4. PRŮBĚH FUNKCE

Průvodce studiem

V matematice, ale i ve fyzice a technických oborech se často vyskytne požadavek na sestrojení grafu funkce $y = f(x)$. K nakreslení grafu funkce lze dnes většinou použít vhodný matematický software. Může se však stát, že při zadání funkčního předpisu uděláme chybu, že zvolíme nevhodný interval pro zobrazení grafu, nebo že si zvolený software s vykreslením grafu dokonale neporadí. pro tyto případy je nutné naučit se hledat význačné vlastnosti funkce. V této kapitole budou tyto význačné vlastnosti uvedeny a v závěru kapitoly je shrneme a naučíme se graf funkce $y = f(x)$ načrtnout.

4.1. Extrémy funkce

Předpokládané znalosti

V této a dalších částech budeme hovořit o monotónnosti funkcí, viz definice 1.4.2 a budeme používat větu 3.2.6.

Výklad

Definice 4.1.1.

Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in D_f$

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{absolutní maximum}\\ \textbf{absolutní minimum}\\ \textbf{lokální maximum}\\ \textbf{lokální minimum}\\ \textbf{ostré lokální maximum}\\ \textbf{ostré lokální minimum}\end{array}\right\}, \qquad \text{jestliže} \qquad \left\{\begin{array}{l}\forall x \in D_f : f(x) \le f(x_0),\\ \forall x \in D_f : f(x) \ge f(x_0),\\ \exists O(x_0) : x \in O(x_0) \Rightarrow f(x) \le f(x_0),\\ \exists O(x_0) : x \in O(x_0) \Rightarrow f(x) \ge f(x_0),\\ \exists O(x_0) : x \in O(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) < f(x_0),\\ \exists O(x_0) : x \in O(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > f(x_0).\end{array}\right.$$

Jestliže nastane některá z předchozích možností říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 extrém (absolutní, lokální, ostrý lokální).

Řešené úlohy

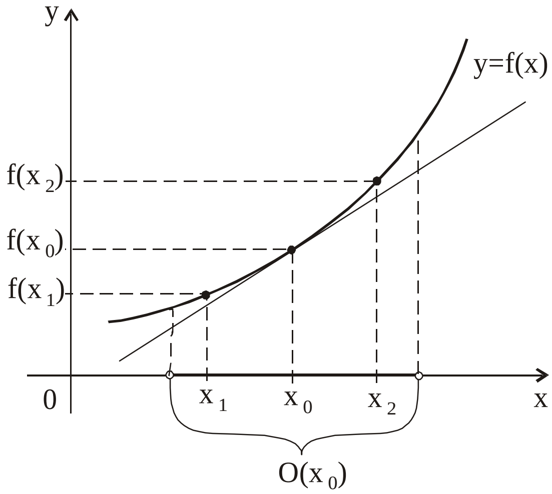
Příklad Funkce $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ má v bodě $x_0 = 0$ absolutní maximum. Nerovnice $\dfrac{2}{1+x^2} \leq y(0) = 2$ platí pro všechna $x \in \boldsymbol{R}$. Po úpravě totiž dostaneme $2 \leq 2(1+x^2)$, dále pak $0 \leq x^2$. Předchozí úvaha platí pro každé $O(x_0)$ a tedy funkce má v bodě $x_0 = 0$ také lokální maximum, které je ostré, protože $0 < x^2$ pro všechna $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.

Příklad Funkce $y = x^3 + x^2$ má v bodě $x_0 = 0$ ostré lokální minimum, protože nerovnice $x^3 + x^2 > y(0) = 0$ je splněna v okolí $(-1,1)$ bodu 0 s výjimkou bodu 0, neboť po úpravě dostaneme $x^2(x+1) > 0$. Toto lokální minimum není absolutní, protože například $y(-2) = -4 < y(0)$.

Výklad

Věta 4.1.1. Nechť je x_0 vnitřní bod D_f a nechť existuje $f'(x_0) \neq 0$. Pak funkce $f(x)$ nemá v bodě x_0 lokální ani absolutní extrém.

Bez důkazu.



Obr. 46

Všimněme si na obr. 46, že tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 není pro $f'(x_0) \neq 0$ rovnoběžná s osou x. Existuje tedy $O(x_0)$ takové, že platí $f(x_1) > f(x_0)$, $f(x_2) < f(x_0)$ pro vhodně zvolené body $x_1, x_2 \in D_f \cap O(x_0)$.

