1.3. Základní pojmy a graf funkce

Výklad

Nyní se již budeme zabývat pouze reálnými funkcemi reálné proměnné a proto budeme zobrazení $M \to \boldsymbol{R}$, kde $M \subset \boldsymbol{R}$ nazývat stručně **funkce**. Zopakujeme, že funkce je každé zobrazení $f : M \to \boldsymbol{R}, M \subset \boldsymbol{R}$, které každému $x \in M = D_f$ přiřadí právě jednu hodnotu $y \in H_f \subset \boldsymbol{R}$. Množinu D_f budeme nazývat **definiční obor funkce f** a množinu H_f nazveme **obor hodnot funkce f** . Budeme psát $y = f(x)$.

Definice 1.3.1.

Grafem funkce *f* nazveme množinu všech bodů $\left(x, f(x)\right)$ v kartézské soustavě souřadnic.

Poznámka

Funkce $f(x)$ *může být dána různými způsoby. Některé nyní uvedeme:* - $y = f(x)$, y *je z rovnice vyjádřeno; říkáme, že funkce je dána explicitně,*

- $F(x, y) = 0$, y *není ze vztahu* $F(x, y)$ *obsahujícího proměnné* x, y *vyjádřeno; říkáme, že funkce je dána implicitně rovnicí* $F(x, y) = 0$,
- $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in M \subset \boldsymbol{R};$ *říkáme, že funkce je dána parametricky,*
- *grafem,*
- *tabulkou.*

Úmluva: Body na ose *x* o souřadnicích $(x, 0)$, resp. body na ose *y* o souřadnicích $(0, y)$ budeme při popisu grafů často označovat pouze *x*, resp. *y*.

Řešené úlohy

Příklad Mějme funkci $y = x+1,\ D_f = \{1,2,3\}$. Zadejte tuto funkci výše uvedenými způsoby.

Řešení:

1. **Explicitně:**

a) Vyjádření $y = x+1, D_f = \{1,2,3\}$ je explicitní.

b) Zadanou funkci můžeme však také vyjádřit explicitně například ve tvaru $y = |x-1| + 2,\ x \in \{1,2,3\}$.

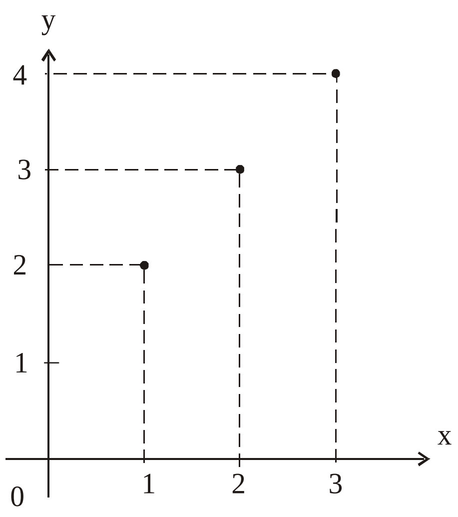
2. **Implicitně:**

Rovnice $y - x - 1 = 0,\ x \in \{1,2,3\}$ vyjadřuje danou funkci implicitně.

3. **Parametricky:**

Rovnice $x = 2+t,\ y = 3+t,\ t \in \{-1,0,1\}$ jsou jedním z možných **parametrických vyjádření** dané funkce.

4. **Grafem**:



Obr. 1

Z obr. 1 je vidět, že **grafem** dané funkce jsou izolované body v kartézské soustavě souřadnic.

5. **Tabulkou**:

x	1	2	3
y	2	3	4

Výklad

Definice 1.3.2.

Funkce $f_1(x), x \in M_1$ *a* $f_2(x), x \in M_2$ **se rovnají**, jestliže $M_1 = M_2 = M$ a

$\forall\ x \in M : f_1(x) = f_2(x)$.

Řešené úlohy

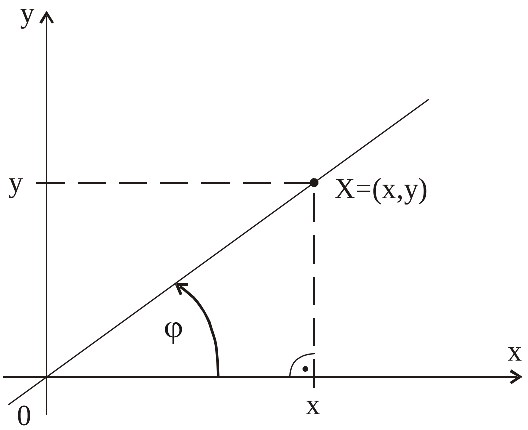
Příklad Je-li $f_1(x) = x, x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ a $f_2(x) = \dfrac{x^2}{x}, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, pak $f_1 = f_2$.

