3.4. Funkce daná parametricky, polárně a implicitně

Výklad

Definice 3.4.1.

Nechť jsou dány funkce $\varphi(t), \psi(t)$ definované na $M \subset \boldsymbol{R}$ a nechť $\varphi(t)$ je prostá na M.

Složená funkce $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ definovaná na H_φ se nazývá **funkce daná parametricky** rovnicemi $x = \varphi(t),\ y = \psi(t), t \in M$.

Poznámky

1. Funkce $\varphi^{-1}(x)$ inverzní k prosté funkci $\varphi(t)$ existuje.

2. Derivace funkcí $\varphi(t), \psi(t)$ podle parametru t budeme značit $\dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t)$.

Řešené úlohy

Příklad Rovnicemi $x = r\cos t,\ y = r\sin t, t \in <0, \pi>, r > 0$ je dána funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}, x \in <-r, r>$, jejímž grafem je „horní“ polovina kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.

Umocníme obě rovnice parametrického zadání a dostaneme $x^2 = r^2\cos^2 t,\ y^2 = r^2\sin^2 t$.

Tyto rovnice sečteme:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2.$$

Všimněme si, že $\dot{x} = -r\sin t < 0$ pro $t \in <0, \pi>$ a je tedy ryze monotónní (klesající).

Příklad Funkce daná parametricky rovnicemi $x = e^t + t^3 - 1,\ \ y = \ln t + \sin t, t \in \boldsymbol{R}$ není elementární, protože z rovnice $x = e^t + t^3 - 1$ nedovedeme t vyjádřit. Funkce $\varphi^{-1}(x), x \in \boldsymbol{R}$ však existuje, protože $\dot{x} = e^t + 3t^2 > 0$ pro $t \in \boldsymbol{R}$, tj. $x = e^t + t^3 - 1$ je rostoucí pro $t \in \boldsymbol{R}$.

Poznámka

Zejména pro případy, kdy z rovnic $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ *nelze vyjádřit* $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ *musíme umět určit derivaci* y' *podle následující věty.*

Výklad

Věta 3.4.1. Nechť je funkce $f(x)$ dána parametricky rovnicemi $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in M$ a nechť na M existují derivace $\dot{\varphi}(t),\dot{\psi}(t)$, kde $\dot{\varphi}(t)\neq 0$ na M. Pak v bodě $x_0\in H_\varphi$ existuje derivace

$$f'(x_0)=\frac{\dot{\psi}(t_0)}{\dot{\varphi}(t_0)},\ \text{kde}\ \varphi(t_0)=x_0.$$

Důkaz: Podle definice 3.4.1. je $f(x)=\psi(\varphi^{-1}(x))$. Podle vět o derivaci složené funkce (3.2.2) a inverzní funkce (3.2.3) dostaneme

$$f'(x_0)=(\psi(\varphi^{-1}(x_0)))'=\dot{\psi}(\varphi^{-1}(x_0)).(\varphi^{-1}(x_0))'=\dot{\psi}(t_0).\frac{1}{\dot{\varphi}(t_0)}=\frac{\dot{\psi}(t_0)}{\dot{\varphi}(t_0)}.$$

Řešené úlohy

Příklad: Vypočtěte derivaci funkce dané parametricky rovnicemi

$x=e^t+t^3-1,\ y=\ln t+\sin t.$

Řešení: Podle věty 3.4.1 platí $f'(x)=\dfrac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}=\dfrac{\frac{1}{t}+\cos t}{e^t+3t^2}=\dfrac{1+t\cos t}{t(e^t+3t^2)}$, kde $x=e^t+t^3-1.$

Poznámka

Derivace $f'(x)$ *je funkce daná parametricky rovnicemi* $x=\varphi(t),\ y'=\dfrac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}, t\in M$. *Podle věty 3.4.1 můžeme určit druhou derivaci*

$$y''=\left(\frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}\right)^{\cdot}.\frac{1}{\dot\varphi(t)}=\frac{\ddot\psi(t)\dot\varphi(t)-\dot\psi(t)\ddot\varphi(t)}{(\dot\varphi(t))^3},\quad kde\ \ x=\varphi(t).$$

Podobně bychom mohli podle věty 3.4.1 určit vyšší derivace funkce dané parametricky.

