x)$, kde

a) $v(x) = \frac{1}{8}(2x^3 + 6x^2 + 9x + 8)$, b) $v(x) = (x+3)e^x$.

3. a) $y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + 2\cos 2x + 3\sin 2x$,

b) $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} - \frac{15}{17}\cos 2x - \frac{8}{17}\sin 2x$.

9.5. Soustavy diferenciálních rovnic

Cíle

Budeme se nyní zabývat úlohami, v nichž je cílem najít dvojici funkcí $y(x),\ z(x)$, pro které jsou zadány dvě lineární rovnice prvního řádu, obsahující tyto funkce a jejich derivace.

Výklad

Omezíme-li se na **lineární soustavy s konstantními koeficienty**, můžeme základní úlohu zadat ve tvaru

$$\begin{aligned} a_1y' + a_2z' + a_3y + a_4z &= b_1(x)\ , \\ c_1y' + c_2z' + c_3y + c_4z &= b_2(x)\ , \end{aligned}$$

kde $a_1, \ldots, a_4,\ c_1, \ldots, c_4$ jsou reálné konstanty a $b_1(x),\ b_2(x)$ známé funkce (pravé strany soustavy). Je-li specielně $b_1(x) = b_2(x) = 0$, hovoříme o **homogenní soustavě rovnic**.

Řešení takovéto (malé) soustavy nevyžaduje hlubší teoretické poznatky nezbytné pro úlohy s větším počtem neznámých, tj. i rovnic. **Eliminační metodou** můžeme totiž tuto soustavu převést na diferenciální rovnici druhého řádu pro jednu z neznámých funkcí a využít tak dříve získané znalosti. Postup bude zřejmý po prostudování následujících řešených úloh.

Řešené úlohy

Příklad 9.5.1. Máme najít funkce $y(x)$ a $z(x)$, které jsou řešením soustavy

$$\begin{aligned} y' - 4z' + 2y - 8z &= 0, \\ z' - y + z &= 0 \end{aligned}$$

při těchto počátečních podmínkách: $y(0) = 3,\ z(0) = 2$.

Řešení: Druhá z rovnic této homogenní soustavy je podstatně jednodušší, proto z ní snadno vyjádříme funkci y a následně její derivaci:

$$y = z' + z\,, \qquad y' = z'' + z'\ .$$

Po dosazení do první rovnice a úpravě máme diferenciální rovnici druhého řádu bez pravé strany pro funkci $z(x)$:

$$z'' - z' - 6z = 0\ .$$

Její charakteristická rovnice $r^2 - r - 6 = 0$ má kořeny $r_1 = -2$, $r_2 = 3$, kterým odpovídá obecné řešení

$$z(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x} \quad \text{a jeho derivace} \quad z'(x) = -2C_1\,\mathrm{e}^{3x} + 3C_2\,\mathrm{e}^{2x}\ .$$

Funkci $y(x)$ vytvoříme pomocí vztahu, který jsme použili úvodem při eliminaci:

$$y(x) = z' + z = -C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + 4C_2\,\mathrm{e}^{3x}\ .$$

Nyní zbývá určit z počátečních podmínek konstanty C_1 a C_2. Položíme-li $x = 0$ v obecném řešení

$$\begin{aligned} y(x) &= -C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + 4C_2\,\mathrm{e}^{3x}\,, \\ z(x) &= C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x}\ , \end{aligned}$$

obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} 3 &= -C_1 + 4C_2\ , \\ 2 &= C_1 + C_2\ . \end{aligned}$$

Jejím řešením jsou hodnoty $C_1 = C_2 = 1$, takže můžeme napsat hledaný výsledek počáteční úlohy:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= 4\,\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-2x}\,, \\ z_p(x) &= \mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-2x}\,. \end{aligned}$$

Příklad 9.5.2. Máme najít obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y' + y - z &= -\cos x\ , \\ z' + 2y - z &= -\sin x\ . \end{aligned}$$

Řešení: Tentokrát jde o nehomogenní soustavu s pravými stranami tvořenými goniometrickými funkcemi. Pro eliminaci je nejvýhodnější vyjádřit z první rovnice funkci $z(x)$:

$$z = y' + y + \cos x\,, \qquad z' = y'' + y' - \sin x\ .$$

Dosazením do druhé rovnice získáme po úpravě diferenciální rovnici druhého řádu s pravou stranou

$$y'' + y = \cos x\ .$$

Charakteristická rovnice $r^2+1=0$ má kořeny $r_{1,2}=\pm\mathrm{i}$, kterým odpovídá obecné řešení zkrácené rovnice $y''+y=0$ ve tvaru lineární kombinace goniometrických funkcí

$$\hat{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

(protože $\alpha=0$, $\beta=1$ – viz kap. 9.2). Úplnou rovnici můžeme řešit metodou neurčitých koeficientů, neboť na pravé straně je funkce $\cos x$. Pro ni ale vychází $\lambda=0=\alpha$, $\omega=1=\beta$, a proto musíme v souladu s teorií v kapitole 9.4 zvolit partikulární řešení ve tvaru

$$v(x) = x(A\cos x + B\sin x)\ .$$

Protože její druhá derivace je (ověřte samostatně výpočtem)

$$v''(x) = -2A\sin x + 2B\cos x - x(A\cos x + B\sin x)\ ,$$

dostáváme po dosazení do úplné rovnice

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x\ .$$

Zde porovnáme koeficienty u jednotlivých goniometrických funkcí:

$$\begin{array}{lrcl} \cos x\ : & 2B & = & 1\ , \\ \sin x\ : & -2A & = & 0\ , \end{array}$$

takže $A=0$, $B=\frac{1}{2}$, $v(x)=\frac{1}{2}x\sin x$ a můžeme napsat výsledný tvar funkce $y(x)$:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x\ .$$

