4.3. Asymptoty funkce

Výklad

Definice 4.3.1.

Jestliže nastane alespoň jeden z případů $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$, kde $x_0\in(D_f)'$, pak říkáme, že **přímka $x = x_0$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě x_0**. Jestliže $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-q)=0$, resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx-q)=0$, pak říkáme, že **přímka $y=kx+q$ je asymptotou funkce $f(x)$ v nevlastním bodě** ∞, resp. $-\infty$.

Poznámka

1. Asymptoty o rovnici $x=x_0$ někdy nazýváme asymptoty bez směrnice a hledáme je v krajních bodech x_0 intervalů spojitosti D_f.

2. Asymptoty o rovnici $y=kx+q$ někdy nazýváme asymptoty se směrnicí.

Výklad

Věta 4.3.1. Jestliže

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\in\boldsymbol{R}$ a platí $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=q\in\boldsymbol{R}$, pak přímka $y=kx+q$ je asymptotou funkce $f(x)$ v nevlastním bodě ∞. (Věta platí i pro nevlastní bod $-\infty$).

Důkaz: Z definice vyplývá, že $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-q)=0$, odtud je $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)-q=0$ a dále $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=q$. Platí $0=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{q}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-kx}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k$ a odtud dostáváme $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$. (Stejně dokážeme pro $x\to-\infty$.)

Řešené úlohy

Příklad Určete asymptoty funkce $y=\frac{x^2+1}{x}$, $D_f=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

Řešení: 1. Asymptoty bez směrnice

Krajní bod intervalů spojitosti funkce y je bod $x_0=0$. Vyřešíme limity

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+1}{x}=-\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to0^+}\frac{x^2+1}{x}=\infty.$$

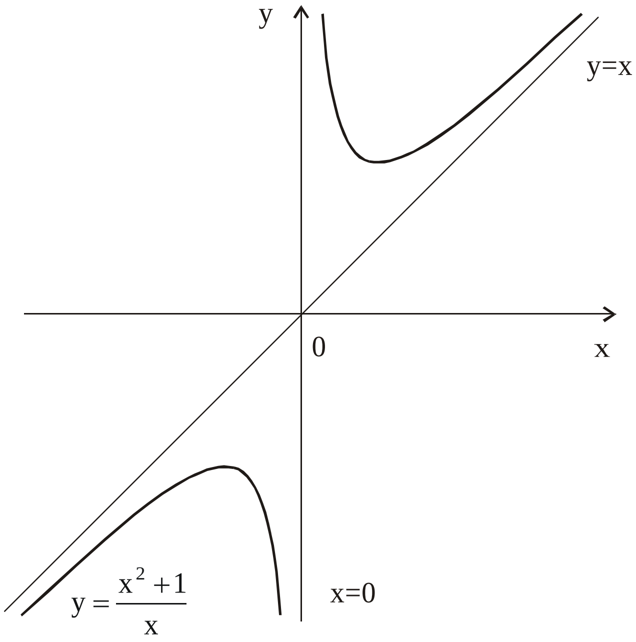
Z výsledků vyplývá, že přímka $x=0$ je asymptotou funkce. (Pro $x\to0^-$ je $y\to-\infty$, pro $x\to0^+$ je $y\to\infty$).

2. Asymptoty se směrnicí

Vypočítáme směrnici $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x^2})=1\in\boldsymbol{R}.$

Dostaneme $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0\in\boldsymbol{R}.$

Funkce $y=x$ je asymptotou pro $x\to\infty$ i pro $x\to-\infty$, viz obr. 58.



Obr. 58

Příklad Určete asymptoty funkce $y = \frac{1}{2}x + \operatorname{arctg} x,\ \ x \in \boldsymbol{R}.$

Řešení:

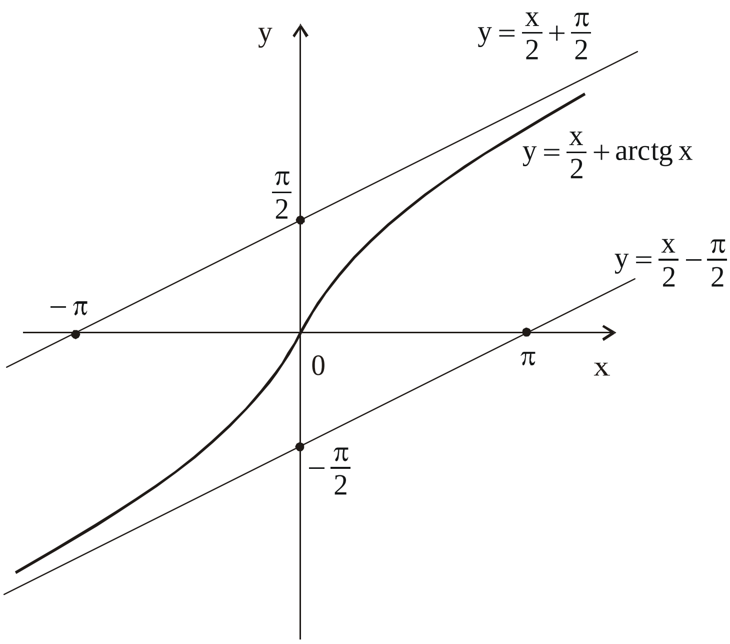
1. Asymptoty bez směrnice neexistují. Funkce je spojitá na $\boldsymbol{R}$.

