

3.6. Vzájemná poloha lineárních útvarů v E_3



Výklad



A. Vzájemná poloha dvou přímek

Uvažujme v E_3 přímky p, q :

$$p: X = A + r\mathbf{u}$$

$$q: X = B + s\mathbf{v}$$

a hledejme jejich společné body, tj. hledejme takové hodnoty parametrů r, s , které dosazeny do uvedených rovnic určí týž bod. Pro r, s dostáváme rovnici

$$r\mathbf{u} - s\mathbf{v} = B - A,$$

kde $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Dosadíme souřadnice a dostaneme soustavu tří rovnic o neznámých r, s

$$ru_1 - sv_1 = b_1 - a_1$$

$$ru_2 - sv_2 = b_2 - a_2$$

$$ru_3 - sv_3 = b_3 - a_3.$$

Označme h hodnost matice soustavy a h' hodnost matice rozšířené. Pro přímky p, q pak nastane právě jedna z následujících možností:



(1) Soustava nemá žádné řešení a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé ($h = 1, h' = 2$).

Přímky p, q jsou **rovnoběžné, různé**.



(2) Soustava nemá žádné řešení a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé ($h = 2, h' = 3$).

Přímky p, q jsou **mimoběžné**.



(3) Soustava má právě jedno řešení, vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou pak lineárně nezávislé ($h = 2,$

$h' = 2$). Přímky p, q jsou **různoběžné**.

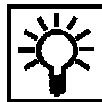


(4) Soustava má nekonečně mnoho řešení. Pak jsou vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ lineárně závislé

($h = 1$, $h' = 1$). Přímky p , q jsou **totožné**.



Řešené úlohy



Příklad Rozhodněme o vzájemné poloze přímek $p: X = A + r\mathbf{u}$, $q: Y = B + s\mathbf{v}$, jestliže

a) $A = (-1, 2, 1)$, $\mathbf{u} = (3, 1, -1)$, $B = (9, 4, -10)$, $\mathbf{v} = (-9, -3, 3)$,

b) $A = (7, 5, 3)$, $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $B = (0, -1, -2)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$.

Řešení:

a) Platí $\mathbf{v} = -3\mathbf{u}$, vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé. Zjistíme, zda jsou přímky p , q totožné nebo rovnoběžné. Budeme proto hledat společné body přímek p , q . Soustava rovnic má tvar

$$\begin{aligned} 3r + 9s &= 10 \\ r + 3s &= 2 \\ -r - 3s &= -11. \end{aligned}$$

Lze se snadno přesvědčit, že soustava nemá řešení a tedy přímky p , q jsou rovnoběžné, různé.

b) Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé. Přímky p , q jsou různoběžky nebo mimoběžky. Nyní budeme řešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3r - s &= -7 \\ 2r - 2s &= -6 \\ r - 3s &= -5. \end{aligned}$$

Soustava má jediné řešení $r = -2$, $s = 1$. Existuje tedy jediný průsečík přímek p , q , bod $R = (1, 1, 1)$. Přímky p , q jsou různoběžné.



Výklad



B. Vzájemná poloha dvou rovin

Pro dvě roviny může nastat právě jedna z následujících možností:



(1) Roviny nemají žádné společné body, pak jsou **rovnoběžné, různé**.



(2) Množina všech společných bodů obou rovin je přímka, tj. obě roviny jsou **různoběžné**.



(3) Roviny jsou **totožné**.



Předpokládejme, že roviny jsou dány vektorovými rovnicemi

$$X = P + k\mathbf{a} + l\mathbf{b},$$

$$Y = Q + m\mathbf{c} + n\mathbf{d},$$

kde $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ a $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$. K získání společných bodů obou rovin budeme řešit rovnici

$$P + k\mathbf{a} + l\mathbf{b} = Q + m\mathbf{c} + n\mathbf{d}$$

s neznámými k, l, m, n . Dosadíme souřadnice a dostaneme soustavu tří rovnic o čtyřech neznámých.

$$ka_1 + lb_1 - mc_1 - nd_1 = q_1 - p_1$$

$$ka_2 + lb_2 - mc_2 - nd_2 = q_2 - p_2$$

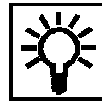
$$ka_3 + lb_3 - mc_3 - nd_3 = q_3 - p_3.$$

Označíme h hodnotu matice soustavy a h' hodnotu matice rozšířené. Mohou nastat případy:

- (1) $h = 2, h' = 3$, soustava nemá řešení (roviny jsou rovnoběžné různé),
- (2) $h = 3, h' = 3$, soustava má nekonečně mnoho řešení, která závisí na jednom parametru (roviny jsou různoběžné),
- (3) $h = 2, h' = 2$, soustava má nekonečně mnoho řešení, která závisí na dvou parametrech (roviny jsou totožné).