Výpočet funkce $z(x)$ ze vztahu $z = y' + y + \cos x$ je už pouze technický problém, který vede k výsledku

$$z = (C_2 + C_1)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x + \frac{1}{2}(x+1)\sin x + \frac{1}{2}(2x+1)\cos x\ .$$

Závěrem je vhodné si povšimnout, že podobně jako byly v zadání funkce $y(x)$ a $z(x)$ spolu vázány v rovnicích, jsou jejich výsledené tvary propojeny prostřednictvím konstant.

Kontrolní otázky

Otázka 1. *Popište rozdíl mezi homogenní a nehomogenní soustavou lineárních diferenciálních rovnic.*

Otázka 2. *Jaký je účel použití eliminační metody při řešení soustav rovnic?*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Řešte homogenní soustavy:

a) $$\begin{aligned} y' &= 2y + z, \\ z' &= 3y + 4z \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} y' + z' &= 4y - 2z, \\ y' - z' &= -2y - 4z \end{aligned}$$

2. Řešte nehomogenní soustavy:

a) $$\begin{aligned} y' + 2z' - y + 6z &= -\mathrm{e}^{2t}, \\ z' + y - z &= \mathrm{e}^{2t} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2y' + z' - 3z - y &= 2x - 1, \\ y' - z' + 4y &= x + 1 \end{aligned}$$

3. Najděte řešení soustav při zadaných počátečních podmínkách:

a) $$\begin{aligned} y' + z' &= y + 5z, \\ z' &= -y + 4z \end{aligned} \qquad y(0) = 1\,, z(0) = 2$$

b) $$\begin{aligned} y' - z &= \mathrm{tg}^2 x + 1, \\ z' + y &= \mathrm{tg}\, x \end{aligned} \qquad y(0) = 2\,, z(0) = -2$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{5x}\,, \quad z = -C_1\mathrm{e}^{x} + 3C_2\mathrm{e}^{5x}$

b) $y = C_1\mathrm{e}^{x}\cos 3x + C_2\mathrm{e}^{x}\sin 3x\,, \quad z = C_1\mathrm{e}^{x}\sin 3x - C_2\mathrm{e}^{x}\cos 3x$

2. a) $y = -4C_1\mathrm{e}^{5x} + 2C_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{11}{9}\mathrm{e}^{2x}\,, \quad z = C_1\mathrm{e}^{5x} + C_2\mathrm{e}^{-x} - \frac{2}{9}\mathrm{e}^{2x}$

b) $y = C_1\mathrm{e}^{x}\cos 3x + C_2\mathrm{e}^{x}\sin 3x\,, \quad z = C_1\mathrm{e}^{x}\sin 3x - C_2\mathrm{e}^{x}\cos 3x$

3. a) $y = (x+1)\mathrm{e}^{3x}\,, \quad z = (x+2)\mathrm{e}^{3x}$

b) $y = -4\sin x + \operatorname{tg} x\,, \quad z = -4\cos x + 2$

9.6. Shrnutí ke kapitole 9

Σ

Shrnutí lekce

Postup při řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty sestává ze dvou kroků:

1. vyřešíme zkrácenou rovnici prostřednictvím kořenů charakteristické rovnice

$\longrightarrow$ $\hat{y}(x)$ (kap. 9.2);

2. najdeme partikulární integrál $v(x)$ úplné rovnice

$\longrightarrow$ $y(x) = \hat{y} + v(x)$.

Tvar partikulárního integrálu $v(x)$ závisí současně

♣ na kořenech charakteristické rovnice,

♣ na podobě pravé strany $b(x)$:

- $b(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\left(p_m(x)\cos\omega x + q_n(x)\sin\omega x\right)$,
  kde $p_m(x)$, $q_n(x)$ jsou mnohočleny $\longrightarrow$ řešíme metodou neurčitých koeficientů (kap. 9.4),
- $b(x)$ má jiný tvar (obsahuje například zlomky, odmocniny nebo jiné než výše uvedené funkce) $\longrightarrow$ řešíme metodou variace konstant (kap. 9.3).

Soustavy dvou LDR prvního řádu převádíme eliminační metodou na řešení jediné rovnice druhého řádu - kap. 9.5.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte obecná řešení rovnic:

$$\begin{array}{lrcl} \text{a)} & y'' + y' - 2y & = & 0\,, \\ \text{b)} & y'' + 6y' + 13y & = & 0\,, \\ \text{c)} & 4y'' - 20y' + 25y & = & 0\,. \end{array}$$

2. Najděte řešení počátečních úloh:

$$\begin{array}{lrclll} \text{a)} & y'' - 4y' + 3y & = & 0\,, & y(0) = 6, & y'(0) = 10\,, \\ \text{b)} & y'' + 4y' + 29y & = & 0\,, & y(0) = 0, & y'(0) = 15\,, \\ \text{c)} & 4y'' + 4y' + y & = & 0\,, & y(0) = 2, & y'(0) = 0\,. \end{array}$$

