2.4. Spojitost funkce

Cíle

Nejčastějšími funkcemi, s kterými se setkáváme v matematice i v jejích aplikacích, jsou funkce, jejichž limita v bodě x_0 je rovna funkční hodnotě v tomto bodě. Seznámíme se s vlastnostmi takových funkcí.

Výklad

Definice 2.4.1.
Jestliže $x_0 \in D_f \cap (D_f)'$ a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pak říkáme, že **funkce** $f(x)$ je **spojitá v bodě** x_0.

Věta 2.4.1. Nechť jsou funkce $f(x), g(x)$ spojité v bodě $x_0 \in (D_f \cap D_g)'$, pak jsou spojité i funkce $f(x) + g(x)$, $f(x).g(x)$ a pro $g(x) \neq 0$ je spojitá i funkce $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Důkaz: Plyne přímo z věty 2.1.2.

Věta 2.4.2. Předpokládejme, že funkce $f(y)$ je spojitá v bodě b a nechť $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(b)$.

Důkaz: Platnost vyplývá v podstatě z věty 2.1.3.

Definice 2.4.2.
Říkáme, že funkce $f(x)$ je **spojitá v intervalu** $(a,b) \subset D_f$, jestliže je spojitá v každém bodě intervalu (a,b).

Věta 2.4.3. Jestliže je $f(x)$ základní elementární funkce a interval $I \subset D_f$, pak je $f(x)$ spojitá v intervalu I.

Důkaz: Vyplývá z definice základních elementárních funkcí, viz část 1.5.

Poznámky

1. Patří-li krajní body intervalu $<a,b>$ do D_f a $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, *resp.* $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$, *pak říkáme, že je* $f(x)$ ***spojitá*** *v bodě a* ***zprava****, resp. v bodě b* ***zleva.***

2. Z věty 2.4.3 vyplývá, že součet, součin, podíl a složení spojitých funkcí je funkce spojitá.

3. Většinu limit lze tedy vypočítat přímým dosazením, tj. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),\ x_0 \in D_f$.

4. Využijeme-li znalostí o počítání s nevlastními body, můžeme většinu limit vyřešit také dosazením; získáme-li některý z výrazů uvedených v poslední poznámce za větou 2.2.1, je třeba funkci vhodným způsobem upravit.

Řešené úlohy

Příklad 1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \dfrac{2^2+2+1}{2^2-2+1} = \dfrac{7}{3}$,

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, 3. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$,

4. $\lim\limits_{x\to \infty} \ln x = \infty$, 5. $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$,

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \dfrac{0}{0}$, proto funkci upravíme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} . \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Poznámky

Bez důkazu uvedeme limity některých funkcí, které budeme používat:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, *důkaz viz [1, část II], příklad 11.10, str. 28,*
- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$, *důkaz viz [4, část II], věta 5.15.17, str. 446 a věta 5.1.9 na str. 477,*
- $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\frac{1}{e}$, *důkaz viz [4, část II], příklad 5.38, str. 477,*
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, tj. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, *důkaz viz [4, část II], příklad 5.61, str. 485.*

Výklad

Vlastnosti spojitých funkcí můžeme využít při **řešení nerovnic**. Z předchozích úvah zřejmě vyplývá:

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu I, pro všechna $x\in I$ platí $f(x)\neq 0$ a existuje-li $x_0\in I$ takové, že $f(x_0)>0$, resp. $f(x_0)<0$, pak $f(x)>0$, resp. $f(x)<0$ pro všechna $x\in I$.

Nerovnici upravíme na tvar $f(x)>0$, nebo $f(x)\geq 0$. Definiční obor D_f rozdělíme na podmnožiny, v nichž je $f(x)$ spojitá. V těchto podmnožinách stanovíme nulové body funkce $f(x)$. Tím jsme rozdělili D_f na části, v nichž je vždy $f(x)>0$ nebo $f(x)<0$. Stačí pak zjistit znaménko funkce v jediném bodě z každé části D_f.

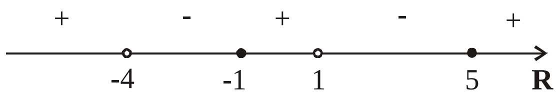
Řešené úlohy

Příklad Řešte nerovnici $\frac{7x+1}{x^2+3x-4}\leq 1$.

Řešení: Nerovnici upravíme na tvar $f(x) \geq 0$.

$$\frac{7x+1}{x^2+3x-4}-1 \leq 0 \Rightarrow -\frac{x^2-4x-5}{x^2+3x-4} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2-4x-5}{x^2+3x-4} \geq 0 \Rightarrow f(x)=\frac{(x-5)(x+1)}{(x-1)(x+4)} \geq 0.$$

Body nespojitosti funkce $f(x)$ jsou $x_1 = 1, x_2 = -4.$ Nulové body funkce $f(x)$ jsou $x_3 = 5, x_4 = -1,$ obr. 36.



Obr. 36

Množinu $\boldsymbol{R}$ jsme rozdělili na pět částí: $(-\infty,-4), (-4,-1>, <-1,1), (1,5>, <5,\infty)$. V každé části zvolíme libovolný bod x_0 a určíme znaménko

$f(x_0): f(-5) > 0,\ f(-2) < 0,\ f(0) > 0,\ f(2) < 0,\ f(6) > 0.$

Platí tedy, že $f(x) \geq 0$ pro $x \in (-\infty,-4) \cup <-1,1) \cup <5,\infty)$ a tedy $\dfrac{7x+1}{x^2+3x-4} \leq 1$ ve sjednocení uvedených intervalů.

