3. VEKTOROVÝ POČET A ANALYTICKÁ GEOMETRIE

Průvodce studiem

Geometrii lze budovat metodou syntetickou nebo metodou analytickou. Při syntetické metodě pracujeme přímo s geometrickými objekty. Při analytické metodě jsou geometrické objekty charakterizovány pomocí číselných údajů. Taková analytická metoda je užívána např. v analytické geometrii a v diferenciální geometrii. Při výkladu analytické geometrie nám k charakteristice geometrických objektů poslouží zejména algebra, na rozdíl od diferenciální geometrie, k jejímuž výkladu je nutno studovat limitní procesy.

Předpokládané znalosti

Nutnou podmínkou k zvládnutí studia analytické geometrie je dobrá znalost vektorového počtu, kterým se budeme zabývat ve druhé části této kapitoly.

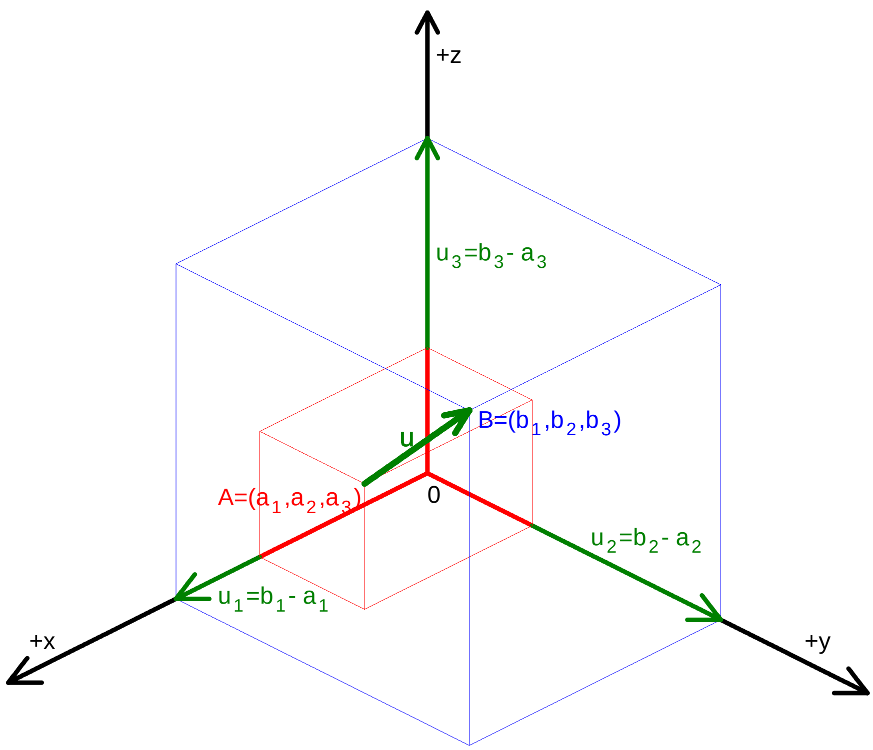
Průvodce studiem

Slova prostor se ve středoškolské geometrii užívá pro obyčejný prostor elementární geometrie. V matematice však užíváme názvu prostor v řadě rozmanitých významů. Obyčejný prostor se bude v dalším nazývat ***trojrozměrný euklidovský prostor*** nebo také ***euklidovský prostor dimenze 3*** a budeme jej označovat E_3. Rovina se bude nazývat ***dvojrozměrný euklidovský prostor*** nebo také ***euklidovský prostor dimenze 2*** a budeme ji označovat E_2. Konečně přímka se bude nazývat jednorozměrný euklidovský prostor nebo také ***euklidovský prostor dimenze 1*** a budeme ji označovat E_1. Avšak všude, kde to bude účelné, budeme i nadále užívat obvyklých termínů rovina a přímka a také budeme užívat názvu (obyčejný) prostor. Budeme studovat vlastnosti geometrických objektů v prostoru E_3 a budeme předpokládat základní znalosti geometrie v prostoru E_2. Vzhledem k pozdějšímu použití zavedeme některé pojmy v této kapitole nejen pro $n = 3$, tj. v E_3, ale obecně pro libovolné, konečné $n \in N$, tj. v E_n. Takový prostor se bude nazývat ***n-rozměrný euklidovský prostor***.