3. Najděte obecná řešení rovnic:

$$\begin{array}{lrcl} \text{a)} & 2y'' + y' - y & = & 2\mathrm{e}^x\,, \\ \text{b)} & y'' + 2y' + 5y & = & -\frac{17}{2}\cos 2x\,, \\ \text{c)} & y'' + y & = & -\mathrm{cotg}^2\, x\,, \\ \text{d)} & y'' - 6y' + 9y & = & 2x^2 - x + 3\,. \end{array}$$

4. Najděte řešení počátečních úloh:

$$\begin{array}{lrclll} \text{a)} & y'' - y & = & 2(1-x)\,, & y(0) = 1, & y'(0) = 1\,, \\ \text{b)} & y'' + y & = & -\sin 2x\,, & y(\pi) = 1, & y'(\pi) = 1\,, \\ \text{c)} & y'' + 4y & = & \sin^2 x\,, & y(0) = 0, & y'(0) = 0\,. \end{array}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-2x}$, b) $y = \mathrm{e}^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$,
c) $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}$.

2. a) $y = 4\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{3x}$, b) $y = 3\mathrm{e}^{-2x}\sin 5x$, c) $y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+2)$.

3. a) $y = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^x$,

b) $y = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{2} \cos 2x - 2 \sin 2x$,

c) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2 + \cos x \, \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$,

d) $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$.

4. a) $y = \mathrm{e}^x + x^2$,

b) $y = \frac{1}{3} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin x - \cos x$,

c) $y = \frac{1}{8}(1 - x \sin 2x - \cos^3 2x)$.

Kontrolní test

Úloha 1. Funkce $y(x)$ je řešením počáteční úlohy

$$y'' = 2, \quad y(-2) = 0, \quad y'(-2) = -1 \ .$$

Její funkční hodnota v bodě $x = -1$ je

a) 1 , b) -1 , c) 0 , d) 2 .

Úloha 2. Rozhodněte, která z funkcí a) – d) je obecným řešením rovnice

$$y'' + y = \cos^2 x \ .$$

(Pozn.: po vhodné úpravě lze řešit i jako rovnici se speciální pravou stranou.)

a) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}(\sin 2x - 11 \cos 2x)$,

b) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}(1 + \sin^2 x)$,

c) $y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{3}(1 + \sin^2 x)$,

d) $y = \mathrm{e}^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{3}(\sin 2x - 11 \cos 2x)$.

Úloha 3. Rozhodněte, která z funkcí a) – d) je řešením počáteční úlohy

$$y'' - y = -\frac{16}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^3} \ , \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0 \ .$$

a) $y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + \frac{2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$,

b) $y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + 2x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$,

c) $y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$,

d) $y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

Úloha 4. Rozhodněte, která z funkcí a) – d) je řešením počáteční úlohy

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \ , \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \ .$$

a) $y = (1 - x)\cos x - \sin x \, \ln \cos x$,

b) $y = (1 - x)\cos x + \sin x \, \ln \cos x$,

c) $y = (1 + x)\cos x + \cos x \, \ln \cos x$,

d) $y = (1 + x)\cos x - \cos x \, \ln \cos x$.

Úloha 5. Jsou dány rovnice I – IV se speciální pravou stranou a partikulární integrály $v_1(x)$ až $v_4(x)$:

$$
\begin{array}{llcllcl}
\text{I.} & y'' - y' - 2y & = & x\mathrm{e}^{-x} \, , & v_1(x) & = & (Ax + B)\mathrm{e}^{-x} \, , \\
\text{II.} & y'' + y' - 2y & = & \mathrm{e}^{-x} \, , & v_2(x) & = & (Ax^2 + Bx)\mathrm{e}^{-x} \, , \\
\text{III.} & y'' + y' - 2y & = & x\mathrm{e}^{-x} \, , & v_3(x) & = & A\mathrm{e}^{-x} \, , \\
\text{IV.} & y'' - y' - 2y & = & \mathrm{e}^{-x} \, , & v_4(x) & = & Ax\mathrm{e}^{-x} \, .
\end{array}
$$

Které dvojice k sobě náleží při řešení rovnic metodou neurčitých koeficientů?

a) $I - v_1$, $II - v_3$, $III - v_2$, $IV - v_4$,

b) $I - v_2$, $II - v_4$, $III - v_2$, $IV - v_1$,

c) $I - v_2$, $II - v_3$, $III - v_1$, $IV - v_4$,

d) $I - v_4$, $II - v_3$, $III - v_1$, $IV - v_2$.

Úloha 6. Určete, který z uvedených výsledků je obecným řešením diferenciální rovnice $4y'' + 4y' + 17y = 289x^2 + 19$:

a) $y = \mathrm{e}^{2x}(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}) - 17x^2 + 8x + 5$,

b) $y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 17x^2 - 8x - 5$,

c) $y = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}) - 17x^2 + 8x + 5$,

d) $y = C_1\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + 17x^2 - 8x - 5$.

Úloha 7. Určete, který z uvedených výsledků je řešením počáteční úlohy

$$y'' - 4y' + 3y = 72 \sin 3x \, , \quad y(0) = 5 \, , \quad y'(0) = 3 \, .$$

a) $y = 5e^x - 3e^{3x} + 3\cos 3x - 5\sin 3x$,

b) $y = -3e^x + 5e^{3x} + 3\cos 3x + 5\sin 3x$,

c) $y = 5e^x + 3e^{3x} - 3\cos 3x - 5\sin 3x$,

d) $y = 3e^x + 5e^{3x} - 3\cos 3x - 5\sin 3x$.

