2. LINEÁRNÍ ALGEBRA

Průvodce studiem

Mnoho důležitých úloh v matematice vyžaduje znalost řešení soustav lineárních rovnic. Okolo 75 procent všech matematických problémů ve vědeckých nebo průmyslových aplikacích vede k jejich řešení na různých úrovních. Lineární systémy se objevují v oblastech jako je obchod, ekonomika, sociologie, ekologie, demografie, genetika, elektronika, fyzika a inženýrství v různých technických oblastech. Pro studenty všech technických oborů je proto důležité seznámit se s těmi základními matematickými pojmy a jejich vlastnostmi, které umožňují pochopit řešení soustav lineárních rovnic.

2.1. Vektorové prostory

Cíle

Cílem této části textu je seznámit čtenáře zejména s pojmem vektorového prostoru, který se již intuitivně používal při studiu středoškolské matematiky.

Výklad

V mnoha různých oblastech matematiky se používá operace sčítání spolu s operací násobení skalárem. Matematické systémy takového typu se nazývají vektorové prostory nebo lineární prostory. Před definicí vektorového prostoru uvedeme příklady.

Řešené úlohy

Příklad Množina všech orientovaných úseček v rovině s počátečním bodem O vzhledem ke sčítání orientovaných úseček a jejich násobení reálnými čísly je vektorový prostor.

Příklad Množina $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbf{R}, \text{ kde } i = 1, \ldots, n ; n \in \mathbf{N}\}$, v níž jsou operace definovány vztahy

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$,

$k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$, $k \in \mathbf{R}$,

je vektorový prostor, jehož prvky, vektory, jsou uspořádané n-tice reálných čísel

$(x_1, \ldots, x_n)$.

Výklad

Oba příklady ukazují nejběžnější typy vektorových prostorů. První z nich je ***geometrický model vektorového prostoru***, druhý z nich nazýváme obvykle ***aritmetický vektorový prostor***.

Definice 2.1.1.

Množinu V spolu s operacemi $+ : V \times V \to V$ a $. : \mathbf{R} \times V \to V$,
tedy uspořádanou trojici (V, +, .) nazveme **vektorovým prostorem**, jsou-li splněny následující axiómy:

V1. $x + y = y + x$ pro každé $x, y \in V$,

V2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ pro každé $x, y, z \in V$,

V3. existuje prvek $o \in V$ tak, že $x + o = x$ platí pro každé $x \in V$,

V4. pro každé $x \in V$ existuje prvek $-x \in V$ tak, že $x + (-x) = o$,

V5. $a . (x + y) = a.x + a.y$ pro každé $x, y \in V$ a $a \in \mathbf{R}$,

V6. $(a + b) . x = a . x + b . x$ pro každé $x \in V$ a $a, b \in \mathbf{R}$,

V7. $(ab) . x = a . (b . x)$ pro každé $x \in V$ a $a, b \in \mathbf{R}$,

V8. $1 . x = x$ pro každé $x \in V$.

Poznámka

1. *Prvky z V se nazývají* ***vektory****, reálná čísla se nazývají* ***skaláry****. Množina skalárů může být obecně jiná, než je množina reálných čísel, musí však tvořit algebraickou strukturu zvanou komutativní těleso, v níž sčítání a násobení splňují stejné axiómy jako sčítání a násobení v množině reálných čísel.*

2. *Sčítání v množinách V a* ***R*** *splňuje tytéž axiómy****,*** *a proto v nich nebudeme označení „ + “ rozlišovat. Z podobných důvodů lze stejně jako v množině* ***R*** *vynechat označení operace „ . “ a budeme psát ax místo a .* ***x****.*

3. *Prvek o $\in$ V, pro který platí axióm V3, nazveme* ***nulový vektor****. Prvek* ***- x*** *$\in$ V opačný k prvku* ***x*** *$\in$ V, pro který platí axióm V4, nazveme* ***opačný vektor*** *k vektoru* ***x****.*

