

3.3. Derivace základních elementárních a elementárních funkcí



Předpokládané znalosti



V následujících úvahách budeme užívat vztahy známé ze střední školy a vztahy uvedené v předcházejících kapitolách tohoto textu. Některé z nich připomeneme.

3.3.1. Exponenciální funkce



Výklad



Pro odvození vzorců budeme užívat následující známé vztahy:

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1} e^{x_2}, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad a^x = e^{x \ln a}, \quad \text{pro } x \in \mathbf{R} \text{ a } a \in (0, \infty) \setminus \{1\}.$$

Dostaneme:

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \cdot \ln a, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

3.3.2. Logaritmické funkce



Výklad



Užitím vztahu pro derivaci inverzní funkce pro funkci $y = \ln x$, tj. $x = e^y$ a funkci $y = \log_a x$, tj. $x = a^y$, $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, dostaneme:

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}, \quad \text{pro } x \in (0, \infty),$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}, \quad \text{pro } x \in (0, \infty).$$

3.3.3. Mocninné funkce

Výklad

Užijeme vztahu $x^r = e^{r \ln x}$, $x \in (0, \infty)$, $r \in \mathbf{R}$.

Pak dostaneme: $(x^r)' = (e^{r \ln x})' = e^{r \ln x} \cdot (r \ln x)' = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r \cdot x^{r-1}$, pro $x \in (0, \infty)$.

Jestliže je $r \in \mathbf{N}$, resp. $-r \in \mathbf{N}$, resp. $r = \frac{1}{n}$, kde $n \in \mathbf{N}$, pak vzorec $(x^r)' = r x^{r-1}$ platí pro $x \in \mathbf{R}$, resp. $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, resp. pro n liché pro $x \in \mathbf{R}$ a pro n sudé pro $x \in (0, \infty)$.

3.3.4. Goniometrické funkce

Výklad

Připomeneme vztahy: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $x \in \mathbf{R}$,

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2, \quad \cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2,$$

$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$, $x \in \mathbf{R}$. Nejprve dokážeme, že platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{h}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 0.$$

Nyní odvodíme vzorce:

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

$$(\cos x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = -\sin x, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

pro $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}$,

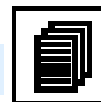
$$(\cot g x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

3.3.5. Cyklometrické funkce



Výklad



Užitím vztahu pro derivaci inverzní funkce pro funkce $y = \arcsin x$, tj. $x = \sin y$,

$y = \arccos x$, tj. $x = \cos y$, $y = \arctg x$, tj. $x = \tg y$ a $y = \operatorname{arccotg} x$, tj. $x = \cot g y$ dostaneme:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ pro } x \in (-1,1),$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ pro } x \in (-1,1),$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{(\tg y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{x^2 + 1}, \text{ pro } x \in \mathbf{R},$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{1}{(\cot g y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{x^2 + 1}, \text{ pro } x \in \mathbf{R}.$$

Přehled vzorců

1. $(c)' = 0, c \in \mathbf{R}$,

2. $(u+v)' = u' + v'$,

3. $(cu)' = c \cdot u'$,

4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$,

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$,

6. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$,

7. $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$,

8. $(e^x)' = e^x$,

9. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,

10. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,

11. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$,

12. $x^r = r x^{r-1}$,

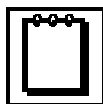
13. $(\sin x)' = \cos x$,

14. $(\cos x)' = -\sin x$,

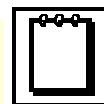
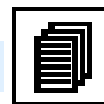
15. $(\tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,

$$16. (\cotg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad 17. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 18. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

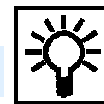
$$19. (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad 20. (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

**Poznámka**

Intervaly, v nichž derivace existují, jsou uvedeny v předchozím textu.

**3.3.6. Elementární funkce****Výklad**

Užitím uvedených vzorců můžeme derivovat elementární funkce. Nesmíme zapomenout, že $D_{y'} \subset D_y$.

**Řešené úlohy**

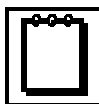
Příklad: Určete derivaci funkce $y = \ln(x^2 - 1)$.