Řešené úlohy



Příklad Rozhodněme o vzájemné poloze rovin:

a) $X = (1, 1, 1) + k(1, 0, 2) + l(-2, 1, 1),$

$$Y = (0, 2, -2) + m(-1, 1, 3) + n(-3, 1, -1),$$

b) $X = (0, 0, 1) + k(1, 1, 0) + l(2, 2, 1),$

$$Y = (7, 5, 5) + m(3, 2, 2) + n(2, 1, 1),$$

c) $X = (1, 1, 1) + k(2, 0, 4) + l(-6, 3, 3),$

$$Y = (5, 1, 9) + m(1, -1, -3) + n(3, -1, 1).$$

Řešení:

a) Dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} k - 2l + m + 3n &= -1 \\ l - m - n &= 1 \\ 2k + l - 3m + n &= -3. \end{aligned}$$

Užijeme Gaussovu eliminační metodu:

A	B	Σ	Úpravy
1 -2 1 3	-1	2	
0 1 -1 -1	1	0	
2 1 -3 1	-3	-2	$r_3 - 2r_1$
1 -2 1 3	-1	2	
0 1 -1 -1	1	0	
0 5 -5 -5	-1	-6	$r_3 - 5r_2$
1 -2 1 3	-1	2	
0 1 -1 -1	1	0	
0 0 0 0	-6	-6	

Je vidět, že soustava nemá řešení. Roviny jsou rovnoběžné různé.

b) Postupujeme stejně jako v předchozím příkladu a ze soustavy

$$\begin{aligned} k + 2l - 3m - 2n &= 7 \\ k + 2l - 2m - n &= 5 \\ l - 2m - n &= 4, \end{aligned}$$

získáme soustavu

$$\begin{aligned} k + 2l - 3m - 2n &= 7 \\ l - 2m - n &= 4 \\ m + n &= -2. \end{aligned}$$

Platí $h = h' = 3$. Nyní můžeme například n zvolit libovolně. Položíme $n = t$. Dostaneme řešení

$$k = 1 + t, \quad l = -t, \quad m = -2 - t, \quad n = t.$$

Dosadíme toto řešení např. do rovnice první roviny:

$$X = (0, 0, 1) + (1 + t)(1, 1, 0) + (-t)(2, 2, 1),$$

tj.

$$X = (1, 1, 1) + t(-1, -1, -1).$$

Tím jsme získali rovnici přímky, množiny všech společných bodů obou rovin. Obě roviny jsou různoběžné.

c) Soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2k - 6l - m - 3n &= 4 \\ 3l + m + n &= 0 \\ 4k + 3l + 3m - n &= 8, \end{aligned}$$

upravíme na tvar

$$\begin{aligned} 2k - 6l - m - 3n &= 4 \\ 3l + m + n &= 0. \end{aligned}$$

Protože $h = h' = 2$, můžeme dvě neznámé zvolit. Například $k = r$, $l = 2s$. Získáme řešení

$$k = r, \quad l = 2s, \quad m = -r - 3s + 2, \quad n = r - 3s - 2.$$

Dosadíme toto řešení např. do rovnice první roviny:

$$X = (1, 1, 1) + r(2, 0, 4) + s(-12, 6, 6).$$

Je vidět, že množina všech společných bodů obou rovin je právě první rovina.

Obě roviny jsou tedy totožné.

Pokud budou roviny ρ_1, ρ_2 dány obecnými rovnicemi

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

určíme jejich vzájemnou polohu takto:

Označme h hodnotu matice předcházející soustavy a h' hodnotu matice rozšířené. Potom platí:



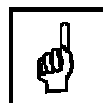
(1) Roviny ρ_1, ρ_2 jsou **rovnoběžné, různé** právě tehdy, když $h = 1, h' = 2$.



