4.3. Graf funkce

Výklad

Chceme-li určit graf funkce, můžeme využít předchozích znalostí a určit vlastnosti funkce, které shrneme do níže uvedených 10 bodů. Může se stát, že funkce některou z vlastností nebude mít nebo ji nedovedeme určit. Postup řešení podle zmíněných bodů budeme nazývat **určení průběhu funkce.**

1. Určíme definiční obor funkce, její nulové body a intervaly, v nichž je funkce kladná nebo záporná.

2. Zjistíme, zda je funkce sudá, lichá nebo periodická. (Pro funkce sudé a liché můžeme její průběh vyšetřovat jen pro $x \in < 0, \infty)$, pro funkce periodické v jednom pásu daném periodou).

3. Určíme intervaly spojitosti a v krajních bodech vyšetříme jednostranné limity. (Výsledky využijeme v bodě 9 při určování asymptot bez směrnice).

4. Vypočítáme y', určíme $D_{y'}$, nulové body y' a intervaly, v nichž je y' kladná nebo záporná.

5. Určíme intervaly, v nichž je funkce rostoucí nebo klesající.

6. Stanovíme lokální extrémy funkce.

7. Vypočítáme y'', určíme $D_{y''}$, nulové body y'' a intervaly, v nichž je y'' kladná nebo záporná.

8. Určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti a najdeme inflexní body funkce.

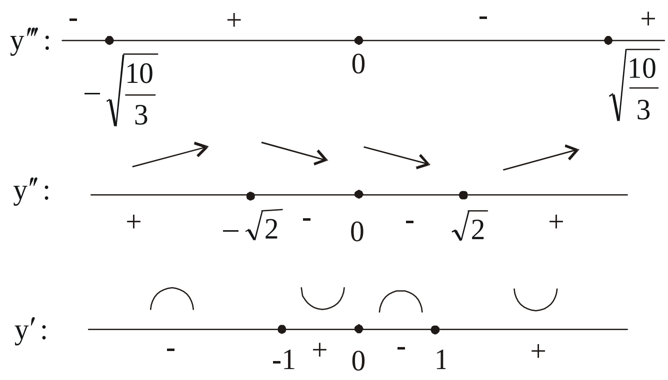
9. Určíme asymptoty funkce.

10. V extrémech a inflexních bodech funkce určíme funkční hodnoty a tečny. Zakreslíme do grafu konečné limity v bodech nespojitosti, asymptoty a nulové body funkce. Nakreslíme celý graf funkce.

Řešené úlohy

Příklad Vyšetřete průběh funkce $y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^3$ a načrtněte její graf.

Řešení: 1. Daná funkce je polynom a tedy $D_y = \boldsymbol{R}$. Položíme $\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^3 = 0$ a odtud $\frac{1}{2}x^3\left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{3}\right) = 0$. Nulové body jsou $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{\frac{10}{3}}$, $x_3 = \sqrt{\frac{10}{3}}$. Platí $y(-3) < 0$, $y(-1) > 0$, $y(1) < 0$ a $y(3) > 0$, viz obr. 60.



Obr. 60

2. Platí $f(-x) = \frac{1}{20}(-x)^5 - \frac{1}{6}(-x)^3 = -\left(\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^3\right) = -f(x)$ pro všechna $x \in \boldsymbol{R}$, to znamená, že daná funkce je lichá. Její graf bude souměrný podle počátku soustavy souřadnic. Mohli bychom tedy vyšetřovat průběh funkce pouze pro $x \geq 0$.

Dále je $f(x+p) = \frac{1}{20}(x+p)^5 - \frac{1}{6}(x+p)^3 \neq \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^3 = f(x)$ pro všechna $x \in \boldsymbol{R}$ a $p \neq 0$.

Funkce není periodická.

3. Funkce nemá body nespojitosti.

4. $y' = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$, $Dy' = \boldsymbol{R}$. Položíme $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = 0$ a dostaneme $\frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) = 0.$

Nulové body funkce y' jsou $x_1 = 0$, $x_4 = -\sqrt{2}$, $x_5 = \sqrt{2}$. Platí

$y'(-2) > 0$, $y'(-1) < 0$, $y'(1) < 0$ a $y'(2) > 0$. Znaménka zapíšeme do obr. 60.

