3.7. Metrické vlastnosti lineárních útvarů v E_3

Výklad

Mějme v E_3 přímky p se směrovým vektorem $\mathbf{u}$ a q se směrovým vektorem $\mathbf{v}$. Zvolme libovolný bod M a veďme jím přímky p′ se směrovým vektorem $\mathbf{u}$ a q′ se směrovým vektorem $\mathbf{v}$. Přímky p′, q′ rozdělují rovinu na čtyři konvexní neorientované úhly, z nichž dva a dva mají stejnou velikost. Označme jejich velikost α, β. **Odchylkou přímek** p, q pak rozumíme úhel φ, kde

$$\varphi = \min\{\alpha, \beta\}.$$

Pro totožné přímky položíme φ = 0. Odchylka dvou přímek je tedy úhel $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Nechť pro směrové vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ je jejich úhel ψ. Pak buď $\psi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a ψ je odchylkou obou přímek, tj. φ = ψ, nebo $\psi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$, potom odchylkou φ přímek je číslo π – ψ, tj. φ = π - ψ. Pro oba případy můžeme užít jediného vztahu

$$\cos\varphi = |\cos\psi| = \left| \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|} \right|. \qquad (1)$$

Odchylku φ dvou rovin ρ, σ definujeme pomocí jejich normálových vektorů $\mathbf{n}_\rho$, $\mathbf{n}_\sigma$ vztahem

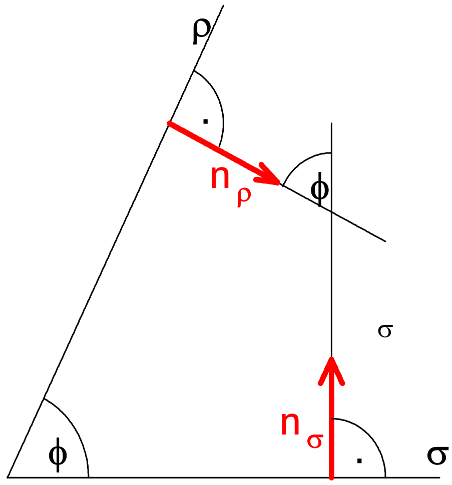
$$\cos\varphi = \left| \frac{\mathbf{n}_\rho.\mathbf{n}_\sigma}{|\mathbf{n}_\rho|.|\mathbf{n}_\sigma|} \right|. \qquad (2)$$

Správnost vztahu plyne z věty o rovnosti úhlů s rameny na sebe kolmými (obr. 13).

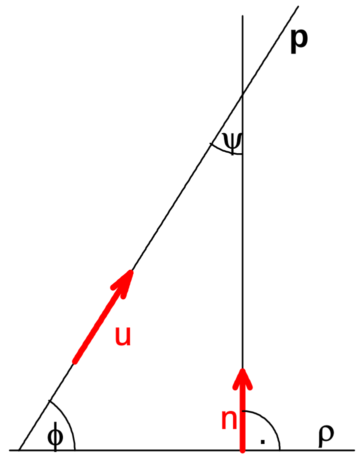
Obdobně definujeme **odchylku přímky** p se směrovým vektorem **$\mathbf{u}$ od roviny** ρ s normálovým vektorem $\mathbf{n}$ vztahem

$$\sin\varphi = \cos\psi = \left| \frac{\mathbf{u}.\mathbf{n}}{|\mathbf{u}|.|\mathbf{n}|} \right|, \qquad (3)$$

kde $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \psi$ (obr. 14).



Obr. 13



Obr. 14

Řešené úlohy

Příklad Určeme odchylku φ rovin ABC a BCD: A = (1, 1, 1), B = (1, 1, 3), C = (1, 2, 0), D = (1, 2, 3).

Řešení: K určení normálových vektorů $\mathbf{n}_1$ a $\mathbf{n}_2$ rovin ABC a BCD užijeme vektorového součinu:

$$\mathbf{n}_1 = (B - A) \times (C - A) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 0, 0)\,,$$

$$\mathbf{n}_2 = (D - B) \times (D - C) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3, 0, 0)\,.$$

Užijeme vztahu (2) pro odchylku dvou rovin:

$$\cos\varphi = \left|\frac{(-2).3}{2.3}\right| = 1, \qquad \varphi = 0.$$

Řešené úlohy

Příklad Vypočtěme odchylku roviny α: $x - y + 3 = 0$ a přímky AB, A = (5, 5, 5), B = (3, 5, 3).