4. *Vektorový prostor značíme* ***V*** *= (V, +, .) nebo jen V. Písmenem V tedy budeme často značit jak množinu V, tak množinu V spolu s operacemi „ + “ a „ . “ .*

Řešené úlohy

Příklad Nechť C < a, b > je množina všech funkcí jedné proměnné definovaných a spojitých na uzavřeném intervalu < a, b > a nechť sčítání funkcí a násobení funkce reálným číslem je definováno vztahy

$$(f + g) (x) = f (x) + g(x),$$

$$(k.f) (x) = k.f (x),$$

pro všechna x $\in$ < a, b >. Množina C < a, b > spolu s operacemi „ + “ a „ . “ je ***vektorovým prostorem všech funkcí jedné proměnné, definovaných a spojitých v uzavřeném intervalu*** < a, b >. Spojitost funkcí f a g implikuje spojitost funkcí f + g a kf. Čtenář si může ověřit, že uvedené operace splňují axiómy V1 - V8 vektorového prostoru.

Věta 2.1.1. Nechť V je vektorový prostor a $x \in V$, pak platí

1. $0 . x = o$,

2. z rovnosti $x + y = o$ vyplývá $y = -x$ (jednoznačnost existence opačného vektoru),

3. $(-1) x = -x$.

D ů k a z :

1. Z axiómů V6 a V8 vyplývá

$$x = 1x = (1 + 0)x = 1x + 0x = x + 0x.$$

Užitím předchozího výsledku a axiómu V2 dostaneme

$$-x + x = -x + (x + 0x) = (-x + x) + 0x.$$

Z platnosti axiómů V1, V3 a V4 je

$$-x + x = o , \quad \text{a tedy} \quad o = o + 0x = 0x.$$

2. Předpokládejme $x + y = o$. Pak platí

$$-x = -x + o = -x + (x + y).$$

Z předchozího vztahu a platnosti axiómů V1, V2, V3 a V4 dostaneme

$$-x = (-x + x) + y = o + y = y.$$

3. Z 1. tvrzení věty 1. a V6 vyplývá

$$o = 0x = (1 + (-1))x = 1x + (-1)x .$$

Podle V8 je

$$x + (-1)x = o$$

a z 2. tvrzení věty 1. vyplývá

$$(-1) x = -x .$$

Výklad

Uvažujme nyní trojici vektorů $x = (1, -1, 2)$, $y = (-2, 3, 1)$ a $z = (-1, 3, 8)$ z vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$. Existují reálná čísla 3, 2 a -1 tak, že

$$3x + 2y - 1z = (3, -3, 6) + (-4, 6, 2) + (1, -3, -8) = (0, 0, 0) = o.$$

Pro jinou trojici vektorů $x = (1, -1, 2)$, $y = (-2, 3, 1)$ a $u = (-1, 3, 7)$ je však podobná rovnice splněna pouze v případě, že všechna tři reálná čísla jsou rovna 0, t.j.

$$0x + 0y + 0u = o\,.$$

Tato skutečnost nás vede k rozlišení skupin vektorů, z nichž lze získat nulový vektor součtem jejich nenulových násobků nebo pouze součtem jejich nulových násobků.

Definice 2.1.2.

Vektory $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ nazýváme **lineárně nezávislé**, jestliže rovnice

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = o \qquad (1)$$

je splněna pouze v případě, že skaláry $c_1, \dots, c_n$ jsou všechny rovny 0. Jestliže je rovnice (1) splněna a alespoň jeden ze skalárů $c_1, \dots, c_n$ je různý od nuly, říkáme, že vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou **lineárně závislé.**

Poznámka

*Levou stranu rovnice (1) nazýváme **lineární kombinací** vektorů $v_1, \dots, v_n$. V případě, že $c_1, \dots, c_n$ jsou všechna rovna 0, hovoříme o **triviální kombinaci vektorů** $v_1, \dots, v_n$.*

Řešené úlohy

Příklad Vektory (1, 1, 1), (1, 1, 0) a (1, 0, 0) jsou lineárně nezávislé. Najít čísla c_1, c_2, c_3 splňující rovnici

$$c_1(1, 1, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 0) = (c_1 + c_2 + c_3, c_1 + c_2, c_1) = (0, 0, 0)$$

vede k řešení soustavy

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

$$c_1 + c_2 \quad = 0,$$

$$c_1 \qquad = 0,$$

která má jediné řešení $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$.