Řešení: Určíme $D_y = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Označíme $g = x^2 - 1$. Podle vzorce 6 pro derivaci složené funkce dostaneme

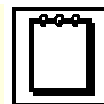
$$y' = \frac{1}{g} \cdot g' = \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Musíme si uvědomit, že funkce $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ má sice $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$. Definiční obor funkce

$y' = \frac{2x}{x^2 - 1}$ je však $D_{y'} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \subset D_y$.

**Poznámka**

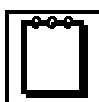
Při derivování budeme skutečnost, že $D_{y'} \subset D_y$ nadále předpokládat.

**Řešené úlohy**

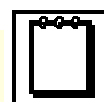
Příklad: Derivujte funkci $y = e^{\operatorname{tg}(\ln x^2)}$.

Řešení: Označme $u = x^2$, $v = \ln u$, $w = \operatorname{tg} v$, $z = e^w$. Užitím vzorce 6 dostaneme

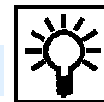
$$y' = (e^w)' \cdot (\operatorname{tg} v)' \cdot (\ln u)' \cdot (x^2)' = e^w \cdot \frac{1}{\cos^2 v} \cdot \frac{1}{u} \cdot 2x = e^{\operatorname{tg}(\ln x^2)} \cdot \frac{1}{\cos^2(\ln x^2)} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x.$$

**Poznámka**

V dalším textu již nebudeme jednotlivé složky složené funkce označovat.

**Výklad****Definice 3.3.1.**

Výraz $f(x)^{g(x)}$, kde $f(x) > 0$ pro $x \in D_f$ definujeme vztahem $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$.

**Řešené úlohy**

Příklad: Derivujte funkci $y = (x^2 + 1)^{\cos x}$.

Řešení: Položíme $y = e^{\cos x \ln(x^2 + 1)}$ a budeme derivovat jako složenou funkci:

$$y' = e^{\cos x \ln(x^2 + 1)} (-\sin x \ln(x^2 + 1) + \cos x \frac{2x}{1 + x^2}) = (x^2 + 1)^{\cos x} \left(\frac{2x}{1 + x^2} \cos x - \sin x \ln(x^2 + 1) \right).$$

Výklad

Definice 3.3.2.

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Definujme **n-tou derivaci** funkce $f(x)$ v bodě $x_0 \in D_f \cap D'_f$ indukci

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)} \right)'_{x=x_0},$$

kde $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Řešené úlohy

Příklad: Vypočítejte třetí derivaci funkce $y = \arcsin x$.

Řešení: Dostaneme

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'' = \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \right)' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y''' = \left((1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x \left(-\frac{3}{2} \right) (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-2x) \right) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + \frac{3x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$$

Poznámka

Bez důkazu uvedeme následující vztahy pro $n \in \mathbb{N}$:

$$(x^n)^{(n)} = n!, \quad (e^x)^{(n)} = e^x,$$

$$(\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x, \quad (\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \cos x,$$

$$(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x, \quad (\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x,$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n+1} (n-1)! x^{-n}.$$

**Kontrolní otázky**

1. Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 je definována
 - a) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$,
 - b) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,
 - c) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - x}{f(x_0) - x_0}$.
2. Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 geometricky znamená
 - a) směrnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 ,
 - b) směrnici sečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 ,
 - c) rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 ,
3. Rovnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 je
 - a) $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$,
 - b) $y - y_0 = -f'(x_0)(x - x_0)$,
 - c) $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
4. Existuje-li $f'(x_0)$, pak funkce $f(x)$ v bodě x_0
 - a) je spojitá,
 - b) nemusí být spojitá,
 - c) není spojitá.
5. Necht' existuje derivace složené funkce $f(g(x))$ v bodě x_0 . Pak platí:
 - a) $[f(g(x_0))] = f'(g'(x_0)) \cdot g'(x_0)$,
 - b) $[f(g(x_0))] = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$,
 - c) $[f(g(x_0))] = f'(g'(x_0))$.
6. Necht' $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. Pak je funkce $f(x)$ v (a, b)
 - a) rostoucí,
 - b) neklesající,
 - c) klesající.
7. Pro derivaci funkce $y = \ln x$ platí vzorec

