1.3. Číselné množiny

Cíle

Cílem kapitoly je seznámení čtenáře s axiomy číselných oborů a jejich podmnožin (intervalů) a zavedení nových pojmů, které nejsou náplní středoškolských osnov.

Průvodce studiem

Vývoj matematiky lze ilustrovat na vývoji pojmu čísla. Nejdříve vznikla v jazycích slova jeden, dva, mnoho a postupně vznikla slova označující vlastnost skupin předmětů stejného počtu, další číslovky. Dále byly zavedeny různé druhy znaků pro přirozená čísla. Většina z nich se však přestala užívat a dnes užíváme pro počítání výhradně arabské číslice. Studium zákonitostí počítání s přirozenými čísly bylo umožněno až další abstrakcí, označením libovolného čísla písmenem.

Výklad

Vlastní pojem **přirozeného čísla** zavádíme pomocí tzv. **Peanových axiómů**. Množina $\mathbf{N}$, ve které ke každému prvku $x \in \mathbf{N}$ přiřadíme prvek $x'(x' = x + 1)$, tzv. **následovník prvku x,** tak, že platí následující (Peanovy) axiómy, se nazývá ***množina přirozených čísel.***

(P1) $1 \in \mathbf{N}$,

(P2) $\forall x \in \mathbf{N}\ \exists$ právě jeden následovník $y = x'$,

(P3) 1 není následovníkem žádného prvku $x \in \mathbf{N}$,

(P4) $\forall x \in \mathbf{N}\ \exists$ nejvýše jedno $y \in \mathbf{N}$ tak, že platí $x = y'$(různé prvky množiny $\mathbf{N}$ mají různé následovníky),

(P5) pro každou množinu M s vlastnostmi

(1) $1 \in M$,

(2) $\forall x \in M$ je i $x' \in M$,

platí $\mathbf{N} \subset M$ (princip matematické indukce).

Další vývoj v myšlení lidí si vynutil vznik čísel celých a racionálních. Protože např. rovnice $x^2 = 3$ nemá v množině racionálních čísel řešení, pokračoval vývoj pojmu čísla zavedením čísel reálných. Řešení např. rovnice $x^2 = -1$ si vynutilo vznik čísel komplexních. Existují další číselné množiny, které však nacházejí použití jen ve speciálních partiích matematiky, a proto se jimi nebudeme zabývat. Nyní nadefinujeme číselné množiny pomocí některých jejich známých vlastností, které budeme v definici považovat za axiómy.

Neprázdná množina $\mathbf{R}$, na které jsou definovány operace + a . , tj. zobrazení $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(x, y) \to x + y$, $(x, y) \to x.y$, a relace uspořádání $\le$, které splňují následující skupiny axiómů, se nazývá ***množina reálných čísel.***

A. Axiómy pro sčítání

(A1)	$\forall x, y \in \mathbf{R}:\ x + y = y + x$	*komutativní zákon,*
(A2)	$\forall x, y \in \mathbf{R}:\ (x + y) + z = x + (y + z)$	*asociativní zákon,*
(A3)	$\forall x \in \mathbf{R}\ \exists\, 0 \in \mathbf{R}:\ x + 0 = x$	*existence nuly,*
(A4)	$\forall x \in \mathbf{R}\ \exists\, y \in \mathbf{R}:\ x + y = 0$	*existence opačného čísla.*

B. Axiómy pro násobení

(B1)	$\forall x, y \in \mathbf{R}:\ xy = yx$	*komutativní zákon,*
(B2)	$\forall x, y, z \in \mathbf{R}:\ (xy)z = x(yz)$	*asociativní zákon,*
(B3)	$\forall x \in \mathbf{R}\ \exists\, 1 \in \mathbf{R} - \{0\} : x.1 = x$	*existence jedničky,*
(B4)	$\forall x \in \mathbf{R} - \{0\}\ \exists\, y \in \mathbf{R} : x.y = 1$	*existence převráceného čísla,*
(B5)	$\forall x, y, z \in \mathbf{R}:\ (x + y)z = xz + yz$	*distributivní zákon.*

C. Axiómy uspořádání

(C1)	$\forall x, y \in \mathbf{R} : (x \le y \vee y \le x)$	*srovnatelnost,*
(C2)	$\forall x, y \in \mathbf{R} : ((x \le y \wedge y \le x) \Rightarrow x = y)$	*antisymetrie,*
(C3)	$\forall x, y, z \in \mathbf{R} : ((x \le y \wedge y \le z) \Rightarrow x \le z)$	*tranzitivnost,*
(C4)	$\forall x, y, z \in \mathbf{R} : (x \le y \Rightarrow x + z \le y + z)$	*monotonie pro sčítání,*
(C5)	$\forall x, y \in \mathbf{R} : (0 \le x \wedge 0 \le y) \Rightarrow 0 \le xy).$	