Příklad Vektory (1, 2, 4), (2, 1, 3) a (4, -1, 1) jsou lineárně závislé. Nalezení čísel c_1, c_2, c_3 splňujících rovnici

$c_1(1, 2, 4) + c_2(2, 1, 3) + c_3(4, -1, 1) = (c_1 + 2c_2 + 4c_3, 2c_1 + c_2 - c_3, 4c_1 + 3c_2 + c_3) = (0, 0, 0)$

vede nyní k řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} c_1 & + & 2c_2 & + & 4c_3 & = & 0, \\ 2c_1 & + & c_2 & - & c_3 & = & 0, \\ 4c_1 & + & 3c_2 & + & c_3 & = & 0, \end{array}$$

která má například řešení $c_1 = 2$, $c_2 = -3$, $c_3 = 1$. Takových řešení je nekonečně mnoho tvaru $c_1 = 2t$, $c_2 = -3t$, $c_3 = t$, $t \in \mathbf{R}$.

Výklad

Je zřejmé, že geometrická interpretace vektorových prostorů $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ je různá. Vektory $\mathbf{R}^2$ lze umístit do roviny, vektory $\mathbf{R}^3$ do prostoru. Rozdělíme nyní vektorové prostory z tohoto pohledu.

Definice 2.1.3.

Vektorový prostor V se nazývá **n-dimenzionální** nebo také **prostor dimenze n** ($n > 0$), existuje-li ve V n lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ a platí-li, že každý vektor z V lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Poznámka

Sama množina reálných čísel $\boldsymbol{R}$ *je 1-dimenzionální vektorový prostor. Rozmyšlení ponecháváme čtenáři s tím, že v příkladu 2 položí n = 1. Pro úplnost můžeme definovat množinu {* $\boldsymbol{o}$ *} jako 0-dimenzionální vektorový prostor. Vektorový prostor dimenze n budeme označovat* V_n.

Řešené úlohy

Příklad Uvažujme aritmetický vektorový prostor $\mathbf{R}^n$. Označíme-li $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$, pak pro každé $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ platí $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \dots + u_n\mathbf{e}_n$. Je snadno vidět, že vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ jsou lineárně nezávislé a tedy $\mathbf{R}^n$ je vektorový prostor dimenze n .

Výklad

Mějme vektorový prostor V, ve kterém jsou vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ lineárně nezávislé. Předpokládejme, že r je maximální počet lineárně nezávislých vektorů. Pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in V$ jsou pak vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ lineárně závislé, t.j. existuje netriviální kombinace $c\mathbf{u} + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_r\mathbf{v}_r = o$, kde $c \neq 0$. Můžeme psát

$$\mathbf{u} = (-c^{-1})(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_r\mathbf{v}_r),$$

$\mathbf{u}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$. Maximální počet lineárně nezávislých vektorů vektorového prostoru V je tedy roven dimenzi r .

Definice 2.1.4.

Každou množinu n lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V_n$ nazýváme **bází** ve V_n a zapisujeme $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n >$.

Řešené úlohy

Příklad Vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ z příkladu 6 této části jsou bází aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$.

Výklad

Věta 2.1.2. Nechť V_n je vektorový prostor a $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n >$ jeho báze. Vyjádření každého vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ ve tvaru lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ je jednoznačné.