Poznámka

Z věty 4.1.1 vyplývá, že lokální i absolutní extrémy mohou existovat pouze v bodech $x_0 \in D_f$, v nichž $f'(x_0) = 0$, nebo v nichž $f'(x_0)$ neexistuje. ***Body*** *x_0, v nichž $f'(x_0) = 0$ budeme nazývat* ***stacionární****. Mezi body, v nichž $f'(x_0)$ neexistuje, patří také krajní body definičního oboru.*

Výklad

Věta 4.1.2. Spojitá funkce, jejíž derivace mění v bodě x_0 znaménko, má v bodě x_0 ostrý lokální extrém.

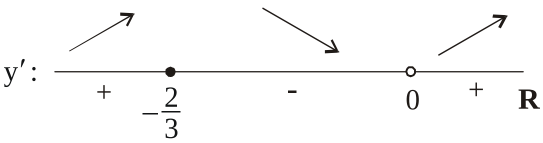
Bez důkazu. Uvědomíme si, že podle věty 3.2.6 je pro $f'(x) > 0$ funkce $f(x)$ rostoucí a pro $f'(x) < 0$ je funkce $f(x)$ klesající. Podle věty 4.1.1 může derivace spojité funkce $f(x)$ změnit znaménko pouze v bodech $x_0 \in D_f$, v nichž $f'(x_0) = 0$, nebo v nichž $f'(x_0)$ neexistuje.

Řešené úlohy

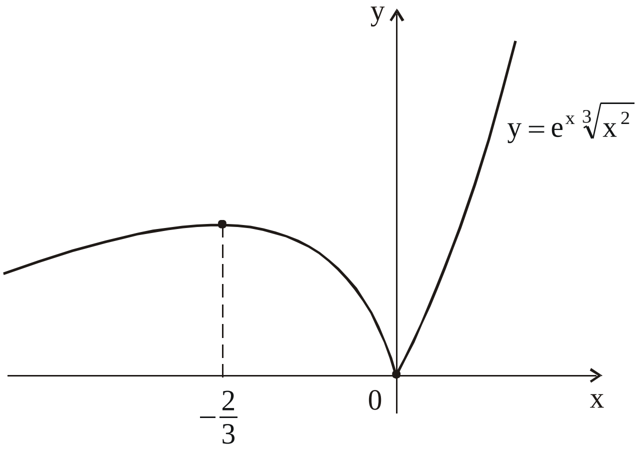
Příklad Určete lokální extrémy funkce $y = e^x \sqrt[3]{x^2}$.

Řešení: Funkce je spojitá na množině reálných čísel **R**. Zjistíme nulové body a body nespojitosti funkce y' a podle věty 4.1.2 rozhodneme, zda v nich bude lokální extrém:

$y' = e^x x^{\frac{2}{3}} + e^x . \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{(3x+2)e^x}{3\sqrt[3]{x}}$. Bodem nespojitosti funkce y' je bod $x_1 = 0$. Její nulový bod získáme řešením rovnice $(3x+2)e^x = 0$, tj. $3x + 2 = 0$ a odtud $x_2 = -\frac{2}{3}$. Tyto body rozdělí **R** na tři intervaly, viz obr. 47.



Obr. 47



Obr. 48

Využijeme poznatků o řešení nerovnic z kapitoly 2.4 a dostaneme:

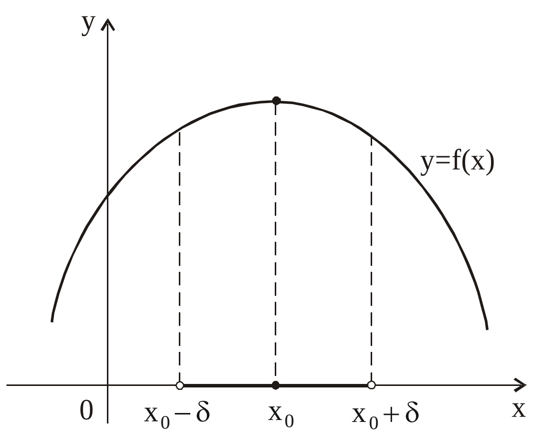
$y'(-1) > 0,\ y'(-\frac{1}{2}) < 0,\ y'(1) > 0.$ Derivace funkce y mění v bodech $x_1 = 0$ a $x_2 = -\frac{2}{3}$ znaménko, tj. v těchto bodech existují lokální extrémy. Bod $x_2 = -\frac{2}{3}$ je stacionárním bodem.