Poznámka

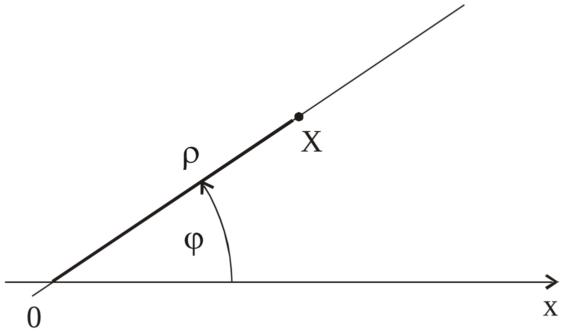
*Mimo kartézské soustavy souřadnic budeme užívat takzvanou **polární soustavu souřadnic**. V kartézské soustavě souřadnic v rovině E_2 je každý bod X roviny dán jednoznačně uspořádanou dvojicí (x, y), kde $x, y \in \boldsymbol{R}$, a naopak. Píšeme $X = (x, y)$, viz obr. 2. Zvolíme nyní bod $O = (0,0)$ v E_2 a nazveme jej **počátkem** polární soustavy souřadnic a přímku (osu) x, $O \in x$, viz obr. 3. Každému bodu roviny E_2 přiřadíme dvojici (φ, ρ) kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je (kladně) orientovaný úhel přímek x, OX a $\rho = |X - O| \geq 0$. Je zřejmé, že korespondence mezi takto utvořenými uspořádanými dvojicemi reálných čísel a body roviny E_2 je vzájemně jednoznačná. Vztah mezi kartézskými a polárními souřadnicemi je dán vztahy*

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \qquad (1)$$

viz obr. 2, 3.



Obr. 2



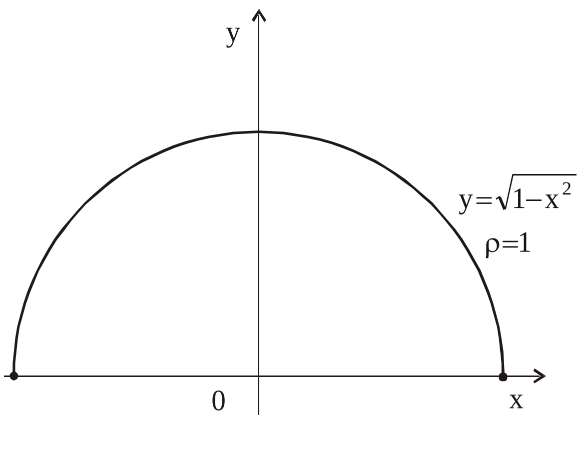
Obr. 3

Řešené úlohy

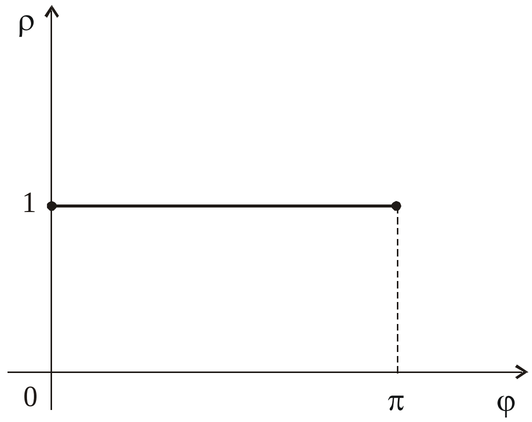
Příklad Grafem funkce $x^2 + y^2 = 1, D_f = \{x \in <-1,1>: y \geq 0\}$ je půlkružnice $y = \sqrt{1-x^2}$, viz obr. 4. Dosadíme z rovnic (1) a upravíme:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 1,$$
$$\rho^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right) = 1,$$
$$\rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1, \ \varphi \in <0, \pi>.$$

Dostali jsme rovnici $\rho = 1$ dané půlkružnice v polárních souřadnicích vyjádřené v zadání implicitně rovnicí $x^2 + y^2 = 1$. Pokud pro hodnoty φ, ρ použijeme polární souřadnice,



Obr. 4



Obr. 5

bude grafem funkce $\rho=1$ úsečka, viz obr. 5. Dále si můžeme všimnout, že kružnice $x^2+y^2=1$ v kartézské soustavě souřadnic není funkce, např. pro $x=0$ existují dvě různé hodnoty $y=\pm 1$. Vyjádříme-li však kružnici v polárních souřadnicích rovnicí $\rho=1, \varphi \in < 0, 2\pi)$, pak každé hodnotě φ je přiřazena právě jedna hodnota $\rho=1$ a kružnice je podle definice funkcí. Obdobně se tak může stát i u jiných křivek.