a) $y' = \frac{1}{x \log a},$

b) $y' = \frac{1}{x},$

c) $y' = \frac{1}{a \ln x}.$

8. Pro derivaci funkce $y = \arccos x$ platí vzorec

a) $y' = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$

b) $y' = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$

c) $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

9. Pro derivaci funkce $y = \operatorname{arctg} x$ platí vzorec

a) $y' = \frac{1}{1+x^2},$

b) $y' = -\frac{1}{1+x^2},$

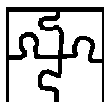
c) $y' = \frac{1}{1-x^2}.$

10. Funkci $f(x)g(x)$ můžeme přepsat

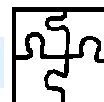
a) $f(x)^{g(x)} = e^{f(x) \ln g(x)},$

b) $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)},$

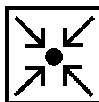
c) $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}.$



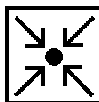
Odpovědi na kontrolní otázky



1. b); 2. a); 3. c); 4. a); 5. b); 6. c); 7. b); 8. c); 9. a); 10. b).



Úlohy k samostatnému řešení



1. Je dána funkce $y = f(x)$. Vypočtěte $f'(0)$ a $f'(-1)$ je-li:

a) $y = x^8$,

b) $y = x^{-4}$,

c) $y = \frac{2}{x}$,

d) $y = \sqrt[4]{x^5}$,

e) $y = 5\sqrt[5]{\frac{1}{x^3}}$,

f) $y = 14\sqrt[7]{x} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

2. Je dána funkce $y = f(x)$. Vypočtěte $f'(a)$ je-li:

a) $f(x) = ax^3 + a^2x^2 + a^3x$,

b) $f(x) = \frac{a^2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{a^3}{x\sqrt[3]{x}}$.

3. Je dána funkce $f(t) = \frac{t^2 - 5t - 1}{t^3}$. Vypočtěte:

a) $f(-1)$,

b) $f'(-1)$,

c) $f(2)$,

d) $f'(2)$,

e) $f'(0)$,

f) $f'\left(\frac{1}{a}\right)$.

4. Vypočtěte derivace funkcí:

a) $y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x$,

b) $y = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2$,

c) $y = x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[9]{x}$,

d) $y = 4\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^5} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$,

e) $y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$,

f) $y = \sqrt[3]{x^2\sqrt{x^4\sqrt{x^3}}}$.

5. Vypočtěte derivace součinu funkcí:

a) $y = x^2 \sin x$,

b) $y = 2x \cotg x$,

c) $y = \frac{(1+x^2) \arctg x - x}{2}$,

d) $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$,

e) $y = (x-1)e^x$,

f) $y = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$,

g) $y = \frac{e^x}{x^2}$,

h) $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$,

i) $y = x \sin x \arctg x$.

6. Vypočtěte derivace podílu funkcí:

a) $y = \frac{x+1}{x-1}$,

b) $y = \frac{x}{x^2+1}$,

c) $y = \frac{3t^2+1}{t-1}$,

d) $y = \frac{1-x^3}{1+x^3}$,

e) $y = \frac{\sin x}{1-\cos x}$,

f) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$,

g) $y = \frac{\tg x}{x}$,

h) $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$,

i) $y = \frac{\cos x}{e^x}$.

7. Vypočtete derivace složených funkcí:

- a) $y = (1-5x)^4$, b) $y = \frac{1}{(1-x^2)^5}$, c) $y = \sqrt{1-x^2}$,
 d) $y = \sin^2 x$, e) $y = \cos^4 x$, f) $y = \sin \sqrt{x}$,
 g) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, h) $y = \ln(x^2 - 4x)$, i) $y = \ln \sin x$,
 j) $y = e^{\sqrt{x+1}}$, k) $y = e^{\arcsin 2x}$, l) $y = \sin(e^{x^2+3x+2})$.