Monotónnost funkce y se v bodech $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{2}{3}$ mění, viz obr. 47. Graf funkce y je na obr. 48.

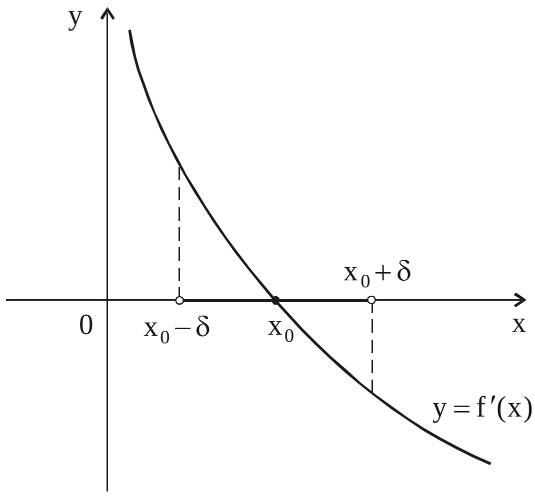
Výklad

Věta 4.1.3. Předpokládejme, že $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) < 0$, resp. $f''(x_0) > 0$. Pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 ostré lokální maximum, resp. ostré lokální minimum.

Bez důkazu. Pro maximum v bodě x_0 platí, že $f'(x) > 0$, pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ a vhodné $\delta > 0$, viz obr. 49, 50. Funkce $f'(x)$ je zřejmě v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ klesající a tedy $f''(x_0) < 0$.



Obr. 49



Obr. 50

Podobnou úvahu můžeme provést pro minimum v bodě x_0 a dostaneme $f''(x_0)>0$.

Řešené úlohy

Příklad Určete extrémy funkce $y=e^x\sqrt[3]{x^2}$, jejíž definiční obor je $D_f=<-1,\frac{1}{2}>$.

Řešení: Z řešení předchozího příkladu víme, že daná funkce má v bodě $x_2=-\frac{2}{3}$ ostré lokální maximum a v bodě $x_1=0$ má ostré lokální minimum.

Z poznámky za větou 4.1.1 vyplývá, že zbývá určit funkční hodnoty funkce y v krajních bodech definičního oboru, tj. v bodech $x_3=-1$ a $x_4=\frac{1}{2}$.

Dostaneme:

$y(-1)=e^{-1}\doteq 0,36788,$

$y(-\frac{2}{3})=e^{-\frac{2}{3}}.\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\doteq 0,39181,$

$y(0)=e^0.0=0,$

$y(\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\doteq 1,03863.$

Z předchozích vztahů vyplývá, že funkce má v lokálním minimu $x_1 = 0$ absolutní minimum a v krajním bodě definičního oboru $x_4 = \frac{1}{2}$ má absolutní maximum.

Výklad

Bez důkazu předchozí větu zobecníme.

Věta 4.1.4. Nechť má funkce $f(x)$ v bodě x_0 spojitou n-tou derivaci pro $n \geq 3$ a nechť

$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Je-li n číslo sudé a

$f^{(n)}(x_0) < 0$, resp. $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 ostré lokální maximum, resp. ostré lokální minimum. Je-li n liché číslo, pak v x_0 extrém neexistuje.

Řešené úlohy

Příklad Určete lokální extrémy funkce $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6$.

Řešení:

Funkce y je polynom, tj. její definiční obor a definiční obor jejích derivací je $\boldsymbol{R}$.