Důkaz: Nechť

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n, \quad \mathbf{u} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_n\mathbf{v}_n$$

jsou dvě vyjádření vektoru $\mathbf{u}$. Po odečtení dostaneme

$$o = (a_1 - b_1)\,\mathbf{v}_1 + (a_2 - b_2)\,\mathbf{v}_2 + \dots + (a_n - b_n)\,\mathbf{v}_n ,$$

což v důsledku lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ znamená, že pro všechna $i = 1, \dots, n$ platí $a_i - b_i = 0$, t.j. $a_i = b_i$.

Poznámka

Říkáme, že každá báze $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n >$ *vektorového prostoru* V_n *určuje* ***soustavu souřadnic.*** *Zobrazení* $V_n \to \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{u} \to (u_1, u_2, \dots, u_n)$*, definované vztahem*

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{v}_1 + u_2\boldsymbol{v}_2 + \dots + u_n\boldsymbol{v}_n,$$

určuje ***souřadnice*** $u_1, u_2, \dots, u_n$ ***vektoru u*** *vzhledem k dané bázi prostoru* V_n.

Řešené úlohy

Příklad Určete souřadnice vektoru $\mathbf{a} = (1, 2)$ z $V_2 = \mathbf{R}^2$

a) vzhledem k bázi $< (1, 1), (-1, 0) >$,

b) vzhledem k bázi $< (1, 0), (0, 1) >$.

Řešení:

a) Platí $(1, 2) = a_1(1, 1) + a_2(-1, 0)$,

$1, 2) = (a_1, a_1) + (-a_2, 0)$,

$(1, 2) = (a_1 - a_2, a_1)$,

tj. $a_1 - a_2 = 1$, $a_1 = 2$.

V dané bázi má vektor a souřadnice 2, 1.

b) Podobně $(1, 2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1)$. Upravíme a dostaneme $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. V bázi $< (1, 0), (0, 1) >$ lze aritmetický vektor ztotožnit s uspořádanou dvojicí jeho souřadnic. Výsledek příkladu 8b lze snadno rozšířit pro aritmetické vektorové prostory V_n s bází $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ... , 0), ... , e_n = (0, ... , 0, 1)$.

Výklad

Pro úplnost budeme definovat pojem podprostoru vektorového prostoru V.

Definice 2.1.5.

Jestliže $V' \subset V$ a jsou splněny podmínky:

(1) $kx \in V'$ pro všechna $x \in V'$ a $k \in \mathbf{R}$,

(2) $x + y \in V'$ pro všechna $x, y \in V'$,

pak V' nazveme vektorovým **podprostorem** vektorového prostoru V.

Poznámka

Množinu { o } nazýváme nulovým podprostorem; celý prostor V je svým podprostorem.

Řešené úlohy

Příklad Nechť $V' = \{(x_1, x_2, x_3,) : x_1 = x_2,\ x_i \in \mathbf{R},\ i = 1,2,3\}$, pak V' je podprostorem prostoru $\mathbf{R}^3$.

Platí:

(1) Jestliže $x = (a, a, b) \in V'$, pak $kx = (ka, ka, kb) \in V'$.

(2) Jestliže $(a, a, b), (c, c, d) \in V'$, pak $(a, a, b) + (c, c, d) = (a + c, a + c, b + d) \in V'$.

Příklad Nechť $V' = \{(x, 1);\ x \in \mathbf{R}\}$, pak V' není podprostorem prostoru $\mathbf{R}^2$.

Platí:

(1) $k(x, 1) = (kx, k) \notin V'$, pro $x \in \mathbf{R}$,

(2) $(x, 1) + (y, 1) = (x + y, 2) \notin V'$, pro $x, y \in \mathbf{R}$.

Kontrolní otázky

1. Která z uvedených číselných množin spolu s uvedenou operací tvoří vektorový prostor ?
   a) Množina N přirozených čísel spolu s operací sčítání +,
   b) množina R reálných čísel spolu s operacemi sčítání + a násobení □,
   c) množina C celých čísel spolu s operacemi sčítání + a násobení □.
2. Kolik nulových vektorů o existuje v daném vektorovém prostoru ?
   a) Nekonečně mnoho, b) dva, c) jeden.
3. Kolik opačných vektorů - **x** existuje v daném vektorovém prostoru k vektoru **x** ?
   a) Jeden, b) dva, c) nekonečně mnoho.