Poznámka

Podle definice je funkce f zadána definičním oborem D_f a předpisem, který každému $x \in D_f$ přiřazuje právě jedno $y=f(x) \in H_f \subset \boldsymbol{R}$. Často budeme funkci f zadávat pouze předpisem a definičním oborem budeme rozumět množinu všech $x \in \boldsymbol{R}$, pro něž má daný předpis smysl.

Řešené úlohy

Příklad Je dána funkce $y=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{x}$, určete její definiční obor.

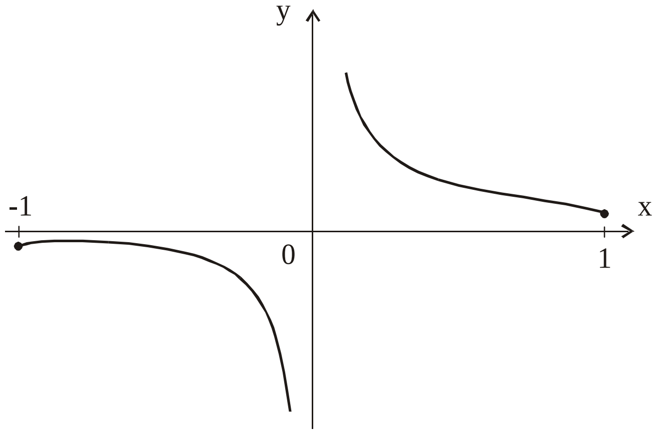
Řešení: Platí $1-x^2 \geq 0 \wedge x \neq 0$,

$(1-x)(1+x) \geq 0 \wedge x \neq 0$,

$((1-x \geq 0 \wedge 1+x \geq 0) \vee (1-x<0 \wedge 1+x<0)) \wedge x \neq 0$,

$((x \leq 1 \wedge x \geq -1) \vee (x>1 \wedge x<-1)) \wedge x \neq 0 \Rightarrow \ x \in < -1, 0) \cup (0, 1 >$.

Graf funkce je na obr. 6.



Obr. 6.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Rozhodněte, zda jsou si rovny funkce f a g s maximálními definičními obory $D_f \subset \mathbf{R}, D_g \subset \mathbf{R}$:

a) $f: y = x, \quad g: y = \sqrt{x^2}$, b) $f: y = x, \quad g: y = \left(\sqrt{x}\right)^2$,

c) $f: y = |x|, \quad g: y = \sqrt{x^2}$, d) $f: y = x, \quad g: y = \sqrt[3]{x^3}$.

2. Určete definiční obory funkcí:

a) $y = \sqrt{x+2}$, b) $y = \sqrt{9-x^2}$, c) $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4+x}$,

d) $y = \sqrt{3-x}$, e) $y = \sqrt{x^2-4}$, f) $y = \sqrt{4x-x^2}$.

3. Určete definiční obory funkcí:

a) $y = \dfrac{1-x}{x^2+2x+15}$, b) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{3-x}}$, c) $y = \sqrt{3-\sqrt{x}}$,

d) $y = \dfrac{x-1}{x^2-2x-15}$, e) $y = \sqrt{\dfrac{x(x-3)}{x-4}}$, f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$,

g) $y = \ln(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$, h) $y = \ln(1-\operatorname{tg} x)$, i) $y = \dfrac{3}{4-x^2} + \log(x^3-x)$,

j) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}$, k) $y = \sin\left(\ln\dfrac{1}{3x+1}\right)$, l) $y = \log(2\cos x - \sqrt{3})$,

m) $y = \dfrac{1}{\ln(1-x)} + \sqrt{x+2}$, n) $y = \ln\sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}$.