D. Cantorův-Dedekindův axióm (axióm o vložených úsečkách)

Pro každé dvě posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ čísel z **R**, tj. zobrazení $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $n \to x_n$ a zobrazení $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $n \to y_n$, s vlastností $\forall n \in \mathbf{N}$ je $x_n \le y_n$ sestrojíme množiny $I_n = \{x \in \mathbf{R} : x_n \le x \le y_n\}$. Jestliže $\forall n \in \mathbf{N} : I_{n+1} \subset I_n$, pak $\exists\, y \in \mathbf{R}\ \forall\, n \in \mathbf{N} : y \in I_n$.

Poznámka

Geometrická interpretace tohoto axiómu ukazuje, že pro každou posloupnost uzavřených úseček, ve které je každá úsečka částí předcházející úsečky, existuje alespoň jeden bod společný všem úsečkám.

Výklad

Zvolíme-li $1 \in \mathbf{R}$ jako jedničku množiny přirozených čísel a definujeme $x' = x + 1$, dá se ukázat, že existuje podmnožina v **R** splňující Peanovy axiómy přirozených čísel a tedy $\mathbf{N} = \{1, 1+1 = 2, 2+1 = 3, \dots\} \subset \mathbf{R}$. Dále, dá se ukázat, že ke každému $x \in \mathbf{R}$ existuje právě jedno číslo $-x \in \mathbf{R}$, tj. $x + (-x) = 0$. Množinu $\mathbf{Z} = \{0\} \cup \{x \in \mathbf{R} : x \in \mathbf{N} \vee -x \in \mathbf{N}\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} \subset \mathbf{R}$ nazýváme **množinou celých čísel**. Množinu $\mathbf{Q} = \{x \in \mathbf{R} : \exists\, n \in \mathbf{N}\ \exists\, p \in \mathbf{Z} : n \,.\, x = p\}$, nazýváme **množinou čísel racionálních**. Množina **R** - **Q** se nazývá **množina čísel iracionálních**.

Znázornění racionálních čísel na číselné ose

Racionální čísla znázorňujeme na přímce, zvané ***číselná osa***. Obvykle ji volíme vodorovnou, popř. svislou. Nejprve na ní zvolíme některý bod za tzv. ***počátek***, označíme jej písmenem O (první písmeno latinského slova origo = počátek) a přiřadíme mu číslo 0. Danou přímku pak **orientujeme,** tj. zvolíme určité pořadí jejích bodů, a to u přímky vodorovné obvykle zleva doprava, kdežto u přímky svislé zdola nahoru. Orientaci číselné osy značíme šipkou. Počátkem O se orientovaná číselná osa rozdělí na dvě části, ***kladnou*** a ***zápornou***. Pak zvolíme na kladné části bod J a úsečku OJ = j stanovíme jako jednotkovou, takže bod J má od počátku vzdálenost rovnou číslu 1. Přiřadíme mu proto číslo 1. Na takto určené číselné ose můžeme nyní znázornit libovolné racionální číslo $k = \pm p/q$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla. Provedeme to např. tak, že nejdříve určíme q-tý díl jednotkové úsečky a potom jej naneseme p-krát napravo, popř. nalevo od počátku O podle toho, zda číslo k je kladné, popř. záporné.

Znázornění iracionálních čísel na číselné ose

To, že také každé iracionální (a tedy každé reálné) číslo je možno znázornit na číselné ose, plyne z Cantorova - Dedekindova axiómu o vložených úsečkách.

Poznámka

Z výše uvedeného plyne, že každému reálnému číslu x odpovídá (na číselné ose) právě jeden bod a obráceně, že každému bodu na číselné ose odpovídá právě jedno reálné číslo x. Proto budeme často používat pro reálné číslo x také název ***bod*** *a pro množinu* ***R*** *všech reálných čísel název* ***(reálná) číselná osa****. Dále každou podmnožinu množiny* ***R*** *všech reálných čísel budeme nazývat* ***číselnou množinou****.*

Výklad

Obecnějším pojmem než množina reálných čísel je **množina čísel komplexních** $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ spolu s operacemi + a . , tj. zobrazení $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $(z_1, z_2) \to z_1 + z_2$, $(z_1, z_2) \to z_1 \,.\, z_2$, které je definováno následujícím způsobem. Nechť $z_1 = (a_1, b_1)$ a $z_2 = (a_2, b_2)$, kde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, pak