5. Funkce je rostoucí pro $x \in (-\infty, -\sqrt{2})$ a pro $x \in (\sqrt{2}, \infty)$. Funkce je klesající pro $x \in (-\sqrt{2}, 0)$ a pro $x \in (0, \sqrt{2})$, viz obr. 60.

6. Funkce má v bodě $x_4 = -\sqrt{2}$ ostré lokální maximum a v bodě $x_5 = \sqrt{2}$ ostré lokální minimum.

7. $y'' = x^3 - x$, $D_{y''} = \boldsymbol{R}$. Položíme $x^3 - x = 0$ a dostaneme $x(x^2 - 1) = 0$. Nulové body funkce y'' jsou $x_1 = 0$, $x_6 = -1$ a $x_7 = 1$. Platí $y''(-2) < 0$, $y''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$, $y''\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ a $y''(2) > 0$.

Znaménka zapíšeme do obr. 60.

8. Funkce je konvexní pro $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$ a je konkávní pro $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, viz obr. 60. Body $x_1 = 0$, $x_6 = -1$, $x_7 = 1$ jsou inflexní body dané funkce.

9. Asymptoty bez směrnice neexistují, viz bod 3. Vypočteme

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^3}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{20}x^4 - \frac{1}{6}x^2\right) = \infty - \infty = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{20} - \frac{1}{6x^2}}{\frac{1}{x^4}} = \infty \notin \boldsymbol{R}.$$ Neexistují

asymptoty se směrnicí.

10. Platí: $y(-\sqrt{2}) = \frac{2}{15}\sqrt{2}$, $y(-1) = \frac{7}{60}$, $y(0) = 0$, $y(1) = -\frac{7}{60}$ a $y(\sqrt{2}) = -\frac{2}{15}\sqrt{2}$. Body o souřadnicích $\left(-\sqrt{2}, \frac{2}{15}\sqrt{2}\right)$, $(0, 0)$ a $\left(\sqrt{2}, -\frac{2}{15}\sqrt{2}\right)$ jsou stacionární body a tedy tečny v nich ke grafu funkce jsou rovnoběžné s osou x kartézské soustavy souřadnic. Pro body $\left(-1, \frac{7}{60}\right)$ a $\left(1, -\frac{7}{60}\right)$ platí $y'(-1) = y'(1) = -\frac{1}{4}$ a tedy tečny ke grafu funkce procházející těmito body mají stejnou směrnici $k = -\frac{1}{4}$. Graf funkce je na obr. 57.

Poznámka

V následujících příkladech budeme v jednotlivých bodech určování průběhu funkce uvádět pouze výsledky bez komentáře.

Řešené úlohy

Příklad Určete průběh funkce $y = \frac{e^x}{x}$.

Řešení:

1. $Dy = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, $\frac{e^x}{x} = 0 \Rightarrow e^x = 0$, což neplatí pro žádné $x \in D_y$, $y(-1) = -\frac{1}{e} < 0$, $y(1) = e > 0$,

viz obr.61.

2. $f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x} \neq \left\langle \begin{matrix} f(x) \\ -f(x) \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ funkce není ani sudá ani lichá.

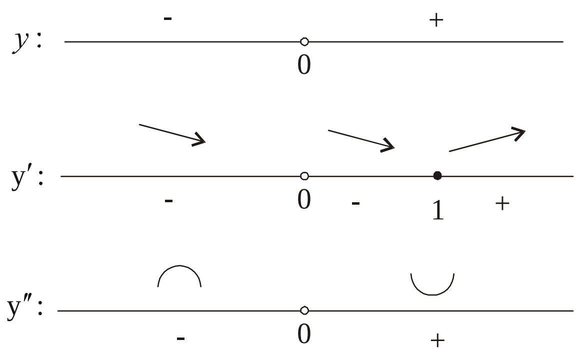
$f(x+p) = \frac{e^x + p}{x+p} \neq f(x)$, což platí $\forall x \in D_y$ a $p \neq 0 \Rightarrow$ funkce není periodická.

3. Funkce je spojitá pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Platí $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$.

