1.2. Množiny

Cíle

Cílem kapitoly je opakování a rozšíření středoškolských znalostí v oblasti teorie množin.

Průvodce studiem

Množina je jedním ze základních pojmů moderní matematiky. Teorii množin je možno budovat intuitivně nebo axiomaticky. V tomto článku se omezíme na zopakování základních pojmů intuitivního výkladu množin a jejich vlastností, které se podrobně probírají na většině středních škol.

Výklad

Základní pojmy

Množinou rozumíme souhrn (tj. skupinu, soubor) nějakých objektů, osob, věcí, abstraktních pojmů, který je vymezen tak, že o každém objektu lze rozhodnout, zda do souboru patří nebo nepatří. Objekty, které do souboru náležejí, se nazývají ***prvky*** množiny. Množiny budeme obecně označovat velkými písmeny, jejich prvky malými písmeny. To, že prvek x patří do množiny M, zapisujeme $x \in M$, zápis $a \notin M$ vyjadřuje, že a není prvkem množiny M. Množina, která neobsahuje žádný prvek, se nazývá ***prázdná množina***, označujeme ji symbolem $\emptyset$. Množina, která obsahuje alespoň jeden prvek, je ***množina neprázdná***. Množiny, které obsahují konečný počet prvků, nazýváme ***konečnými množinami*** na rozdíl od ***nekonečných množin***, které mají nekonečný počet prvků. Konečnou množinu M, která obsahuje prvky $a_1, a_2, \ldots, a_n$, označíme $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$. ***Charakteristická vlastnost*** prvků dané množiny je vlastnost, kterou mají všechny prvky dané množiny a kterou nemají prvky, jež do množiny nepatří. Množinu M prvků daných charakteristickou vlastností vyjádřenou např. výrokovou formou S(x) zapisujeme ve tvaru

$$M = \{x \in D : S(x)\},$$

kde množina D je definičním oborem a množina M pravdivostním oborem výrokové formy S(x). Tak např. zápis $M = \{x \in \mathbf{N} : 5 < x < 10\}$ značí množinu $M = \{6, 7, 8, 9\}$.

Řekneme, že množina A je ***podmnožinou*** množiny B (píšeme $A \subset B$), jestliže každý prvek množiny A je prvkem množiny B, tj. $\forall x \in A : (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$. Platnost výroku $A \subset B$ nevylučuje ***rovnost*** $A = B$, která je definována konjunkcí $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$. Připomeňme, že prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

Operace s množinami

Průnik množin A, B definujeme jako množinu všech prvků, které jsou společné oběma množinám A, B. Průnik množin A, B označujeme $A \cap B$. Platí tedy

$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$. Dvě množiny A, B, pro něž platí $A \cap B = \emptyset$, nazýváme ***disjunktními množinami***.

Sjednocení množin A, B definujeme jako množinu, jejímiž prvky jsou právě všechny prvky množiny A a právě všechny prvky množiny B. Sjednocení množin A, B označujeme $A \cup B$. Platí tedy $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