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \qquad z_1 . z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$$

Je-li $z = (a, b) \in \mathbf{C}$, pak a nazýváme **reálnou částí**, b **imaginární částí komplexního čísla** z.
V množině komplexních čísel je nula číslo (0, 0) a jednička číslo (1, 0). Pro $z = (a, b) \in \mathbf{C}$ je opačné číslo $-z = (-a, -b)$ a pro $z \neq (0, 0)$ je převrácené číslo

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right), \qquad \text{tj.} \quad z.z^{-1} = (1, 0).$$

Zavedeme-li označení (a, 0) = a, (0, 1) = i, pak i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1, i^3 = = i^2. i = (-1, 0)(0, 1) = (0, -1) = -i a $i^4 = i^3$. i = (0, -1)(0, 1) = (1, 0) = 1. Matematickou indukcí lze pro n ∈ **N** dokázat, že $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$.

Nyní snadno dostaneme často používaný tvar komplexního čísla

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib,$$

se kterým můžeme počítat jako s algebraickým výrazem.

Poznámka

Mezi definovanými množinami čísel je vztah, který můžeme zapsat ve tvaru

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

*Navíc pro množinu **N** platí axiómy A1, A2, B1, B2, B3, B5, C. Pro množinu **Z** platí axiómy A, B1, B2, B3, B5, C, pro množinu **Q** axiómy A, B, C a pro množinu **C** axiómy A, B.*

Výklad

Intervaly a okolí bodů

Mezi nejdůležitější číselné množiny patří intervaly a okolí bodů. Intervaly rozeznáváme ohraničené a neohraničené.

Definice ohraničených intervalů

Nechť a, b jsou libovolná reálná čísla, přičemž je a < b. Pak

1. uzavřený interval ⟨a, b⟩ značí všechna čísla x ∈ **R**, pro která platí $a \le x \le b$,
2. otevřený interval (a, b) značí všechna čísla x ∈ **R**, pro která platí $a < x < b$,
3. polouzavřený interval ⟨a, b) značí všechna čísla x ∈ **R**, pro která platí $a \le x < b$,
4. polootevřený interval (a, b⟩ značí všechna čísla x ∈ **R**, pro která platí $a < x \le b$.

Přitom kladné číslo b - a se nazývá délka intervalu.

Interval $\langle a, b)$ se nazývá ***uzavřený zleva a otevřený zprava***. Podobně interval $(a, b\rangle$ nazýváme ***otevřeným zleva a uzavřeným zprava***.

Definice neohraničených intervalů

Pro každé reálné číslo a interval tvaru

1. $\langle a, +\infty)$ značí všechna čísla $x \in \mathbf{R}$, pro která platí $x \geq a$,
2. $(a, +\infty)$ značí všechna čísla $x \in \mathbf{R}$, pro která platí $x > a$,
3. $(-\infty, a\rangle$ značí všechna čísla $x \in \mathbf{R}$, pro která platí $x \leq a$,
4. $(-\infty, a)$ značí všechna čísla $x \in \mathbf{R}$, pro která platí $x < a$,
5. $(-\infty, +\infty)$ značí množinu $\mathbf{R}$ všech reálných čísel.

Poznámka

Zvláštními případy intervalů jsou okolí bodů. Definujeme je takto:

Jestliže a je libovolné reálné číslo a $\delta > 0$ je reálné číslo, nazýváme

1. *levým okolím bodu a každý interval tvaru $(a - \delta, a\rangle$; značíme je $U(a-)$;*
2. *pravým okolím bodu a každý interval $\langle a, a + \delta)$; značíme je $U(a+)$;*
3. *okolím bodu a každý interval tvaru $(a - \delta, a + \delta)$; značíme je stručně též $U(a; \delta)$, popř. pouze $U(a)$;*
4. *neúplným okolím bodu a sjednocení $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, tj. okolí $U(a; \delta)$ s vyloučením bodu a; stručně je značíme $\tilde{U}(a; \delta)$, popř. pouze $\tilde{U}(a)$.*

Výklad

Absolutní hodnota reálného čísla

Absolutní hodnotou čísla $x \in \mathbf{R}$ rozumíme nezáporné číslo, které značíme $|x|$ a které definujeme vztahy:

a) $|x| = x$ pro $x \geq 0$,

b) $|x| = -x$ pro $x < 0$.

Poznámka

Klademe $\sqrt{x^2} = |x|$.