Řešené úlohy

Příklad: Určete druhou derivaci funkce $x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in<0,\pi>$.

Řešení: $y'=\dfrac{\dot y}{\dot x}=\dfrac{\cos t}{-\sin t}=-\operatorname{cotg} t,\ x=\cos t,\quad y''=\left(\dfrac{\dot y}{\dot x}\right)^{\cdot}.\dfrac{1}{\dot x}=\dfrac{1}{\sin^2 t}.\dfrac{1}{-\sin t}=-\dfrac{1}{\sin^3 t},$

kde $x=\cos t$.

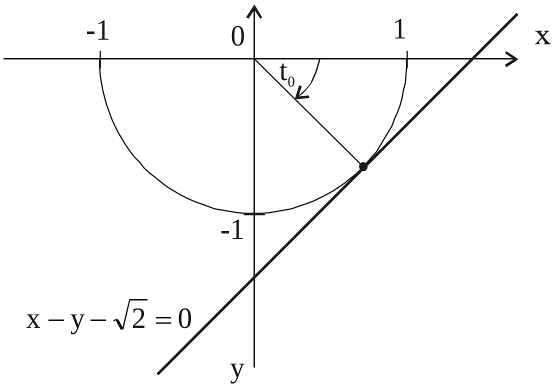
Příklad Určete rovnici tečny k půlkružnici $x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in<-\pi,0>$ v bodě $t_0=-\dfrac{\pi}{4}$.

Řešení: Rovnice tečny je $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Dostaneme $x_0=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt2}{2},\ y_0=\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt2}{2}$ a $f'(x)=-\operatorname{cotg} t$, tj.

$f'(x_0)=-\operatorname{cotg} t_0=-(-1)=1.$

Dosadíme do rovnice tečny a dostaneme $y+\dfrac{\sqrt2}{2}=x-\dfrac{\sqrt2}{2}$, tj. $x-y-\sqrt2=0$, viz obr. 43.



Obr. 43

Výklad

Definice 3.4.2.

Nechť je dána funkce $g(\varphi) > 0, \varphi \in M$ taková, že funkce $g(\varphi)\cos\varphi,$ kde $\varphi \in M$, je prostá. Pak **funkce** $f(x)$ daná parametricky rovnicemi $x = g(\varphi)\cos\varphi,\ y = g(\varphi)\sin\varphi,\ \varphi \in M$ je **dána polárně rovnicí** $\rho = g(\varphi),\ \varphi \in M$.

Řešené úlohy

Příklad: Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$, která je dána polárně rovnicí

$$\rho = \frac{1}{\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)},\quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ v bodě } \varphi_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Řešení: Parametrické rovnice jsou

$$x = \frac{\cos\varphi}{\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)},\qquad y = \frac{\sin\varphi}{\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}.$$

Rovnice tečny je $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Vypočítáme hodnoty $x_0 = \dfrac{8\sqrt{2}}{\pi^2}$ a $y_0 = \dfrac{8\sqrt{2}}{\pi^2}$.

Dále určíme derivaci

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{\sin\varphi}{\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)}\right)'}{\left(\dfrac{\cos\varphi}{\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)}\right)'} = \frac{\cos\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\varphi - \varphi^2\right) - \sin\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\varphi\right)}{-\sin\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\varphi - \varphi^2\right) - \cos\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\varphi\right)}.$$

Nyní určíme $f'(x)$. Dostaneme

$$f'\left(\frac{8\sqrt{2}}{\pi^2}\right) = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}.\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi^2}{16}\right) - 0}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}.\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi^2}{16}\right) - 0} = -1.$$

Rovnice tečny má tvar $y - \dfrac{8\sqrt{2}}{\pi^2} = -\left(x - \dfrac{8\sqrt{2}}{\pi^2}\right)$, tj. $y = -x + \dfrac{16\sqrt{2}}{\pi^2}$.

Poznámka

O derivaci funkce dané implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$, kde $F(x, y)$ je výraz obsahující proměnnou x a funkci $y = y(x)$, budeme hovořit v textu Diferenciální počet funkcí více proměnných (Matematika II). Nyní si způsob, jak derivovat funkci danou implicitně ukážeme pouze na příkladech. Musíme mít na paměti, že y ve výrazu $F(x, y)$ je y funkce proměnné x, která není z rovnice vyjádřena a její derivaci tedy označíme jako obvykle y'.