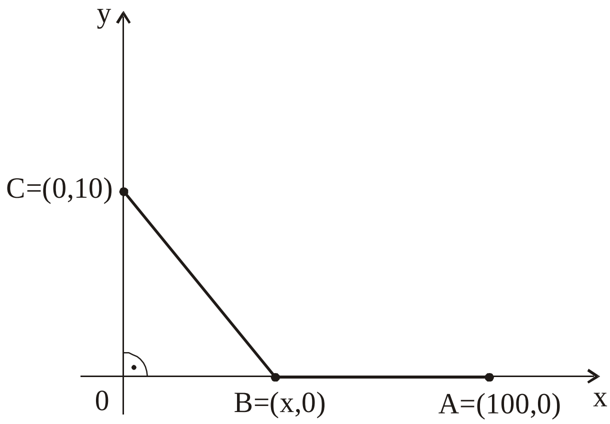
1. $y' = x^3 - 2x^4 + x^5 = x^3(1-x)^2 \Rightarrow$ stacionární body jsou $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.
2. $y'' = 3x^2 - 8x^3 + 5x^4$, $y''(0) = 0$, $y''(1) = 0 \Rightarrow$ budeme dále derivovat.
3. $y''' = 6x - 24x^2 + 20x^3$, $y'''(0) = 0$, $y'''(1) = 2 \neq 0 \Rightarrow$ v $x_2 = 1$ neexistuje extrém.
4. $y^{(4)} = 6 - 48x + 60x^2$, $y^{(4)}(0) = 6 > 0 \Rightarrow$ v $x_1 = 0$ je ostré lokální minimum.

Poznámka

Většina praktických úloh vede na hledání absolutního maxima nebo minima funkce, která úlohu popisuje. Tento extrém může, ale nemusí být lokální.

Řešené úlohy

Příklad Z bodu O do bodu A vede přímá železnice, viz obr. 51. Navrhněte umístění překladového nádraží v bodu B na této trati tak, aby při silniční dopravě z bodu C do bodu B po přímé silnici a následné dopravě z bodu B do bodu A po železnici byla cena za přepravu jednotky zboží nejnižší. Cena za dopravu jednotky zboží po železnici je 0,2 Kč/km a po silnici 0,5 Kč/km. Cena překládky za jednotku je 1Kč. Vzdálenost $|OA|$ je 100 km, vzdálenost $|OC|$ je 10 km.



Obr. 51

Řešení: Označme souřadnice bodu $B=(x,0)$, kde x je hledaná vzdálenost bodu B od bodu O. Délka cesty po železnici pak bude $(100-x)$ km a délka přepravy po silnici $\sqrt{x^2+10^2}$ km. Cena přepravy jednotky zboží je pak dána funkcí

$y=(100-x).0,2+\sqrt{x^2+100}.0,5+1,\ \ D_y=<0,100>.$

Určíme absolutní minimum této funkce:

$$y' = -0,2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+100}}.0,5.$$

Funkce y' je spojitá, určíme tedy její stacionární body:

$$-0,2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+100}}.0,5 = 0 \Rightarrow \frac{x}{2\sqrt{x^2+100}} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x = 2\sqrt{x^2+100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2 = 4x^2 + 400 \Rightarrow 21x^2 = 400 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{20}{\sqrt{21}}.$$

Do D_y patří pouze $x_1 = \frac{20}{\sqrt{21}}$. Přesvědčíme se, že v bodě x_1 se jedná o minimum funkce:

$$y'' = \left(\frac{x}{2\sqrt{x^2+100}} - \frac{1}{5}\right)' = \frac{2\sqrt{x^2+100} - x.\frac{2x}{\sqrt{x^2+100}}}{4(x^2+100)} = \frac{2(x^2+100)-2x^2}{4\sqrt{(x^2+100)^3}} = \frac{50}{\sqrt{(x^2+100)^3}}.$$

Je vidět, že $y'' > 0$ pro všechna $x \in D_y$ a tedy i pro x_1, tj. v bodě $x_1 = \frac{20}{\sqrt{21}}$ jde o minimum funkce y. Nyní zjistíme funkční hodnoty v krajních bodech D_y a porovnáme je s funkční hodnotou v bodě x_1:

$$y(0) = 26, \qquad y(100) \doteq 51,25, \qquad y\left(\frac{20}{\sqrt{21}}\right) \doteq 25,58.$$

Nejvýhodnější je postavit nádraží v bodě B, který je od bodu O vzdálen $\frac{20}{\sqrt{21}}$ km.

Kontrolní otázky

1. Při vyšetřování lokálního extrému funkce $f(x)$ v bodě x_0 sledujeme funkční hodnoty této funkce
   a) v celém jejím definičním oboru,
   b) v okolí bodu x_0,
   c) pouze v bodě x_0.
2. Stacionárním bodem funkce $f(x)$ nazýváme bod x_0, ve kterém
   a) $f'(x_0) = 0$,

b) $f'(x_0) \neq 0$,

c) $f'(x_0)$ neexistuje.