(2) Roviny ρ_1, ρ_2 jsou **různoběžné** právě tehdy, když $h = h' = 2$.



(3) Roviny ρ_1, ρ_2 jsou **totožné** právě tehdy, když $h = h' = 1$.



C. Vzájemná poloha přímky a roviny

Budeme postupovat stejně jako v předcházejících případech. Rovnice přímky a rovnice roviny určují soustavu lineárních rovnic a mohou nastat případy:



(1) Soustava nemá řešení; přímka nemá s rovinou společný bod, je s rovinou **rovnoběžná**.



(2) Soustava má právě jedno řešení; přímka je s rovinou **různoběžná** a má s ní společný právě jeden společný bod, průsečík.



(3) Soustava má nekonečně mnoho řešení; **přímka leží v rovině**.





Řešené úlohy



Příklad Rozhodněme o vzájemné poloze přímky $p: X = (3, 1, 3) + t(-1, -4, 3)$ a roviny $\rho: x + 2y + 3z + 4 = 0$.

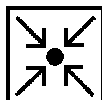
Řešení: Napíšeme parametrické rovnice přímky p :

$$\begin{aligned}x &= 3 - t \\y &= 1 - 4t \\z &= 3 + 3t.\end{aligned}$$

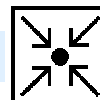
Dosadíme do rovnice roviny:

$$(3 - t) + 2(1 - 4t) + 3(3 + 3t) + 4 = 0.$$

Po úpravě dostaneme $18 = 0$. Rovnice nemá řešení, to znamená, že neexistuje společný bod přímky p a roviny ρ . Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ (v dané rovině neleží).



Úlohy k samostatnému řešení



1. Určete vzájemnou polohu přímek p, q . V případě, že jsou různoběžné, určete souřadnice jejich průsečíku:

a) $p: x = 1 + 2r, y = 7 + r, z = 5 + 4r, q: x = 6 + 3s, y = -1 - 2s, z = s,$

b) $p: x = 1 + r, y = r, z = 2 + r, q: x = -1 + s, y = -2 + s, z = s,$

c) $p: x = 1 + 2r, y = -3 + 4r, z = 5 + 3r, q: x = 5s, y = 2 - s, z = -1 + 2s,$

d) $p: \begin{cases} 2x - y - 4z + 5 = 0 \\ 5x - z + 3 = 0 \end{cases}, q: \begin{cases} 3x + 4y + 5z - 3 = 0 \\ 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases},$

e) $p: \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}, q: \begin{cases} y + z - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases},$

f) $p: x = 1 - t, y = 4 - 5t, z = -4 - 4t, q: \begin{cases} 2x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ 8x - 2z + 3 = 0 \end{cases}.$

2. Pro jakou hodnotu čísla k jsou přímky $p: x = -2 + 2r, y = -3r, z = 1 + 4r$

a $q: x = 3 + ks, y = 1 + 4s, z = 7 + 2s$ různoběžné?

3. Zjistěte vzájemnou polohu rovin α, β a v případě, že jsou různoběžné, rozhodněte, zda jsou na sebe kolmé a určete parametrické rovnice přímky, v níž se roviny protínají:

