2.2. Nevlastní limity

Výklad

Množinu $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ budeme nazývat **rozšířená číselná osa** a prvky $-\infty, \infty$ budeme nazývat **nevlastní body**. Pro nevlastní body bude platit $-\infty < a < \infty$ pro každé $a \in \boldsymbol{R}$. Každý interval $(-\infty, a)$, resp. $(a, \infty), a \in \boldsymbol{R}$, je okolím $O(-\infty)$, resp. $O(\infty)$ nevlastních bodů.

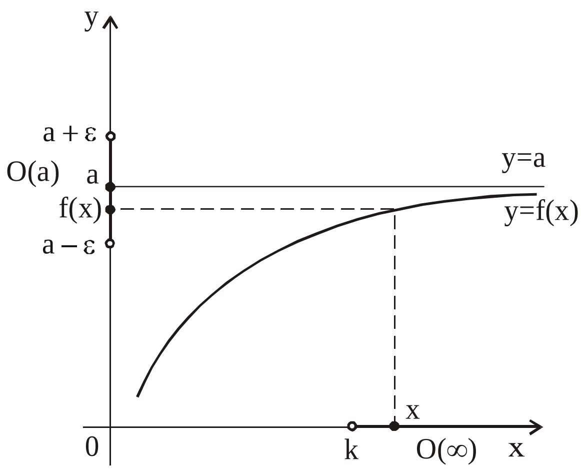
Příklad Pro množinu $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ platí $\boldsymbol{N}' = \{\infty\}$.

Nyní můžeme definici 2.1.4 rozšířit také pro nevlastní body. Řekneme-li, že v definici 2.1.4 jsme definovali **vlastní limitu** a **ve vlastním bodě** x_0, kde $a, x_0 \in \boldsymbol{R}$, můžeme nyní definovat **vlastní limitu** a **v nevlastním bodě** x_0, $a \in \boldsymbol{R}, x_0 \in \{-\infty, \infty\}$ nebo **nevlastní limitu** a ve **vlastním bodě** x_0, $a \in \{-\infty, \infty\}, x_0 \in \boldsymbol{R}$ nebo také **nevlastní limitu** a v **nevlastním bodě** x_0, $a, x_0 \in \{-\infty, \infty\}$. Uvedeme definici vlastní limity a v nevlastním bodě $x_0 = \infty$. Ostatní definice jsou analogické a ponecháváme jejich formulaci na čtenáři.

Definice 2.2.1

Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 = \infty, \infty \in D'_f$ limitu a, jestliže

$\forall O(a) \exists O(\infty) : x \in O(\infty) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in O(a)$. Píšeme $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, (obr. 35).



Obr. 35

Poznámka

Tuto definici můžeme také zapsat ve tvaru:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, k \in \boldsymbol{R} : x > k \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ *pro* $x \in D_f$*, (obr. 35).*

Výklad

Věta 2.2.1. Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a,\, a > 0,\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ a nechť existuje $O(x_0)$ takové, že pro $x \in D_g \cap (O(x_0) \setminus \{x_0\})$ platí $g(x) > 0$, kde $x_0 \in (D_f \cap D_g)'$. Pak platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Důkaz: Zvolme $O(\infty)$, tj. $k > 0$ a označme $\varepsilon = \dfrac{a}{k+1}.$ Podle předpokladu existuje $\delta > 0$ takové, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ platí $|f(x) - a| < \varepsilon$ a $0 < g(x) < \varepsilon$. Dostaneme $f(x) > a - \varepsilon > 0$ a tedy $\dfrac{f(x)}{g(x)} > \dfrac{a - \varepsilon}{\varepsilon} = k.$

Poznámky

1. Větu 2.2.1 můžeme zapsat symbolicky $\frac{a}{0}=\infty$, *pro* $a>0, g(x)>0$,

resp. $a<0, g(x)<0$ *nebo* $\frac{a}{0}=-\infty$, *pro* $a>0, g(x)<0$, *resp.* $a<0, g(x)>0$.