8. Vypočtete derivace funkcí:

- a) $y = (1+\sqrt[3]{x})^3$, b) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$, c) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,
 d) $y = \sqrt[3]{(2x+3)^2}$, e) $y = \sqrt[3]{4+2\sqrt{3x+3}}$, f) $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$,
 g) $y = \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}}$, h) $y = \frac{x}{3(x^5+1)} + (x^3-1)(x^3+1)$, i) $y = x^5 \sqrt[3]{x^6-8}$.

9. Vypočtete derivace funkcí:

- a) $y = \sin \frac{1}{x}$, b) $y = \cos^3 4x$, c) $y = \sin \sqrt{1+x^2}$,
 d) $y = (1+\sin^2 x)^4$, e) $y = \sqrt{1+2 \operatorname{tg} x}$, f) $y = \operatorname{tg} \frac{1+x}{x}$,
 g) $y = 3 \cotg x + \cotg^3 x$, h) $y = \cos \sqrt{\frac{1}{1+x}}$, i) $y = \frac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x$.

10. Vypočtete derivace funkcí:

- a) $y = \ln \frac{5+4x}{3+7x}$, b) $y = \ln \sin 2x$, c) $y = x^3 \log_2 x$,
 d) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, e) $y = \sqrt{\ln x^2}$, f) $y = \ln \cos \sqrt{e^x+1}$,
 g) $y = \ln \frac{x}{1-x^4}$, h) $y = \ln \arccos 2x$, i) $y = \operatorname{arctg} [\ln(ax+b)]$.

11. Vypočtete derivace funkcí:

- a) $y = 4^x - x^4$, b) $y = \frac{\cos x}{e^x}$, c) $y = 2^{\frac{1}{\cos x}}$,
 d) $y = e^{2x}(x^2+2x-2)$, e) $y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$, f) $y = e^{\sqrt{\cos x}}$,
 g) $y = e^{\frac{x}{\ln x}}$, h) $y = e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x}-1)$, i) $y = 2^{\cos^3 x - 3 \cos x}$.

12. Vypočtete derivace funkcí:

- a) $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, b) $y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$, c) $y = \arccos^3 5x$,

$$\begin{array}{lll} \text{d)} \quad y = \operatorname{arccotg} \frac{1}{1+x^2}, & \text{e)} \quad y = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-2}{4}}, & \text{f)} \quad y = \operatorname{arctg}^4 \sqrt{x}, \\ \text{g)} \quad y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1+x^2}), & \text{h)} \quad y = \arcsin \frac{2}{x}, & \text{i)} \quad y = \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{1+\sin x}. \end{array}$$

13. Vypočtěte derivace funkcí:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad y = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^4, & \text{b)} \quad y = \ln \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}, \\ \text{c)} \quad y = \arccos(2e^{2x}-1), & \text{d)} \quad y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} - \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \\ \text{e)} \quad y = e^x \sqrt{1-e^{2x}} - \arcsin e^x, & \text{f)} \quad y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}, \\ \text{g)} \quad y = x^2 e^{x^2} \ln x, & \text{h)} \quad y = 2(\operatorname{tg} \sqrt{x} - \sqrt{x}). \end{array}$$

14. Vypočtěte derivace funkcí (užijte definice 3.3.1):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad y = x^x, & \text{b)} \quad y = x^{x^2}, & \text{c)} \quad y = x^{e^x}, \\ \text{d)} \quad y = x^{\sin x}, & \text{e)} \quad y = x^{x^x}, & \text{f)} \quad y = \left(\frac{a}{x} \right)^x, \\ \text{g)} \quad y = x^{\ln x}, & \text{h)} \quad y = (x^2+1)^{\operatorname{arctg} x}, & \text{i)} \quad y = (\ln x)^x. \end{array}$$

15. Vypočtěte derivace vyššího řádu:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad y = x^2 - 3x + 2; \quad y''(x) = ?, & \text{b)} \quad y = 1 - x^2 - x^4; \quad y'''(x) = ?, \\ \text{c)} \quad f(x) = (x-1)^5; \quad f'''(3) = ?, & \text{d)} \quad f(x) = e^{2x-1}; \quad f''(0) = ?, \\ \text{e)} \quad f(x) = \frac{1}{1-x}; \quad f^{(5)}(x) = ?, & \text{f)} \quad f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad f''(1) = ?, \\ \text{g)} \quad y = x^3 \ln x; \quad y^{(4)}(x) = ?, & \text{h)} \quad y = \cos^2 x; \quad y'''(x) = ?. \end{array}$$