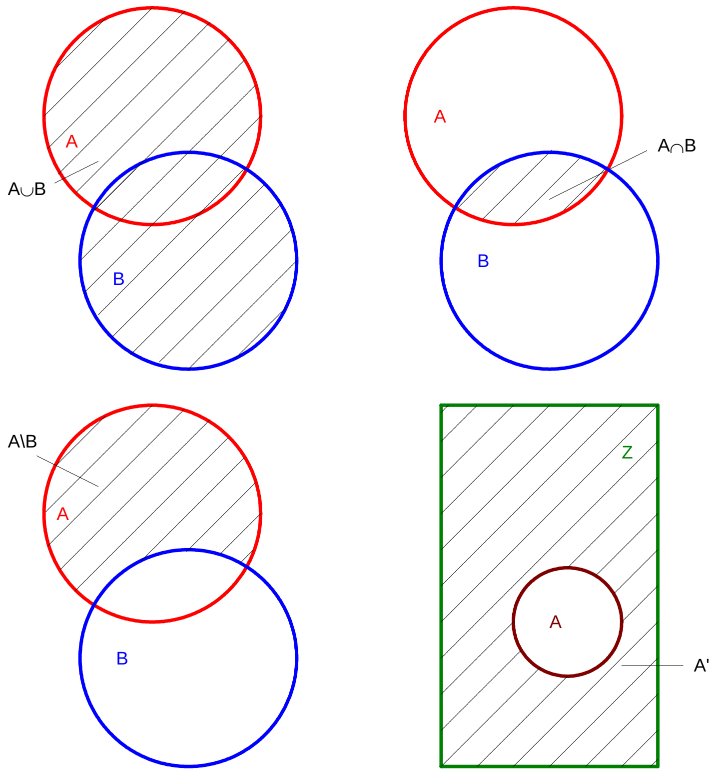
Rozdíl množin A, B v daném pořadí definujeme jako množinu všech prvků, které jsou prvky množiny A a nejsou prvky množiny B. Rozdíl množin A, B označujeme A - B nebo $A \setminus B$. Platí tedy $A - B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.

Doplněk množiny A ***v množině*** Z. Nechť $A \subset Z$. Doplňkem množiny A v množině Z nazýváme podmnožinu množiny Z, která obsahuje prvky, které nepatří do množiny A.

Označujeme A' a platí

$$A' = Z - A = \{x : (x \in Z) \wedge (x \notin A)\}.$$

Uvedené pojmy budeme ilustrovat na obr. 1.



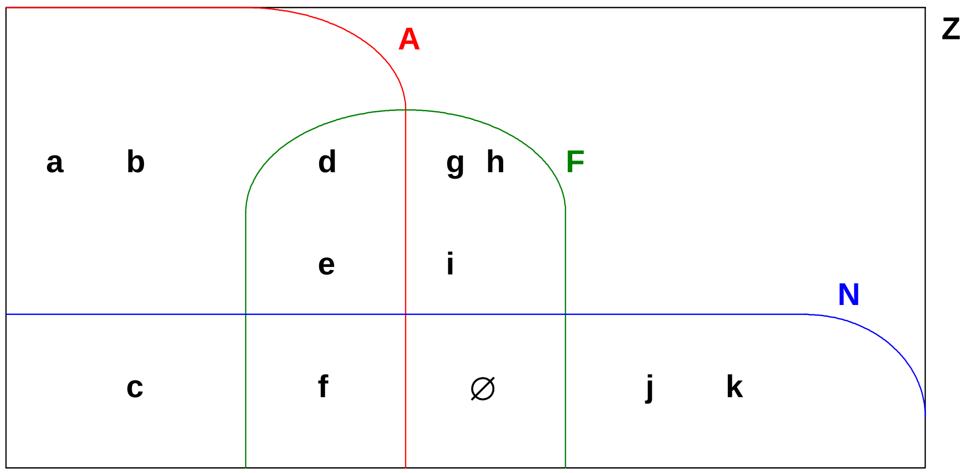
Obr. 1

Vennovy diagramy

Vztahy mezi množinami a operace s množinami znázorňujeme pomocí diagramů, ve kterých množiny představují kruhy, popř. jiné geometrické obrazce (např. obdélníky) a jejich části (viz obr. l, příklad 1, obr. 2).

Řešené úlohy

Příklad Diagram na obr. 2 znázorňuje množinu osob Z = {a, ... , k}, ovládajících cizí jazyky. A = {a, b, c, d, e, f} je množina lidí, kteří mluví anglicky, F = {d, e, f, g, h, i} je množina lidí, kteří mluví francouzsky, a lidé v množině označené N = {c, f, j, k} mluví německy. Určeme množinu W lidí, kteří mluví francouzsky a nemluví německy, a množinu Y lidí, kteří mluví všemi třemi jazyky.