2. Další věty o počítání s nevlastními body $\infty, -\infty$ *zapíšeme symbolicky pro* $a\in \boldsymbol{R}$:

$$\frac{a}{\pm\infty}=0, \qquad \infty+\infty=\infty,$$
$$\infty.\infty=\infty, \qquad a+\infty=\infty,$$
$$\infty.(-\infty)=-\infty \qquad a-\infty=-\infty$$
$$(-\infty)(-\infty)=\infty, \qquad -\infty-\infty=-\infty.$$

3. Všimněme si, že výrazy $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0.\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 0^\infty, 1^\infty$ *se v seznamu symbolických zápisů nevyskytují. Jejich výsledky mohou být jakýmkoliv prvkem z* $\boldsymbol{R}^*$ *a při výpočtu limit jsou to právě ty limity, jejichž určování může činit problémy.*

Řešené úlohy

Příklad

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+2)=\lim\limits_{x\to\infty}x^3+\lim\limits_{x\to\infty}2=\infty+2=\infty.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-1}{x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}}=\frac{3+0-0}{1-0}=3.$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte limity nejprve pro $x\to\infty$ potom pro $x\to-\infty$:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x+1}$, b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+5x-1}{-2x^2-3x+4}$, c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-6x}{3x+1}$,

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x-5}{2-7x}$, e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+3}{\sqrt{3x^4-1}}$, f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$,

g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$, h) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$, i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$.

2. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-x+1})$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-9}-x)$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+1}-x^2)$, e) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$, f) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x})$.

3. Vypočtěte limity, případně jednostranné limity:

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x}{9-x^2}$, b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1}{\ln(x-1)}$, c) $\lim\limits_{x\to-1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}$,

d) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{4x-4}{x^2}-2)$, e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-1}{\sin(x-1)}$, f) $\lim\limits_{x\to0}(e^{\frac{1}{x}}-x)$.

4. Vypočtěte limity funkce $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ v bodech a) $x=2$, b) $x=3$, c) $x=\infty$, d) $x=-2$, e) $x=1$, f) $x=-\infty$.

5. Vypočtěte limity funkce $f(x)=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$ v bodech a) $x=-\infty$, b) $x=-3$, c) $x=-1$, d) $x=0$, e) $x=1$, f) $x=\infty$.

6. Vypočtěte limity funkce $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1-x}$ v bodech a) $x=-\infty$, b) $x=-1$, c) $x=0$, d) $x=1$, e) $x=\infty$.

7. Vypočtěte limity funkce $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ v bodech a) $x=-\infty$, b) $x=0$, c) $x=1$, d) $x=\infty$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 1, 1; b) $-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}$; c) -2, -2; d) $-\frac{3}{7},-\frac{3}{7}$; e) $\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}$; f) 1, 1; g) 0, 0; h) $\infty,-\infty$; i) 4, 4. **2.** a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 0; d) 0; e) $\frac{1}{2}$; f) ∞. **3.** a) ∞ pro $x\to3^-$, $-\infty$ pro $x\to3^+$; b) $-\infty$ pro $x\to2^-$, ∞ pro $x\to2^+$; c) $-\frac{\pi}{2}$ pro $x\to-1^-$, $\frac{\pi}{2}$ pro $x\to-1^+$; d) $-\infty$;

e) $-\infty$ pro $x \to 1^-$, ∞ pro $x \to 1^+$; f) 0 pro $x \to 0^-$, $+\infty$ pro $x \to 0^+$. **4.** a) 4; b) $\frac{5}{2}$; c) 1; d) 0; e) $-\infty$ pro $x \to 1^-$, ∞ pro $x \to 1^+$; f) 1. **5.** a) $-\infty$; b) $-\frac{81}{8}$; c) $-\infty$ pro $x \to -1^-$, ∞ pro $x \to -1^+$; d) 0; e) $\frac{1}{8}$; f) ∞. **6.** a) 0; b) 0; c) $-\infty$ pro $x \to 0^-$, ∞ pro $x \to 0^+$; d) ∞ pro $x \to 1^-$, $-\infty$ pro $x \to 1^+$; e) 0. **7.** a) 0; b) $-\frac{\pi}{2}$ pro $x \to 0^-$, $+\frac{\pi}{2}$ pro $x \to 0^+$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) 0.