4. $y' = \frac{e^x (x-1)}{x^2}$, $e^x (x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $D_{y'} = D_y$, $y'(-1) = -\frac{2}{e} < 0$, $y'\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{e} < 0$,

$y'(2) = \frac{e^2}{4} > 0$, viz obr. 61.



Obr. 61

5. Pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0,1)$ je funkce klesající, pro $x \in (1, \infty)$ je rostoucí.

6. V bodě $x_1 = 1$ má funkce ostré lokální minimum.

7. $y'' = \dfrac{e^x (x^2 - 2x + 2)}{x^3}$, $D_{y''} = D_{y'} = D_y$, $e^x(x^2 - 2x + 2) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow$ nemá reálné kořeny, $y''(-1) = -\dfrac{5}{e} < 0$, $y''(1) = e > 0$.

8. Pro $x \in (-\infty, 0)$ je funkce konkávní, pro $x \in (0, \infty)$ je konvexní, nemá inflexní body, viz obr. 61.

9. Existuje asymptota bez směrnice $x = 0$, viz bod 3, pro

$x \to 0^-$ je $y \to -\infty$ a pro $x \to 0^+$ je $y \to \infty$.

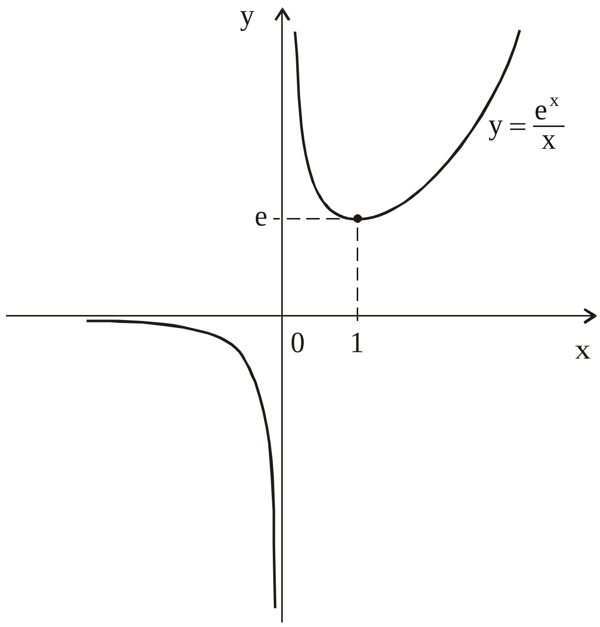
Asymptoty se směrnicí:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^x}{x^2} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty \notin \boldsymbol{R}, \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0 \in \boldsymbol{R}, \end{cases}$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 0.x \right) = 0 \in \boldsymbol{R}.$$

Funkce má asymptotu se směrnicí $y = 0$ pro $x \to -\infty$.

10. $y(1) = e$, $y'(1) = 0$, tečna ve stacionárním bodě $(1, e)$ je rovnoběžná s osou x. Graf je na obr. 62.



Obr. 62

Příklad Vyšetřete průběh funkce $y = e^{\frac{1}{x}}$.

Řešení:

1. $D_y = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, průsečíky s osou x neexistují, $y > 0 \;\; \forall x \in D_y$.

2. Není ani sudá, ani lichá, ani periodická.

3. Funkce je spojitá pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$.

4. $y' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$, $D_y = D_{y'}$, $\forall x \in D_{y'} : y' \neq 0$, $y'(-1) = -\frac{1}{e} < 0$, $y'(1) = -e < 0$.

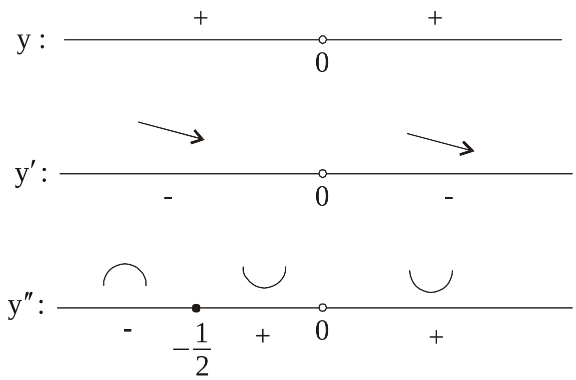
5. Funkce je klesající pro $x \in (-\infty, 0)$ a pro $x \in (0, \infty)$, viz obr. 63.