Obr. 2

Řešení: Podle diagramu na obr. 2 platí $\boldsymbol{W} = F - N = \{d, e, g, h, i\}$,
$Y = A \cap F \cap N = \{f\}$.

Výklad

Uspořádanou dvojicí (a, b) prvků $a, b \in M$ nazýváme dvojici, u které záleží na pořadí prvků a, b, přičemž prvek a je první člen, prvek b druhý člen dvojice (a, b). Pro $a \neq b$ je $(a, b) \neq (b, a)$.

Kartézským součinem $A \times B$ neprázdných množin A, B (v tomto pořadí) nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a \in A$, $b \in B$.

Zapisujeme $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$.

Je-li alespoň jedna z obou množin A, B prázdná, potom $A \times B = \emptyset$.

Je-li $A = B$, nazveme součin $A \times A$ (druhou) kartézskou mocninou množiny A, označujeme A^2.

Řešené úlohy

Příklad Nechť $A = \{a, c\}$, $B = \{b, d, c\}$. Utvořme součiny $A \times B$, $B \times A$.

Řešení: $A \times B = \{(a, b), (a, d), (a, c), (c, b), (c, d), (c, c)\}$.

$B \times A = \{(b, a), (b, c), (d, a), (d, c), (c, a), (c, c)\}$.

Poznámka

1. *Kartézský součin $A \times B$ není komutativní operací, protože obecně platí $A \times B \neq B \times A$.*
2. *Obecně lze zavést kartézský součin $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ jako množinu všech uspořádaných n-tic $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$.*

   Je-li $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, budeme značit $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\text{-krát}} = A^n$.

Výklad

Binární relací mezi libovolnými neprázdnými množinami A, B nazýváme každou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$, tj. $R \subset A \times B$.

Je-li $R \subset A \times A$, nazveme relaci R **relací na množině** A.

Je-li R binární relace na množině A, $x, y \in A$, $(x, y) \in R$, říkáme, že prvek x je v relaci R s prvkem y a označujeme xRy. Jestliže $(x, y) \notin R$, píšeme $x\overline{R}y$.

Zápis xRy nazýváme ***přiřazením prvku y v relaci*** R ***k prvku x.***

Poznámka

Binární relaci $R \subset A \times B$, jejíž prvky (x, y) vyhovují dané výrokové formě $f(x, y)$, zapíšeme ve tvaru $R = \{(x, y) \in A \times B : f(x, y)\}$.

Řešené úlohy

Příklad Nechť **Q** je množina všech racionálních čísel a relace R = {(x, y) ∈ **Q** × **Q**: x + y ∈ **Z**} (**Z** je množina všech celých čísel). Zjistěme, zda $\frac{2}{3} R \frac{1}{7}$, $\frac{3}{8} R \frac{5}{8}$.

Řešení: Platí

$$\frac{2}{3}\,\overline{R}\,\frac{1}{7}, \text{ protože } \frac{2}{3}+\frac{1}{7} = \frac{17}{21} \notin \mathbf{Z},$$
$$\frac{3}{8}\,R\,\frac{5}{8}, \text{ protože } \frac{3}{8}+\frac{5}{8} = 1 \in \mathbf{Z}.$$

Výklad

Mezi důležité binární relace R v množině A patří relace ***ekvivalence*** a relace ***uspořádání***.

Relace ***ekvivalence*** splňuje podmínky:

P1: $\forall x \in A : xRx$ *reflexivnost,*

P2: $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$ *symetrie,*

P3: $\forall x, y, z \in A : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ *tranzitivnost.*

Relace ***uspořádání*** splňuje podmínky P1, P3 a podmínky:

P4: $\forall x, y \in A : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$ *antisymetrie,*

P5: $\forall x, y \in A : xRy \vee yRx$ *srovnatelnost.*

Řešené úlohy

Příklad Základním příkladem relace ekvivalence je relace R_m definovaná pro každé m ∈ **N** v množině **Z** (**N**, **Z** jsou po řadě množiny přirozených a celých čísel) tak, že pro každé x, y ∈ **Z** platí xR_my právě tehdy, když dělením číslem m dávají čísla x, y týž zbytek.