4. Vektory $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ jsou lineárně závislé, jestliže rovnice

   $c_1\mathbf{v_1} + c_2\,\mathbf{v_2} + \ldots + c_n\,\mathbf{v_2} = o$ je splněna

   a) pouze, když $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou všechny rovny nule,

   b) pro alespoň jedno číslo $c_1, c_2, \ldots, c_n$ různé od nuly,

   c) každé z čísel $c_1, c_2, \ldots, c_n$ musí být různé od nuly.

5. Vektorový prostor se nazývá n-dimenzionální, jestliže

   a) existuje v tomto prostoru n lineárně nezávislých vektorů a každý vektor prostoru lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci

   b) každý vektor prostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci $n+1$ lineárně nezávislých vektorů prostoru,

   c) každý vektor prostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci dvou vektorů.

6. Báze n-dimenzionálního vektorového prostoru je

   a) každá množina n lineárně závislých vektorů prostoru,

   b) každá množina n lineárně nezávislých vektorů prostoru,

   c) každá množina $n-1$ lineárně nezávislých vektorů prostoru.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. c); 3. a); 4. b); 5. a); 6. b).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete aritmetický vektor x , pro který platí:

a) x = 3a + 5b - c, je-li a = (4, 1, 3, -2), b = (1, 2, -3, 2), c = (16, 9, 1, -3),

b) x = -a + 4b - 6c + 2d, je-li a = (1, 1, -1, -1), b = (0, 0, 0, 0), c = ($\frac{1}{2}$, 0, 1, 4),

   d = (-1, -1, 1, 1),

c) x = a + 2(b - 3c) - 3(c - 5a), je-li a = (2, 0, 1), b = (3, 2, 1), c = (0, 0, 1),

d) a + 2**b** + 3**c** - 4**x** = **o**, kde **a** = (5, -8, -3, 2), **b** = (2, -1, 4, -3), **c** = (-3, 2, -5, 4),

e) $a - \mathbf{x} + \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{x}) - \frac{1}{4}(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{o}$, kde **a** = (1, 1, -1), **b** = (2, 0, 2),

f) 5**u** - 4**x** - 3**v** + **x** + 2**w** = **u** + 2**x**, kde **u** = (1, -1, 1, 1), **v** = (0, 2, 2, 2),
   w = (3, -3, 3, -3).

2. Zjistěte, zda daná množina V spolu s operací sčítání uspořádaných n-tic a násobením n-tice reálným číslem tvoří vektorový prostor, v kladném případě určete jeho nulový vektor.

a) $V = \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\}$,

b) $V = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2) : x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$,

c) $V = \{(x, 2) : x \in \mathbf{R}\}$.

3. Určete, která z následujících množin funkcí spolu s operací sčítání funkcí a operací násobení funkce reálným číslem tvoří vektorový prostor:

a) množina funkcí ohraničených na $< a, b >$,

b) množina funkcí rostoucích na $< a, b >$,

c) množina funkcí monotonních na $< a, b >$,

d) množina sudých funkcí na $< -a, a >$, $a > 0$.

4. Určete, které z číselných množin při sčítání a násobení reálným číslem definovanými přirozeným způsobem tvoří vektorový prostor a v kladném případě určete jeho nulový vektor:

a) množina komplexních čísel **C**,

b) množina reálných čísel **R**,

c) množina kladných reálných čísel $\mathbf{R}^+$,

d) množina racionálních čísel **Q**.