Kontrolní otázky

1. Je každá posloupnost konvergentní?

   a) ano, b) ne.

2. Kolik má posloupnost limit?

   a) nejvýše jednu, b) alespoň jednu, c) žádnou.

3. Jaká je podmínka pro jednostranné limity v bodě x_0, platí-li $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a,\ a \in \mathbf{R}$?

   a) rovnají se číslu a,

   b) jedna může být nevlastní,

   c) není podmínka.

4. Lze funkci dodefinovat tak, aby v bodě x_0, ve kterém není definována, byla spojitá? Co musí platit?

   a) ano, existence vlastní limity v bodě x_0,

   b) ano, existence jedné nevlastní jednostranné limity,

   c) nelze.

5. Má funkce $y=\frac{1}{x}$ v bodě $x_0=0$ limitu? Řešte na základě znalosti grafu funkce $y=\frac{1}{x}$. Zdůvodněte!

   a) ano, existují jednostranné limity v bodě $x_0=0$,

   b) ne, jednostranné limity se sobě nerovnají.

6. Funkce $y=\operatorname{tg}x$ je na intervalu $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ spojitá. Je na tomto intervalu ohraničená?

   a) ano, b) ne.

7. Funkce $y=\sin x$ je spojitá pro $\forall x\in\mathbf{R}$. Je spojitá také funkce $y=\sin(\sin x)$?

   a) ne, $\forall x\in\mathbf{R}$,

   b) ano, $\forall x\in\mathbf{R}$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. a); 4. a); 5. b); 6. b); 7. b.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$, c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{2x}$,

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-5x}{\sin 2x}$, e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}kx}{x}$, f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x+\sin 7x}{\sin 3x}$.

2. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$, c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^3}{\sin^3 5x}$,

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2(1-x)}$, e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^3-\sin^2 x}{2x^2}$, f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^3-\sin^3 x}{2x^3}$.

3. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+4}\right)^x$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x+3}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+1}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{kx}-1}{x}$, i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-b^{x}}{x}$.

4. Pro která *x* je funkce *f(x)* spojitá?

a) $f(x)=x^3-2x^2+x-5$, b) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+3}$, c) $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$,

d) $f(x)=\dfrac{x^2+5x-3}{x^3+5x^2+6x}$, e) $f(x)=\ln(2-x^2)$, f) $f(x)=\arcsin(x-2)$.

5. Pro která *x* není funkce *f(x)* spojitá?

a) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$, b) $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{|x-1|}$, c) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$,

d) $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$, e) $f(x)=\dfrac{1-2e^{x}}{1-e^{2x}}$, f) $f(x)=\dfrac{2x+1}{2^{x}}$.

6. Funkce *f(x)* není spojitá pro $x=0$. Lze rozšířit definici funkce přidáním funkční hodnoty *f*(0) tak, aby byla v bodě $x=0$ spojitá?

a) $f(x)=\dfrac{(x-2)^2-4}{x}$, b) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, c) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$,

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, e) $f(x)=\dfrac{x^2}{3\operatorname{tg}^2 x}$, f) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 3; b) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $-\frac{5}{2}$; e) k; f) $\frac{11}{3}$. **2.** a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{3}{125}$; d) 4; e) $-\frac{1}{2}$; f) 1. **3.** a) e; b) e^3; c) e^4; d) e; e) e^2; f) e^{-4}; g) 2; h) $k\ln a$; i) $\ln\frac{a}{b}$. **4.** a) $\boldsymbol{R}$; b) $\boldsymbol{R}-\{-3\}$; c) $(-\infty,-2> \cup <3,\infty)$; d) $R-\{-3;-2;0\}$; e) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$; f) $<1,3>$. **5.** a) $x\in(-3,3)$; b) $x=1$; c) $x=0$; d) $x=k\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$; e) $x=0$; f) spojitá. **6.** a) ano, $f(0)=-4$; b) ano, $f(0)=1$; c) ne; d) ano, $f(0)=\frac{1}{2}$; e) ano, $f(0)=\frac{1}{3}$; f) ne.

Kontrolní test

1. Určete limitu: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4-7n^2+n}{5(n+1)(n^2+5)}$.

   a) $\frac{1}{5}$, b) 0, c) ∞.

2. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

   a) 2, b) 4, c) 8.

3. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

   a) e^4, b) e^{-4}, c) neexistuje.

4. Vypočtěte limity funkce $y=\frac{\sqrt{x^2+9}}{x-3}$ v bodech $x_0=+\infty$, $x_0=-\infty$.

   a) 1,1, b) −1,−1, c) 1,−1.

5. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to 0}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n}$.

   a) e, b) e^2, c) $\frac{1}{e}$.

6. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cot gx}{\mathrm{tg}x}$.

a) 0, b) $+\infty$, c) $-\infty$.

7. Určete, pro která x je funkce $f(x)$ spojitá:

$y = 2 - \arccos(3 - x)$.

a) $x \in <2,4>$, b) $x \in <-1,1>$, c) $x \in R$.

8. Určete, pro která x není funkce $f(x)$ spojitá:

$$f(x) = \frac{x+5}{x-4} + \operatorname{tg} 2x.$$

a) $x = 4,\ x = (2k+1)\dfrac{\pi}{4}$,

b) $x = 4,\ x = k\dfrac{\pi}{2}$,

c) $x = 4$.

9. Lze rozšířit definici funkce $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ v bodě nespojitosti tak, aby pak byla v tomto bodě spojitá?

a) ne, b) ano, $f(0) = 0$.

Výsledky testu

1. c); 2. c); 3. b); 4. c); 5. b); 6. b); 7. a); 8. a); 9. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 6 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2 znovu.