Výklad

Základním příkladem relace uspořádání v množině reálných čísel je uspořádání $\leq$ reálných čísel definované tak, že pro každé x, y $\in$ **R** (množina reálných čísel) platí $x \leq y$ právě tehdy, když číslo $y - x$ je nezáporné.

Znázornění relací

Relaci $R \subset A \times B$ znázorňujeme obdobně jako kartézský součin $A \times B$, kde A, B jsou podmnožiny reálných čísel, tedy v kartézské soustavě souřadnic v rovině (O, +x, +y).

Poznámka

V tomto případě říkáme, že jsme relaci R znázornili pomocí ***kartézského grafu****. Často však znázorňujeme relaci R pomocí tzv.* ***šachovnicového grafu*** *nebo* ***uzlového grafu****.*

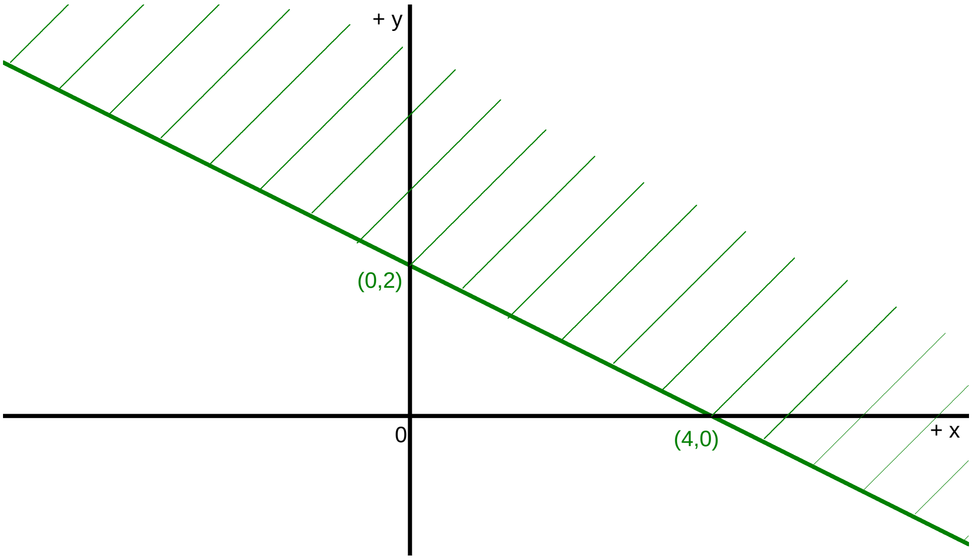
Řešené úlohy

Příklad Binární relaci $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + 2y - 4 = 0\}$ lze znázornit grafem přímky

$x + 2y - 4 = 0$ v rovině (O, +x, +y).

Příklad Polorovina znázorněná na obr. 3 je grafem binární relace

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + 2y - 4 \geq 0\}$.



Obr. 3

Výklad

Zobrazením množiny A ***do množiny*** B nazýváme relaci $F \subset A \times B$, pro kterou platí $F = \{(x, y) \in A \times B : \forall\, x \in A\ \exists!\ y \in B : (x, y) \in F\}$.

Relace F tedy přiřazuje každému prvku $x \in A$ právě jeden prvek $y \in B$ tak, že $(x, y) \in F$.

Zobrazení F zapisujeme $F : A \to B$. Množinu A nazýváme ***definičním oborem*** zobrazení F. Prvek $y \in B$ značíme často $F(x)$ a nazýváme jej ***obrazem vzoru*** $x \in A$ v zobrazení F, zapisujeme $x \to F(x)$.