4. Znáte-li graf funkce $y = f(x), \quad x \in D_f$, sestrojte grafy funkcí

a) $f_1: y = f(x) + c$, b) $f_2: y = f(x) - c$, c) $f_3: y = f(x+c)$,

d) $f_4: y = f(x-c)$, e) $f_5: y = -f(x)$, f) $f_6: y = f(-x)$,

g) $f_7: y = f(c-x) + k$, kde $c > 0, \quad k > 0$.

5. Nakreslete graf funkce

a) $y = x^2 + 4x - 4$, b) $y = x^2 - 2x + 2$, c) $y = -x^2 - 2x + 2$.

6. Ze znalosti grafu funkce $y = x^3$ nakreslete graf funkce

a) $y = -x^3$, b) $y = x^3 + 2$, c) $y = -(x+2)^3$,

d) $y = (x-2)^3$, e) $y = -x^3 + 3$, f) $y = (x+1)^3 - 2$.

7. Ze znalosti grafu funkce $y = 3^x$ nakreslete graf funkce

a) $y = -3^x$, b) $y = \frac{1}{3}3^x$, c) $y = -1 + 3^{x-1}$,

d) $y = 3^{x+2}$, e) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, f) $y = 3 - 3^{x+3}$.

8. Ze znalosti grafu funkce $y = \log x$ nakreslete graf a určete definiční obor funkce

a) $y = \log(-x)$, b) $y = \log(x-3)$, c) $y = \log|x|$,

d) $y = 1 - \log x$, e) $y = 2 + \log(x+1)$, f) $y = |\log x|$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) ne, neboť $g: y = \sqrt{x^2} = |x|$; b) ne, neboť $\mathrm{D}_f = \mathbf{R}, \mathrm{D}_g = <0, \infty)$; c) ano; d) ano.

2. a) $x \geq -2$; b) $|x| \leq 3$ tj. $x \in <-3,3>$; c) $x \in <-4,0>$; d) $x \leq 3$; e) $|x| \geq 2$ tj. $x \in \mathbf{R} - (-2,2)$; f) $x \in <0,4>$. **3.** a) $x \in \mathbf{R}$; b) $x \in <2,3)$; c) $x \in <0,9>$;

d) $x \in (-\infty,-3) \cup (-3,5) \cup (5,\infty)$; e) $x \in <0,3> \cup (4,\infty)$; f) $\mathrm{D}_f = \phi$; g) $<4,6>$;

h) $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$; i) $(-1,0) \cup (1,2) \cup (2,\infty)$; j) $<-4,-\pi> \cup <0,\pi>$;

k) $x \in (-\frac{1}{3}, \infty)$; l) $(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$; m) $<-2,0) \cup (0,1)$;

n) $(3 - 2\pi, 3 - \pi) \cup (3,4>$.

4. Grafy funkcí f_1 až f_7 dostaneme transformací grafu funkce $f(x)$.

a) *Graf funkce* $f_1:\ y = f(x) + c$, $D_{f_1} = D_f$. Graf funkce f_1 dostaneme posunutím grafu funkce *f* v kladném směru osy *y*. Velikost posunutí je *c* (obr. a).

b) *Graf funkce* $f_2:\ y = f(x) - c$, $D_{f_2} = D_f$. Graf funkce f_2 dostaneme posunutím grafu funkce *f* v záporném směru osy *y*. Velikost posunutí je *c* (obr. a).

c) *Graf funkce* $f_3: \; y = f(x+c)$, $\mathrm{D}_{f_3} = \{x \in \mathbf{R};\; x+c \in \mathrm{D}_f\}$. Graf funkce f_3 dostaneme posunutím grafu funkce *f* v záporném směru osy *x*. Velikost posunutí je *c* (obr. b).

