2.6. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Cíle

V této části se budeme zabývat hledáním čísla λ, které je řešením rovnice

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{x}\,, \qquad (1)$$

kde $\mathbf{A}$ je matice řádu n. Znalost řešení takové rovnice má řadu aplikací nejen v matematice.

Definice 2.6.1.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice řádu n, kde $a_{ij} \in \mathbf{C}$. Číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ se nazývá **vlastní** nebo **charakteristické číslo** matice $\mathbf{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ tak, že

$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}$ se nazývá **vlastní** nebo **charakteristický vektor** příslušný k λ.

Poznámka

*Množinu všech vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ nazýváme **spektrum** matice $\mathbf{A}$.*

Řešené úlohy

Příklad Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pak

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\,\mathbf{x}.$$

To znamená, že $\lambda = 3$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{x} = (2, 1)^T$ je vlastní vektor příslušný k $\lambda =$ $= 3$. Zřejmě také každý nenulový násobek vektoru $\mathbf{x}$ je vlastním vektorem, protože

$$\mathbf{A}.(k\,\mathbf{x}) = k(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{x}) = k(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda(k\,\mathbf{x}).$$

Tak například $(4, 2)^T$ je také vlastní vektor příslušný k $\lambda = 3$. Platí

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Výklad

Rovnici (1) můžeme zapsat ve tvaru

$$(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o}\,,$$

což představuje soustavu homogenních rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} (a_{11}-\lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22}-\lambda)x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & (a_{nn}-\lambda)x_n & = & 0 \end{array},$$

která má netriviální řešení, právě když $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Vypočteme-li předchozí determinant, získáme polynom $p(\lambda)$ stupně n. Tento polynom se nazývá ***charakteristickým polynomem*** a rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, ***charakteristickou rovnicí*** matice $\mathbf{A}$. Řešením rovnice $p(\lambda) = 0$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Tak dostaneme n, ne nutně různých, vlastních čísel matice $\mathbf{A}$.

Řešené úlohy

Příklad Určeme vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Charakteristická rovnice má tvar $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

Dostaneme $(2 - \lambda)(-2 - \lambda)(2 -\lambda) - 6 - (-2 - \lambda) + 6(2 - \lambda) = 0$, t.j.

$$-\lambda(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Spektrem matice $\mathbf{A}$ je tedy množina $\{ 0, 1 \}$.

Nalezení vlastních vektorů příslušných k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ pak vede k řešení soustavy rovnic

$$(\mathbf{A} - 0.\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o}\,,$$

což je soustava

$$\begin{pmatrix} 2-0 & 3 & 1 \\ 1 & -2-0 & 1 \\ 1 & -3 & 2-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0\,. \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Použitím Gaussovy eliminační metody zjistíme, že ekvivalentní soustava má tvar

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_1 & + & x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Položíme $x_3 = t$ a dostaneme $x_1 = x_2 = x_3 = t$. Řešení soustavy je tedy tvaru

$\mathbf{x} = (t, t, t)^T$, $t \in \mathbf{C}$.

Každý násobek vektoru $(1, 1, 1)^T$ je vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$.

Podobně pro vlastní číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ budeme řešit soustavu

$$(\mathbf{A} - 1.\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o}\,,$$

což je soustava

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -3 & 1 \\ 1 & -2-1 & 1 \\ 1 & -3 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0\,. \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Použitím Gaussovy eliminační metody určíme ekvivalentní soustavu

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 0.$$

Položíme $x_2 = r$, $x_3 = s$ a dostaneme $x_1 = 3r - s$. Řešení soustavy je tedy tvaru

$\mathbf{x} = (3r - s, r, s)^T$, $r, s \in \mathbf{C}$.