Rovnost dvou zobrazení F, G, F = G platí právě tehdy, když F i G mají stejný definiční obor A a $F(x) = G(x)$ pro každé $x \in A$.

Řešené úlohy

Příklad Posloupnost čísel $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ můžeme chápat jako zobrazení $F : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$,

$x \to \frac{1}{x}$, tedy

$$F = \left\{(1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), \ldots\right\}.$$

Výklad

Zobrazením množiny A ***na množinu*** B nazýváme zobrazení $F \subset A \times B$, pro které platí

$F = \{(x, y) \in A \times B : \forall\, y \in B\ \exists\, x \in A : (x, y) \in F\}$,

tedy každé $y \in B$ je obrazem některého $x \in A$.

Řešené úlohy

Příklad Rozdělení výroků na pravdivé a nepravdivé je zobrazení F množiny všech výroků na množinu $\{0, 1\}$.

Výklad

Prostým zobrazením nazýváme zobrazení F množiny A do množiny B, pro které platí: $F = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B\ \forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in F : x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2\}$, tedy každý obraz $y \in B$ má nejvýše jeden vzor $x \in A$.

Poznámky

*1. Prosté zobrazení množiny A na množinu B se nazývá **vzájemně jednoznačné zobrazení**.*

*2. Říkáme, že množina A je **ekvivalentní** s množinou B, právě když existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B, popřípadě jsou-li obě množiny A, B prázdné, zapisujeme $A \sim B$.*

Řešené úlohy

Příklad Zobrazení $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to x^3$, které zapisujeme ve tvaru $y = x^3$, $x \in \mathbf{R}$, je vzájemně jednoznačné, protože ke každému $y \in \mathbf{R}$ existuje jediný vzor $\sqrt[3]{y} \in \mathbf{R}$.

Výklad

Operací (přesněji binární operací) na množině A nazýváme zobrazení $F : A \times A \to A$. Taková operace přiřazuje každé uspořádané dvojici $(x, y) \in A^2$ jednoznačně prvek

$z = F(x, y)$.

Příkladem operace je sčítání (respektive násobení) přirozených, celých, racionálních nebo reálných čísel.

Kontrolní otázky

1. Množinou rozumíme souhrn (soubor apod.) prvků, které:
   a) nemají žádnou společnou vlastnost,
   b) nemusí mít společnou vlastnost,
   c) mají tzv. charakteristickou vlastnost prvků dané množiny.
2. Tvrzení: „Jestliže každý prvek množiny A je prvkem množiny B“ definuje:
   a) $A \subset B$, b) $A \vee B$, c) $A \wedge B$.
3. Diagramy znázorňující vztahy mezi množinami a operacemi mezi nimi se nazývají
   a) Leninovy, b) Klemovy, c) Vennovy.
4. Množinu $M = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ nazveme:
   a) průnikem množin A, B,
   b) doplňkem množiny A v množině B,
   c) rozdílem množin A, B.

5. Je-li alespoň jedna z množin A, B prázdná, potom pro kartézský součin $A \times B$ množin A, B platí:

   a) $A \times B = B \times A$, b) $A \times B = A^2$, c) $A \times B = \emptyset$.

6. Platí-li pro každou množinu R a libovolné neprázdné množiny A, B vztah $R \subset A \times B$, nazveme množinu R:

   a) distanční relací, b) disjunktní množinou, c) binární relací.

7. Je sčítání přirozených čísel binární operací na množině N?

   a) ano, b) ne.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. c), 2. a), 3. c), 4. c), 5. c), 6. c), 7. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Utvořte všechny podmnožiny množiny M = {3, -4, 5}.

2. Stanovte, kolik podmnožin má množina A = {O, 1, 2, 3}, zobecněte pro případ, kdy množina A má n prvků.

3. Jsou dány množiny A = {1, 2, 4, 7, 11, 16}, B = {1, 3, 7, 13}, C = {1, 6, 11, 19}. Určete a) $A \cup B$, b) $B \cup C$, c) $A \cup B \cup C$, d) $A \cap B$ e) $A \cap C$, f) $A \cap B \cap C$, g) A - B.