16. Vypočtěte druhé derivace funkcí:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad y = x e^{x^2}, & \text{b)} \quad y = \frac{1}{1+x^3}, & \text{c)} \quad y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x, \\ \text{d)} \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}, & \text{e)} \quad y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), & \text{f)} \quad y = e^{\sqrt{x}}, \\ \text{g)} \quad y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x, & \text{h)} \quad y = \frac{1-x}{1+x}, & \text{i)} \quad y = x^x. \end{array}$$

17. Vypočtěte derivace vyššího řádu:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad y = \frac{x}{6(x+1)}; \quad y''' = ?, & \text{b)} \quad y = \ln^2 x; \quad y''' = ?, \\ \text{c)} \quad y = a^x; \quad y^{(5)} = ?, & \text{d)} \quad y = x^4 \ln x; \quad y^{(5)} = ?, \\ \text{e)} \quad y = \operatorname{arctg} x; \quad y''' = ?, & \text{f)} \quad y = x e^x; \quad y^{(6)} = ?. \end{array}$$

18. Dokažte, že funkce $y = e^x \sin x$ vyhovuje rovnici
 $y'' + 2y' + 2y = 0$.

19. Dokažte, že funkce $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ vyhovuje rovnici

$$y''' - 13y' - 12y = 0.$$

20. Dokažte, že funkce $y = x + \sin 2x$ vyhovuje rovnici

$$y'' + 4y = 4x.$$

21. Které z následujících funkcí vyhovují rovnici $y'' - 4y' + 4y = 0$:

a) $y = e^{2x}$

b) $y = e^{-2x}$

c) $y = xe^{2x}$

d) $y = e^{2x} - xe^{2x}$

e) $y = e^{2x} + xe^x$

f) $y = \cos 2x$

g) $y = x^2 e^{2x}$

h) $y = e^{2x}(2x+1)$

i) $y = e^{2x}(ax+b)$

22. Jaký úhel s osou x svírá tečna k parabole $y = x^2 - 3x + 5$, vedená jejím bodem $T = [2, 3]$?

Napište rovnici této tečny.

23. Na křivce $y = x^2(x-2)^2$ nalezněte body, v nichž jsou její tečny rovnoběžné s osou x .

24. Ve kterých bodech křivky $y = x^3 + x - 2$ jsou tečny k této křivce rovnoběžné s přímkou $y = 4x - 1$?

25. Napište rovnici tečny ke křivce $y = \arctg x$ v jejím bodě $[1, ?]$.

26. Pod jakým úhlem protíná křivka $y = \log x$ osu x ?

27. Napište rovnice tečen ke křivce $y = x - \frac{1}{x}$ v průsečících křivky s osou x .

28. Napište rovnici tečny ke křivce $y = x^3 + 3x^2 - 5$ kolmou k přímce $2x - 6y + 1$.

29. Napište rovnici tečny a normály k parabole $x^2 = 4ay$ v jejím bodě $[x_0, y_0]$.

30. Napište rovnici normály ke křivce $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ v jejím bodě $[3, ?]$.

31. Napište rovnici tečny a normály ke křivce $y = -\sqrt{x} + 2$ v průsečíku této křivky s osou 1. kvadrantu.

32. Pod jakými úhly se protínají křivky

a) $y = x - x^3$ a $y = 5x$, b) $y = x^3$ a $y = \frac{1}{x^2}$,

c) $y = \sin x$ a $y = \cos x$ ($0 < x < \pi$) d) $x^2 + y^2 = 8$ a $y^2 = 2x$.



