1.2. Hornerův algoritmus

Cíle

V této kapitole se naučíme určovat zejména celočíselné kořeny některých polynomů.

Výklad

Při výpočtu hodnoty polynomu $p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ n-tého stupně, $n \geq 1$ v bodě $x_0 \in \boldsymbol{C}$ musíme provést $(n-1)-$krát umocnění $x_0^2, x_0^3, \dots, x_0^n$, n násobení koeficienty a n sčítání. Budeme se snažit počet operací snížit. Způsob řešení ukážeme nejdříve na příkladu.

Řešené úlohy

Příklad Pro $p(x)=x^3+4x^2+2x+3$ určete $p(2)$.

Řešení:

a) Dosazením: $p(2)=2^3+4.2^2+2.2+3=8+16+4+3=31.$

b) Metodou, kterou budeme nazývat Hornerovým algoritmem (schématem):

$$p(x)=(x^2+4x+2)x+3=\big((x+4)x+2\big)x+3,$$
$$p(2)=\big((2+4)2+2\big)2+3=(\mathbf{6}.2+2)2+3=\mathbf{14}.2+3=\mathbf{31}.$$

Zapišme nyní do prvního řádku tabulky koeficienty daného polynomu, do druhého řádku nejprve opišme hodnotu $a_3=1$ a pak zvýrazněné součty z předchozího výpočtu:

x_0	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	4	2	3
2	1	6	14	31

Lze se přesvědčit, že čísla 6, 14, 31 dostaneme tak, že číslem $x_0 = 2$ násobíme číslo 1 z druhého řádku a přičteme k němu číslo 4 z prvního řádku. Pak číslo 6 násobíme opět číslem 2 a přičteme další číslo z prvního řádku, tj. číslo 2 a dostaneme 14. Poslední krok už je zřejmý $2.14 + 3 = 31$. Dostali jsme hodnotu $p(2) = 31$.

Výklad

Zobecnění algoritmu:

K polynomu $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ stupně n a číslu $x_0 \in \boldsymbol{C}$ přiřadíme postupně čísla $b_{n-1} = a_n, b_{k-1} = x_0 b_k + a_k$ pro $k = n-1, n-2, \ldots, 1$ a $r = x_0 b_0 + a_0$, kde r je hodnota $p(x_0)$.

Tabulku pak můžeme zapsat ve tvaru:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-1}	$\cdots$	b_0	r

Poznámka

Koeficienty $b_{n-1}, \ldots, b_0$ *jsou koeficienty polynomu* $p_1(x)$ *stupně* $n-1$*, pro který platí:*

$$p(x) = (x - x_0) p_1(x) + r \quad .$$

Řešené úlohy

Příklad Určete hodnoty polynomu $p(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 3$ pro $-1, 2, 3$.

Řešení:

	1	4	2	3
-1	1	3	-1	4
2	1	6	14	31
3	1	7	23	72

Výklad

Pro určení kořenů některých polynomů uvedeme bez důkazu větu:

Věta 1.2.1. Jestliže v polynomu $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_k \in \boldsymbol{Z}$ je $a_n = 1$ a má-li $p(x)$ kořeny patřící do $\boldsymbol{Z}$, pak jsou tyto kořeny děliteli čísla a_0.

Řešené úlohy

Příklad Užitím Hornerova schématu určete kořeny polynomu

$p(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6.$

Řešení: Pokud existují celočíselné kořeny, pak podle věty 1.2.1 to mohou být čísla $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ a ± 6. Sestavíme tabulku a uvědomíme si, že jsou-li x_0, x_1 kořeny polynomu $p(x)$ a $p(x) = (x - x_0)\, p_1(x)$, pak x_1 musí být kořenem polynomu $p_1(x)$. To znamená, že v tabulce můžeme při výpočtu použít nově vzniklý řádek.

	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0
-1	1	-1	-6	0	
2	1	1	-4		
-2	1	-3	0		
3	1	0			

$\Rightarrow x_1 = 1$ je kořen $\Rightarrow p(x) = (x-1)(x^3 - 7x - 6)$,

$\Rightarrow x_2 = -1$ je kořen $\Rightarrow p(x) = (x-1)(x+1)(x^2 - x - 6)$,

$\Rightarrow x_0 = 2$ není kořen,

$\Rightarrow x_3 = -2$ je kořen $\Rightarrow p(x) = (x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$,

$\Rightarrow x_4 = 3$ je kořen.

Rozklad polynomu $p(x)$ na součin kořenových činitelů lze napsat ve tvaru

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)(x+1)(x+2)(x-3).$$

Kontrolní otázky

1. Kterou z funkcí nazýváme polynomem?
   a) Komplexní funkci komplexní proměnné,
   b) komplexní funkci reálné proměnné,
   c) reálnou funkci reálné proměnné.
2. Je součinem polynomů polynom?
   a) ano, b) ne, c) nemusí být.
3. Je podílem polynomů polynom?
   a) ano, b) ne, c) nemusí být.
4. Hornerovým algoritmem lze pro polynom $\mathrm{p}(\mathrm{x})$ určit
   a) jen kořen polynomu,
   b) jen hodnotu polynomu v daném bodě,
   c) oboje.
5. Řešení které z uvedených rovnic vede k určení kořenů polynomu 2. stupně?
   a) Lineární rovnice,
   b) kvadratické rovnice,
   c) kubické rovnice.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. a); 2. a); 3. c); 4. c); 5. b).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte hodnoty následujících polynomů v bodech 0, 1, -1, -2, 3 přímým dosazením a pomocí Hornerova algoritmu:

a) $p(x)=x^3+2x^2-x+3$, b) $q(x)=x^4-2x^2+x-4$, c) $r(x)=x^5-3x^3+2x-2$.