Absolutní hodnota reálného čísla má následující vlastnosti:

jsou-li $a, b, a_1, a_2, \dots, a_n$ *reálná čísla, pak*

1. $|a| = |-a|$,
2. $\pm a \leq |a|$,
3. $|ab| = |a| \,.\, |b|$,
4. $|a_1 a_2 \dots a_n| = |a_1| \,.\, |a_2| \,.\, \dots \,.\, |a_n|$,
5. $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$,
6. $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$,
7. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ *pro* $b \neq 0$.

Výklad

Supremum a infimum množiny

Neprázdná číselná množina M se nazývá:

1. ***ohraničená shora***, existuje-li takové číslo h $\in$ **R**, zvané *horní závora množiny* M, že pro $\forall\, x \in M$ je $x \leq h$,

2. ***ohraničená zdola***, existuje-li takové číslo d $\in$ **R**, zvané *dolní závora množiny* M, že pro $\forall\, x \in M$ je $x \geq d$,

3. ***ohraničená***, je-li ohraničená shora i zdola,

4. ***neohraničená***, není-li ohraničená shora nebo zdola. Místo ***ohraničená*** se také používá názvu ***omezená***.

Největší, resp. nejmenší číslo množiny M se nazývá ***maximum***, resp. ***minimum*** množiny M, označujeme max M, resp. min M.

Definujeme nyní supremum a infimum množiny M.

1. Má-li neprázdná číselná množina M *nejmenší horní závoru* h, pak se číslo h nazývá ***supremum množiny*** M a značí se sup M.

2. Má-li neprázdná číselná množina M *největší dolní závoru* d, pak se číslo d nazývá ***infimum množiny*** M a značí se inf M.

1. ***Supremum číselné množiny*** M ***má tyto dvě vlastnosti***:

a) Pro každé číslo $x \in M$ platí $x \leq \sup M$,

b) v každém levém okolí suprema leží aspoň jedno číslo $x \in M$.

2. ***Infimum číselné množiny*** M ***má tyto dvě vlastnosti:***

a) Pro každé číslo $x \in M$ platí $x \geq \inf M$,

b) v každém pravém okolí infima leží alespoň jedno číslo $x \in M$.

Poznámka

I když číselná množina M má supremum (popř. infimum), nemusí číslo h = sup M (popř. číslo d = inf M) do množiny M patřit.

Má-li však číselná množina M maximální prvek, pak nutně existuje sup M a platí sup M = max M.

Podobně, má-li číselná množina M minimální prvek, pak nutně existuje inf M a platí inf M = min M.

Je nasnadě, že sup M (popř. inf M) může existovat, aniž existuje max M (popř. min M).

Výklad

Dá se dokázat následující tvrzení:

1. Každá neprázdná číselná množina M ohraničená shora má supremum,
2. každá neprázdná číselná množina M ohraničená zdola má infimum.

Řešené úlohy

Příklad 1. Interval (0, ∞) je množina ohraničená zdola, má infimum inf (0, ∞) = 0, nemá minimum, supremum a maximum. Množina M = $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ je množina ohraničená shora i zdola, inf M = 0, min M neexistuje, sup M = max M = 1.

Kontrolní otázky

1. Který ze vztahů platí pro množiny **Z** celých a **R** racionálních čísel:

   a) $\mathbf{Z} = \mathbf{R}$, b) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$, c) $\mathbf{R} \subset \mathbf{Z}$.

2. Existují celá čísla, která jsou nekladná i nezáporná, která to jsou:

   a) všechna, b) neexistují, c) ano, 0.

3. Kolik různých racionálních čísel je zapsáno: $\frac{18}{8};\ 2\frac{2}{8};\ 2{,}25;\ \frac{9}{4};\ \frac{126}{56};\ \frac{-72}{-32};\ 2+\frac{1}{4}$:

   a) 0, b) 1, c) 2.

4. Pro který interval platí $\forall x \in \mathbf{R} : a \le x < b$:

   a) polootevřený $(a, b>$, b) uzavřený $<a, b>$, c) polozavřený $<a, b)$.

5. Patří vztah $|ab| = |a| \cdot |b| \cdot \cos\varphi$ mezi vlastnostmi absolutní hodnoty reálných čísel a, b:

   a) ano, b) ne, c) ano, je-li $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

6. Pro infimum číselné množiny M platí jedna z vlastností:

   a) $\forall x \in M$ platí $x \ge \inf M$, b) $\forall x \in M$ platí $x < \inf M$, c) $\exists x \in M$, tak, že platí $x < \inf M$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b), 2. c), 3. b), 4. c), 5. b), 6. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Zjistěte, zda je možné, aby součin dvou reálných čísel byl a) větší, b) menší než jakýkoliv jeho činitel. Kdy to nastane ?

