

3. DERIVACE FUNKCE



Průvodce studiem



Derivace funkce je pojem, který je důležitý nejen v matematice, ale ve všech technických disciplínách. Její dokonalé pochopení a zvládnutí techniky derivování funkcí je základním předpokladem pro úspěšné studium na vysoké škole technického zaměření.

3.1. Definice derivace



Výklad



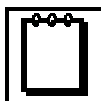
Definice 3.1.1.

Definujme funkci $f_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ pro $x \in D_f \setminus \{x_0\}$, kde $x_0 \in D_f \cap D'_f$.

Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_{x_0}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

říkáme, že **funkce** $f(x)$ **má v bodě** x_0 **derivaci** $f'(x_0)$.



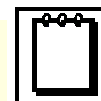
Poznámky

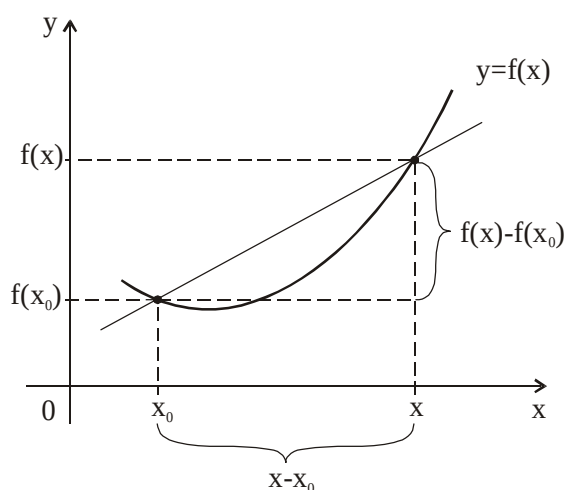
1. Funkce $f_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ znamená směrnici přímky, která prochází body

$(x_0, f(x_0)), (x, f(x))$, obr. 37. Limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{x_0}(x) = f'(x_0)$ je **směrnice tečny** ke grafu

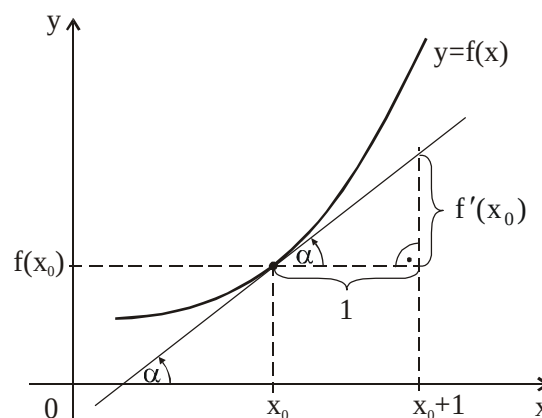
funkce $f(x)$ v bodě x_0 , obr. 38. Rovnice této tečny je $y - y_0 = \operatorname{tg} \alpha (x - x_0)$,

tj. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.





Obr. 37



Obr. 38

2. Předpokládejme, že $s(t)$ je velikost dráhy, kterou hmotný bod urazí za čas t . Výraz $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ pro $t \neq t_0$ znamená rychlost hmotného bodu, kterou se musí rovnoměrně pohybovat, aby se z polohy $s(t_0)$ dostal do polohy $s(t)$ za čas $t-t_0$. Derivace

$s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ určuje okamžitou rychlost bodu v čase t_0 .

3. Výraz $f(x)-f(x_0) = \Delta f(x_0)$ nazýváme **přírůstek funkce** a výraz $x-x_0 = \Delta x_0$ nazýváme **přírůstek argumentu**.

4. Limitu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_{x_0}(x)$, resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_{x_0}(x)$ nazýváme **derivací zprava**, resp. **derivací zleva** funkce $f(x)$ v bodě x_0 .

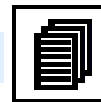
5. **Normála** ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 je přímka kolmá k tečně funkce $f(x)$ v bodě x_0 .