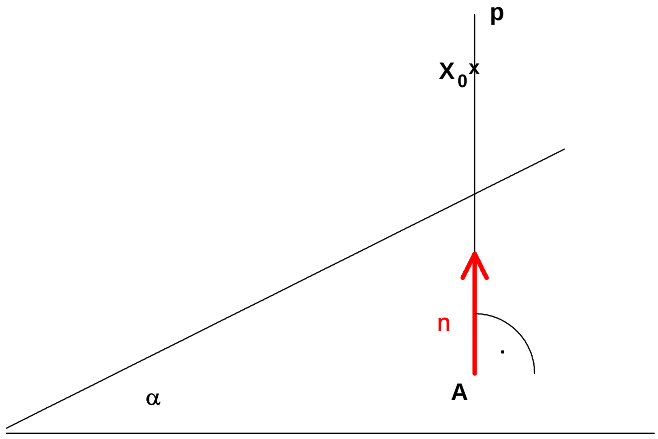
Řešení: Dostáváme $\mathbf{n} = (1, -1, 0)$ pro normálový vektor roviny α a $\mathbf{u} = B - A =$ $= (-2, 0, -2)$ pro směrový vektor přímky AB. Dále podle (3)

$$\sin\varphi = \left|\frac{(-2, 0, -2).(1, -1, 0)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}.\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}}\right| = \frac{1}{2} \qquad \text{a tedy} \qquad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Výklad

Vzdálenost bodu $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ **od roviny** α: $ax + by + cz + d = 0$ označíme $\rho(X_0, \alpha)$.

Z bodu X_0 vedeme kolmici p na rovinu α (obr. 15). Označíme průsečík $A = p \cap \alpha$.



Obr. 15

Vzdálenost bodů X_0, A je pak hledanou vzdáleností. Pro normálový vektor

$\mathbf{n} = (a, b, c)$ roviny α platí $\overrightarrow{X_0A} = t\mathbf{n}$,

$t \in \mathbf{R}$ a tedy $|A - X_0| = |t|.|\mathbf{n}| = |t| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Označme $A = (x_A, y_A, z_A)$. Z vektorové rovnice $\overrightarrow{X_0A} = t\mathbf{n}$ dostaneme

$$\begin{aligned} x_A &= x_0 + t\,a \\ y_A &= y_0 + t\,b \\ z_A &= z_0 + t\,c\,. \end{aligned}$$

Poněvadž $A \in \alpha$ musí být $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$. Dosadíme za x_A, y_A a z_A do předchozí rovnice a dostaneme

$a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c(z_0 + tc) + d = 0.$

Odtud

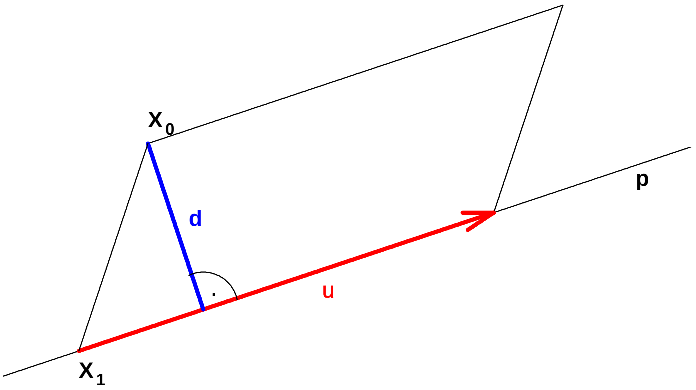
$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

Užijeme rovnici pro vzdálenost bodů A, X_0 a získáme vztah

$$|A - X_0| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \rho(X_0, \alpha)\,.$$

Vzdálenost bodu $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ **od přímky** p: $x = x_1 + u_1t$, $y = y_1 + u_2t$, $z = z_1 + u_3t$, která je dána bodem $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a směrovým vektorem $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$, označíme $\rho(X_0, p)$.

Z vlastností vektorového součinu a ze vztahu pro výpočet obsahu rovnoběžníka (obr. 16) vyplývá rovnost $|u \times \overrightarrow{X_1X_0}| = |u|\,.\,d$. Z rovnice vyjádříme d a dostaneme vztah :



$$d = \frac{|u \times \overrightarrow{X_1X_0}|}{|u|} = \rho\ (X_0,\ p)\ .$$

Obr. 16

Práce v analytické geometrii je natolik rozmanitá, že se nelze spoléhat jen na použití vzorců. Obvykle je nutno nejprve rozvážit prostorové řešení příkladu a potom jej analytickou metodou vyřešit.

Řešené úlohy

Příklad Určeme bod Y, který má stejnou vzdálenost od bodů A = (1, 1, 1) a

B = (-1, 0, 1) a leží na přímce p: x = t, y = 1 - t, z = 2 - 2t.