2. Zjistěte, zda je možné, aby součet dvou čísel byl menší než a) některý, b) každý jeho sčítanec. Kdy to nastane ?

3. Kterým reálným číslům vyhovují následující výrazy ? Zapište pomocí intervalů!

a) $\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$, b) $\sqrt{x-2} + \sqrt{5-x}$, c) $\dfrac{3}{4-x^2}$.

4. Najděte maximum, minimum, supremum, infimum množin (pokud existují):

a) (0, 1),

b) < 0, 1>,

c) množina všech záporných čísel.

5. Najděte maximum, minimum, supremum, infimum množiny M, jejíž prvky tvoří čísla tvaru $\dfrac{n+2}{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$.

6. Vypočtěte $\dfrac{x+|x|}{2}$.

7. Je-li a) $|a| \le 2$, $|b| \le 4$, b) $-2 < a < 5$, $|b| \le 1$, co platí pro $|a + b|$?

8. Najděte podmínku vyjádřenou pomocí absolutní hodnoty, kterou splňují čísla x, je-li jejich vzdálenost

a) od 0 menší než 5,

b) od 0 rovna 3,

c) od -2 menší nebo rovna 3.

9. Řešte rovnice (využijte vlastností absolutní hodnoty reálného čísla):

a) $|(x - 2)(x - 4)| = (x - 2)(x - 4)$,

b) $\left|\dfrac{3-x}{x-2}\right| = \dfrac{3-x}{x-2}$.

10. Řešte nerovnice:

a) $|2x - 8| < 3x - 12$,

b) $|x + 3| \le |x - 5|$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. **a)** $a > 1, b > 1$ nebo $a < 0, b < 0$,

b) $a > 0, b < 1$ nebo $a < 0, b > 1$.

2. **a)** Je-li některý sčítanec záporný,

b) jsou-li oba sčítance záporné.

3. **a)** $(1, \infty)$, **b)** $< 2, 5 >$, **c)** $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$.

4. **a)** neexistuje, neexistuje, 1, 0, **b)** 1, 0, 1, 0, **c)** neexistuje, neexistuje, 0, neexistuje.

5. $\max M = \sup M = \frac{3}{2}$, $\min M$ neexistuje, $\inf M = 1$.

6. $x \geq 0 : x$, $x < 0 : 0$.

7. **a)** $|a + b| \leq 6$, **b)** $|a + b| < 6$.

8. **a)** $| x | < 5$, **b)** $| x | = 3$, **c)** $| x + 2 | \leq 3$.

9. **a)** $x \in (-\infty; 2 > \cup < 4, \infty)$, **b)** $x \in (2 , 3 >$.

10. **a)** $x \in (4, \infty)$, **b)** $x \in (-\infty; 1 >$.

Kontrolní test

1. Určete maximální ciferný součet trojciferného čísla:

   a) 999, b) 27, c) 1000.

2. Určete, pro která reálná čísla x má interval $< \frac{x-1}{2}, 3 >$ neprázdný průnik s intervalem $(-\infty, x+2)$:

   a) $x \in (-5, 7 >$, b) $x \in (-5, \infty)$, c) $x \in (-\infty, 7 >$.

3. Zapište pomocí intervalů množinu reálných čísel, která vyhovují výrazu:

   $$V = \sqrt{\frac{3}{x-2}} + \sqrt{3-x} + \frac{x}{6}:$$

   a) $(2, \infty)$, b) $(2, 3)$, c) $(2, 3 >$.

4. Určete, zda existuje minimum množiny $M = \left\{ \frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbf{N} \right\}$:

   a) existuje, b) neexistuje, c) nelze určit.

5. Najděte podmínku vyjádřenou pomocí absolutní hodnoty, kterou splňují čísla x, je-li jejich vzdálenost od -2 menší nebo rovno 3:

   a) $|x+2| \le 3$, b) $|x-2| \le 3$, c) $|x-3| \le 2$.

6. Řešte rovnici : $|x+1| + 3|x-1| = 2|x| + 3 - x$.

   a) $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{5}{3}$, b) nemá řešení, c) $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = \frac{5}{3}$.

7. Řešte nerovnici: $|x+2| + 3|x-1| - 2|x-3| > 0$.

   a) $x \in (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (\frac{7}{6}, +\infty)$, b) nemá řešení, c) $x \in < -\frac{5}{2}, \frac{7}{6} >$.

Výsledky testu

1. b), 2. a), 3. c), 4. b), 5. a), 6.a), 7.a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 4 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.3. znovu.