Úloha 8. Funkce $y(t)$ je řešením počáteční úlohy

$$y'' + 6y' + 9y = 18e^{-3t}, \quad y(0) = -3 \ , \quad y'(0) = 12.$$

V bodě $t = \frac{1}{3}$ nabývá hodnoty

a) $\frac{1}{e}$, b) $\frac{e}{3}$, c) $-\frac{3}{e}$, d) $-\frac{1}{e}$,

Úloha 9. Funkce $y(t)$ je řešením počáteční úlohy

$$16y'' + 9y = 11\cos 2x, \quad y(2\pi) = 0 \ , \quad y'(2\pi) = 0.$$

V bodě $x = \frac{2\pi}{3}$ nabývá hodnoty

a) $-0,1$, b) 0, c) $0,01$, d) $-0,01$.

Úloha 10. Funkce $y(t)$ a $z(t)$ spolu splňují soustavu

$$\begin{aligned} y' - z' + 2y &= -t - 2 \ , \\ z' - 3y' + z &= 3 \ . \end{aligned}$$

a počáteční podmínky $y(0) = -1$, $z(0) = 2$. Vypočteme-li obě funkce a vyjádříme výraz $z(t) - 2y(t)$, obdržíme jeden z následujících výsledků:

a) $t + 3$, b) $-t - 3$, c) t , d) 3 .

Výsledky testu

Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Správná odpověď	c)	b)	d)	a)	c)	b)	d)	d)	a)	a)

9.7. Vybrané aplikace

Cíle

V rámci témat zaměřených na lineární diferenciální rovnice a soustavy druhého řádu (kapitoly 9.1 až 9.6) jsme dosud neuváděli žádné aplikace. Je jim společně věnována tato závěrečné kapitola, v níž jsou řešeny zejména počáteční úlohy pro evoluční procesy – pohybové rovnice, harmonické kmity, elektrické obvody apod.

Poznámka

Z výše uvedených důvodů je v následujících úlohách nezávisle proměnnou veličinou čas t, ketrý hraje roli dosud používané proměnné x.

Výklad

Ze široké nabídky aplikací, v nichž se v různých oblastech uplatňují diferenciální rovnice druhého řádu nebo soustavy diferenciálních rovnic, je v rámci řešených úloh vybráno do této kapitoly několik typických ukázek zastupujících nejrozšířenější okruhy jejich použití. Při jejich studiu je užitečné si zároveň uvědomit, že v praxi je stejně důležitá znalost postupu řešení jako dovednost sestavit úlohu a matematicky formulovat zadaný problém.

Položíme-li si otázku, proč se při teoretickém popisu procesů a stavů v (nejen) technických a přírodovědných disciplinách setkáváme právě s diferenciálními rovnicemi, je odpověď překvapivě jednoduchá:

diferenciální rovnice jsou přepisem globálních zákonů zachování (energie, hmotnosti, síly, elektrického náboje aj.) **do podoby, v níž je možno studovat stavové, resp. tokové veličiny v daném místě nebo čase včetně jejich lokálních změn**.

Řešené úlohy

Příklad 9.7.1. Vozidlo o hmotnosti m se pohybuje po přímce působením konstatní síly F, která má směr pohybu. Vozidlo překonává odpor R úměrný okamžité rychlosti $v(t)$. Formulujte a řešte pohybovou rovnici pro závislost dráhy $y(t)$ na čase při počátečních podmínkách $y(0) = 0$, $v(0) = 0$.

Řešení: Nejprve si připomeneme potřebné fyzikální vztahy. Rychlost v a zrychlení a jsou derivacemi dráhy podle času, tj.

$$v(t) = \frac{dy}{dt}\,, \qquad a(t) = \frac{d^2y}{dt^2}\,.$$

Konstantu úměrnosti zahrnující odpor prostředí a případné tření označíme k, takže bude $R = k.v(t)$. Zákonem zachování síly vyjádříme za použití druhého Newtonova zákona $F = ma$ základní bilanční vztah

$$ma + R = F \quad \Longrightarrow \quad m\,\frac{d^2y}{dt^2} + k\,\frac{dy}{dt} = F\ ,$$

který po vydělení hmotností m dává základní pohybovou rovnici

$$y'' + \frac{k}{m}\,y' = \frac{F}{m}\ .$$

Máme před sebou diferenciální rovnici druhého řádu s konstatními koeficienty a s nenulovou pravou stranou, při jejímž řešení uplatníme znalosti z kapitol 9.3. a 9.4. Charakteristická rovnice $r^2 + \frac{k}{m}r = 0$ má kořeny $r_1 = 0,\ r_2 = -\frac{k}{m}$, takže obecné řešení zkrácené rovnice bude mít tvar

$$\hat{y}(t) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\ .$$

Partikulární řešení pro úplnou rovnici můžeme hledat metodou neurčitých koeficientů. Protože je však konstatní pravá strana již zastoupena konstantou ve fundamentálním systému (jeden z kořenů charakteristické rovnice je nula), musíme zvolit

$$v(t) = A.t\,, \quad v'(t) = A\,, \quad v'' = 0\,.$$

Po dosazení funkce $v(t)$ a jejích derivací do úplné rovnice snadno vypočteme, že $A = \frac{F}{k}$. Pro obecné řešení a jeho derivaci (rychlost pohybu) tedy vychází

$$y(t) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k}\,t\,, \qquad y'(t) = v(t) = -\frac{k}{m}\,C_2 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k}\,.$$