5. Nechť P je množina posloupností reálných čísel spolu s operací sčítání (součet posloupností) a násobení reálným číslem (násobení posloupnosti reálným číslem). Zjistěte, zda P tvoří vektorový prostor, jestliže:

a) P je množina všech posloupností, které mají limitu 0,

b) P je množina všech posloupností, které mají limitu 1,

c) P je množina všech konvergentních posloupností.

6. Najděte všechny hodnoty t, pro které je možno vektor u vyjádřit jako lineární kombinace vektorů a, b, c :

a) $u = (5, 3, t)$, $a = (1, 0, 2)$, $b = (0, 1, 1)$, $c = (4, 1, 9)$,

b) $u = (4, 3, t)$, $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, -1, 1)$, $c = (1, 7, 8)$,

c) $u = (t, 6, 7)$, $a = (1, 4, 5)$, $b = (3, 8, 10)$, $c = (0, -4, -5)$,

d) $u = (1, 3, 5)$, $a = (1, 3, 4)$, $b = (2, 8, -2)$, $c = (3, 11, t)$.

7. Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé a v kladném případě vyjádřete jeden z nich jako lineární kombinaci ostatních:

a) $a = (1, 2, 3)$, $b = (3, 6, 7)$,

b) $a = (4, -2, 6)$, $b = (6, -3, 9)$,

c) $a = (5, 4, 3)$, $b = (3, 3, 2)$, $c = (8, 1, 3)$,

d) $a = (0, 1, 0, 3)$, $b = (3, 0, 1, 0)$, $c = (0, 3, 0, 1)$.

8. Určete číslo t tak, aby vektory **u**, v, w byly lineárně závislé:

a) $u = (2, 1, 3)$, $v = (1, 2, -5)$, $w = (3, 0, t)$,

b) $u = (1, 2, 2)$, $v = (2, t, 3)$, $w = (2, 5, 4)$,

c) $u = (-1, t, 2)$, $v = (1, 1, 2)$, $w = (3, 0, t)$,

d) $u = (4, 5, 2)$, $v = (2, 2t, t)$, $w = (2, 10-6t, 4-3t)$.

9. Nechť V je vektorový prostor funkcí definovaných a spojitých v daném intervalu. Zjistěte, zda jsou funkce (vektory) v daném intervalu lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $a = e^x$, $b = x$, $x \in \mathbf{R}$,

b) $a = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, $b = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}$, $c = x^2 + x - 2$, $x \in \mathbf{R}$,

c) $a = \sin x$, $b = \cos x$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$,

d) $a = 2\cos^2 x$, $b = -\cos 2x$, $c = -1$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

10. Mezi danými vektory najděte maximální počet lineárně nezávislých a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci:

a) $a = (1, 2, 0, 0)$, $b = (1, 2, 2, 4)$, $c = (3, 6, 0, 0)$,

b) $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, 3, 4)$, $c = (3, 2, 3)$, $d = (4, 3, 4)$, $e = (1, 1, 1)$,

c) $u = (1, 1, 0, 1)$, $v = (2, 1, 1, -1)$, $w = (1, -1, 0, -1)$, $x = (1, 0, -1, 2)$.

11. Zjistěte, zda dané vektory tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$. V kladném případě vyjádřete vektor $a = (1, 1, 2)$ jako jejich lineární kombinaci a stanovte souřadnice vektoru a v dané bázi:

a) $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (2, 0, 0)$,

b) $u_1 = (0, 1, -1)$, $u_2 = (0, 2, -2)$, $u_3 = (1, 1, 3)$,

c) $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (0, 0, 3)$.

12. Z daných vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých a doplňte je vhodně na bázi příslušného vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$:

a) $a_1 = (2, 1, -1, 4)$, $a_2 = (-1, 3, 0, -1)$, $a_3 = (-1, -4, 1, -3)$, $a_4 = (3, -2, -1, 5)$,

b) $b_1 = (4, -1, 5, 3, 1)$, $b_2 = (3, -2, 1, 4, 0)$, $b_3 = (1, 0, -2, 4, -3)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. **a)** $(1, 4, -7, 7)$, **b)** $(-6, -3, -3, -21)$, **c)** $(38, 4, 9)$, **d)** $(0, -1, -\frac{5}{2}, 2)$, **e)** $(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}, 1)$, **f)** $(2, -\frac{16}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{8}{5})$.