3. Spojitá funkce $f(x)$ má v bodě x_0 ostrý lokální extrém. Pak derivace této funkce $f'(x)$ v okolí bodu x_0

   a) nemění znaménko,

   b) rovná se nule,

   c) mění znaménko.

4. Pro funkci $f(x)$ v bodě x_0 platí, že $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$. Pak v bodě x_0

   a) je ostré lokální minimum,

   b) je ostré lokální maximum,

   c) není tam lokální extrém.

5. Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 stacionární bod, pak v bodě x_0 lokální extrém

   a) určitě nastane,

   b) nenastane,

   c) může nastat.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. c); 4. a), 5. c).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte intervaly, na kterých je daná funkce rostoucí a na kterých je klesající:

a) $y = x^3 - x$, b) $y = x^5 - 15x^3 + 3$, c) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$,

d) $y = |x+1| + |x-1|$, e) $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{1-x}$, f) $y = x + \dfrac{x}{x^2-1}$.

2. Najděte intervaly, na kterých je daná funkce rostoucí a na kterých je klesající:

a) $y = x - e^x$, b) $y = x^2 e^{-x}$, c) $y = \dfrac{e^x}{x}$,

d) $y=\ln\sqrt{1+x^2}$, e) $y=2x^2-\ln x$, f) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,

g) $y=x+\cos x$, h) $y=\sin x+\cos x$, i) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

3. Ukažte, že funkce $y=\operatorname{arctg} x-x$ je pro každé reálné x klesající.

4. Nalezněte lokální extrémy daných funkcí:

a) $y=x^2(x-6)$, b) $y=x^3-12x-6$, c) $y=4x^3-18x^2+27x-7$,

d) $y=-x^4-2x^2+3$, e) $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$, f) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

5. Nalezněte lokální extrémy daných funkcí:

a) $y=x+e^{-x}$, b) $y=xe^{-x^2}$, c) $y=x^2e^{-x^2}$,

d) $y=\dfrac{x}{e^x}$, e) $y=\dfrac{e^x}{x}$, f) $y=\sqrt[3]{x^2}e^{-x}$.

6. Nalezněte lokální extrémy daných funkcí:

a) $y=x\ln x$, b) $y=\ln\dfrac{x+1}{1-x}$, c) $y=x^2\ln x$,

d) $y=x\ln x^2$, e) $y=\dfrac{\ln x}{x}$, f) $y=\ln\sqrt{1+x^2}-\operatorname{arctg} x$.

7. Nalezněte lokální extrémy daných funkcí:

a) $y=\dfrac{x}{2}+\operatorname{arctg} x$, b) $y=\left|16-x^2\right|$, c) $y=\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x}$,

d) $y=4x-\operatorname{tg} x$, e) $y=e^{-x}\sin x$, f) $y=x+\operatorname{arccotg}(2x)$.

8. Určete absolutní extrémy funkcí na daném intervalu:

a) $y=x^2-6x+10,\ x\in\langle -1,5\rangle$, b) $y=x^2\ln x,\ x\in\left\langle \dfrac{1}{e},e\right\rangle$,

c) $y=2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x,\ x\in\left\langle 0,\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$, d) $y=x^x,\ x\in(0,\infty)$.

9. Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl největší.

10. Najděte takové kladné číslo, aby součet tohoto čísla a jeho převrácené hodnoty byl nejmenší.

11. Jaké rozměry musí mít pravoúhlý rovnoběžník daného obvodu s , aby jeho úhlopříčka byla nejmenší?

12. Dokažte, že ze všech pravoúhlých rovnoběžníků daného

a) obsahu má čtverec nejmenší obvod,

b) obvodu má čtverec největší obsah.

13. Z válcového kmene o průměru *d* se má vytesat trám obdélníkového průřezu tak, aby měl maximální nosnost. Z nauky o pevnosti je známo, že nosnost *y* trámu je dána vztahem $y = kab^2$, kde *k*>0 je součinitel materiálu, *a* je šířka a *b* výška trámu.

