4.2. Konvexnost, konkávnost, inflexe

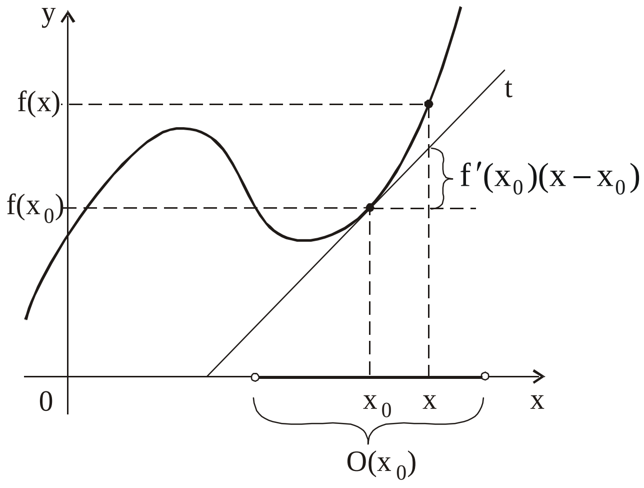
Výklad

Definice 4.2.1.

Nechť existuje $f'(x_0)$, $x_0 \in D_f$. Řekneme, že **funkce** $f(x)$ **je v bodě** x_0 **konvexní,** resp. **konkávní,** jestliže existuje $O(x_0)$ tak, že platí

$\forall x \in D_f : x \in O(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,

resp. $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.



Obr. 52

Poznámka

Z obr. 52 je vidět, že pro konvexní funkci $f(x)$ *leží hodnota* $f(x)$, $x \in O(x_0)$ *nad tečnou k* $f(x)$ *v bodě* x_0 *pro vhodné* $O(x_0)$. *Podobně pro konkávní funkci leží tyto hodnoty pod tečnou.*

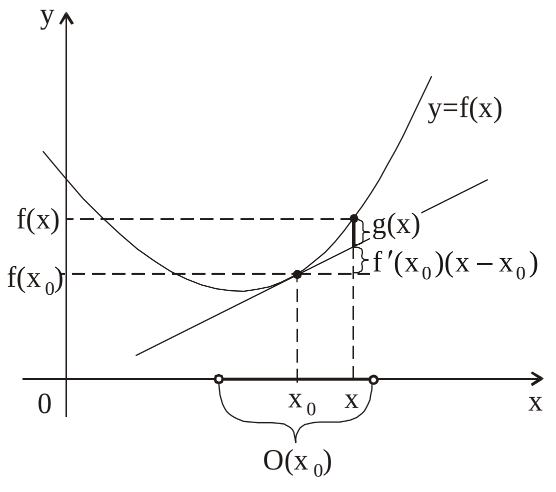
Výklad

Definice 4.2.2.

Říkáme, že **funkce** $f(x)$ je **konvexní,** resp. **konkávní v intervalu** $I \subset D_f$, jestliže v každém bodě I je konvexní, resp. konkávní.

Věta 4.2.1. Nechť $f''(x_0) > 0$, resp. $f''(x_0) < 0$, pak je $f(x)$ v bodě x_0 konvexní, resp. konkávní.

Důkaz: Označme $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ v $O(x_0)$, kde je $f(x)$ konvexní, resp. konkávní, viz obr. 53. Funkce $g(x) > 0$, resp. $g(x) < 0$ pro $x \in O(x_0) \setminus \{x_0\}$, jestliže je $f(x)$ v $O(x_0)$ konvexní, resp. konkávní, viz definice 4.2.1. Dostaneme $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ a $g''(x) = f''(x)$. Dosadíme $x = x_0$ a dostaneme $g'(x_0) = 0$. Pro funkci $g(x)$ je bod x_0 stacionární. Podle předpokladu věty je $g''(x_0) = f''(x_0) > 0$, resp. $g''(x_0) = f''(x_0) < 0$ a tedy funkce $g(x)$ má v bodě x_0 ostré lokální minimum, resp. maximum.