4. Uvažte, zda a) množina úhlů v trojúhelníku je podmnožinou množiny trojúhelníků, b) množina prvočísel je podmnožinou množiny lichých čísel, c) množina lichých čísel je podmnožinou množiny prvočísel, d) množina rovnostranných trojúhelníků je podmnožinou množiny rovnoramenných trojúhelníků.

5. Je možné, aby někdy platilo a) A - B = A, b) $A - B = \emptyset$?

6. Určete prvky množin A, B, C, které jsou definovány ve tvaru $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : (x - 1)^2 = 0\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} : x^3 - 2x^2 - x = -2\}$.

7. Najděte množinu, kterou tvoří všechna řešení rovnice a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$, b) $\sin \pi x = 0$.

8. Základní množina je Z = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} a množiny A = {1, 3, 5, 7}, B = {2, 4, 6, 8}, C = {3, 4, 7, 8}. Určete a) $A \cup B'$, b) $A' \cap B$, c) $B' \cap C$.

9. Užitím Vennových diagramů rozhodněte, zda pro libovolné podmnožiny dané základní množiny Z platí: a) $(A \cap B') \cup B = A \cup B$, b) $A' \cup B' = (A \cup B)'$, c) $C' \cap (A \cap B) = (A \cap C') \cap (C' \cap B)$.

10. Ve škole byla sestavena statistika zájmové činnosti žáků v tělesné výchově. Ve skupině označené L (lehká atletika) je 34 žáků, ve skupině P (plavání) je 32 žáků a ve skupině O (odbíjená) je 25 žáků. 9 žáků je v lehkoatletické i plavecké skupině, 5 žáků je činných v lehké atletice a v odbíjené, 7 žáků je ve skupině odbíjené a plavání, 2 žáci jsou ve všech třech skupinách a 34 žáků se neúčastní zájmové tělovýchovné činnosti. Nakreslete Vennův diagram podle uvedených údajů a určete celkový počet žáků ve škole.

11. Jsou dány množiny $P = \{1, 2, 3\}$ a $Q = \{a, b\}$. Utvořte kartézské součiny a) $P \times Q$, b) $Q \times P$, c) $P \times P$, d) $Q \times Q$.

12. Nechť $A = \{-1, 2, 5, 7\}$, $B = \{0, 2\}$, určete $A \times B$.

13. V rovině (O, +x, +y) zakreslete kartézský součin $A \times B$, jestliže $A = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : -2 < x \leq 3\}$.

14. Je dána množina $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, výčtem prvků zapište binární relaci $B = \{(x, y) \in A \times A,\ x > y\}$.

15. V rovině (O, +x, +y) zakreslete binární relace: a) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < y\}$, b) $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, c) $P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x y < 1\}$.

16. Nechť $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Rozhodněte, které z následujících množin definují zobrazení množiny M do $\mathbf{R}$: $M_1 = \{(3, 3), (1, 8), (4, 3), (2, 3)\}$, $M_2 = \{(1, 5), (4, \pi), (1, 8), (2, 4)\}$, $M_3 = \{(2, 3), (1, 3), (3, 5), (5, 7)\}$, $M_4 = \{(3, 4), (2, -2), (1, \pi), (4, 0)\}$.

17. Rozhodněte, zda daná zobrazení $F: A \to B$ jsou např. zobrazení do množiny B, na množinu B, zobrazení prostá, zobrazení vzájemně jednoznačná: a) F(x) je obec, v níž má x trvalé bydliště, A je množina všech obyvatel ČR, B množina všech obcí v ČR, b) F(x) je počet obyvatel státu x, A je množina všech států, B je množina všech přirozených čísel, c) F(x) je manželka muže x, A je množina všech ženatých mužů, B množina všech provdaných žen.

