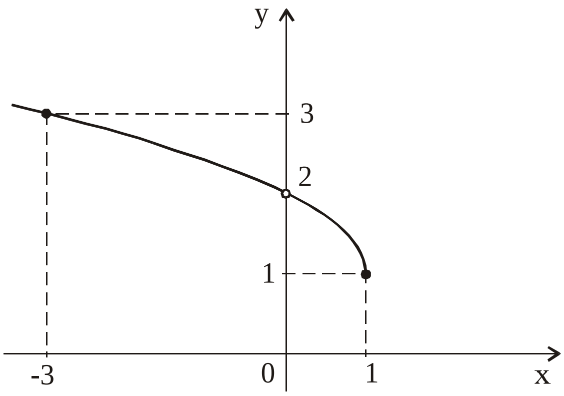
2. LIMITA A SPOJITOST FUNKCE

Průvodce studiem

Funkce $y = \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$ je definována pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1>$. Z grafu funkce (obr. 32) a z tabulky (a) je vidět, že čím více se hodnoty x blíží k -3, tím více se funkční hodnoty blíží ke 3. Později budeme říkat, že funkce má v bodě -3 limitu 3. Podobně, čím více se hodnoty x blíží k 0, tím více se funkční hodnoty blíží ke 2 (obr. 32, tab. (b)). Podobně i v bodě 0, ve kterém funkce není definovaná, budeme říkat, že funkce má v bodě 0 limitu 2.



Obr. 32

x	y
-2,98	2,9949
-2,99	2,9974
-2,995	2,9987
-2,999	2,9997
-3,001	3,0002
-3,005	3,0012
-3,01	3,0024
-3,02	3,0049

Tab. (a)

x	y
0,02	1,9899
0,01	1,9950
0,005	1,9975
0,001	1,9992
-0,001	2,0005
-0,005	2,0025
-0,01	2,0050
-0,02	2,0100

Tab. (b)

V prvním případě je limita v bodě -3 rovna funkční hodnotě a budeme později říkat, že je funkce v bodě -3 spojitá. Pokud se funkční hodnota v bodě nebude rovnat limitě v tomto bodě, nebo funkční hodnota v bodě nebude existovat, jako v bodě 0, budeme říkat, že funkce v bodě není spojitá nebo také, že je nespojitá.

2.1. Limita funkce

Cíle

Zavedení pojmu limity funkce je stěžejním pro další studium matematiky. Díky jemu se naučíme, mimo jiné, počítat s tzv. nevlastními prvky, které budeme označovat $+\infty$, resp. $-\infty$.

Výklad

Definice 2.1.1.

Množinu $O(x_0)=\{x\in \boldsymbol{R}: |x-x_0|<\varepsilon\}$, kde $\varepsilon\in(0,\infty)$, budeme nazývat **okolím bodu** (čísla) x_0.

Poznámky

1. *Okolí bodu x_0 je tedy otevřený interval $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.*
2. *Budeme někdy říkat, že $O(x_0)$ z definice 2.1.1. je ε - okolí bodu x_0.*

Výklad

Definice 2.1.2.

Bod $x_0\in \boldsymbol{R}$ je **vnitřním bodem množiny** $M\subset \boldsymbol{R}$, jestliže existuje okolí $O(x_0)$ tak, že platí: $O(x_0)\subset M$.

Definice 2.1.3.

Bod $a\in R$ nazveme **hromadným bodem množiny** $M\subset \boldsymbol{R}$, jestliže

$$\forall O(a):(O(a)\cap M)\setminus\{a\}\neq\emptyset.$$

Poznámky

1. Množinu všech hromadných bodů množiny M označíme M'.

2. Hromadný bod množiny M nemusí patřit do M.

3. Bod $b \in M$ a zároveň $b \notin M'$ se nazývá ***izolovaným bodem množiny*** *M.*

Řešené úlohy

Příklad

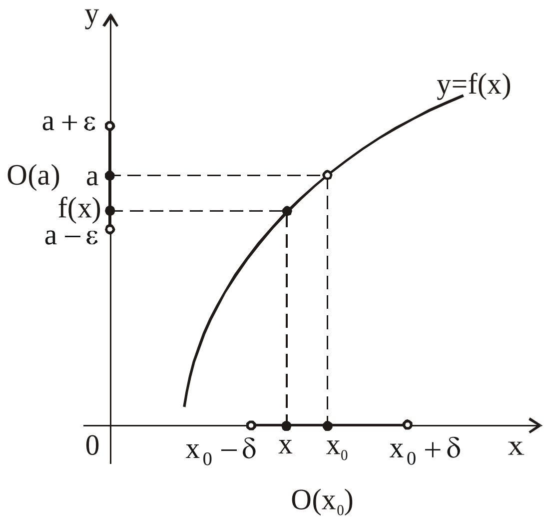
1. Hromadným bodem množiny $M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \subset \boldsymbol{R}$ je bod $x_0 = 0$, $M' = \{0\}$.

2. Hromadnými body otevřeného intervalu $M = (a,b) \subset \mathbf{R}$ jsou všechny body $x \in \langle a,b \rangle$, $M' = \langle a,b \rangle$.

Definice 2.1.4.

Říkáme, že **funkce** $f(x)$ **má** v hromadném bodě $x_0 \in D'_f$ **limitu *a***, jestliže

$\forall O(a)\, \exists O(x_0) : x \in (O(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in O(a)$. Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ (obr. 33).