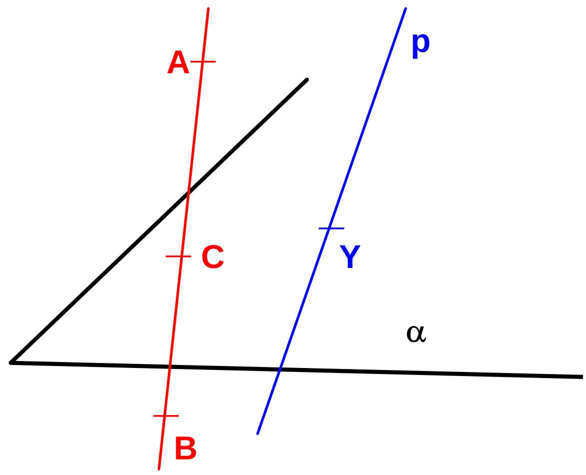
Rozbor úlohy (obr. 17):

1. Určíme souřadnice bodu C, který je středem úsečky s koncovými body A, B.
2. Stanovíme rovnici roviny α procházející bodem C kolmo k přímce AB. (Rovina α je množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodů A, B).
3. Určíme $Y = p \cap \alpha$. Bod Y má požadovanou vlastnost.

Řešení:

1. Bod C je středem úsečky s koncovými body A, B a tedy platí $C = \frac{1}{2}(A + B)$, tj.

$$C = (0,\ \frac{1}{2},\ 1).$$



Obr. 17

2. Rovina α má rovnici $ax + by + cz + d = 0$.

Má-li C ležet v rovině α, je $a.0 + b.\frac{1}{2} + c.1 + d = 0$.

Vektor $\overrightarrow{AB} = (-2, -1, 0)$ můžeme považovat za normálový vektor roviny α.

Platí $-2.0 - 1.\frac{1}{2} + 0.1 + d = 0, \quad d = \frac{1}{2}$.

Rovina α má pak rovnici

$$-2x - y + \frac{1}{2} = 0$$

a po úpravě

$$4x + 2y - 1 = 0.$$

3. Souřadnice společného bodu přímky p a roviny α nalezneme řešením soustavy rovnic

$$x = t,\ y = 1 - t,\ z = 2 - 2t,\ 4x + 2y - 1 = 0.$$

Z prvních tří rovnic dosadíme do čtvrté a dostaneme $t = -\frac{1}{2}$. Dosazením do prvních tří rovnic získáme souřadnice bodu $Y = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3)$.

Kontrolní otázky

1. Jsou-li směrové vektory $\mathbf{u},\mathbf{v}$ lineárně nezávislé, která z možností platí pro přímky p, q:

   a) rovnoběžné různé nebo různoběžné,

   b)) rovnoběžné různé nebo mimoběžné,

   c) různoběžné nebo mimoběžné.

2. Obecné rovnice dvou rovin α,β určují soustavu dvou lineárních rovnic o třech neznámých. Která z možností platí, jsou-li roviny různoběžné:

   a) $h=1, h'=2,$ b) $h=h'=2,$ c) $h=h'=1.$

3. Rovnice přímky a rovnice roviny určují soustavu lineárních rovnic. Jaká je vzájemná poloha přímky s rovinou, má-li soustava právě jedno řešení:

   a) rovnoběžná, b) různoběžná, c) totožná.

4. Jaký součin vektorů používáme pro výpočet odchylek lineárních útvarů v E_3 :

   a) skalární, b) vektorový, c) smíšený.

5. Který ze vztahů definuje odchylku φ přímky p se směrovým vektorem $\mathbf{u}$ od roviny α s normálovým vektorem $\mathbf{n}$:

   a) $\cos\varphi=\left|\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{n}|}\right|,$

   b) $\sin\varphi=\left|\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{n}|}\right|,$

   c) $\operatorname{tg}\varphi=\left|\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{n}|}\right|,$

6. Jakou metodu použijeme při výpočtu vzdálenosti bodu od přímky:

   a) výpočet výšky v trojúhelníka,

   b) výpočet objemu trojstěnu,

   c) výpočet odchylky dvou přímek.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. c), 2. b), 3. b), 4. a), 5. b), 6. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete odchylku přímek p, q:

a) p: $x = 3 + t,\ y = -2 - t,\ z = \sqrt{2}t$, q: $x = -2 + t,\ y = 3 + t,\ z = -5 + \sqrt{2}t$,

b) p: $x = -2 + 3t,\ y = 0,\ z = 3 - t$, q: $\begin{cases} x - 2z - 5 = 0 \\ y = 0, \end{cases}$

c) p: $\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 4 = 0, \end{cases}$ q: $\begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0. \end{cases}$