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) 0 ; -8; b) neexistuje; 4; c) neexistuje; -2; d) 0; neexistuje; e) neexistuje; $-\frac{3}{5}$;
 f) neexistuje; 4. 2. a) $6a^3$; b) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{a^2} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{a}$. 3. a) -5; b) -8; c) $-\frac{7}{8}$; d) $\frac{19}{16}$;
 e) neexistuje; f) $3a^4 + 10a^3 - a^2$. 4. a) $(x^2 - 1)^2$; b) $x^3 - 2x$; c) $1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{9\sqrt[9]{x^8}}$;
 d) $\frac{8}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{15}{x^6} + \frac{10}{3x\sqrt[3]{x^2}}$; e) $\frac{-1}{2\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; f) $\frac{19}{12}\sqrt[12]{x^7}$. 5. a) $x(2\sin x + x\cos x)$;
 b) $y = 2(\cotg x - \frac{x}{\sin^2 x})$; c) $x \operatorname{arctg} x$; d) $x^2 e^x$; e) xe^x ; f) $t^2 \sin t$; g) $e^x \frac{x-2}{x^3}$;
 h) $3x^2 \ln x$; i) $\sin x \operatorname{arctg} x + x \cos x \operatorname{arctg} x + \frac{x \sin x}{1+x^2}$. 6. a) $-\frac{2}{(x-1)^2}$; b) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$;
 c) $\frac{3t^2 - 6t - 1}{(t-1)^2}$; d) $-\frac{6x^2}{(1+x^3)^2}$; e) $\frac{-1}{1-\cos x}$; f) $\frac{\sin x + \cos x - x(\cos x - \sin x)}{1 + \sin 2x}$;
 g) $\frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$; h) $-\frac{2}{x(1 + \ln x)^2}$; i) $-\frac{\sin x + \cos x}{e^x}$. 7. a) $-20(1-5x)^3$; b) $\frac{10x}{(1-x^2)^6}$;
 c) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$; d) $\sin 2x$; e) $-4\cos^3 x \sin x$; f) $\frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; g) $-\sin 4x$; h) $\frac{2x-4}{x^2-4x}$; i) $\cotg x$;
 j) $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$; k) $\frac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$; l) $\cos(e^{x^2+3x+2})e^{x^2+3x+2}(2x+3)$. 8. a) $\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$;
 b) $\frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$; c) $\frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$; d) $\frac{4}{3\sqrt[3]{2x+3}}$; e) $\frac{1+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}\sqrt[3]{(4+2\sqrt{3x}+3x)^2}}$;
 f) $\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$; g) $\frac{t-3}{\sqrt{(6t-t^2)^3}}$; h) $\frac{1-4x^5}{3(x^5+1)^2} + 6x^5$; i) $\frac{x^4(7x^6-40)}{\sqrt[3]{(x^6-8)^2}}$. 9. a) $-\frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2}$;
 b) $-12\cos^2 x \sin 4x$; c) $\frac{x \cos \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$; d) $4(1+\sin^2 x)^3 \sin 2x$; e) $\frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1+2 \operatorname{tg} x}}$;
 f) $\frac{-1}{x^2 \cos^2 \frac{1+x}{x}}$; g) $\frac{-3}{\sin^4 x}$; h) $\frac{\sin \sqrt{\frac{1}{1+x}}}{2\sqrt{(1+x)^3}}$; i) $\frac{2x \sin x}{\cos^3 x}$. 10. a) $\frac{-23}{(5+4x)(3+7x)}$;

b) $2 \cotg 2x$; c) $x^2(3 \log_2 x + \frac{1}{\ln 2})$; d) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; e) $\frac{1}{x\sqrt{\ln x^2}}$; f) $\frac{-e^x \operatorname{tg} \sqrt{e^x+1}}{2\sqrt{e^x+1}}$;

g) $\frac{1+3x^4}{x(1-x^4)}$; h) $\frac{-2}{\arccos 2x\sqrt{1-4x^2}}$; i) $\frac{a}{(ax+b)[1+\ln^2(ax+b)]}$. **11.** a) $4^x \ln 4 - 4x^3$;

b) $-e^{-x}(\sin x + \cos x)$; c) $2^{\frac{1}{\cos x}} \ln 2 \frac{\sin x}{\cos^2 x}$; d) $2e^{2x}(x^2+3x-1)$; e) $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$;

f) $-e^{\sqrt{\cos x}} \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$; g) $e^{\frac{x}{\ln x}} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$; h) $e^{\sqrt{2x}}$; i) $2^{\cos^3 x - 3 \cos x} 3 \sin^3 x \ln 2$.