14. Ze čtvercového plechu o straně *a* se má vyrobit otevřená krabice tak, že v rozích se odstřihnou čtverce a zbytek se zahne do krabice. Jak velká musí být strana odstřižených čtverců, aby byl objem krabice maximální?

15. Cestovní kancelář pořádá zájezd. Je-li počet účastníků zájezdu 100 a méně, je cena pro jednoho účastníka 600 Kč. Při větším počtu než 100 se cena sníží za každého účastníka navíc o 2,50 Kč. Při kolika účastnících bude obrat cestovní kanceláře největší?

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) rostoucí: $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ a $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$, klesající: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; b) rostoucí: $(-\infty,-3)$ a $(3,\infty)$, klesající: $(-3,3)$; c) rostoucí: $(-1,1)$, klesající: $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$; d) rostoucí: $(1,\infty)$, klesající: $(-\infty,-1)$, v $\langle -1,1\rangle$ je konstantní, $y=2$; e) rostoucí: $\left(\frac{2}{3},1\right)$ a $(1,2)$, klesající: $(-\infty,0)$ a $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ a $(2,\infty)$; f) rostoucí: $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ a $\left(\sqrt{3},\infty\right)$, klesající: $\left(-\sqrt{3},-1\right)$ a $(-1,1)$ a $\left(1,\sqrt{3}\right)$. **2.** a) rostoucí: $(-\infty,0)$, klesající: $(0,\infty)$; b) rostoucí: $(0,2)$, klesající: $(-\infty,0)$ a $(2,\infty)$; c) rostoucí: $(1,\infty)$, klesající: $(-\infty,0)$ a $(0,1)$; d) rostoucí: $(0,\infty)$, klesající: $(-\infty,0)$; e) rostoucí: $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$, klesající: $\left(0,\frac{1}{2}\right)$; f) rostoucí: $(-\infty,\infty)$; g) rostoucí: $(-\infty,\infty)$; h) rostoucí: $\left(-\frac{3}{4}\pi+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$, klesající: $\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5}{4}\pi+2k\pi\right), k\in Z$; i) rostoucí: $(0,\infty)$, klesající: $(-\infty,0)$. **4.** a) $y_{max}=0$ pro $x=0$, $y_{min}=-32$ pro $x=4$; b) $y_{max}=10$ pro $x=-2$, $y_{min}=-22$ pro $x=2$; c) nemá lokální extrémy; d) $y_{max}=3$ pro $x=0$; e) nemá lokální extrémy; f) $y_{min}=2$ pro $x=-1$,

$y_{\min} = 2$ pro $x = 1$. **5.** a) $y_{\min} = 1$ pro $x = 0$; b) $y_{\min} = -\frac{1}{2\sqrt{e}}$ pro $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$y_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$ pro $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; c) $y_{\max} = \frac{1}{e}$ pro $x = -1$, $y_{\max} = \frac{1}{e}$ pro $x = 1$,

$y_{\min} = 0$ pro $x = 0$; d) $y_{\max} = \frac{1}{e}$ pro $x = 1$; e) $y_{\max} = e$ pro $x = 1$;

f) $y_{\max} = \frac{\sqrt[3]{12}}{3\sqrt[3]{e^2}}$ pro $x = \frac{2}{3}$, $y_{\min} = 0$ pro $x = 0$. **6.** a) $y_{\min} = -\frac{1}{\mathrm{e}}$ pro $x = \frac{1}{e}$;

b) nemá lokální extrémy; c) $y_{\min} = -\frac{1}{2\mathrm{e}}$ pro $x = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$; d) $y_{\max} = \frac{2}{e}$ pro $x = -\frac{1}{e}$,

$y_{\min} = -\frac{2}{\mathrm{e}}$ pro $x = \frac{1}{e}$; e) $y_{\max} = \frac{1}{e}$ pro $x = e$; f) $y_{\min} = \frac{1}{2}\ln 2\text{-}\frac{\pi}{4}$ pro $x = 1$.