Řešené úlohy

Příklad: Určete derivaci funkce $y + xy - x\sin y = 0$.

Řešení:

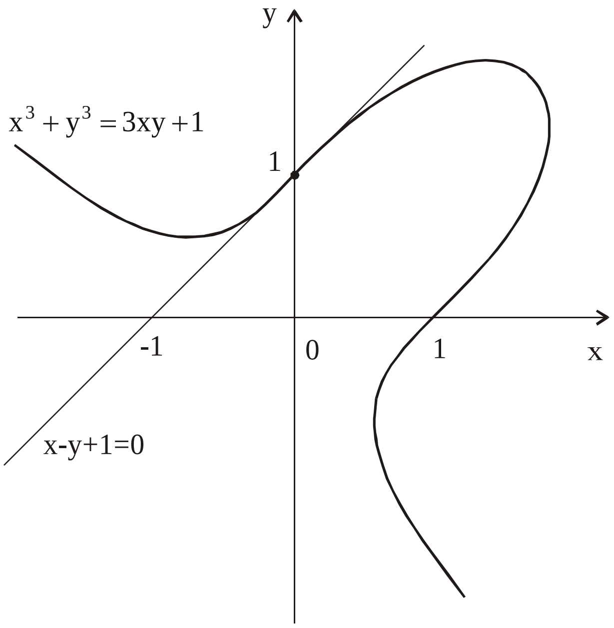
$$y' + (xy)' - (x\sin y)' = 0,$$
$$y' + y + xy' - \sin y - x\cos y y' = 0,$$
$$y'(1 + x - x\cos y) = \sin y - y,$$
$$y' = \frac{\sin y - y}{1 + x - x\cos y}.$$

Příklad: Určete rovnici tečny ke křivce $x^3 + y^3 = 3xy + 1$ v bodě $T = (0,1)$.

Řešení: Rovnice tečny má tvar $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Určíme derivaci funkce dané implicitně rovnicí $x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$. Dostaneme

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0,\quad y^2 y' - xy' = y - x^2$$
$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x},\quad y'(0,1) = 1.$$

Rovnice tečny je $y - 1 = x$, tj. $x - y + 1 = 0$, viz obr. 44.



Obr. 44

Kontrolní otázky

1. Funkce $f(x)$ je dána parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Označení $\dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t)$ znamenají derivace podle

a) proměnné x,

b) parametru t,

c) proměnné y.

2. Funkce $f(x)$ je dána parametricky rovnicemi $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$ pak pokud existuje derivace $f'(x_0),$ má tvar

a) $f'(x_0) = \dfrac{\dot\varphi(t_0)}{\dot\psi(t_0)},$

b) $f'(x_0) = \dfrac{\dot\varphi(t_0)\psi(t_0) - \varphi(t_0)\dot\psi(t_0)}{[\varphi(t_0)]^2},$

c) $f'(x_0) = \dfrac{\dot\psi(t_0)}{\dot\varphi(t_0)}.$

3. Funkce $y = f(x)$ je dána parametricky rovnicemi $x = \varphi(t),\ y = \psi(t).$ Druhá derivace y'' má tvar

a) $y'' = \dfrac{(y')^{\cdot}}{\dot x},$

b) $y'' = (y')^{\cdot},$

c) $y'' = \dfrac{\ddot y}{\ddot x}.$

4. Funkce $f(x)$, která je dána polárně rovnicí $\rho = g(\varphi),$ má parametrické zadání

a) $x = g(\varphi)\sin\varphi,\ \ y = g(\varphi)\cos\varphi,$

b) $x = g(\varphi)\cos\varphi,\ \ y = g(\varphi),$

c) $x = g(\varphi)\cos\varphi,\ \ y = g(\varphi)\sin\varphi.$

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. c); 3. a); 4. c).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte první derivace funkcí daných parametrickými rovnicemi:

a) $x = t^3 + 3t + 1,\ \ y = 3t^5 + 5t^3 + 1$, b) $x = e^{-t}\sin t,\ \ y = e^t\cos t$,

c) $x=\sin^2 t,\ y=\cos^2 t$, d) $x=2\cos^3 t,\ y=4\sin^3 t$,

e) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$, f) $x=\operatorname{tg} t,\ y=\cos^2 t$.