Počáteční podmínky v bodě $t = 0$ vedou na soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2\,, \\ 0 &= -\tfrac{k}{m}\,C_2 + \tfrac{F}{k}\,, \end{aligned} \qquad \text{odkud} \qquad C_1 = -\frac{Fm}{k^2}\,, \quad C_1 = \frac{Fm}{k^2}\,.$$

Dosazením do obecného řešení a úpravou obdržíme hledanou závislost dráhy na čase:

$$y(t) = \frac{F}{k}\left[t + \frac{m}{k}\left(\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)\right]\,.$$

Příklad 9.7.2. Na pružině je zavěšeno závaží o hmotnosti m, které je v rovnovážné poloze. Vychýlíme-li je o y_0 a uvolníme (případně mu udělíme určitou počáteční rychlost), dochází v důsledku pružné deformace ke kmitavému pohybu (obr. 9.7.1). Odvoďte příslušnou diferenciální rovnici pro okamžitou výchylku $y(t)$ za předpokladu, že odpor prostředí je přímo úměrný rychlosti pohybu. Proveďte analýzu řešení.

Řešení: Označíme $2b$ faktor vyjadřující odpor okolí, takže odporující síla má velikost $R = 2b.y'(t)$. Rovnováha sil bude vyjádřena rovnicí

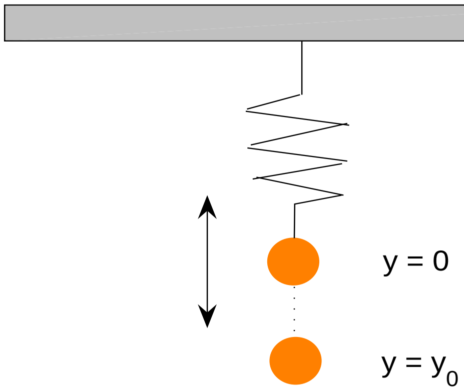
$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} + 2b\,\frac{dy}{dt} + k\,y(t) = 0\,,$$

kde k je tuhost pružiny. Dále označíme

$$a = \frac{b}{m} > 0\,, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

a po vydělení hmotností m obdržíme základní **rovnici vlastních mechanických kmitů v odporujícím prostředí**:

$$y'' + 2ay' + \omega_0^2 y = 0\,.$$



.

Obr. 9.7.1. Obrázek k příkladu 9.7.2.

K ní příslušná charakteristická rovnice $r^2 + 2ar + \omega_0^2 = 0$ má kořeny

$$r_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - \omega_0^2}\ .$$

Je zřejmé, že lze rozlišit tři možnosti, které mají zásadní vliv na charakter děje.

(I) $\underline{a^2 - \omega_0^2 > 0, \text{ tj. } a > \omega_0}$

Charakteristická rovnice má dva různé záporné reálné kořeny

$$r_1 = -a + \sqrt{a^2 - \omega_0^2}\ , \qquad r_2 = -a - \sqrt{a^2 - \omega_0^2}\ ,$$

obecným řešením rovnice je exponenciální funkce

$$y(t) = C_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 t} = \mathrm{e}^{-at}\left(C_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{a^2-\omega_0^2}t} + C_2 \mathrm{e}^{\sqrt{a^2-\omega_0^2}t}\right)\ .$$

Děj je neperiodický, s rostoucím časem klesá výchylka k nule. Jedná se o **silně tlumený neharmonický pohyb**.

(II) $\underline{a^2 - \omega_0^2 = 0, \text{ tj. } a = \omega_0}$

Charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný kořen $r = -a$, obecným řešením je opět výraz s exponenciální funkcí

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-at}\ .$$

Jde o tzv. **kriticky tlumený pohyb**, který je neperiodický stejně jako předchozí silně tlumený pohyb.

(III) $a^2 - \omega_0^2 < 0$, tj. $a < \omega_0$

Z charakteristické rovnice vychází dvojice komplexně sdružených kořenů

$$r_{1,2} = -a \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - a^2} = -a \pm \mathrm{i}\omega \ , \quad \text{kde} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - a^2} \ .$$

Jak víme z dřívější teorie, lze obecné řešení v tomto případě psát ve tvaru

$$y(t) = \mathrm{e}^{-at}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \ .$$

V tomto výsledku ještě provedeme menší úpravy, abychom ho mohli lépe fyzikálně interpretovat. Položíme-li $C_1 = -A \sin \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$, bude pro výraz v závorce platit

$$-A \sin \varphi \cos \omega t + A \cos \varphi \sin \omega t = A \sin(\omega t - \varphi) \ .$$

Obecným řešením je nyní funkce

$$y(t) = A\mathrm{e}^{-at} \sin(\omega t - \varphi) \ ,$$

v níž A je amplituda a φ fáze děje, který nazýváme **slabě tlumený harmonický pohyb**. Jeho perioda je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - a^2}}$$

a má amplitudu $A\mathrm{e}^{-at}$, která s časem klesá k nule.

Poznámka

1. Snadno lze potlačit vliv odporu prostředí tak, že v základní rovnici položíme $a = 0$. *Příslušné důsledky pro řešení si odvoďte samostatně.*

2. Zatímco v případě reálných kořenů – varianta (I) a (II) – se při aplikaci počátečních podmínek neodchylujeme od dříve zavedeného postupu, v případě periodického děje se amplituda a fáze určují způsobem, který je poněkud specifický, a proto mu věnujeme následující řešený příklad.