2. Vypočtěte odchylku rovin α a β, jestliže

a) rovina α je dána body A, B, C a rovina β body B, C, D: A = (1, 1, 1), B = (1, 1, 3), C = (1, 2, 0), D = (1, 2, 3),

b) α: $4x - 2y + z - 3 = 0$, β: $x = 3 - 2r + 3s,\ y = 1 - r + s,\ z = 2 + r - 2s$,

c) α, β jsou roviny stěn čtyřstěnu ABCD protínající se v hraně AB, A = (0, 2, 6), B = (2, 1, 4), C = (5, 0, 1), D = (0, 2, 0).

3. Najděte odchylku přímky p od roviny ρ, jestliže

a) p: $x = 3 + t,\ y = 3 + 2t,\ z = -2 - t$, ρ: $x + y - 1 = 0$,

b) přímka p je dána body A = (5, 5, 5) a B = (3, 5, 3) a ρ: $x - y + 3 = 0$.

4. Stanovte vzdálenost bodu M od roviny α, jestliže

a) M = (-2, -4, 3), α: $2x - y + 2z + 3 = 0$,

b) M = (1, 2, -3), α: $5x - 3y + z + 4 = 0$,

c) M = (-1, 1, -2) a rovina α je dána body A, B, C: A = (1, -1, 1), B = (-2, 1, 3), C = (4, -5, -2),

d) M = (2, 3, -1), α: $x = r + s,\ y = 1 - r + s,\ z = -1 + s$.

5. Určete vzdálenost bodu X_0 od přímky a, jestliže

a) $X_0 = (3, 2, 1)$, a: $x = 2 - 3t,\ y = 1 + t,\ z = 7 - 2t$,

b) $X_0 = (2, 3, -1)$, a: $x = 1 + t,\ y = 2 + t,\ z = 13 + 4t$,

c) $X_0 = (2, 3, -1)$, a: $\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0. \end{cases}$

6. Napište rovnici přímky m, která prochází bodem K = (3, 3, 2) a je kolmá k rovině ρ: $x = 1 - 2r + 3s$, $y = 2 + r + s$, $z = 4 - r + 2s$.

7. Určete rovnici roviny souměrnosti úsečky AB: A = (2, 3, 0), B = (-1, 5, 4).

8. Určete bod Q souměrně sdružený s bodem P = (2, -5, 7) podle přímky p, která prochází body A = (5, 4, 6) a B = (-2, -17, -8).

9. Zjistěte souřadnice bodu Q souměrně sdruženého s bodem P = (1, 3, -4) podle roviny α: $3x + y - 2z = 0$.

10. Určete vzdálenost rovnoběžných rovin α a β:

a) α: $x - 2y - 2z - 12 = 0$, β: $x - 2y - 2z - 6 = 0$,

b) α: $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, β: $4x - 6y + 12z + 21 = 0$.

11. Vypočtěte vzdálenost rovnoběžných přímek p a q, jestliže

a) p: $x = 2 + t$, $y = -1 + 2t$, $z = -3 + 2t$, q: $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = -1 + 2t$,

b) přímka p je dána body A, B: A = (7, 7, 3), B = (10, 9, 4) a

q: $\begin{cases} 2x - 3y - 9 = 0 \\ y - 2z + 7 = 0. \end{cases}$

12. Najděte kolmý průmět bodu A = (2, -1, 4) do roviny α: $3x + y + z - 20 = 0$.

13. Určete obecnou rovnici roviny procházející bodem $X_0 = (1, 2, -3)$ rovnoběžně s přímkami p: $x = 1 + 2t$, $y = -1 - 3t$, $z = 7 + 3t$, q: $x = -5 + 3t$, $y = 2 - 2t$, $z = -3 - t$.

14. Určete obecnou rovnici roviny, která prochází bodem $X_0 = (2, -2, 1)$ a přímkou p: $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 3t$, $z = -3 + 2t$.

15. Určete obecnou rovnici roviny procházející přímkou p: $x = 1 + 3t$, $y = 3 + 2t$, $z = -2 - t$ rovnoběžně s přímkou q: $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 5 == 0. \end{cases}$

16. Určete parametrické rovnice přímky procházející bodem $X_0 = (3, -2, -4)$ rovnoběžně s rovinou α: $3x - 2y - 3z - 7 = 0$, která protíná přímku p: $x = 2 + 3t$, $y = -4 - 2t$, $z = 1 + 2t$.