12. a) $\arcsin x$; b) $\frac{-1}{x^2+1}$; c) $\frac{-15 \arccos^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}}$; d) $\frac{2x}{x^4+2x^2+2}$; e) $\frac{1}{\sqrt{-x^2+8x-12}}$;

f) $\frac{2 \arctg^3 \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$; g) $\frac{1}{2(1+x^2)}$; h) $\frac{-2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$; i) $\frac{-1}{2}$; **13.** a) $8 \frac{(x-1)^3}{(x+1)^5}$; b) $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$;

c) $\frac{-2e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; d) $\frac{-\arctg x}{x^2}$; e) $\frac{-2e^{3x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; f) $\frac{x \cos x}{\sin^2 x}$; g) $xe^{x^2}(2x^2 \ln x + 2 \ln x + 1)$;

h) $\frac{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. **14.** a) $x^x(\ln x + 1)$; b) $x^{x^2+1}(2 \ln x + 1)$; c) $x^{e^x} e^x(\ln x + \frac{1}{x})$;

d) $x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x})$; e) $x^{x^x} x^x(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x})$; f) $\left(\frac{a}{x}\right)^x \left(\ln \frac{a}{x} - 1\right)$; g) $2x^{\ln x - 1} \ln x$;

h) $y = (x^2 + 1)^{\arctg x - 1}(\ln(x^2 + 1) + 2x \arctg x)$; i) $(\ln x)^{x-1}(\ln x \ln(\ln x) + 1)$. **15.** a) 2;

b) $-24x$; c) 240; d) $\frac{4}{e}$; e) $\frac{120}{(1-x)^6}$; f) $-\frac{1}{2}$; g) $\frac{6}{x}$; h) $4 \sin 2x$. **16.** a) $2xe^{x^2}(2x^2+3)$;

b) $\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$; c) $2 \arctg x + \frac{2x}{x^2+1}$; d) $\frac{-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$; e) $\frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; f) $\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$;

g) $-\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; h) $\frac{4}{(x+1)^3}$; i) $x^{x-1}(x \ln^2 x + 2x \ln x + x + 1)$. **17.** a) $\frac{1}{(x+1)^4}$;

b) $\frac{4 \ln x - 6}{x^3}$; c) $a^x \ln^5 a$; d) $\frac{24}{x}$; e) $\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$; f) $e^x(x+6)$. **21.** a) ano; b) ne; c) ano;

d) ano; e) ne; f) ne; g) ne; h) ano; i) ano. **22.** $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $y = x+1$. **23.** $[0,0]$; $[1,1]$; $[2,0]$.

24. $[1, 0]$; $[-1, -4]$. 25. $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$. 26. $0,4096 \approx 23^\circ 28'$. 27. $y = 2x - 2$;

$y = 2x + 2$. 28. $3x + y + 6 = 0$. 29. $y - \frac{x_0^2}{4a} = \frac{x_0}{2a}(x - \frac{x_0}{2})$; $y - \frac{x_0^2}{4a} = -\frac{2a}{x_0}(x - x_0)$.

30. $3y - 27x + 79 = 0$. 31. $2y + x - 3 = 0$; $2x - y - 1 = 0$. 32. a) $0,5876 \approx 33^\circ 40'$; b) $\frac{\pi}{4}$;

c) $1,2309 \approx 70^\circ 32'$; d) $1,2470 \approx 71^\circ 34'$.