Příklad 9.7.3. Vyšetřete harmonický pohyb popsaný rovnicí $y''+2y'+101y=0$ s počátečními podmínkami $y(0)=1,\ y'(0)=9$.

Řešení: V rovnici je $a=1$ menší než úhlová frekvence $\omega_0=101$, proto se jedná tlumený periodický pohyb o frekvenci

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-a^2}=10\ ,$$

který je popsán funkcí

$$y(t)=A\mathrm{e}^{-t}\sin(10t-\varphi)\ .$$

Přistoupíme nyní k výpočtu amplitudy a fáze z počátečních podmínek. Protože

$$y'(t)=-A\mathrm{e}^{-t}\sin(10t-\varphi)+10A\mathrm{e}^{-t}\cos(10t-\varphi)\ ,$$

obdržíme pro $t=0$ soustavu

$$\begin{aligned}1&=-A\sin\varphi\ ,\\ 9&=A\sin\varphi+10A\cos\varphi\ .\end{aligned}$$

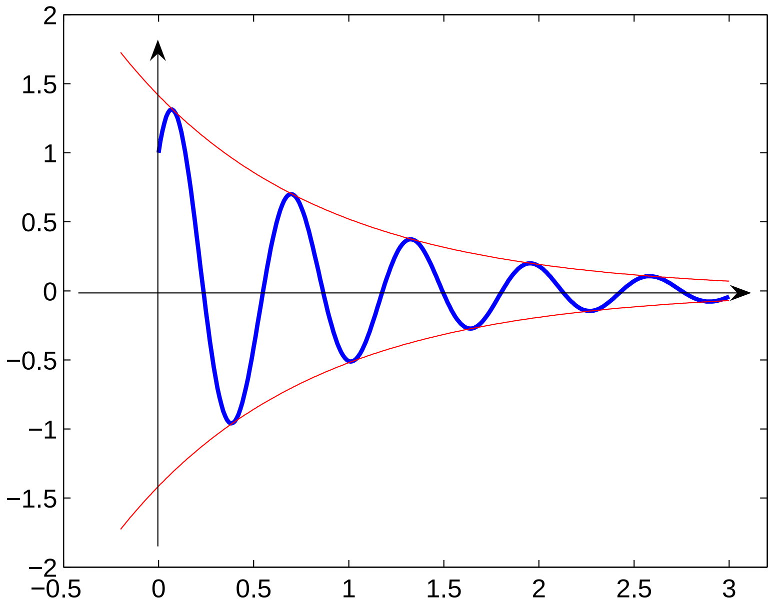
Dosadíme-li z první rovnice do druhé (nebo: sečteme-li obě rovnice), vychází jednodušší rovnice $1=A\cos\varphi$, kterou použijeme spolu s první rovnicí:

$$\begin{aligned}1&=-A\sin\varphi\ ,\\ 1&=A\cos\varphi\ .\end{aligned}$$

Jestliže obě rovnice umocníme na druhou a sečteme, máme $2=A^2 \quad\Rightarrow A=\sqrt{2}$; vydělíme-li první rovnici druhou, bude $1=-\mathrm{tg}\,\varphi \quad\Rightarrow \varphi=-\frac{\pi}{4}$. Výsledný tlumený harmonický pohyb je tedy určen předpisem

$$y(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\sin(10t+\frac{\pi}{4})\ .$$

Část grafu této funkce je na obr. 9.7.2.



Obr. 9.7.2. Harmonické tlumené kmity - k příkladu 9.7.3. Červeně jsou znázorněny funkce $\pm\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}$ charakterizující úbytek amplitudy.

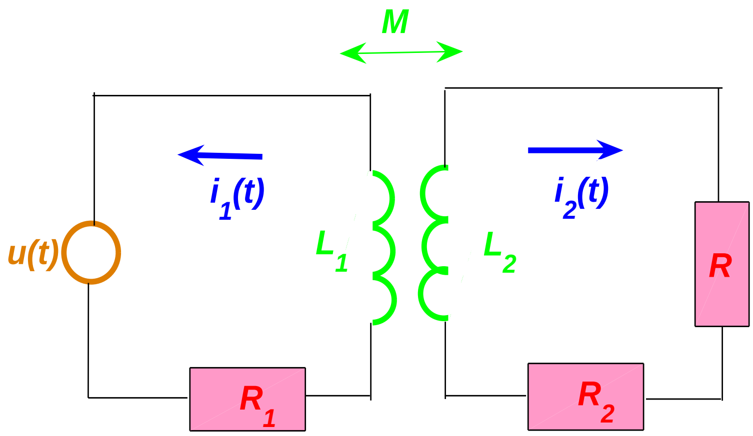
Příklad 9.7.4. Proveďte analýzu proudových poměrů v primárním a sekundárním obvodu transformátoru (obr. 9.7.3) za těchto předpokladů:
– primární vinutí je napájeno napětím $u(t)$, ohmická zátěž sekundárního vinutí je R,
– indukčnosti a odpory primárního a sekundárního obvodu jsou po řadě $L_1,\ R_1,\ L_2,\ R_2$,
– vzájemná indukčnost je M,
– počáteční proudy jsou nulové.