2. **a)** ano, $o = (0, 0)$, **b)** ano, $o = (0, 0, 0)$, **c)** ne.

3. **a)** ano, **b)** ne, je-li f rostoucí, pak rf pro $r < 0$ není rostoucí, **c)** ne, např. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -x$, jsou monotónní na $< 0,1 >$, ale $f_1 - f_2$ není monotónní na $< 0,1 >$, **d)** ano.

4. **a)** ano, $o = 0$, **b)** ano, $o = 0$, **c)** ne, pro $x \in \mathbf{R}^+$ a $k \in \mathbf{R}$ nemusí platit $kx \in \mathbf{R}^+$, **d)** ne, pro $x \in \mathbf{Q}$ a $k \in \mathbf{R}$ nemusí platit $kx \in \mathbf{Q}$.

5. **a)** ano, **b)** ne, **c)** ano.

6. **a)** $t = 13$, **b)** $t = 7$, **c)** pro žádné t, **d)** $t \neq 2$.

7. **a)** nezávislé, **b)** závislé, $b = \frac{3}{2}a$, **c)** závislé, $c = 7a - 9b$, **d)** nezávislé.

8. **a)** $t = 11$, **b)** neexistuje, **c)** $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, **d)** t libovolné.

9. **a)** nezávislé, **b)** závislé, např. $2a - 3b - c = 0$, **c)** nezávislé, **d)** závislé, např. $a + b + c = 0$.

10. **a)** a, b; $c = 3a + 0b$ nebo b, c; $a = 0b + \frac{1}{3}c$, **b)** mimo trojic a, b, e; c, d, e jsou libovolné tři trojice lineárně nezávislé. Např. a, b, c; $d = -a + b + c$, $e = -a + b + 0c$, **c)** např. u, v, w; $x = 2u - v + w$.

11. **a)** ano, $a = 2u_1 - u_2$, a má souřadnice $(2, -1, 0)$, **b)** ne, **c)** ano, $a = u_1 - u_2 + \frac{2}{3}u_3$, a má souřadnice $(1, -1, \frac{2}{3})$.

12. **a)** např. $a_2, a_3, a_5 = (0, 0, 1, 0)$, $a_6 = (0, 0, 0, 1)$, b) $b_1, b_2, b_3, b_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$, $b_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$.

Kontrolní test

1. Určete aritmetický vektor x, pro který platí $\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{x} + 2\mathbf{b} = \mathbf{c}$, je-li

   $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$.

   a) $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$, b) $\mathbf{x} = (2, 4, -2)$, c) $\mathbf{x} = (2, 2, -2)$.

2. Najděte všechny hodnoty t, pro které je možno vektor $\mathbf{u} = (1, 0, t)$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$.

   a) pro všechna t, b) pro $t \neq 0$, c) pro žádné t.

3. Zjistěte, zda jsou vektory $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 1, 1)$ lineárně závislé, v kladném případě vyjádřete vektor $\mathbf{a}$ jako lineární kombinaci $\mathbf{b}, \mathbf{c}$.

   a) $\checkmark = \frac{1}{2}\checkmark - \ulcorner$, b) $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$, c) jsou lineárně nezávislé.

4. Určete číslo t tak, aby vektory $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 0, t)$ byly lineárně závislé.

   a) pro všechna t, b) pro $t \neq 0$, c) pro $t = 0$.

5. Zjistěte, zda vektory $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 1, 1)$ tvoří bázi aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ a v kladném případě vyjádřete vektor $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ jako jejich lineární kombinaci.

   a) $\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$, b) netvoří bázi, c) $\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. c); 4. c); 5. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 3 případech, pokračujte další kapitolou.
V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.1. znovu.