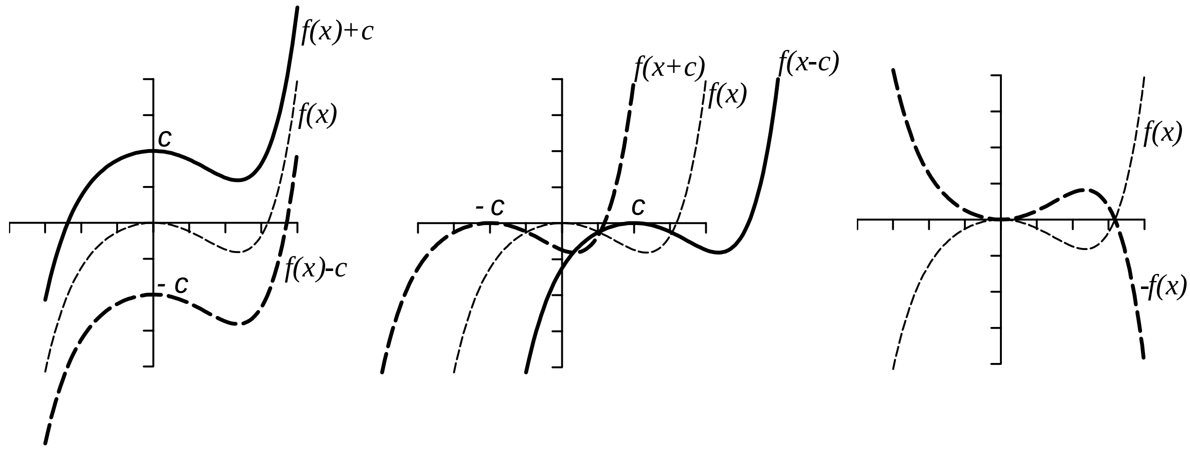
d) *Graf funkce* $f_4: \; y = f(x-c)$, $\mathrm{D}_{f_3} = \{x \in \mathbf{R};\; x-c \in \mathrm{D}_f\}$. Graf funkce f_4 dostaneme posunutím grafu funkce *f* v kladném směru osy *x*. Velikost posunutí je *c* (obr. b).

e) *Graf funkce* $f_5: \; y = -f(x)$, $D_{f_5} = D_f$. Graf funkce f_5 je souměrně sdružený s grafem funkce *f* v osové souměrnosti podle osy *x*, neboť $f_5(x) = -f(x)$ (obr. c).

f) *Graf funkce* $f_6: \; y = f(-x)$, $\mathrm{D}_{f_6} = \{x \in \mathbf{R};\; \text{-}x \in \mathrm{D}_f\}$. Graf funkce f_6 je souměrně sdružený s grafem funkce *f* v osové souměrnosti podle osy *y*, neboť $f_6(x) = f(-x)$ (obr. d).

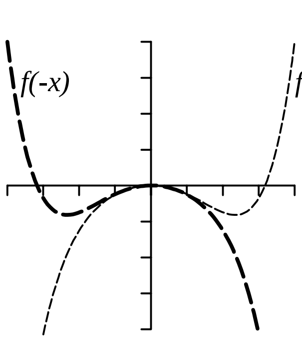
g) *Graf funkce* $f_7: \; y = f(c-x)+k$. $\mathrm{D}_{f_7} = \{x \in \mathbf{R};\; c-x \in \mathrm{D}_f\}$. Graf funkce f_7 dostaneme postupně transformacemi typu f), c), a). To znamená, že nejprve sestrojíme graf souměrně sdružený s grafem funkce *f* v osové souměrnosti podle osy *y*, následuje posunutí grafu v záporném směru osy *x* o hodnotu *c* a nakonec posunutí grafu v kladném směru osy *y* o hodnotu *k*. (obr. e).

Transformace grafu funkce:

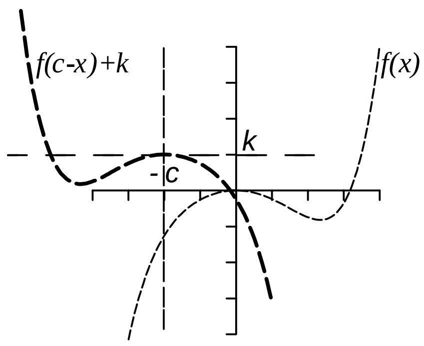


a) b) c)

Řešení:



d)



e)

5. a) $y=(x+2)^2-8$; b) $y=(x-1)^2+1$; c) $y=-(x+1)^2+3$. Grafy dostaneme transformacemi grafu funkce $y=x^2$ (viz příklad 1.3.4). **6.** Grafy viz příklad 1.3.4. **7.** Grafy viz příklad 1.3.4. **8.** Grafy viz příklad 1.3.4; a) $\mathrm{D}_f=(-\infty,0)$; b) $\mathrm{D}_f=(3,\infty)$; c) $\mathrm{D}_f=\mathbf{R}-\{0\}$; d) $\mathrm{D}_f=(0,\infty)$; e) $\mathrm{D}_f=(-1,\infty)$; f) $\mathrm{D}_f=(0,\infty)$.