2. Sestavte rovnice tečny a normály k asteroidě $x=\sqrt{2}\cos^3 t,\quad y=\sqrt{2}\sin^3 t$ v bodě $t=\dfrac{\pi}{4}$.

3. Sestavte rovnice tečny a normály k cykloidě $x=t-\sin t,\quad y=1-\cos t$ v bodě $t=\dfrac{\pi}{2}$.

4. Sestavte rovnice tečny a normály ke křivce $x=2e^t,\quad y=e^{-t}$ v bodě $t=0$.

5. Sestavte rovnice tečny a normály ke křivce $x=\sin t,\quad y=\cos 2t$ v bodě $t=\dfrac{\pi}{6}$.

6. Najděte směrnici tečny k elipse $x=3\cos t,\quad y=4\sin t$ v bodě $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},2\sqrt{2}\right)$.

7. Najděte směrnici tečny k elipse $x=2\cos t,\quad y=\sin t$ v bodě $\left(1,\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.

8. Najděte směrnici tečny ke křivce $x=t-t^4,\quad y=t^2-t^3$ v bodě $(0,0)$.

9. Ukažte, že funkce daná parametrickými rovnicemi $x=\dfrac{1+t}{t^3},\quad y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{2}{t}$ vyhovuje rovnici $xy'^3=1+y'\quad (y'=\dfrac{dy}{dx})$.

10. Vypočtěte derivaci $(y'=\dfrac{dy}{dx})$ funkcí daných implicitně rovnicí

a) $y^3-3y+2x=0$, b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$, c) $2y\ln y=x$,

d) $x^3+y^3-3axy=0$, e) $\cos(xy)=x$, f) $y=1+xe^y$,

g) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, h) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, i) $y=x+\operatorname{arctg} y$.

11. Sestavte rovnice tečny a normály ke křivce $x^2+2xy^2+3y^4=6$ v bodě $T=[1,-1]$.

12. Sestavte rovnice tečny k hyperbole $8x^2-9y^2=72$ v bodě $T=[-9,-8]$.

13. Sestavte rovnice tečen k hyperbole $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{7}=1$ kolmých k přímce $2x+4y-3=0$.

14. Znázorněte křivky a vypočtěte derivace $f'(x)$, je-li funkce $f(x)$ dána polárně rovnicí:

a) $\rho=3\varphi,\quad \varphi\in(0,\infty)$ (Archimédova spirála),

b) $\rho=2\sin\varphi,\quad \varphi\in<0,\pi>$ (kružnice),

c) $\rho=\dfrac{\pi}{\varphi},\quad \varphi\in(0,\infty)$ (hyperbolická spirála),

d) $\rho = 2(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in < 0, 2\pi >$ (kardioida),

e) $\rho = e^{\varphi}$, $\varphi \in (0, \infty)$ (logaritmická spirála).

15. Určete rovnici tečny ke grafu Archimédovy spirály, která je dána polárně rovnicí $\rho = 2\varphi$, $\varphi \in (0, \infty)$, v bodě $\varphi_0 = \pi$.

16. Určete rovnici tečny ke grafu kardioidy, která je dána polárně rovnicí $\rho = 2(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in < 0, 2\pi >$, v bodě $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

17. Pro které φ nabývá funkce, která je dána polárně rovnicí $\rho = e^{\varphi}$, $\varphi \in (0, \pi)$, maximální hodnoty y?

18. Pro která φ je tečna ke grafu kardioidy, která je dána polárně rovnicí $\rho = 2(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in < 0, 2\pi >$, rovnoběžná s osou x?