Pro její směrnici platí $\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Rovnice normály k funkci $f(x)$ v bodě x_0 má tvar

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$



Výklad



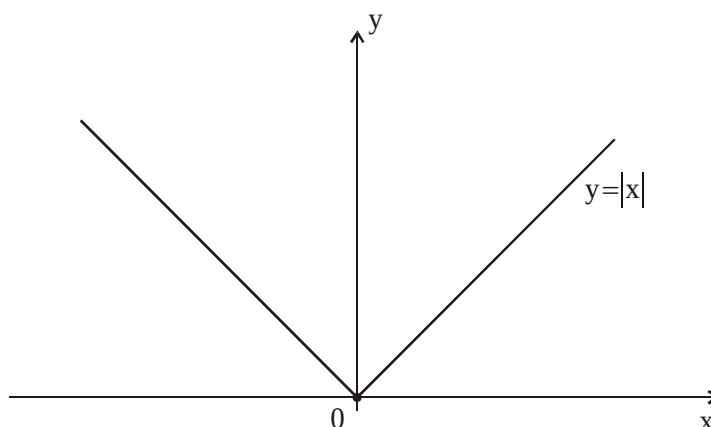
Věta 3.1.1. Necht' existuje $f'(x_0)$. Pak je funkce $f(x)$ v bodě x_0 spojitá.

Pro $x \neq x_0$ je $f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$. Dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_0 - x_0) + f(x_0) = f(x_0).$$

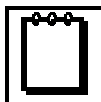
Příklad: Funkce $f(x) = |x|$ je spojitá pro $x \in \mathbf{R}$.

Pro $x_0 = 0$ je $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$, obr. 39. Derivace funkce $|x|$ v bodě 0 zprava je



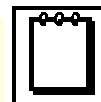
Obr. 39

různá od derivace zleva. Z toho vyplývá, že v tomto bodě derivace funkce $|x|$ neexistuje.



Poznámka

Z výše uvedeného příkladu plyne, že větu 3.1.1 nelze obrátit.



Výklad

Definice 3.1.2.

Funkci $f'(x)$ definovanou pro všechna $x \in D_f \cap D'_f$, v nichž derivace existuje, nazveme **derivací funkce $f(x)$** .

Řešené úlohy

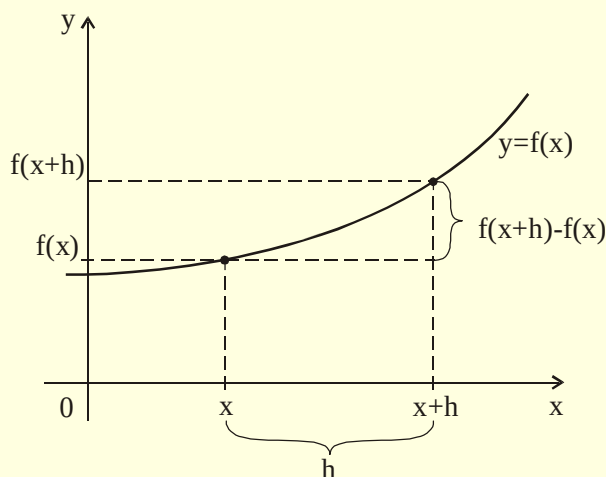
Příklad: Dokažte, že $c' = 0$, kde $c \in \mathbf{R}$.

Řešení:
$$c' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0.$$

Poznámka

Provedeme-li označení v definici 3.1.1 podle obr. 40, můžeme psát

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



Obr. 40



Řešené úlohy



Příklad: Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $(x^n)' = nx^{n-1}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Řešení: } (x^n)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + \binom{n}{n-1} x h^{n-1} + h^n - x^n \right) = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \dots + \binom{n}{n-1} x h^{n-2} + h^{n-1} \right) = \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}.
 \end{aligned}$$