2. Nalezněte kořeny polynomu a proveďte rozklad na kořenové činitele:

a) x^3-2x^2-x+2, b) x^3+2x^2-x-2, c) $x^3+3x^2-4x-12$,

d) x^3-3x+2, e) x^3+5x^2+8x+4, f) x^3-3x^2+4,

g) $x^4+x^3-4x^2-4x$, h) x^4-3x^3+4x, i) $x^4-3x^3-3x^2+7x+6$,

j) x^3-x^2+x-1, k) x^3-4x^2+6x-4, l) $x^4-x^3-x^2-x-2$.

3. Pomocí Hornerova algoritmu vydělte polynomy:

a) $(2x^5-7x^4+13x^3-9x^2-14x+8):(x-2)$,

b) $(2x^5-7x^4+13x^3-9x^2-14x+8):(x+2)$,

c) $(3x^5-3x^4-5x^3+6x^2-2x+7):(x+1)$,

d) $(3x^5-3x^4-5x^3+6x^2-2x+7):(x-1)$,

e) $(x^6-6x^5+3x^4+19x^3+2x^2-22x+21):(x-3)$.

4. Nalezněte všechny kořeny polynomu $p(x)$, znáte-li jeden kořen polynomu:

a) $p(x)=x^3-7x+6$, $x_1=-3$, b) $p(x)=2x^3-3x^2-3x+2$, $x_1=2$,

c) $p(x)=4x^3-8x^2-x+5$, $x_1=2$, d) $p(x)=x^3-x^2+3x+5$, $x_1=-1$,

e) $p(x)=x^4-x^3-17x^2-15x$, $x_1=5$, f) $p(x)=x^4-2x^3-4x^2-16x$, $x_1=4$.

5. Která z čísel -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4 jsou kořeny polynomu

$p(x)=x^5-x^4-10x^3-5x^2-21x+36$?

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 3, 5, 5, 5, 45 ; b) -4, -4, -6, 2, 62 ; c) -2, -2, -2, -14, 166 . **2.** a) 1, -1, 2; $(x-1)(x+1)(x-2)$; b) 1, -1, -2 ; $(x-1)(x+1)(x+2)$; c) 2, -2, -3 ; $(x-2)(x+2)(x+3)$; d) 1, 1, -2 ; $(x-1)^2(x+2)$ e) -1, -2, -2 ; $(x+1)(x+2)^2$ f) -1, 2, 2 ; $(x+1)(x-2)^2$; g) 0, -1, 2, -2 ; $x(x+1)(x-2)(x+2)$ h) 0, -1, 2, 2 ; $x(x+1)(x-2)^2$; i) -1, -1, 2, 3 ; $(x+1)^2(x-2)(x-3)$ j) 1, +i, -i ; $(x-1)(x-i)(x+i)$ k) 2, 1+i, 1-i ; $(x-2)(x-1-i)(x-1+i)$ l) -1, 2, +i, -i ; $(x+1)(x-2)(x-i)(x+i)$. **3.** a) $2x^4-3x^3+7x^2+5x-4$; b) $2x^4-11x^3+35x^2-79x+144-\dfrac{280}{x+2}$; c) $3x^4-6x^3+x^2+5x-7$; d) $3x^4-5x^2+x-1-\dfrac{8}{x-1}$; e) $x^5-3x^4-6x^3+x^2+5x-7$. **4.** a) -3, 1, 2 ; b) 2, -1, $\dfrac{1}{2}$; c) 2, $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$; d) -1, 1+2i, 1-2i ; e) 5, 0, -1, -3 ; f) 4, 0, $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$. **5.** 1, -3, 4.

Kontrolní test

1. Určete koeficienty u x^5 a x^4 součinu $f(x) \cdot g(x)$ polynomů

   $f(x) = 7x^6 + \frac{3}{5}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 2x - 3,$

   $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5.$

   a) $-15, \frac{67}{3};$ b) $5, \frac{67}{3};$ c) $\frac{67}{3}, 5.$

2. Rozložte polynom $f(x)$ na součin kořenových činitelů:

   $f(x) = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1.$

   a) $(9x+1)^3;$ b) $(3x-1)^3;$ c) $(9x-1)^3.$

3. Určete celé kořeny polynomu $f(x)$ (užijte Hornerův algoritmus):

   $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24.$

   a) $-2; 3; 4;$ b) $2; 3; -4;$ c) $2; -3; 4.$

4. Určete další kořeny polynomu $f(x)$ a jeho rozklad na součin kořenových činitelů, znáte-li jeden jeho kořen x_1:

   $f(x) = 7x^4 + 50x^3 - 50x - 7, \qquad x_1 = -7.$

   a) $-1; 1; \frac{1}{7};$ b) $1; -7; 7;$ c) $-1; -\frac{1}{7}; \frac{1}{7}.$

5. Řešte rovnici: $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x - 15 = 0.$

   a) $0; 1; 3; 5;$ b) $1; 1; -3; 5;$ c) $1; 3; -5; 5.$

6. Řešte nerovnici: $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 < 0.$

   a) $x \in \langle 1, 2 \rangle;$ b) $x \in (-1, 2);$ c) $x \in (1, 2).$

Výsledky testu

1. a); 2. b); 3. a); 4. a); 5. b); 6. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 5 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.1. a 1.2. znovu.