6. Lokální extrémy neexistují.

7. $y'' = \frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \left(2 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \frac{2x+1}{x}$,

$\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \frac{2x+1}{x} = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$,

$y''(-1) = -\frac{1}{e} < 0,\ \ y''\left(-\frac{1}{4}\right) = 128e^{-4} > 0,\ \ y''(1) = 3e > 0,$ viz obr. 63.



Obr. 63

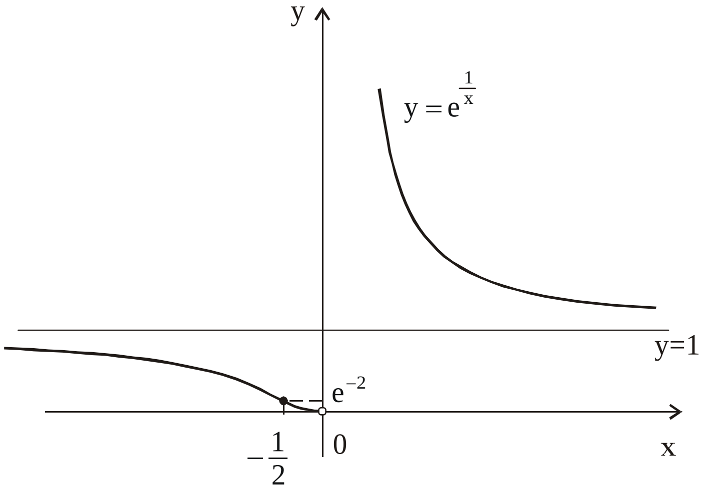
8. Funkce je pro $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ konkávní a pro $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, \infty)$ je konvexní, bod $x_1 = -\frac{1}{2}$ je inflexním bodem funkce.

9. Z bodu 3 vyplývá, že přímka $x = 0$ je asymptotou pro $x \to 0^+$.

Asymptoty se směrnicí: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0 \in \boldsymbol{R},\ q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \in \boldsymbol{R}.$

Funkce má asymptotu $y = 1$ pro $x \to \infty$ a pro $x \to -\infty$.

10. $y\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-2},\ y'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4e^{-2},$ tj. v inflexním bodě má tečna ke grafu směrnici $k = -4e^{-2}$. Graf funkce je na obr. 64.



Obr. 64

Úlohy k samostatnému řešení

V následujících cvičeních vyšetřete průběh funkce a načrtněte graf funkce.