a) $\alpha: 2x - 3y + 5z - 7 = 0, \beta: 2x - 3y + 5z + 3 = 0,$

- b)** $\alpha: 4x + 2y - 4z + 2 = 0$, $\beta: 2x + y + 2z - 1 = 0$,
- c)** $\alpha: x - 3z + 2 = 0$, $\beta: x = 3 + 3r$, $y = s$, $z = r$,
- d)** $\alpha: 3x - y - 2z - 5 = 0$, $\beta: x + 9y - 3z + 2 = 0$,
- e)** $\alpha: x = 1 + r - 2s$, $y = 1 + s$, $z = 1 + 2p + q$, $\beta: x = -p - 3q$, $y = 2 + p + q$,
 $z = -2 + 3p - q$,
- f)** $\alpha: x = r + 2s$, $y = r + 2s$, $z = 1 + s$, $\beta: x = 7 + 3p + 2q$, $y = 5 + 2p + q$, $z = 5 + 2p + q$,
- g)** $\alpha: x = 1 + 2r - 6s$, $y = 1 + 3s$, $z = 1 + 4r + 3s$, $\beta: x = 5 + p + q$, $y = 1 - p - q$,
 $z = 9 - 3p + q$,
- h)** $\alpha: x - 2y + 2z = 3$, $\beta: x = 5 + r + s$, $y = r$, $z = s$.
- 4.** Určete čísla k, l tak, aby roviny α, β byly rovnoběžné:
- a)** $\alpha: 2x + ky + 3z - 5 = 0$, $\beta: lx - 6y - 6z + 2 = 0$,
- b)** $\alpha: 3x - y + kz - 9 = 0$, $\beta: 2x + ly + 2z - 3 = 0$.
- 5.** Určete číslo l tak, aby roviny α, β byly na sebe kolmé:
- a)** $\alpha: 3x - 5y + lz - 3 = 0$, $\beta: x + 3y + 2z + 5 = 0$,
- b)** $\alpha: 5x + y - 3z - 3 = 0$, $\beta: 2x + ly - 3z + 1 = 0$.
- 6.** Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ . V případě, že jsou různoběžné, určete souřadnice jejich průsečíku.
- a)** Přímka p je dána body A, B a rovina ρ body MNQ , $A = (2, 1, 2)$, $B = (3, 1, 3)$,
 $M = (2, 2, 1)$, $N = (1, 2, 2)$, $Q = (3, 5, 3)$.
- b)** Přímka p je dána body $E = (3, 1, 3)$, $F = (4, 5, 0)$ a rovina $\rho: x + 2y + 3z + 4 = 0$.
- c)** $p: x = 5t, y = 0, z = t$, $\rho: x = 3 + 2r + s, y = 1 - r + 2s, z = r - s$.
- d)** $p: x = -2 + 3t, y = 1 - 4t, z = -5 + 4t$, $\rho: 4x - 3y - 6z - 5 = 0$.
- e)** $p: x = 1 + t, y = -1 - 2t, z = 6t$, $\rho: 2x + 3y + z - 1 = 0$.
- f)** $p: x = -2 - 2t, y = 1 + 3t, z = 3 + 2t$, $\rho: x + 2y - 2z + 6 = 0$.
- 7.** Pro které hodnoty k, l leží přímka $p: x = 3 + 4t, y = 1 - 4t, z = -3 + t$ v rovině $\rho: kx + 2y - 4z + l = 0$?
- 8.** Pro které hodnoty k, l je rovina $\rho: kx + ly + 3z - 5 = 0$ kolmá k přímce $p: x = 3 + 2t$,
 $y = 5 - 3t, z = -2 - 2t$?
- 9.** Pro jakou hodnotu k je přímka p rovnoběžná s rovinou ρ :
- a)** $p: x = -1 + 3t, y = 2 + kt, z = -3 - 2t$, $\rho: x - 3y + 6z + 7 = 0$,

b) $\rho: 2x - y + kz - 2 = 0$, $p: \begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0 \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$.



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. **a)** různoběžné, $(-3, 5, -3)$, **b)** totožné, **c)** mimoběžné, **d)** různoběžné, $(-\frac{4}{11}, -\frac{5}{11}, \frac{13}{11})$,
e) mimoběžné, **f)** rovnoběžné.
2. $k = 3$.
3. **a)** rovnoběžné, **b)** různoběžné, nejsou kolmé, $p: x = -1 + t, y = 2 - 2t, z = \frac{1}{2}$,
c) rovnoběžné, **d)** různoběžné, kolmé, $p: x = \frac{55}{21} + 3t, y = t, z = \frac{11}{7} + 4t$.
e) rovnoběžné, **f)** různoběžné, nejsou kolmé, $p: x = 1 - t, y = 1 - t, z = 1 - t$, **g)** totožné,
h) různoběžné, nejsou kolmé, $x = 7 + 4t, y = 2 + 3t, z = t$.
4. **a)** $k = 3, l = -4$, **b)** $k = 3, l = -\frac{2}{3}$. 5. **a)** $l = 6$, **b)** $l = -19$.
6. **a)** různoběžné, $R = (1, 1, 1)$, **b)** rovnoběžné, **c)** totožné, **d)** rovnoběžné, **e)** různoběžné,
 $R = (2, -3, 6)$, **f)** totožné. 7. $k = 3, l = -23$. 8. $k = -3, l = \frac{9}{2}$. 9. **a)** $k = -3$, **b)** $k = -2$.