19. Určete rovnici asymptoty grafu hyperbolické spirály, která je dána polárně rovnicí $\rho = \dfrac{\pi}{\varphi}$, $\varphi \in (0, \infty)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $y' = 5t^2$; b) $y' = e^{2t}$; c) $y' = -1$ $(0 < x < 1)$; d) $y' = -2\,\mathrm{tg}\, t$; e) $y' = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$; f) $y' = -2\sin t\cos^3 t$. **2.** $x+y-1=0$; $x-y=0$. **3.** $x-y+2-\dfrac{\pi}{2}=0$; $x+y-\dfrac{\pi}{2}=0$. **4.** $x+2y-4=0$; $2x-y-3=0$. **5.** $4x+2y-3=0$; $2x-4y+1=0$. **6.** $-\dfrac{4}{3}$. **7.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **8.** 0 a $\dfrac{1}{3}$. **10.** a) $\dfrac{2}{3(1-y^2)}$; b) $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; c) $\dfrac{1}{2(1+\ln y)}$; d) $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$; e) $-\dfrac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$; f) $\dfrac{e^y}{1-xe^y}$; g) $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$; h) $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$; i) $\dfrac{1+y^2}{y^2}$. **11.** $x-4y-5=0$; $4x+y-3=0$. **12.** $x-y+1=0$. **13.** $2x-y+1=0$; $2x-y-1=0$. **14.** a) $f'(x) = \dfrac{\varphi\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}$; b) $f'(x) = \dfrac{2\cos\varphi\sin\varphi}{2\cos^2\varphi-1}$; c) $f'(x) = \dfrac{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi+\varphi\sin\varphi}$; d) $f'(x) = -\dfrac{2\cos^2\varphi+\cos\varphi-1}{\sin\varphi(2\cos\varphi+1)}$; e) $f'(x) = \dfrac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}$. **15.** $y = \pi(x+2\pi)$. **16.** $x-y+2=0$. **17.** $\varphi = \dfrac{3}{4}\pi$. **18.** $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_3 = \dfrac{5\pi}{3}$. **19.** $y = \pi$ pro $\varphi \to 0$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte derivaci funkce dané parametricky rovnicemi $x = a\sin t,\ \ y = b\cos t$.

   a) $-\dfrac{b}{a}\operatorname{cotg} t$, b) $-\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t$, c) $-b\sin t$.

2. Vypočtěte derivaci funkce dané parametricky rovnicemi $x = \ln t,\ \ y = \dfrac{1}{2}(t + \dfrac{1}{t})$.

   a) $\dfrac{1}{2}(t - \dfrac{1}{t})$, b) $\dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{t^2})$, c) $\dfrac{2t}{t^2 - 1}$.

3. Vypočtěte derivaci funkce dané parametricky rovnicemi $x = 1 + 3\cos t,\ y = 4 + 3\sin t$

   v bodě $t = \dfrac{\pi}{4}$.

   a) 1, b) 0, c) -1.

4. Sestavte rovnici tečny ke křivce $x = e^{2t},\ y = e^{3t}$ v bodě $t = 0$.

   a) $3x - 2y - 1 = 0$, b) $2x + 3y - 1 = 0$, c) $2x + y - 3 = 0$.

5. Sestavte rovnici normály ke křivce $x = 2t^3 - 9t,\ \ y = t^2 + t$ v bodě $t = 1$.

   a) $x + y - 5 = 0$, b) $x + y + 5 = 0$, c) $x - y + 9 = 0$.

6. Vypočtěte 2. derivaci y'' funkce dané parametricky

   rovnicemi $x = a(t + 1),\ \ y = at^3$.

   a) $3at^2$, b) $\dfrac{1}{3t^2}$, c) $\dfrac{6}{a}t$.

7. Vypočtěte derivaci funkce $f(x)$, je-li dána polárně rovnicí $\rho = e^{\varphi}$.

   a) $-\operatorname{cotg}\varphi$, b) $\dfrac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$, c) $\dfrac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\sin\varphi - \cos\varphi}$.

8. Sestavte rovnici tečny ke grafu funkce, která je dána polárně rovnicí $\rho = \sin\varphi$ v bodě

   $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

   a) $x = 1$, b) $y = 1$, c) $x - y + 1 = 0$.

9. Vypočtěte derivaci y' funkce dané implicitně rovnicí $x\sin y + y\sin x = 0$.

   a) $-\dfrac{y\cos x + \sin y}{x\cos y + \sin x}$, b) $-\dfrac{\sin y}{\sin x}$, c) $-\dfrac{y\cos x + \sin y}{\sin x}$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. c); 4. a); 5. c); 6. c); 7. b); 8. b); 9. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 6 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.4. znovu.