Obr. 53

Poznámka

Hledání intervalů konvexnosti, resp. konkávnosti je podle věty 4.2.1 vlastně hledáním intervalů, na kterých je funkce $f'(x)$ rostoucí, resp. klesající. Podle věty 4.1.1 mohou změny *v monotónnosti funkce $f'(x)$ tedy nastat v bodech $x_0 \in D_f$, v nichž $f''(x_0) = 0$, nebo v nichž $f''(x_0)$ neexistuje.*

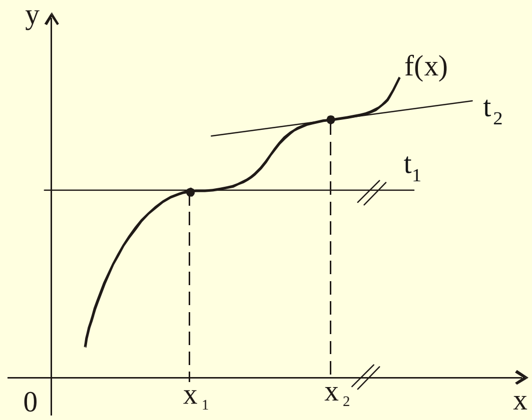
Výklad

Definice 4.2.3.

Nechť existuje $f'(x_0)$, $x_0 \in D_f$ a nechť funkce $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ mění v bodě x_0 znaménko, pak říkáme, že **funkce** $f(x)$ **má** v bodě x_0 **inflexi.**

Poznámka

Funkce f má v bodě $(x_0, f(x_0))$ inflexi, jestliže existuje $O(x_0)$ tak, že pro $x < x_0$ leží její graf pod tečnou t a pro $x > x_0$ leží nad tečnou t, nebo naopak, viz obr. 54.



Obr. 54

V obr. 54 je $f'(x_1) = 0$, bod x_1 je pro funkci $f(x)$ stacionární a tečna t_1 je rovnoběžná s osou x.

Výklad

Věta 4.2.2. Nechť je $f'(x)$ spojitá v x_0 a $f''(x)$ mění v x_0 znaménko, pak má funkce $f(x)$ v x_0 inflexi.

Důkaz: Platnost věty vyplývá přímo z věty 4.2.1 a z definic 4.2.1 a 4.2.3.

Poznámka

*Body x_0, v nichž má funkce inflexi, nazýváme **inflexní body.***

Řešené úlohy

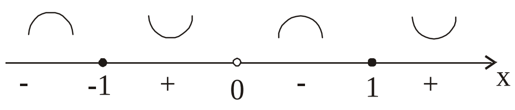
Příklad: Vyšetřete intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce $y = \frac{9}{88}\sqrt[3]{x^{11}} - \frac{9}{10}\sqrt[3]{x^5}$ a určete její inflexní body.

Řešení: Definiční obor $D_y = \boldsymbol{R}$, y' existuje v D_y. Pak platí

$$y' = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}},\ D_{y'} = \boldsymbol{R},$$

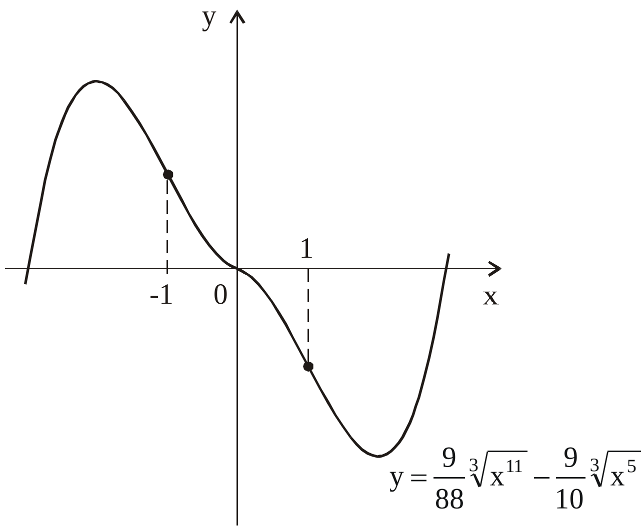
$$y'' = x^{\frac{5}{3}} - x^{-\frac{1}{3}} = \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}},\ D_{y''} = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}.$$

Položíme $x^2 - 1 = 0$, tj. $x_{1,2} = \pm 1$, což jsou nulové body funkce y''. Bod nespojitosti je bod $x_3 = 0$, viz obr. 55.



Obr. 55

Dostaneme $y''(-2) < 0,\ y''(-\frac{1}{2}) > 0,\ y''(\frac{1}{2}) < 0$ a $y''(2) > 0$. Funkce y je konvexní pro $x \in (-1, 0)$ a $(1, \infty)$ a konkávní pro $x \in (-\infty, -1)$ a $(0, 1)$, viz obr. 56. Body $x_1 = -1,\ x_2 = 1$ a $x_3 = 0$ jsou inflexní body dané funkce.