Řešení: Pro proudy $i_1(t)$ a $i_2(t)$ na základě Kirchhoffových zákonů platí:

$$L_1\frac{di_1(t)}{dt}+M\frac{di_2(t)}{dt}+R_1 i_1(t) \;=\; u(t)\ ,$$

$$M\frac{di_1(t)}{dt}+L_2\frac{di_2(t)}{dt}+(R_2+R)i_2(t) \;=\; 0\ .$$

Jedná se o soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu pro proudy $i_1(t)$, $i_2(t)$ s počátečními podmínkami $i_1(0)=0$, $i_2(0)=0$. Jako sa-



.

Obr. 9.7.3. Primární a sekundární obvod transformátoru.

mostatné cvičení si můžete provést převod této úlohy eliminační metodou na diferenciální rovnici druhého řádu například pro funkci $i_1(t)$ s tímto výsledkem:

$$(L_1L_2 - M^2)\, i_1'' + [L_1(R + R_2) + L_2R_1]\, i_1' + R_1(R + R_2)\, i_1 = (R + R_2)\, u + L_2\, u' \; .$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Těleso o hmotnosti m se pohybuje po přímce z bodu A do bodu B působením konstatní síly F, která má směr pohybu. Odpor prostředí je přímo úměrný vzdálenosti tělesa od bodu B, přičemž v bodě A je jeho hodnota f. Odvoďte a řešte jeho pohybovou rovnici za předpokladů, že $f < F$ a že rychlost v bodě A je nulová.

2. Sestavte jednoduchý model uzavřeného systému „kořist – dravec" z hlediska časového vývoje počtu jedinců v obou populacích. U funkcí představujících počty zástupců v populacích předpokládejte spojitost v čase. Uvažujte následující faktory, na nichž proces závisí lineárně s konstantními koeficienty:
– reprodukční schopnost každé z populací,
– úbytek kořisti působením dravců,
– přírůstek populace dravců jako důsledek dostatku potravy.

3. Napište diferenciální rovnici pro tlumené nucené kmity s vlastní frekvencí

ω_0 a tlumícím faktorem $2a$. Nutící síla vztažená na jednotku hmotnosti má amplitudu F, úhlovou frekvenci Ω a nulový fázový posuv. Úlohu řešte pro hodnoty $a = 0,05$, $\omega_0^2 = 1,0025$, $F = 30$ a $\Omega = 3$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. Označíme-li $y(t)$ dráhu jako funkci času a s vzdálenost bodů A, B, je odporová síla vyjádřena vztahem $R = k(s - y)$, kde k je konstanta úměrnosti. V bodě A, kde je $y = 0$, platí podle předpokladu $R = f = k.s$, tj. $k = f/s$. Při rovnováze sil je $my'' = F - R$, tedy po úpravě

$$y'' - \frac{f}{sm} y = \frac{F - f}{m} ,$$

což je hledaná pohybová rovnice. Její řešení má tvar

$$y(t) = \frac{s}{2f}(F - f)\left(\mathrm{e}^{bt} - \mathrm{e}^{-bt}\right)^2 , \qquad \text{kde} \qquad b = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{f}{sm}} .$$

2. Označíme $x(t)$ počet jedinců v populaci kořisti, tj. potravy pro populaci dravců, v níž počet jedinců bude $y(t)$. V lineárním modelu zavedeme nezáporné konstanty a, b, c, d, s jejichž pomocí vyjádříme zadané změny v populacích:

ax, cy ... reprodukční schopnost příslušné populace,

by ... úbytek kořisti působením dravců,

dx ... přírůstek populace dravců jako důsledek dostatku potravy.

Chování systému v závislosti na čase vyjadřuje soustava diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{dt} = ax - by , \qquad \frac{dy}{dt} = dx + cy .$$

Počátečními podmínkami jsou výchozí stavy populací.

3. Nutící síla bude tvořit pravou stranu diferenciální rovnice kmitů, která tak bude mít tvar

$$y'' + 2ay' + \omega_0^2 y = F \sin \Omega t , \qquad \text{tj.} \qquad y'' + 0,1y' + 1,0025y = 30 \sin 3t .$$

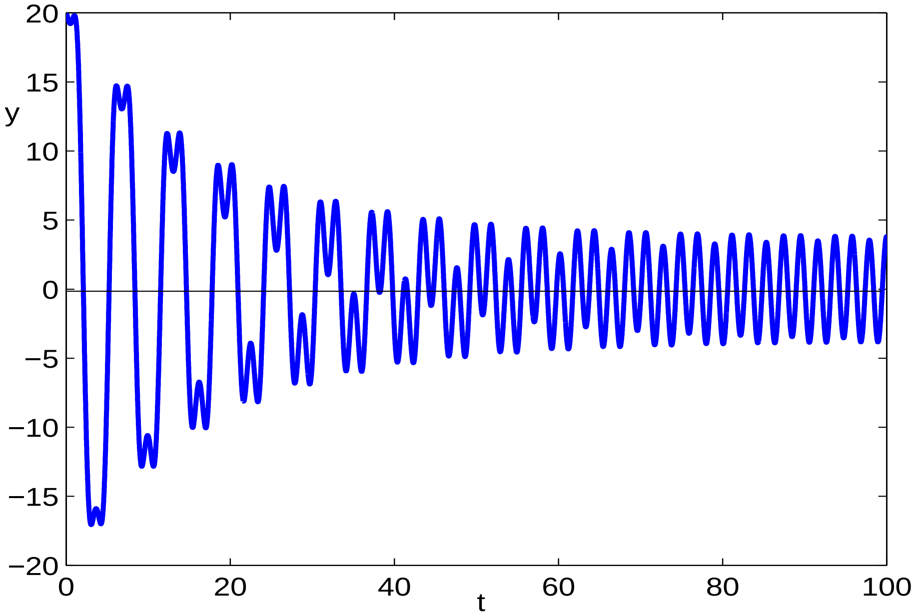
Její obecné řešení budeme hledat ve tvaru