2. Asymptoty se směrnicí:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right) = \frac{1}{2} \in \boldsymbol{R},$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{2}x + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pro } x \to \infty, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pro } x \to -\infty. \end{cases}$$

Funkce má asymptoty $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$ pro $x \to \infty$ a $y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}$ pro $x \to -\infty$, viz obr. 59.



Obr. 59

Kontrolní otázky

1. Funkce $f(x)$ má asymptotu bez směrnice v bodě x_0. Tato asymptota je:

   a) rovnoběžná s osou x,

   b) rovnoběžná s osou y,

   c) kolmá k ose y.

2. Asymptota bez směrnice funkce $f(x)$ v bodě x_0 má rovnici:

   a) $y = y_0$, b) $x = x_0$, c) $y = x_0$.

3. Je-li funkce $f(x)$ spojitá v ***R***, pak asymptoty bez směrnice:

   a) nemá, b) má, c) může, ale nemusí mít.

4. Pokud přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce $f(x)$ v nevlastním bodě ∞, pak

   a) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{f(x)} \in R$, $q = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - k) \in \boldsymbol{R}$,

   b) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{f(x)} \in R$, $q = \lim\limits_{x\to\infty} (kx - f(x)) \in \boldsymbol{R}$,

   c) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} \in R$, $q = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) \in \boldsymbol{R}$.

5. Funkce $f(x)$ je definovaná v intervalu $< a,b >, a,b \in \boldsymbol{R}$. Existují asymptoty se směrnicí této funkce?

   a) ne, b) ano, c) mohou, ale nemusí.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. b); 3. a); 4. c); 5. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte rovnice asymptot grafu dané funkce:

a) $y = \dfrac{x}{x-1}$, b) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$, c) $y = 3x + \dfrac{3}{x-2}$,

d) $y = \dfrac{x^3+2}{x^2-4}$, e) $y = \dfrac{1}{2x^2+x-1}$, f) $y = \dfrac{x^4}{(x+1)^2}$.

2. Najděte rovnice asymptot grafu dané funkce:

a) $y = \dfrac{\sin x}{x}$, b) $y = 2x - \dfrac{\cos x}{x}$, c) $y = e^{\frac{1}{x}}$,

d) $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$, e) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$, f) $y = x\ln(e + \dfrac{1}{x})$.

3. Najděte rovnice asymptot grafu dané funkce:

a) $y = x + e^{-x}$, b) $y = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, c) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$,

d) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x-1}$, e) $y = -x + \operatorname{arctg} x$, f) $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arccotg} x$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $x=1, \quad y=1$; b) $x=-1, \quad x=1, \quad y=0$; c) $x=2, \quad y=3x$; d) $x=-2, \quad x=2, \quad y=x$; e) $x=-1, \quad x=\dfrac{1}{2}, \quad y=0$; f) $x=-1$. **2.** a) $y=0$; b) $x=0, \quad y=2x$; c) $y=1$; d) $x=0, \quad y=x$; e) $x=0, \quad y=x$; f) $x=-\dfrac{1}{e}, \quad y=x+\dfrac{1}{e}$. **3.** a) $y=x$; b) $y=\pi$; c) $y=0$;

d) $y=\frac{\pi}{4}$; e) $y=-x-\frac{\pi}{2}$ pro $x\to-\infty$, $y=-x+\frac{\pi}{2}$ pro $x\to+\infty$; f) $y=-\frac{3\pi}{2}$ pro $x\to-\infty$, $y=\frac{\pi}{2}$ pro $x\to+\infty$.

Kontrolní test

1. Najděte rovnice asymptot bez směrnice ke grafu funkce $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

   a) $y=2,\ y=-2,$ b) $x=2,\ y=-2,$ c) $x=2,\ x=-2.$

2. Najděte rovnice asymptot se směrnicí ke grafu funkce $y=x\operatorname{arctg}x$.

   a) $y=\frac{\pi}{4}x-1$ pro $x\to\infty$, $y=-\frac{\pi}{4}x-1$ pro $x\to-\infty$,

   b) $y=\frac{\pi}{2}x-1$ pro $x\to\infty$, $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ pro $x\to-\infty$,

   c) $y=x-1$ pro $x\to\infty$, $y=-x-1$ pro $x\to-\infty$.

3. Najděte rovnici asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y=x-\ln x$ v nevlastním bodě ∞.

   a) $y=x,$ b) neexistuje, c) $y=x+1.$

4. Najděte rovnice asymptot grafu funkce $y=x+\dfrac{1}{x-1}$.

   a) $y=x,\ x=1,$ b) $y=1,\ y=-x,$ c) $y=-x,\ y=-1.$

5. Najděte rovnice asymptot grafu funkce $y=x^2e^{-x}$.

   a) $y=0$ pro $x\to-\infty$,

   b) $y=1$ pro $x\to\infty$,

   c) $y=0$ pro $x\to\infty$.

Výsledky testu

1. c); 2. b); 3. b); 4. a); 5. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 3 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 4.3. znovu.