Obr. 56

Výklad

Věta 4.2.3. Nechť $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(2n)}_{(x_0)} = 0,\ f^{(2n+1)}_{(x_0)} \neq 0$ a $f^{(2n)}_{(x_0)}$ existuje v $O(x_0)$, pak bod x_0 je inflexním bodem funkce $f(x)$.

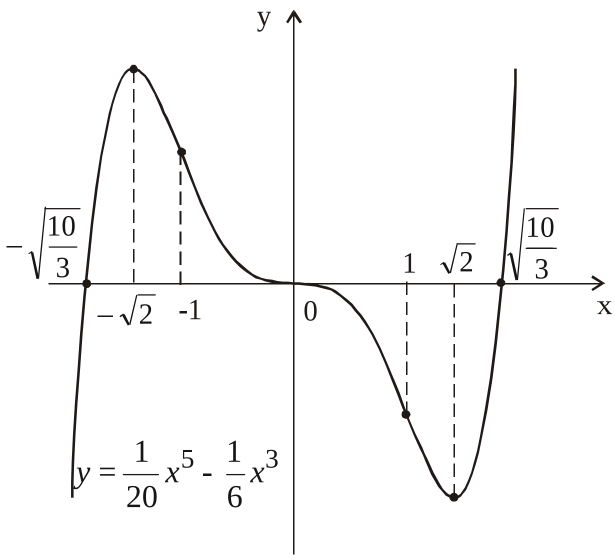
Bez důkazu.

Řešené úlohy

Příklad Určete inflexní body funkce $y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^3$.

Řešení: Dostaneme $y' = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{x^4 - 2x^2}{4}$, kde $D_y = D_{y'} = \boldsymbol{R}$. Vypočteme $y'' = x^3 - x,\ D_{y''} = \boldsymbol{R}$ a položíme $x^3 - x = 0,\ x(x^2 - 1) = 0$. Dostáváme nulové body

$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$ Dále $y''' = 3x^2 - 1,$ tj. $y'''(0) \neq 0,\ y'''(1) \neq 0$ a $y'''(-1) \neq 0.$ Body x_1, x_2, x_3 jsou inflexní. Graf funkce $y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^3$ je na obr. 57.



Obr. 57

Kontrolní otázky

1. Nechť $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$. Když existuje okolí bodu x_0 $0(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in 0(x_0) \setminus \{x_0\}$ leží body grafu funkce pod tečnou k $f(x)$ v bodě x_0, je $f(x)$ v bodě x_0

   a) konvexní, b) konkávní, c) klesající.

2. Je-li $f''(x) > 0$ v každém bodě intervalu $I \subset D_f$, je funkce $f(x)$ v tomto intervalu

   a) konvexní, b) konkávní, c) rostoucí.

3. Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$. Přechází-li graf funkce v bodě $[x_0,\ f(x_0)]$ z polohy nad tečnou do polohy pod tečnou nebo naopak, nazýváme bod x_0

   a) stacionárním bodem funkce $f(x)$,

   b) bodem lokálního maxima funkce $f(x)$,

   c) inflexním bodem funkce $f(x)$.

4. Pokud funkce $f(x)$ splňuje v bodě x_0 podmínky $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) = 0,$ pak bod x_0

a) je inflexním bodem,

b) není inflexním bodem,

c) může, ale nemusí být inflexním bodem.

5. Nechť bod x_0 je inflexním bodem funkce $f(x)$. Pak

a) $f''(x_0) \neq 0$,

b) $f''(x_0) = 0$ nebo neexistuje,

c) $f''(x_0) = 1$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1.b); 2. a); 3. c); 4. c); 5. b).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Nalezněte inflexní body a intervaly konvexnosti a konkávnosti dané funkce:

a) $y = 5x^2 + 20x + 7$, b) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$, c) $y = x(1-x)^2$,

d) $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$, e) $y = 3 - (x+2)^{\frac{7}{5}}$, f) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$.

2. Nalezněte inflexní body a intervaly konvexnosti a konkávnosti dané funkce:

a) $y = x \ln x$, b) $y = 1 - \ln(x^2 - 9)$, c) $y = x \operatorname{arctg} x$,

d) $y = e^{\operatorname{arctg} x}$, e) $y = x - \cos x$, f) $y = \ln(1 + x^2)$.