$$y(t) = A\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t - \varphi) + v(t) \ ,$$

kde $v(t) = B\sin(\Omega t - \psi)$ je partikulární integrál. Jeho parametry B, ψ určíme metodou neurčitých koeficientů. Dále je $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - a^2}$ a konstanty A a φ stanovíme z počátečních podmínek. Konečný výsledek představuje funkce

$$y(t) = 23,57\mathrm{e}^{-0,05t}\sin(t + 1,02) + 3,75\sin(3t - 3,10) \ .$$

Na jejím grafu (obr. 9.7.4) je dobře patrný přechod od vlastních kmitů ke stadiu, v němž systém kmitá zcela pod vlivem nutící síly.



Obr. 9.7.4. Přechod od vlastních kmitů k nuceným – k úloze 3.

Poznámka

Ve speciálním případě může nastat případ $\omega = \Omega$, rovná-li se frekvence vlastních kmitů frekvenci nutící síly. Z fyzikálního hlediska dochází k tzv. rezonanci, matematické řešení se najde na principu varianty (III) na str. 397 (kap. 9.4). Obecné odvození pro tuto situaci lze nalézt například v publikaci [18].

LITERATURA

[1] BOUCHALA, J.: *Matematická analýza 1.* Učební texty VŠB – TUO, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-519-5.

[2] BRABEC, J., HRŮZA, B.: *Matematická analýza II.* SNTL, Praha, 1986.

[3] BURDA, P., KREML, P.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Učební texty VŠB – TUO, Ostrava, 2004, ISBN 80-248-0634-7.

[4] DOBROVSKÁ, V., VRBICKÝ, J.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných, Matematika IIb.* Učební texty VŠB – TUO, Ostrava, 2004, ISBN 80-248-0656-8.

[5] DOŠLÁ, Z., PLCH, R., SOJKA, P.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Masarykova univerzita, Brno, 1999, ISBN 80-210-2203-5. http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/index_cd.html

[6] ELIÁŠ, J., HOTVÁTH, J., KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky. 2. časť.* Alfa Bratislava, 1972.

[7] HARSHBARGER, J., REYNOLDS, J.: *Calculus with Applications.* D. C. Heath and Company, Toronto, 1990.

[8] JAMES, G.: *Modern Engineering Mathematics.* Addison – Wesley Publishing Company, Wokingham, 1994, ISBN 0-201-18504-5.

[9] JARNÍK, V.: *Integtální počet I.* Academia, Praha, 1974.

[10] KUFNER, A.: *Obyčejné diferenciální rovnice.* ZČU, Plzeň, 1993.

[11] MEYBERG, K., VACHENAUER, P.: *Höhere Mathematik 1.* Springer – Verlag, Berlin, 1999, ISBN 3-540-66148-4.

[12] PAVELKA, L., PINKA, P.: *Integrální počet funkcí jedné proměnné (Matematika IIIa).* Učební texty VŠB – TU Ostrava, 1999, ISBN 80-7078-654-X.

[13] PÍŠOVÁ, D., GARDAVSKÁ, E.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Učební texty VŠB – TUO, Ostrava, 1986.

[14] REKTORYS, K. A KOL.: *Přehled užité matematiky I, II.* Prometheus, Praha, 1995.

[15] REKTORYS, K.: *Co je a k čemu je vyšší matematika.* Academia, Praha 2001, ISBN 80-200-0883-7.

[16] ŠKRÁŠEK, J., TICHÝ, Z.: *Základy aplikované matematiky I.* SNTL, Praha, 1986.

[17] ŠKRÁŠEK, J., TICHÝ, Z.: *Základy aplikované matematiky II.* SNTL, Praha, 1986.

[18] VLČEK, J., VRBICKÝ, J.: *Diferenciální rovnice. Matematika IV.* VŠB-TU, Ostrava, 1997.

[19] VRBENSKÁ, H., BĚLOHLÁVKOVÁ, J.: *Základy matematiky pro bakaláře II*. Učební texty VŠB – TUO, Ostrava, 2004, ISBN 80-248-0406-9.

MATEMATIKA II

Autoři

doc. RNDr. Pavel Kreml, CSc. pavel.kreml@vsb.cz

doc. RNDr. Jaroslav Vlček, CSc. jaroslav.vlcek@vsb.cz

RNDr. Petr Volný, Ph.D. petr.volny@vsb.cz

Mgr. Jiří Krček jiri.krcek@vsb.cz

RNDr. Jiří Poláček, CSc. jiri.polacek@vsb.cz

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie VŠB-TU Ostrava.

http://mdg.vsb.cz/

Autoři jednotlivých částí

ČÁST I – INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Text, obrázky:	Pavel Kreml
Úlohy k samostatnému řešení:	Jiří Krček
Kontrolní testy:	Jiří Poláček

ČÁST II – FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Text, obrázky:	Petr Volný
Úlohy k samostatnému řešení:	Petr Volný
Kontrolní testy:	Petr Volný

ČÁST III – DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Text, obrázky:	Jaroslav Vlček
Úlohy k samostatnému řešení:	Jaroslav Vlček
Kontrolní testy:	Jaroslav Vlček