1. $y = x^3 + 3x$

2. $y = 16x(x-1)^3$

3. $y = \left|16 - x^2\right|$

4. $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

5. $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$

6. $y = \dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x}$

7. $y = e^{-\frac{1}{x}}$

8. $y = x + e^{-x}$

9. $y = \dfrac{x}{e^x}$

10. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

11. $y = x^2 e^{-x}$

12. $y = xe^{-x^2}$

13. $y = x \ln x$

14. $y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

15. $y = x^2 \ln x$

16. $y = x \ln x^2$

17. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

18. $y = \sin x + \cos x$

19. $y = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

20. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$

21. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x-1}$

22. $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$

23. $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arccotg} x$

24. $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arccotg} x$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. $D_y = \boldsymbol{R}$; lichá funkce; rostoucí: $(-\infty,\infty)$; nemá extrémy; konvexní: $(0,\infty)$, konkávní: $(-\infty,0)$, inflexní body: $x=0$; nemá asymptoty. **2.** $D_y = \boldsymbol{R}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $\left(\frac{1}{4},\infty\right)$, klesající: $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$; $y_{\min} = -\frac{27}{16}$ pro $x=\frac{1}{4}$; konvexní: $(-\infty,\frac{1}{2})$ a $(1,\infty)$, konkávní: $(\frac{1}{2},1)$, inflexní body: $x=1$, $x=\frac{1}{2}$; nemá asymptoty. **3.** $D_y = \boldsymbol{R}$; sudá funkce; rostoucí: $(-4,0)$ a $(4,\infty)$, klesající: $(-\infty,-4)$ a $(0,4)$; $y_{\min}=0$ pro $x=-4$, $y_{\min}=0$ pro $x=4$ $y_{\max}=16$ pro $x=0$; konvexní: $(-\infty,-4)$ a $(4,\infty)$, konkávní: $(-4,4)$, inflexní body nemá; nemá asymptoty. **4.** $D_y = \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$; lichá funkce; rostoucí: $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$, klesající: $(-1,0)$ a $(0,1)$; $y_{\min}=-2$ pro $x=-1$, $y_{\max}=2$ pro $x=1$; konvexní: $(0,\infty)$, konkávní: $(-\infty,0)$, inflexní body nemá; asymptoty: $x=0$, $y=x$. **5.** $D_y = \boldsymbol{R}\setminus\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$; lichá funkce; rostoucí: $\left(-3,-\sqrt{3}\right)$ a $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ a $\left(\sqrt{3},3\right)$, klesající: $(-\infty,-3)$ a $(3,\infty)$; $y_{\min}=\frac{9}{2}$ pro $x=-3$, $y_{\max}=-\frac{9}{2}$ pro $x=3$; konvexní: $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ a $\left(0,\sqrt{3}\right)$, konkávní: $\left(-\sqrt{3},0\right)$ a $\left(\sqrt{3},\infty\right)$, inflexní bod $x=0$; asymptoty: $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$, $y=-x$. **6.** $D_y = \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $(1,2)$, klesající: $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(2,\infty)$; $y_{\min}=0$ pro $x=1$, $y_{\max}=\frac{1}{2}$ pro $x=2$; konvexní: $\left(0,2-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ a $\left(2+\frac{2\sqrt{3}}{3},\infty\right)$, konkávní: $(-\infty,0)$ a $\left(2-\frac{2\sqrt{3}}{3},2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, inflexní body: $x=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x=2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$; asymptoty: $x=0$, $y=0$. **7.** $D_y = \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$; není sudá ani lichá; rostoucí: $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$; nemá extrémy; konvexní: $(-\infty,0)$ a $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, konkávní: $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$, inflexní bod: $x=\frac{1}{2}$; asymptoty: $x=0$, $y=1$. **8.** $D_y = \boldsymbol{R}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $(0,\infty)$, klesající: $(-\infty,0)$; $y_{\min}=1$ pro $x=0$; konvexní: $(-\infty,\infty)$, inflexní body nemá;