18. Každý, kdo v šatně odevzdá plášť, dostane lístek s určitým číslem. Popište tuto situaci jako zobrazení množiny do množiny a vysvětlete, ve kterém případě by šlo o vzájemně jednoznačné zobrazení množiny na množinu.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. Prázdná množina $\emptyset$, tři podmnožiny o jednom prvku, tři podmnožiny o dvou prvcích, daná množina M.

2. 16; 2^n.

3. a) {1, 2, 3, 4, 7, 11, 13, 16}, b) {1, 3, 6, 7, 11, 13, 19}, c) {1, 2, 3, 4, 6, 7, 11, 13, 16, 19}, d) {1, 7}, e) {1, 11}, f) {1}, g) {2, 4, 11, 16}.

4. **a)** Ne, **b)** ne, **c)** ne, **d)** ano.

5. **a)** Ano, je-li $A \cap B = \emptyset \vee B = \emptyset$, **b**) ano, je-li $A \subset B$.

6. A = {-1, 1}, B = {1}, C = {-1, 1, 2}.

7. **a)** Všechna lichá celá čísla, **b)** všechna celá čísla.

8. **a)** {1, 3, 5, 7}, **b)** {2, 4, 6, 8}, **c)** {3, 7}.

9. Platí **a)**, **c)**.

10. 106.

11. $P \times Q$ = {(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)}, $Q \times P$ = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)}, $P \times P$ = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}, $Q \times Q$ = {(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)}.

12. {(-1, 0), (-1, 2), (2, 0), (2, 2), (5, 0), (5, 2), (7, 0), (7, 2)}.

13. Obdélník, dvě jeho strany do množiny $A \times B$ nepatří.

14. B = {(-1, -2), (0, -1), (0, -2), (1, 0), (1, -1), (1, -2), (2, 1), (2, 0), (2, -1), (2, 2)}.

15. **a)** Dolní polorovina omezená přímkou $y = x$, jež do množiny nepatří, **b)** vnitřek kruhu, **c)** část roviny mezi osami souřadnic a větvemi hyperboly $xy = 1$.

16. M_1 a M_4.

17. **a)** Zobrazení na množinu, **b)** pravděpodobně prosté, **c)** vzájemně jednoznačné ve společnosti, v níž je uzákoněna monogamie.

18. Označme A množinu plášťů, B množinu lístků s čísly. V případě, kdy šatna není plně obsazena, jde o zobrazení množiny A do množiny B, v němž každému vzoru a je přiřazen právě jeden obraz b. Je-li šatna plně obsazena, jde o vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B.

Kontrolní test

1. Určete, která z odpovědí obsahuje všechny podmnožiny množiny $A = \{1, 4\}$.

   a) $\emptyset$, b) $\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{1, 4\}$, c) $\emptyset, \{1, 4\}$.

2. Stanovte, kolik podmnožin má množina: $A = \{2, 4, 16, 64\}$.

   a) 2^4, b) 2^2, c) 5.

3. Najděte množinu, kterou tvoří všechna řešení rovnice $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$:

   a) všechna lichá celá čísla,

   b) všechna reálná čísla,

   c) všechna celá čísla.

4. Určete $A \cup B'$, je-li $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, kde základní množina je

   $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

   a) $\{1,3,5,7\}$, b) $\{2,4,6,8\}$, c) $\{1,3,5,7\}$.

5. V rovině $(0,+x,+y)$ zakreslete binární relaci $A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 4\}$

   a) vnitřek kruhu,

   b) vnitřek elipsy,

   c) nelze zobrazit.

6. Rozhodněte užitím Vennových diagramů, zda pro libovolné podmnožiny dané základní množiny Z platí: $(A \cap B') \cup B = A \cup B$.

   a) ano, b) ne, c) nelze rozhodnout.

Výsledky testu

1. b), 2. a), 3. a), 4. a), 5. a), 6.a)

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 4 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.2. znovu.