3.1. Euklidovský prostor

Výklad

Zvolme v prostoru tzv. kartézskou soustavu souřadnic. Zvolíme pevný bod O, který nazveme ***počátkem***, a tři navzájem kolmé přímky x, y, z procházející počátkem O, které nazveme ***osami.*** Každému bodu osy lze přirozeným způsobem přiřadit reálné číslo tak, že číslo 0 je přiřazeno počátku soustavy souřadnic O. ***Kartézskou soustavou souřadnic*** budeme rozumět čtveřici < O, +x, +y, +z >, kde O je počátek a polopřímky +x, +y, +z jsou tzv. kladné části souřadnicových os x, y, z. Každému bodu A prostoru můžeme nyní jednoznačně přiřadit uspořádanou trojici reálných čísel (a_1, a_2, a_3) (obr. 1) a naopak každé uspořádané trojici reálných čísel (a_1, a_2, a_3) je přiřazen jednoznačně bod A prostoru.



Obr. 1

Řekneme, že čísla a_1, a_2, a_3 jsou souřadnice bodu A v kartézské soustavě souřadnic < 0, +x, +y, +z >. Vzhledem k vzájemné jednoznačnosti přiřazení bodů prostoru a uspořádaných trojic reálných čísel z $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$, můžeme prostor a množinu $\mathbf{R}^3$ ztotožnit.

Uvažujme nyní množinu $\underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}}_{\text{n-krát}} = \mathbf{R}^n$. Každou uspořádanou n-tici

$(a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n)$ můžeme považovat za bod jistého prostoru. Pro n = 1 vytvoří všechny body prostoru přímku (1-rozměrný prostor), pro n = 2 vytvoří všechny body prostoru rovinu (2-rozměrný prostor), pro n = 3 vytvoří všechny body prostoru prostor (3-rozměrný prostor) a pro libovolné $n \in N$ vytvoří všechny body n-rozměrný prostor. Abychom v takových prostorech mohli řešit úlohy, v nichž se zabýváme vzdálenostmi bodů a měřením úhlů, je třeba zavést v prostoru tzv. metriku. Pro naše potřeby zavedeme běžnou euklidovskou metriku.

Definice 3.1.1.

Uspořádanou n-tici $A = (a_1, a_2, \ldots , a_n)$ budeme nazývat bodem n-rozměrného euklidovského prostoru $E_n = R^n$, je-li definována vzdálenost

$$\rho\,(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2} \qquad (1)$$

dvou libovolných bodů A a $B = (b_1, b_2, \ldots , b_n)$.

Poznámka

1. Pro n = 1 je $\rho\,((x_1), (x_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$ *a E_1 je přímka (1-rozměrný euklidovský prostor).*

2. Pro n = 2 je $\rho\,((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ *a E_2 je rovina (2-rozměrný euklidovský prostor).*

3. Pro n = 3 je $\rho\,((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ *a E_3 je prostor (3-rozměrný euklidovský prostor).*

4. Vzdálenost dvou bodů je zobrazení $E_n \times E_n \to \langle 0,\infty)$, tj. $(A,B) \to \rho\,(A,B) \in \langle 0,\infty)$ splňující axiomy:

$$\rho\,(A,B) = 0 \iff A = B,$$

$$\rho\,(A,B) = \rho\,(B,A)\,,$$

$$\rho\,(A,B) \le \rho\,(A,C) + \rho\,(C,B), \text{ pro každé } A,B,C \in E_n.$$

Každý prostor, ve kterém je definována vzdálenost splňující uvedené axiomy, se nazývá ***metrický****.*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte obvod trojúhelníka, jehož vrcholy jsou A = (2, 1, 0), B = (8, 0, 0), C = (4, 4, -5).

2. Zjistěte, který z daných trojúhelníků je rovnoramenný a který pravoúhlý:

a) A = (1, 4, 7), B = (-3, 12, -1), C = (-1, 2, 3),

b) M = (-1, 2, 0), N = (-4, -1, 0), R = (-7, 5, -1),

c) A = (1, -3, 3), B = (4, 3, 5), C = (1, 0, -3),

d) E = (2, 8 ,6), F = (5, 2, 7), G = (-1, 6, 3).

3. Na ose x najděte bod, jehož vzdálenost od bodu N = (-4, 6, 6) je rovna 12.

4. Na ose z najděte bod C takový, aby body A = (-4, 1, 7), B = (3, 5, -2), C tvořily rovnoramenný trojúhelník.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. $\sqrt{37} + \sqrt{38} + \sqrt{57}$. **2. a)** pravoúhlý, **b)** rovnoramenný, **c)** ani pravoúhlý, ani rovnoramenný, **d)** pravoúhlý. **3.** $(-4 \pm 6\sqrt{2},0,0)$. **4.** Jestliže ρ (A,C) = ρ (B,C), pak C = (0, 0, $\frac{14}{9}$), jestliže ρ (A,B) = ρ (B,C), pak C = (0, 0, $-2 + 4\sqrt{7}$), jestliže ρ (A,B) = ρ (A,C), pak C = (0, 0, $-2 - 4\sqrt{7}$).