asymptota: $y = x$ pro $x \to +\infty$. **9.** $D_y = \boldsymbol{R}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $(-\infty,1)$, klesající: $(1,\infty)$; $y_{\max} = e^{-1}$ pro $x = 1$; konvexní: $(2,\infty)$, konkávní: $(-\infty,2)$, inflexní bod: $x = 2$; asymptota: $y = 0$ pro $x \to +\infty$. **10.** $D_y = \boldsymbol{R}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$, klesající: $(-\infty,0)$ a $(0,\frac{1}{2})$; $y_{\min} = \frac{e^2}{4}$ pro $x = \frac{1}{2}$; konvexní: $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$, inflexní body nemá; nemá asymptoty. **11.** $D_y = \boldsymbol{R}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $(0,2)$, klesající: $(-\infty,0)$ a $(2,\infty)$; $y_{\min} = 0$ pro $x = 0$, $y_{\max} = 4e^{-2}$ pro $x = 2$; konvexní: $\left(-\infty,2-\sqrt{2}\right)$ a $\left(2+\sqrt{2},\infty\right)$, konkávní: $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$, inflexní body: $x = 2-\sqrt{2}$, $x = 2+\sqrt{2}$; asymptota: $y = 0$ pro $x \to +\infty$. **12.** $D_y = \boldsymbol{R}$; lichá funkce; rostoucí: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, klesající: $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$; $y_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$ pro $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$ pro $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; konvexní: $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$ a $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\infty\right)$, konkávní: $\left(-\infty,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ a $\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, inflexní body: $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$; asymptota: $y = 0$. **13.** $D_y = (0,\infty)$; není sudá ani lichá; rostoucí: $\left(\frac{1}{e},\infty\right)$, klesající: $(0,\frac{1}{e})$; $y_{\min} = -\frac{1}{e}$ pro $x = \frac{1}{e}$, konvexní: $(0,\infty)$, inflexní body nemá; nemá asymptoty. **14.** $D_y = (-1,1)$; lichá funkce; rostoucí: $(-1,1)$; nemá extrémy; konvexní: $(0,1)$, konkávní: $(-1,0)$, inflexní body: $x = 0$; asymptoty: $x = -1$, $x = 1$. **15.** $D_y = (0,\infty)$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\infty\right)$, klesající: $(0,\frac{1}{\sqrt{e}})$; $y_{\min} = -\frac{1}{2e}$ pro $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$; konvexní: $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}},\infty\right)$, konkávní: $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$, inflexní bod: $x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$; nemá asymptoty. **16.** $D_y = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$; lichá funkce; rostoucí: $\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)$ a $\left(\frac{1}{e},\infty\right)$, klesající: $\left(-\frac{1}{e},0\right)$ a $\left(0,\frac{1}{e}\right)$; $y_{\min} = -\frac{2}{e}$ pro $x = -\frac{1}{e}$, $y_{\max} = \frac{2}{e}$ pro $x = -\frac{1}{e}$; konvexní: $(0,\infty)$, konkávní: $(-\infty,0)$, inflexní body nemá; nemá asymptoty. **17.** $D_y = (0,\infty)$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $(0,e)$, klesající: (e,∞); $y_{\max}=\frac{1}{e}$ pro $x=e$, konvexní: $\left(\sqrt{e^3},\infty\right)$, konkávní: $\left(0,\sqrt{e^3}\right)$, inflexní bod: $x=\sqrt{e^3}$; asymptota: $y=0$. **18.** $D_y=\boldsymbol{R}$; není sudá ani lichá; rostoucí: $\left(-\frac{3}{4}\pi+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$, klesající: $\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5}{4}\pi+2k\pi\right)$, $k\in Z$; $y_{\min}=-\sqrt{2}$ pro $x=-\frac{3\pi}{4}$, $y_{\max}=\sqrt{2}$ pro $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$; konvexní: $\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{7}{4}\pi+2k\pi\right)$, konkávní: $\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right)$, $k\in Z$, inflexní body: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$; nemá asymptoty. **19.** $D_y=\boldsymbol{R}$; sudá funkce; rostoucí: $(0,\infty)$, klesající: $(-\infty,0)$; $y_{\min}=0$ pro $x=0$; konkávní: $(-\infty,\infty)$, inflexní body nemá; asymptota: $y=\pi$. **20.** $D_y=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$; lichá funkce; klesající: $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$; nemá extrémy; konvexní: $(0,\infty)$, konkávní: $(-\infty,0)$, inflexní body nemá; asymptota: $y=0$; $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\frac{\pi}{2}$. **21.** $D_y=\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$; není ani sudá ani lichá; klesající: $(-\infty,1)$ a $(1,\infty)$; nemá extrémy; konvexní: $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,\infty)$, konkávní: $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$, inflexní bod: $x=\frac{1}{2}$; asymptota: $y=\frac{\pi}{4}$; $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\frac{\pi}{2}$. **22.** $D_y=\boldsymbol{R}$; lichá funkce; rostoucí: $(-\infty,\infty)$; nemá extrémy; konvexní: $(-\infty,0)$, konkávní: $(0,\infty)$, inflexní bod: $x=0$; asymptoty: $y=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}$. **23.** $D_y=\boldsymbol{R}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$, klesající: $(-1,1)$; $y_{\min}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ pro $x=1$, $y_{\max}=\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}$ pro $x=-1$; konvexní: $(0,\infty)$, konkávní: $(-\infty,0)$, inflexní bod: $x=0$; asymptoty: $y=\frac{x}{2}$, $y=\frac{x}{2}+\pi$. **24.** $D_y=\boldsymbol{R}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $(-\infty,\infty)$; nemá extrémy; konvexní: $(-\infty,0)$, konkávní: $(0,\infty)$, inflexní body: $x=0$; asymptoty: $y=-\frac{3\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}$.