Každý násobek vektoru $(2, 1, 1)^T$ je vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$,

i) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, j) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, k) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

l) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\lambda_1 = 5$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{x} = (t, -2t)^T$, b) $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x} = (4t, 3t)^T$; $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$, c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$, d) $\lambda_1 = 3 + 4i$, $\mathbf{x} = (2it, t)^T$; $\lambda_2 = 3 - 4i$, $\mathbf{x} = (-2it, t)^T$, e) $\lambda_1 = 2 + i$, $\mathbf{x} = (t, (1 + i)t)^T$; $\lambda_2 = 2 - i$, $\mathbf{x} = (t, (1 - i)t)^T$, f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$,

$\mathbf{x} = (t, 0, 0)^T$, g) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t, 0)^T$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\mathbf{x} = (r, s, -s)^T$, h) $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x} = (t, 0, 0)^T$; $\lambda_2 = 4$, $\mathbf{x} = (t, t, t)^T$; $\lambda_3 = -2$, $\mathbf{x} = (-t, -t, 5t)^T$, i) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x} = (7t, 3t, t)^T$; $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x} = (3t, 2t, t)^T$; $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{x} = (t, t, t)^T$, j) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\mathbf{x} = (t, 0, t)^T$, k) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (r, s, 0, 0)^T$; $\lambda_3 = 3$, $\mathbf{x} = (0, 0, t, 0)^T$; $\lambda_4 = 4$, $\mathbf{x} = (0, 0, 0, t)^T$; l) $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x} = (t, 2t, 0, 0)^T$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x} = (0, t, 0, 0)^T$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$, $\mathbf{x} = (0, 0, t, 0)^T$, vždy pro $r, s, t \in \mathbf{C}$.

Kontrolní otázky

1. Vlastní (charakteristické) číslo matice $\mathbf{A}$ řádu n je takové číslo $\lambda \in \mathbb{C}$,

   a) které se v matici vyskytuje nejčastěji,

   b) že platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$, kde $\mathbf{x}$ je vlastní vektor,

   c) že platí $\lambda \cdot \mathbf{A} = \mathrm{A} \cdot \mathbf{x}$, kde $\mathbf{x}$ je vlastní vektor.

2. K matici $\mathbf{A}$ řádu n existuje

   a) právě n vlastních čísel matice $\mathbf{A}$,

   b) nejvýše 1 vlastní číslo matice $\mathbf{A}$,

   c) právě n různých vlastních čísel matice $\mathbf{A}$.

3. Je-li vektor $\mathbf{x}$ vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$, pak je vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ také

   a) každý násobek vektoru $\mathbf{x}$,

   b) každý nenulový násobek vektoru $\mathbf{x}$,

   c) součet vektoru $\mathbf{x}$ a jednotkového vektoru.

4. Charakteristickou rovnicí matice $\mathbf{A}$ nazýváme

   a) $\det \mathbf{A} = 0$,

   b) $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{o}$,

   c) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$.

5. Řešením charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$ dostaneme

   a) vlastní čísla matice $\mathbf{A}$,

   b) vlastní vektory matice $\mathbf{A}$,

   c) prvky inverzní matice.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. b); 4. c); 5. a).

Kontrolní test

1. Najděte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \\ -16 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3,$ b) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2.$

2. Najděte vlastní čísla matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4,$ b) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3.$

3. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \mathbf{x}_1 = (t, -t),\ \mathbf{x}_2 = (t, t),$ b) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4, \mathbf{x}_1 = (2t, -t),\ \mathbf{x}_2 = (3t, t).$

4. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \mathbf{x}_1 = (1, t),\ \mathbf{x}_2 = (t, 2),$

b) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 6, \mathbf{x}_1 = (t, -t),\ \mathbf{x}_2 = (t, t).$

5. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -16 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_{1,2,3} = 0,\ \mathbf{x} = (t, \frac{2}{3}t, \frac{1}{3}t),$ b) $\lambda_{1,2,3} = 1,\ \mathbf{x} = (t, -t, t).$

6. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 3, \mathbf{x}_1 = (t, 0, 0), \ \mathbf{x}_2 = (t, -t, 2t),$

b) $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -2, \lambda_3 = -3, \mathbf{x}_1 = (1, 1, t), \ \mathbf{x}_2 = (3t, -t, 1).$

Výsledky testu

1. b); 2. b); 3. a); 4. b); 5. a); 6 a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 4 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.6. znovu.