Obr. 33

Poznámka

Definici limity a funkce $f(x)$ v $x_0 \in D'_f$ *můžeme napsat také ve tvaru:*

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ *pro* $\forall x \in D_f$, *(obr. 33).*

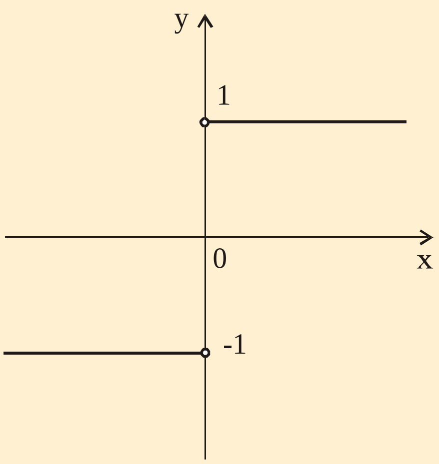
Řešené úlohy

Příklad

1. Ukážeme, že platí $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$

Platí $\left| \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \varepsilon$ pro $0 < |x - 1| < \delta$, když zvolíme $\delta = \varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ neexistuje, viz obr. 34.



Obr. 34

3. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ pro $c \in \boldsymbol{R}$. Platí $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ pro všechna $x \in \boldsymbol{R}$ a libovolné δ.

4. $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$. Platí $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$ pro $0 < |x - x_0| < \delta$, když $\delta = \varepsilon$.

Výklad

Věta 2.1.1. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 nejvýše jednu limitu

$$(\lim_{x\to x_0} f(x) = a \wedge \lim_{x\to x_0} f(x) = b) \Rightarrow a = b).$$

Důkaz (sporem):

Předpokládejme $a \neq b$. Pak existují $O(a)$ a $O(b)$ taková, že $O(a) \cap O(b) = \emptyset$. Podle předpokladu věty existuje x takové, že $f(x) \in O(a)$ a zároveň $f(x) \in O(b)$, což je spor, neboť $O(a) \cap O(b) = \emptyset$. Tento spor znamená, že $a = b$.

Věta 2.1.2. Nechť $x_0 \in (D_f \cap D_g)'$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$. Pak platí:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b,$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b,$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad \text{pro } b \neq 0.$$

Důkaz: Viz např. [3], str. 69, nebo [4] str. 443.

Řešené úlohy

Příklad Platí $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, kde $n \in \boldsymbol{N}$. Důkaz provedeme matematickou indukcí.

Pro $n = 1$ vztah platí, viz předchozí příklad 4. Předpokládejme platnost vztahu

$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$. Podle věty 2.1.2. dostaneme

$$\lim_{x\to x_0} x^{n+1} = \lim_{x\to x_0} (x^n.x) = \lim_{x\to x_0} x^n . \lim_{x\to x_0} x = x_0^n.x_0 = x_0^{n+1}.$$

Výklad

Věta 2.1.3. Nechť je funkce $f(g(x))$ definována na množině M a nechť $x_0 \in M'$. Jestliže

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = b, \ \lim_{y\to b} f(y) = a \text{ a existuje } O(x_0) \text{ tak, že } g(x) \neq b \text{ pro } x \in O(x_0) \setminus \{x_0\},$$

pak platí $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = a.$

Důkaz: Z předpokladu $\lim_{y\to b} f(y) = a$ plyne, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro $0 < |g(x) - b| < \delta_1$ platí $|f(g(x)) - a| < \varepsilon$. Volíme-li $\varepsilon_1 = \delta_1$, pak podle předpokladu $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ existuje k ε_1 číslo δ takové, že pro $|x - x_0| < \delta$ platí $|g(x) - b| < \varepsilon_1$. Složíme-li oba výsledky, je věta dokázána.

Řešené úlohy

Příklad Platí

$\lim_{x\to 0} \sqrt{4 - x^2} = 2$. Dostaneme $\lim_{x\to 0} (4 - x^2) = 4$, $\lim_{y\to 4} \sqrt{y} = 2$ a $4 - x^2 \neq 4$

pro $x \in \langle -2, 0) \cup (0, 2 \rangle$.

Výklad

Definice 2.1.5.

Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in D'_f$ **limitu zprava**, resp. **limitu zleva**, což píšeme

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = a$, resp. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = b$, jestliže má funkce $f(x)$ na množině

$(x_0, \infty) \cap D_f$, resp. na množině $(-\infty, x_0) \cap D_f$ limitu a, resp. limitu b.

Poznámka

Zřejmě platí: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a \wedge \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a\right)$.

Řešené úlohy

Příklad Pro funkci $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ platí $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$ a $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$, viz obr. 34. Funkce $f(x)$ má v bodě 0 limitu zprava i limitu zleva, nemá však v bodě 0 limitu.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)$, b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{3x-2}$, c) $\lim\limits_{x\to -6}(x+5)^8$,

d) $\lim\limits_{x\to 3} x^2 2^x$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{\cos x}$, f) $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{x+k}{\sin(k+\pi/2)}$.

2. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 2} f(g(x))$ a $\lim\limits_{x\to 2} g(f(x))$ pro

a) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=x^2+1$, b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$,

c) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2+1$, d) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, $g(x)=x+2$.

3. Nechť $f(x)=x^2-2x-1$ a $g(x)=\cos\pi x$. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))$, b) $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)-g(x))$, c) $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x))$,

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, e) $\lim\limits_{x\to 1}(f(g(x))$, f) $\lim\limits_{x\to 1}(g(f(x))$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 0; b) 0; c) 1; d) 72; e) 2; f) x. **2.** a) $\dfrac{1}{6},\dfrac{10}{9}$; b) $\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{3}$; c) $\sqrt{5}, 3$; d) $\dfrac{1}{6},\dfrac{9}{4}$. **3.** a) -3; b) -1; c) 2; d) 2; e) 2; f) 1.