3. Nalezněte inflexní body a intervaly konvexnosti a konkávnosti dané funkce:

a) $y = \left|16 - x^2\right|$, b) $y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, c) $y = xe^{-x^2}$,

d) $y = x^2 e^{-x}$, e) $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arccotg} x$, f) $y = \dfrac{x}{e^x}$.

4. Ukažte, že všechny inflexní body funkce $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ leží na jedné přímce.

5. Pro jaké hodnoty *a*, *b* je bod $[1,3]$ inflexním bodem křivky $y = ax^3 + bx^2$?

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) inflexní body nemá, konvexní: $(-\infty,\infty)$; b) inflexní body: $x=1$, konvexní: $(1,\infty)$, konkávní: $(-\infty,1)$; c) inflexní body: $x=\frac{2}{3}$, konvexní: $(\frac{2}{3},\infty)$, konkávní: $(-\infty,\frac{2}{3})$; d) inflexní body: $x=-2$, $x=1$, konvexní: $(-\infty,-2)$ a $(1,\infty)$, konkávní: $(-2,1)$; e) inflexní body nemá, konvexní: $(-\infty,-2)$, konkávní: $(-2,\infty)$; f) inflexní body nemá, konvexní: $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$. **2.** a) inflexní body nemá, konvexní: $(0,\infty)$; b) inflexní body nemá, konvexní: $(-\infty,-3)$ a $(3,\infty)$; c) inflexní body nemá, konvexní: $(-\infty,\infty)$; d) inflexní body: $x=\frac{1}{2}$, konvexní: $(-\infty,\frac{1}{2})$, konkávní: $(\frac{1}{2},\infty)$; e) inflexní body: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, konvexní: $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)$, konkávní: $(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi)$; f) inflexní body: $x=-1$, $x=1$, konvexní: $(-1,1)$, konkávní: $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$. **3.** a) inflexní body nemá, konvexní: $(-\infty,-4)$ a $(4,\infty)$, konkávní: $(-4,4)$; b) inflexní body: $x=0$, konvexní: $(0,1)$, konkávní: $(-1,0)$ c) inflexní body: $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x=0$, $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$, konvexní: $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$ a $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\infty\right)$, konkávní: $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ a $\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$; d) inflexní body: $x=2-\sqrt{2}$, $x=2+\sqrt{2}$, konvexní: $(-\infty,2-\sqrt{2})$ a $(2+\sqrt{2},\infty)$, konkávní: $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$; e) inflexní body: $x=0$, konvexní: $(-\infty,0)$, konkávní: $(0,\infty)$; f) inflexní body: $x=2$, konvexní: $(2,\infty)$, konkávní: $(-\infty,2)$.

4. inflexní body $\left[-\sqrt{3}-2,\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right]$, $\left[\sqrt{3}-2,\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right]$, $[1,1]$. **5.** $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{2}$.

Kontrolní test

1. Nalezněte intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce $y=x^4-6x^2+5$.

   a) konvexní: $(-1,1)$, konkávní: $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$,

   b) konvexní: $(-1,1)$ a $(1,\infty)$, konkávní: $(-\infty,-1)$,

   c) konvexní: $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$, konkávní: $(-1,1)$.

2. Nalezněte intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce $y = \frac{x+2}{x^2}$.

   a) konvexní: $(-\infty,-6)$ a $(-6,0)$, konkávní: $(0,\infty)$,

   b) konvexní: $(-6,0)$, a $(0,\infty)$, konkávní: $(-\infty,-6)$,

   c) konvexní: $(-\infty,-6)$, konkávní: $(-6,0)$ a $(0,\infty)$.

3. Nalezněte intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce $y = x + \operatorname{arctg} x$.

   a) konvexní: $(-\infty,0)$, konkávní: $(0,\infty)$,

   b) konvexní: $(-\infty,1)$, konkávní: $(1,\infty)$,

   c) konvexní: $(0,\infty)$, konkávní: $(-\infty,0)$.

4. Nalezněte inflexní body funkce $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

   a) $x_1 = -1,\ x_2 = 1$,

   b) $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}},\ x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$,

   c) $x_1 = 0,\ x_2 = 1$.

5. Nalezněte inflexní body funkce $y = xe^x$.

   a) $x = -2$, b) $x = 2$, c) $x = \frac{1}{2}$.

6. Nalezněte inflexní body funkce $y = (x-2)^4$.

   a) $x = 2$, b) $x = -2$, c) neexistují.

Výsledky testu

1. c); 2. b); 3. a); 4. b); 5. a); 6. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 4 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 4.2. znovu.