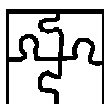


Kontrolní test



- Funkce $f(x) = \sqrt{x^5} - \sqrt[3]{x^4}$. Vypočtěte $f'(1)$.
a) $\frac{5}{6}$, b) $\frac{7}{6}$, c) $\frac{2}{3}$.
- Funkce $f(x) = \frac{1}{4x-7}$. Vypočtěte $f'(2)$.
a) -4 , b) -2 , c) -1 .
- Vypočtěte derivaci funkce $y = \frac{5x^4 - 3x^3 + 6x^2}{x^2}$.
a) $10x - 3$, b) $\frac{20x^3 - 9x^2 + 12x}{x^4}$, c) $\frac{20x^3 - 9x^2 + 12x}{2x}$.
- Vypočtěte derivaci součinu funkcí $y = x^3 \lg x - 3x^2 \ln x$.
a) $\frac{3x^2}{\cos^2 x} - 6$, b) $3x^2 \lg x - 6x \ln x$, c) $3x^2 \lg x + \frac{x^3}{\cos^2 x} - 6x \ln x - 3x$.
- Vypočtěte derivaci součinu funkcí $y = e^x \arcsin x + (2x^2 + 3) \cos x$.
a) $e^x \arcsin x + 4x \cos x$, b) $e^x \arcsin x + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} + 4x \cos x - (2x^2 + 3) \sin x$,
c) $\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} - (2x^2 + 3) \sin x$.
- Vypočtěte derivaci podílu funkcí $y = \frac{2 \sin x}{\sin x - \cos x}$.
a) $\frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$, b) $\frac{2 \cos x}{\sin x + \cos x}$, c) $\frac{2 \cos x}{(\sin x - \cos x)^2}$.
- Vypočtěte derivaci podílu funkcí $y = \frac{x \ln x}{1 + \ln x}$.
a) $(\ln x + 1) \cdot x$, b) $\frac{\ln^2 x + \ln x + 1}{(1 + \ln x)^2}$, c) $\frac{\ln x + 1}{(1 + \ln x)^2}$.

8. Vypočtete derivaci složené funkce $y = \sin^3 x + \ln(\sin x)$.
 a) $3\cos^2 x + \ln(\cos x)$, b) $3\cos^2 x + \frac{\cos x}{\sin x}$, c) $3\sin^2 x \cos x + \cotg x$.
9. Vypočtete derivaci složené funkce $y = e^{-x^2} + 3^{\cos x}$.
 a) $-2xe^{-x^2} - 3^{\cos x} \sin x \ln 3$, b) $e^{-x^2} - 3^{\cos x} \sin x$, c) $e^{-x^2} + 3^{\cos x} \ln 3$.
10. Vypočtete derivaci funkce $y = \operatorname{arctg} \sqrt{1+x} + \frac{\cos x}{e^x}$.
 a) $\frac{1}{2+x} - \frac{\sin x}{e^x}$, b) $\frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{\sin x}{e^x}$, c) $\frac{1}{(4+2x)\sqrt{1+x}} - \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$.
11. Vypočtete derivaci funkce $y = (\cos x)^{\sin x}$.
 a) $(-\sin x)^{\cos x}$, b) $(\cos x)^{\sin x} (\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x})$, c) $(\cos x)^{\sin x} \cdot \ln(\cos x)$.
12. Vypočtete derivaci funkce $y = (3-x)^x$.
 a) $(3-x)^x (\ln(3-x) - \frac{x}{3-x})$, b) $(3-x)^x \cdot \ln(3-x)$, c) $x(3-x)^{x-1}$.
13. Vypočtete druhou derivaci funkce $y = xe^{x^2}$ v bodě $x=1$.
 a) 0, b) $4e$, c) $10e$.
14. Zjistěte, ve kterém bodě má funkce $y = \frac{\ln x}{x}$ tečnu rovnoběžnou s osou x .
 a) 1, b) e , c) 0.
15. Napište rovnici tečny k funkci $y = x \ln x$ v bodě $x=1$.
 a) $x+y+1=0$, b) $x-y-1=0$, c) $x+y+e=0$.
16. Napište rovnici tečny k funkci $y = 2 + \operatorname{tg}^2 x$ v bodě $x=0$.
 a) $y=2$, b) $x-y+2=0$, c) $x=2$.



Výsledky testu



1. b); 2. a); 3. a); 4. c); 5. b); 6. a); 7. b); 8. c); 9. a); 10. c); 11. b); 12. a); 13. c); 14. b); 15. b); 16. a).



Průvodce studiem



Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 12 případech, pokračujte další kapitolou.
 V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.1. až 3.3. znovu.