7. a) nemá lokální extrémy; b) $y_{\max} = 16$ pro $x = 0$, $y_{\min} = 0$ pro $x = -4$,

$y_{\min} = 0$ pro $x = 4$; c) $y_{\max} = \frac{1}{2}$ pro $x = 2$, $y_{\min} = 0$ pro $x = 1$;

d) $y_{\max} = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi - \sqrt{3}$ pro $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in Z$,

$y_{\min} = -\frac{4\pi}{3} + 4k\pi + \sqrt{3}$ pro $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in Z$;

e) $y_{\max} = e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}\frac{\sqrt{2}}{2}$ pro $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$,

$y_{\min} = -e^{-(\frac{5\pi}{4}+2k\pi)}\frac{\sqrt{2}}{2}$ pro $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$; f) $y_{\max} = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}$ pro $x = -\frac{1}{2}$,

$y_{\min} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ pro $x = \frac{1}{2}$. **8.** a) $y_{\max} = 17$ pro $x = -1$, $y_{\min} = 1$ pro $x = 3$;

b) $y_{\max} = e^2$ pro $x = e$, $y_{\min} = -\frac{1}{2\mathrm{e}}$ pro $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$; c) $y_{\max} = 1$ pro $x = \frac{\pi}{4}$, nemá

absolutní minimum; d) $y_{\min} \approx 0.6922$ pro $x = \frac{1}{e}$, nemá absolutní maximum.

9. $[14+14]$. **10.** $x = 1$. **11.** $a = \frac{s}{4}$, $b = \frac{s}{4}$. **13.** $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{3}}$.

14. $x = \frac{a}{6}$, $V_{\max} = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3$. **15.** $n = 170$.

Kontrolní test

1. Najděte intervaly, na kterých je funkce $y = x^3 - 12x + 1$ rostoucí a na kterých je klesající.

   a) rostoucí $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$, klesající $(-2, 2)$,

   b) rostoucí $(-2, 2)$, klesající $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$,

   c) rostoucí $(-\infty, 2)$, klesající $(2, \infty)$.

2. Najděte intervaly, na kterých je funkce $y = xe^{-x}$ ryze monotónní:

   a) rostoucí $(1, \infty)$, klesající $(-\infty, 1)$,

   b) rostoucí $(-\infty, 1)$, klesající $(1, \infty)$,

   c) rostoucí $(-\infty, -1)$, klesající $(-1, \infty)$.

3. Najděte intervaly, na kterých je funkce $y = x + 2arc\operatorname{cotg} x$ ryze monotónní.

   a) rostoucí $(-1, 1)$, klesající $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$,

   b) rostoucí $(-\infty, 1)$, klesající $(1, \infty)$,

   c) rostoucí $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, klesající $(-1, 1)$.

4. Najděte všechny lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

   a) $y_{\max} = 4$ pro $x = 2$, $y_{\min} = 0$ pro $x = 0$,

   b) $y_{\max} = 0$ pro $x = 0$, $y_{\min} = 4$ pro $x = 2$,

   c) $y_{\max} = \dfrac{9}{2}$ pro $x = 3$, $y_{\min} = 0$ pro $x = 0$.

5. Najděte všechny lokální extrémy funkce $y = \sin x + \cos x$.

   a) $y_{\max} = -\sqrt{2}$ pro $x = \dfrac{5}{4}\pi$, $y_{\min} = \sqrt{2}$ pro $x = \dfrac{\pi}{4}$,

   b) $y_{\max} = 1$ pro $x = 0$, $y_{\min} = -1$ pro $x = \pi$,

   c) $y_{\max} = \sqrt{2}$ pro $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, k celé č., $y_{\min} = -\sqrt{2}$ pro $x = \dfrac{5}{4}\pi + 2k\pi$, k celé č.

6. Určete absolutní extrémy funkce $y = x - 2\ln x$ na intervalu $< 1, e >$.

   a) $y_{\max} = 1$ pro $x = 1$, $y_{min} = 2 - 2\ln 2$ pro $x = 2$,

   b) $y_{\max} = 1$ pro $x = 1$, $y_{min} = e - 2$ pro $x = e$,

c) $y_{\max} = 2 - 2\ln 2$ pro $x = 2$, $y_{min} = 1$ pro $x = 1$.

7. Vypočtěte rozměry obdélníku o ploše 25 cm^2 tak, aby měl nejkratší úhlopříčku.

   a) a = 5 cm, b = 5 cm; b) a = 4,75 cm, b = 5,25 cm, c) a = 4,25 cm, b = 5,9 cm.

Výsledky testu

1. a); 2. b); 3. c); 4. b); 5. c); 6. a); 7. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 5 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 4.1. znovu.