17. Stanovte parametrické rovnice přímky, která je rovnoběžná s rovinami α: $3x + 12y - 3z - 5 = 0$, β: $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ a protíná přímky p: $x = -5 + 2t$, $y = 3 - 4t$, $z = -1 + 3t$, q: $x = 3 - 2t$, $y = -1 + 3t$, $z = 2 + 4t$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\varphi = \frac{\pi}{3}$, **b)** $\varphi = \frac{\pi}{4}$, **c)** $\cos\varphi = \frac{4}{21}$. **2.a)** $\varphi = 0$, **b)** $\varphi = 28^0 07'32''$, **c)** $\varphi = 18^0 26'06''$.

3. a) $\varphi = \frac{\pi}{3}$, **b)** $\varphi = \frac{\pi}{6}$. **4. a)** $\rho(M, \alpha) = 3$, **b)** $\rho(M, \alpha) = 0$, **c)** $\rho(M, \alpha) = 4$,

d) $\rho(M, \alpha) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. **5. a)** $\rho(X_0, a) = \frac{\sqrt{432}}{\sqrt{14}} \doteq 5{,}6$, **b)** $\rho(X_0, a) = 6$, **c)** $\rho(X_0, a) = 15$.

6. $x = 3 + 3t$, $y = 3 + t$, $z = 2 - 5t$. **7.** $6x - 4y - 8z + 29 = 0$. **8.** $Q = (4, 1, -3)$. **9.** $Q = (-5, 1, 0)$.

10. a) $d = 2$, **b)** $d = 3{,}5$. **11. a)** $d = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, **b)** $d = 2\sqrt{6}$. **12**. (5, 0, 5).

13. $9x + 11y + 5z - 16 = 0$. **14.** $4x + 6y + 5z - 1 = 0$. **15.** $13x - 14y + 11z + 51 = 0$.

16. $x = 3 + 5t$, $y = -2 - 6t$, $z = -4 + 9t$. **17.** $x = -3 + 8t$, $y = -1 - 3t$, $z = 2 - 4t$.

Kontrolní test

1. Jsou dány body $A = (2, -1, 4)$, $B = (-2, 1, -4)$, $C = (-1, \frac{1}{2}, -2)$, $D = (10, -5, 20)$. Určete vzájemnou polohu přímek AB, CD:

   a) různoběžné, b) rovnoběžné totožné, c) mimoběžné.

2. Určete vzájemnou polohu rovin:

   $\alpha: \; 2x - y + z + 3 = 0,$

   $\beta: \; A = (2, 7, 0), \; \mathbf{u} = (1, 2, 0), \; \mathbf{v} = (0, -1, -1).$

   a) rovnoběžné, b) různoběžné, c) rovnoběžné totožné.

3. Napište rovnici průsečnice rovin

   $\alpha: \; x + y + z - 1 = 0,$

   $\beta: \; 4x + 5y - z + 1 = 0.$

   a)

   $$\begin{aligned} x &= 6 - 6t \\ y &= -5 + 5t \\ z &= t \end{aligned}$$

   b)

   $$\begin{aligned} x &= 6 + 6t \\ y &= 5 - 5t \\ z &= 5t \end{aligned}$$

4. Určete vzájemnou rovnici přímky a roviny:

$p:\ P=(1,3,2),\ \mathbf{u}=(1,-1,-3),$
$\alpha:\ 9x+3y+2z+2=0.$

a) různoběžné, b) rovnoběžné, c) leží v rovině.

5. Vypočtěte odchylku přímek p, q, jsou-li:

$p:\ 2x+y-z=y+3z-4=0,$
$q:\ -x+2y-z+4=4x-y+3z-10=0.$

a) $79^\circ 20'$, b) $81^\circ 30'$, c) $77^\circ 10'$.

6. Vypočtěte odchylku přímky p a roviny α:

$p:\ P=(2,-1,0),\ \mathbf{u}=(9,2,-4),$
$\alpha:\ A=(5,4,3), B=(8,7,6), C=(2,2,2).$

a) $75^\circ 30'$, b) $87^\circ 40'$, c) $89^\circ 10'$.

7. Určete vzdálenost dvou rovin:

$\alpha:\ 3x-2y-6y+35=0,$
$\beta:\ 3x-2y-6z=0.$

a) 35, b) 5, c) $\sqrt{35}$.

8. Určete vzdálenost bodu $A=(2,3,1)$ od přímky $p: B=(2,1,0), C=(1,4,1)$.

a) $\frac{6}{11}$, b) $\frac{\sqrt{6}}{11}$, c) $\frac{\sqrt{66}}{11}$.

Výsledky testu

1. b), 2. c), 3. a), 4. b), 5. a), 6. b), 7. b), 8. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 6 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 3.6., 3.7. znovu.